6.2 Geführte Moden von Stufenindexfasern (skalar)

Tafelarbeit

Übergang zu Normalform:

Substitution
$u(r)=y(x)$, $x=k_t r$
$n = l$

Kern: $$x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} + x \frac{d y}{d x} + (x^2 - n^2) y = 0.$$ (Bessel'sche Differentialgl.)

Mantel: $$x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} + x \frac{d y}{d x} - (x^2 + n^2) y = 0.$$ (modifizierte Bessel'sche Differentialgl.)

Lösungen sind Besselfunktionen bzw. modifizierte Besselfkt.

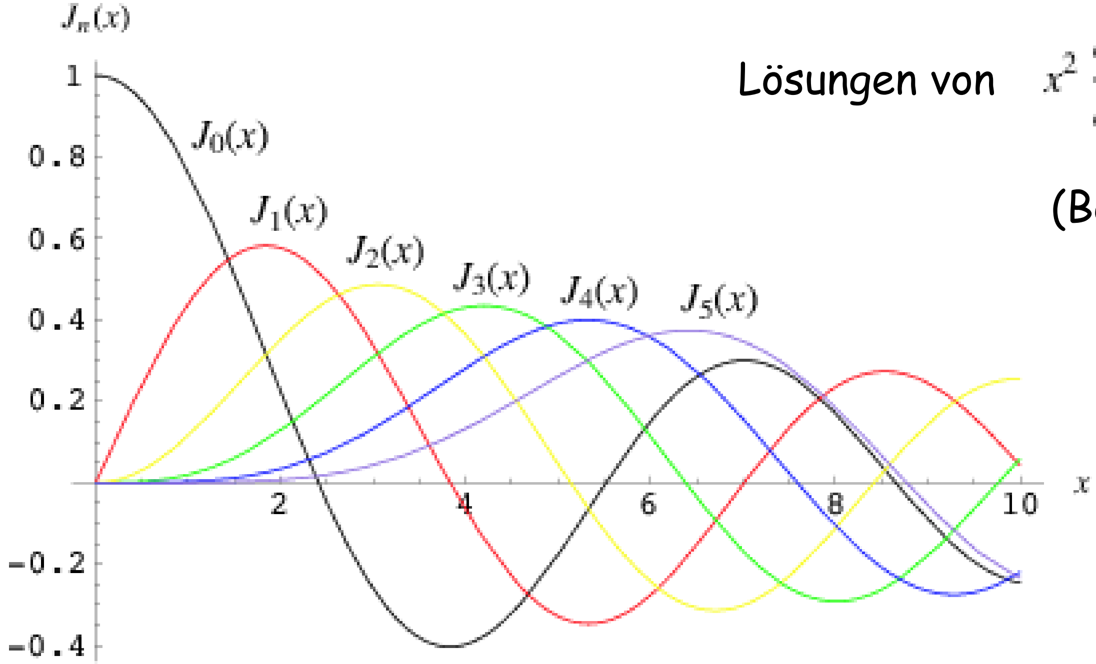
Wo finde ich was über diese wichtigen Funktionen?

M. Abramowitz and I. A. Stegun
Handbook of mathematical functions

im web: http://www.math.sfu.ca/~cbm/aands/

und in Wolfram's wunderbarer MathWorld

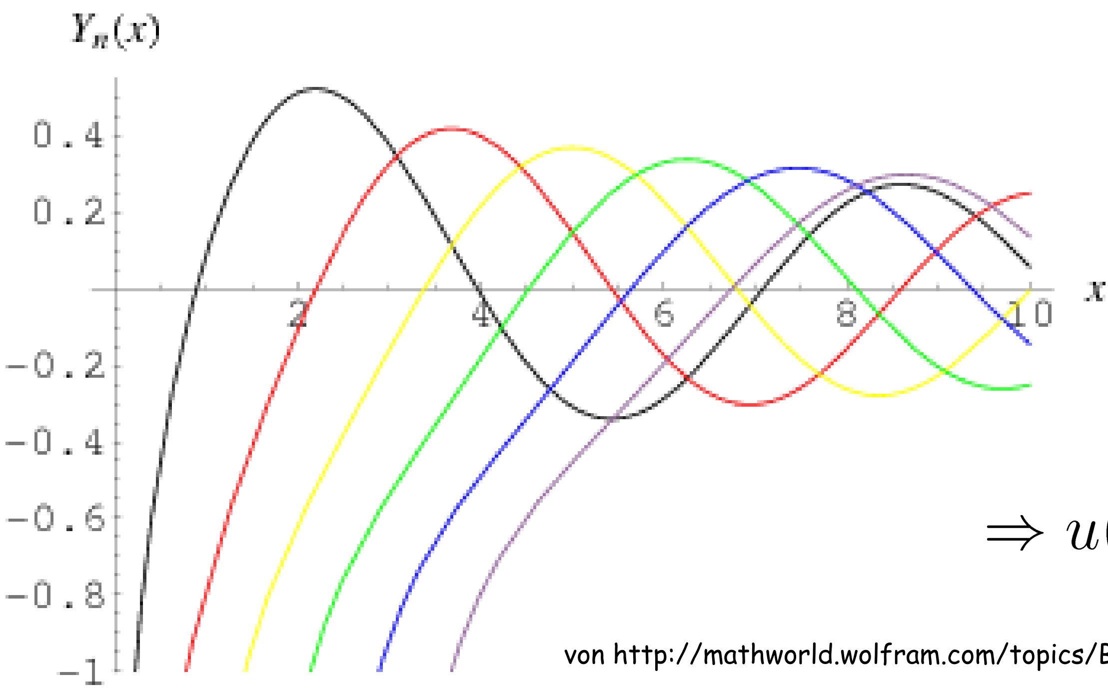
http://mathworld.wolfram.com/topics/BesselFunctions.html



Lösungen von $x^2 \frac{d^2 y}{d x^2} + x \frac{d y}{d x} + (x^2 - n^2) y = 0.$

(Bessel'sche Differentialgl.)

Besselfunktionen erster Art

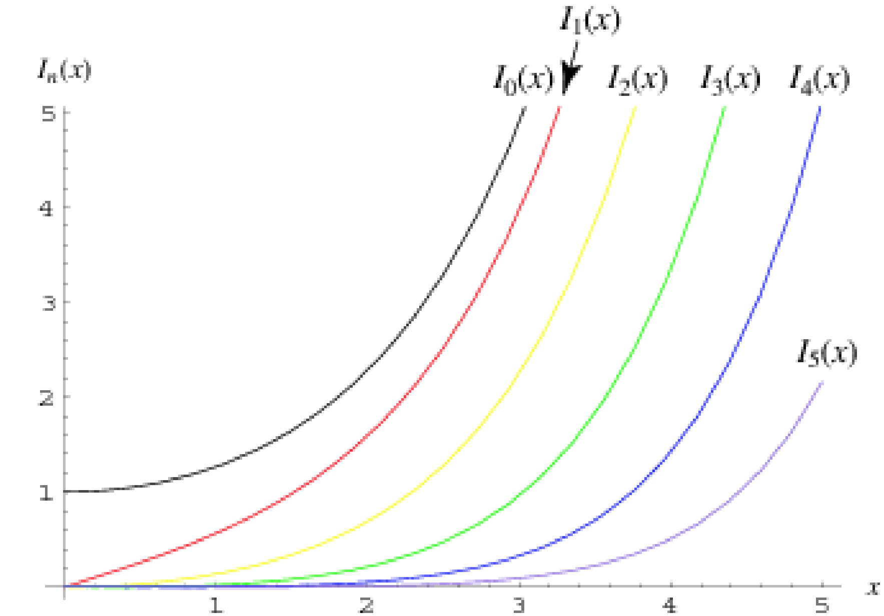


Besselfunktionen zweiter Art

Singularität bei x=0;
deshalb zu verwerfen

$$\Rightarrow u(r) = J_l(k_t r) \text{ im Kern}$$

von http://mathworld.wolfram.com/topics/BesselFunctions.html

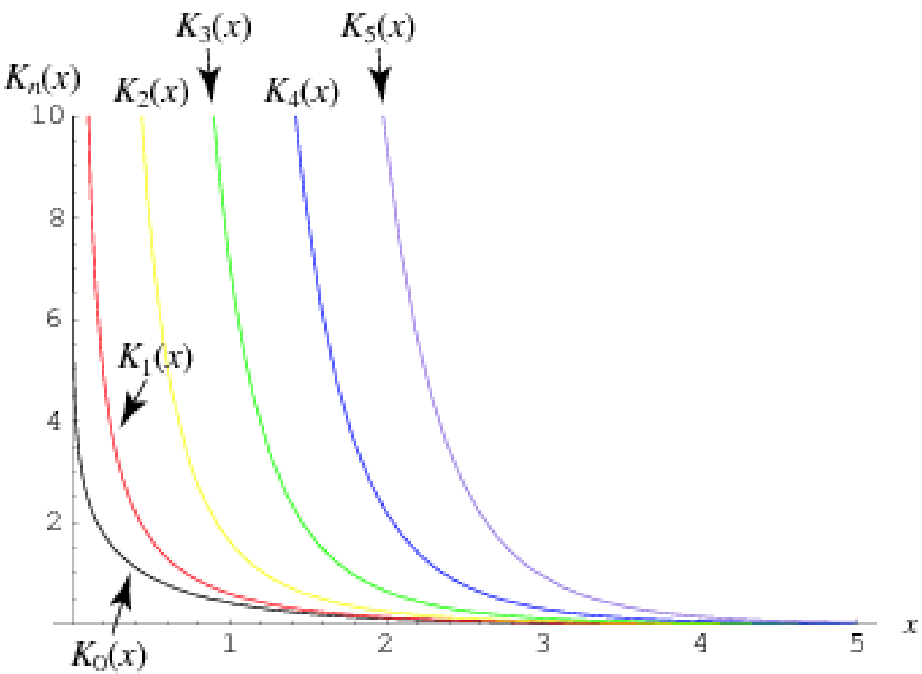


Lösungen von $x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} - (x^2+n^2)y = 0.$

(modifizierteBessel'sche Diffgl.)

modifizierte Besselfkt. erster Art

exponentiell divergent bei großen x;
also zu verwerfen



modifizierteBesselfkt. zweiter Art

exponentiell abklingend bei großen x;
also geeignete Lösung

$$\Rightarrow u(r) \sim K_l(k_t r) \text{ im Mantel}$$

von http://mathworld.wolfram.com/topics/BesselFunctions.html

grafische Darstellung Eigenwertgleichung Stufenindexfaser

aus ST

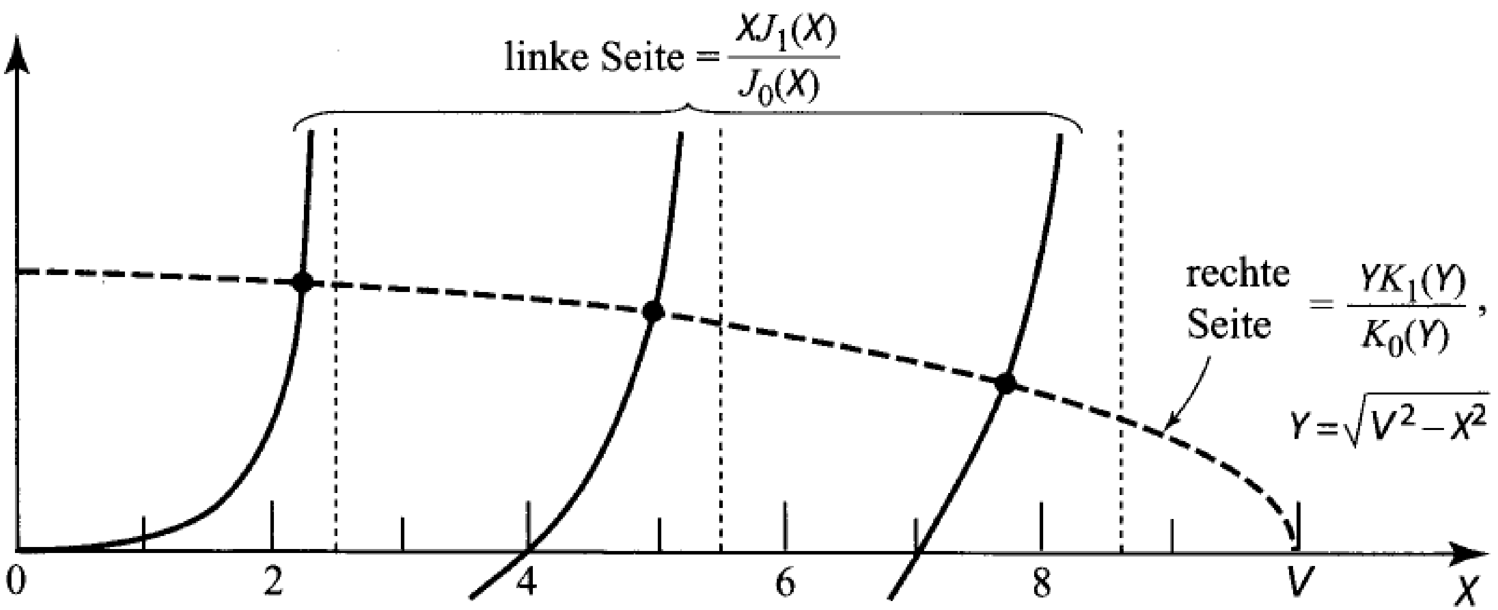


Abbildung 9.11 Graphische Konstruktion zur Lösung der charakteristischen Gleichung (9.19). Die linke und rechte Seite der Gleichung werden als Funktionen von X aufgetragen; die Schnittpunkte sind die Lösungen. Die linke Seite hat mehrere Zweige, die die Abszisse bei den Wurzeln von $J_{l\pm1}(X)$ schneiden. Die rechte Seite schneidet jeden Zweig einmal und trifft die Abszisse bei $X = V$. Die Zahl von Moden ist daher gleich der Zahl der Wurzeln von $J_{l\pm1}(X)$, die kleiner als V ist. In dieser Auftragung ist $l = 0$ und $V = 10$, und entweder die positiven oder die negativen Vorzeichen in Gl. (9.19) können verwendet werden.

Übungsaufgabe 04 (zum 20.11.08)

Moden. Eine Stufenindexfaser hat den Radius $a = 5\ \mu\text{m}$, einen Brechungsindex $n_1 = 1.45$ des Kerns und eine relative Brechungsindexänderung $\Delta = 0.002$. Bestimmen Sie die kleinste Wellenlänge λ_k, für die die Faser ein Einmodenwellenleiter ist. Geben Sie die Indizes (l, m) aller geführten Moden an, wenn die Wellenlänge auf $\lambda_\mathrm{k}/2$ geändert wird.

aus ST:

Tabelle 9.1 V-Parameter für LP_{lm}-Moden niedriger Ordnung.[a]

l	$m = 1$	2	3
0	0	3.832	7.016
1	2.405	5.520	8.654

[a] Die Grenzwerte der $l = 0$-Moden liegen bei den Wurzeln von $J_{-1}(X) = -J_1(X)$. Die $l = 1$-Moden werden an den Wurzeln von $J_0(X)$ abgeschnitten usw.