APPLICATION DE LA STATISTIQUE AU TRAITEMENT DES DONNÉES AU LABORATOIRE D'ANALYSES ET EN FABRICATION

I/ INTRODUCTION

L'utilisation de la statistique pour le traitement des données est devenue fondamentale au laboratoire d'analyses et dans l'atelier de fabrication. Les exigences de l'assurance qualité rendent désormais obligatoires la connaissance d'un certain nombre de notions statistiques simples.

Ce document vise à répondre à un certain nombre de problèmes sur lesquelles vont s'articuler les différentes parties:

- définir les paramètres statistiques d'une série de données
- représenter une distribution de fréquences sous forme d'un histogramme normalisé
- définir les caractéristiques d'une loi normale et examiner ses limites
- déterminer si une mesure peut être considérée comme aberrante
- déterminer l'intervalle de confiance d'une mesure et prévoir comment l'améliorer
- envisager les risques pris dans un test statistique
- réaliser les tests statistiques de base et montrer leurs nombreux domaines d'application
- prendre en compte la puissance d'un test statistique
- examiner si une corrélation existe entre deux grandeurs physico-chimiques

On définit maintenant quelques notions générales :

- une série statistique est une suite d'observations individuelles, donc par exemple une série de mesures.
- un échantillon correspond à un nombre fini de mesures : il s'oppose à une population pour laquelle un nombre infini d'observations expérimentales devrait être réalisé.
- en statistiques une différence fondamentale existe entre une population de données dont on cherche à déterminer les caractéristiques et un échantillon qui correspond à un effectif limité de données : on cherchera donc à estimer des résultats sur une population à partir d'un échantillon. Le problème se pose de savoir dans quelle mesure les données recueillies sur l'échantillon peuvent renseigner sur la population d'origine.

- les erreurs suivantes ne sont pas du ressort d'une étude statistique :

    - erreurs systématiques dues à l'opérateur : par exemple répétition d'une erreur de préparation d'une solution due à un manque de formation

- erreurs systématiques dues à l'instrument : par exemple décalage d'une valeur de pH à cause d'une solution étalon polluée.
- erreurs grossières: par exemple valeurs aberrantes obtenues en cas d'utilisation d'un mauvais réactif

Toutes ces erreurs doivent être éliminées au préalable avant d'effectuer une étude statistique valable.

II/ PARAMETRES STATISTIQUES D'UNE SÉRIE STATISTIQUE

Une série statistique peut se caractériser par 2 grands types de paramètres:

- **paramètres de position :** ils donnent l'ordre de grandeur des observations et sont liés à la tendance centrale de la distribution.
- **paramètres de dispersion :** ils montrent la manière dont les observations fluctuent autour de la tendance centrale.

On trie dans l'ordre croissant les n valeurs x_i : x_1, x_2 …x_{n-1}, x_n

1/ Paramètres de position

- **médiane :** valeur de la variable telle qu'une moitié des valeurs lui soit supérieure ou égale et l'autre moitié des valeurs lui soit inférieure ou égale. Deux cas apparaissent suivant la parité de n.

n impair : $\boxed{\text{médiane} = x_{\frac{n+1}{2}}}$ *n pair :* $\boxed{\text{médiane} = \frac{1}{2}\cdot\left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1}\right)}$

- **moyenne** : n : effectif total $\boxed{\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}}$

La moyenne est très sensible aux valeurs extrêmes.

2/ Paramètres de dispersion

- **quartiles :** valeurs Q_1, Q_2 et Q_3 de la grandeur mesurée qui partagent la série statistique en 4 parties d'effectifs à peu près identiques.

Q_2 est la médiane. Le calcul de Q_1 et Q_3 diffère légèrement suivant les auteurs ou les logiciels. Par exemple EXCEL et MINITAB ne fournissent pas exactement les mêmes valeurs. Ici on donne la méthode de détermination de MINITAB.

On calcule $\frac{n+1}{4}$ pour le rang de Q_1 et $3\cdot\left(\frac{n+1}{4}\right)$ pour le rang de Q_3 ; si ces grandeurs ne sont pas des entiers, les quartiles ne sont donc pas des valeurs de la distribution. On réalise alors une interpolation.

- **étendue interquartile :** intervalle contenant la moitié de la population autour de la médiane c'est à dire $Q_3 – Q_1$
- **étendue R :** $\boxed{R = x_{max} - x_{min}}$

- **écart-type σ' :** le plus utilisé des paramètres de dispersion

L'étendue est beaucoup plus facile à calculer mais elle donne une valeur très imprécise de la "largeur de la répartition" quand le nombre de valeurs est supérieur à 10. En effet elle ne prend en compte que les deux valeurs extrêmes. L'écart-type est beaucoup plus représentatif mais pour l'utiliser dans les cartes de contrôles en production il faut alors plutôt prévoir un calcul automatique.

$$\boxed{\sigma' = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}}$$

- **variance σ'^2 :** il s'agit de la moyenne des carrés des écarts à la moyenne.

- **coefficient de variation CV :** il représente une sorte d'écart-type relatif pour comparer les dispersions indépendamment des valeurs de la variable. Il s'exprime souvent en pourcentage.

$$\boxed{CV = \frac{\text{écart type}}{\text{moyenne}}}$$

Le coefficient de variation permet de comparer notamment la précision de différents dosages effectués avec le même appareil. Dans l'exemple suivant tiré d'un laboratoire d'analyses médicales, on analyse le taux de prothrombine dans le sang (exprimé en %) ; un contrôle est réalisé sur deux valeurs de la gamme de dosage (valeur basse et valeur haute). On s'aperçoit que la comparaison de l'écart-type amène à une conclusion fausse : la méthode est en fait plus précise pour des valeurs hautes du taux de prothrombine.

Taux de prothrombine	moyenne	écart-type	CV
Contrôle valeur basse	**38,3**	**3,13**	**8,2 %**
Contrôle valeur haute	**95,9**	**5,28**	**5,5 %**

3/ Autre représentation des données : "la boîte à moustaches"

Les boîtes à moustaches permettent de comparer visuellement deux échantillons sur des critères de forme, de dispersion et de centrage des données.

- la bordure inférieure de la boîte représente le premier quartile (Q_1) et la bordure supérieure représente le troisième quartile (Q_3). La portion du diagramme comprise dans la boîte représente donc l'étendue interquartile ou la moitié centrale (50 %) des observations.

- la ligne horizontale qui traverse la boîte représente la médiane des données.

- les lignes qui sortent de la boîte sont appelées moustaches. Les moustaches s'étendent vers l'extérieur pour indiquer à, leurs extrémités la valeur la plus basse et la valeur la plus haute dans la série (à l'exception des valeurs aberrantes, voir **IV**).

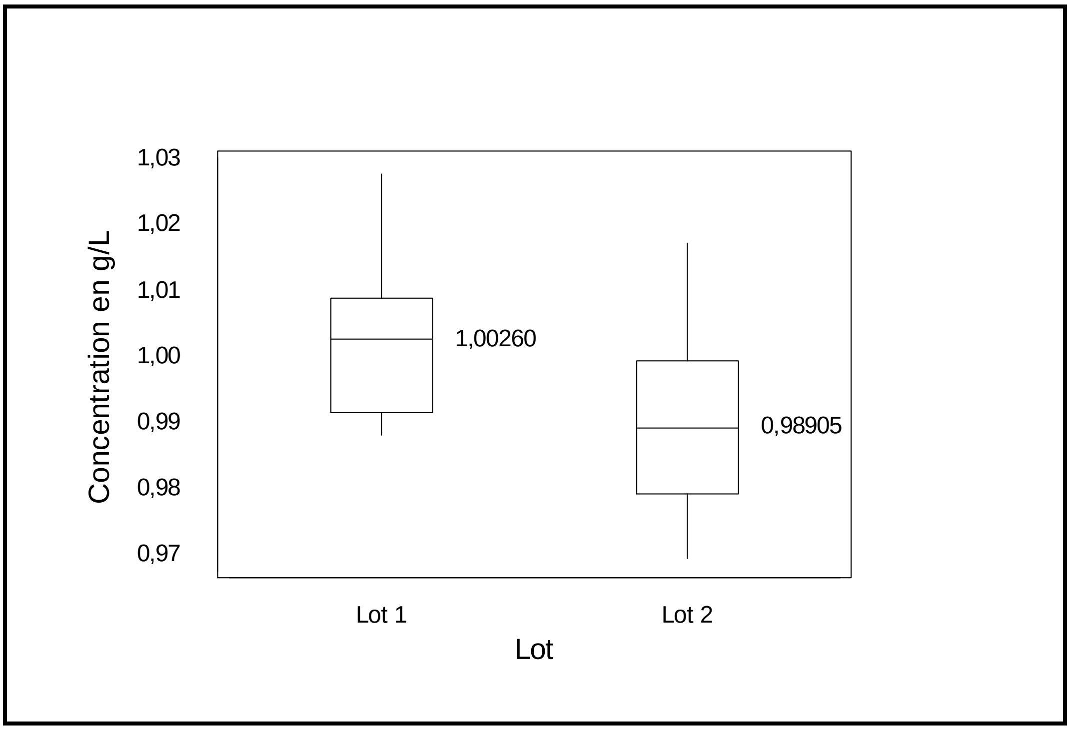
La boîte à moustaches permet aussi d'évaluer la symétrie des données :

- lorsque les données sont symétriques, la ligne médiane se situe à peu près au milieu de la boîte interquartile et les moustaches sont de la même longueur.

- si les données sont asymétriques, il se peut que la médiane ne tombe pas au milieu de la boîte interquartile et une moustache peut être nettement plus longue que l'autre.

application 1 : *on considère deux lots de solutions étalons en ions nickel II. On analyse par spectrophotométrie 16 flacons de chaque lot qu'on souhaite comparer. A partir des concentrations du tableau suivant, on réalise une boîte à moustaches pour chaque lot.*

Lot 1	*1,0047*	*1,0089*	*0,9922*	*0,9880*	*1,0120*	*0,9932*	*1,0005*	*1,0089*
	0,9911	*1,0057*	*0,9901*	*1,0277*	*1,0120*	*0,9880*	*0,9995*	*1,0057*
Lot 2	*0,9807*	*0,9713*	*0,9984*	*0,9995*	*0,9786*	*0,9828*	*0,9692*	*0,9922*
	0,9838	*0,9911*	*1,0099*	*1,0172*	*1,0068*	*0,9870*	*0,9723*	*0,9943*



Le lot 2 a une concentration moyenne plus faible que le lot 1; l'examen des boîtes interquartiles montre une répartition plus symétrique des données du lot 2, au moins dans la partie centrale de la distribution.

Le calcul des quartiles effectués à l'aide de MINITAB montre les résultats suivants :

Lot	***Q_1***	***Q_2***	***Q_3***
Lot 1	*0,9914*	*1,0026*	*1,0089*
Lot 2	*0,9791*	*0,9891*	*0,9992*

Pour obtenir ces résultats il faut classer les 16 valeurs de chaque lot. Pour le lot 1, on obtient la médiane Q_2 avec la relation donnée plus haut :

$$Q_2 = \frac{1}{2}\cdot\left(x_{\frac{16}{2}} + x_{\frac{16}{2}+1}\right) = \frac{1}{2}\cdot(x_8 + x_9) = 0{,}5\cdot(1{,}0005 + 1{,}0047) = 1{,}0026$$

Pour le quartile Q_1, l'application de la relation $\frac{n+1}{4}$ *pour déterminer le rang entraîne une valeur de rang de* $\frac{16+1}{4} = 4{,}25$ *qui n'est pas entière. Donc Q_1 s'obtient par interpolation entre les valeurs x_4 et x_5 soit 0,9911 et 0,9922.*

Donc $Q_1 = 0{,}9911 + (4{,}25 - 4)\cdot(0{,}9922 - 0{,}9911) = 0{,}9914$.

III/ REPRESENTATION SOUS FORME D'HISTOGRAMME

Pour un nombre élevé de mesures ou s'il y a plusieurs valeurs identiques, on regroupe parfois les valeurs de la série statistique étudiée en classes. Une distribution de fréquences est un tableau des fréquences associées à ces classes.

On doit noter néanmoins qu'il est préférable de calculer les paramètres statistiques à partir des valeurs individuelles plutôt qu'à partir des valeurs groupées en classes car on commet forcément une erreur en remplaçant toutes les valeurs individuelles d'une classe par le centre de la classe.

Un histogramme est une représentation graphique dans laquelle les rectangles représentés ont des largeurs proportionnelles aux amplitudes des classes et des aires proportionnelles aux fréquences de ces classes. L'histogramme permet de visualiser rapidement des données.

Pour une représentation correcte d'un histogramme, il faut surtout éviter d'utiliser un nombre de classes mal adapté. Des règles régissent la construction des histogrammes.

- **nombre de classes k :** $\boxed{k \approx \sqrt{n}}$ avec n le nombre total de mesures.

Généralement on ne dépasse pas 20 classes.

- **intervalle de classe h :** $\boxed{h \approx \frac{R}{k}}$ arrondi au multiple immédiatement supérieur de la résolution de mesure où R est l'étendue de mesure.

- **limite inférieure de la première classe :** $\boxed{x_{min} - \frac{1}{2} \text{ résolution de mesure}}$

application 2 : *on mesure à l'intérieur d'une cuve les valeurs de pH en début de précipitation pour 60 cristallisations d'un sulfure métallique. Les valeurs sont reportées dans le tableau suivant. Un histogramme est ensuite tracé.*

4,62	*4,45*	*5,08*	*4,83*	*4,74*	*4,68*
4,74	*4,59*	*4,77*	*4,67*	*5,08*	*4,79*
5,03	*5,20*	*4,74*	*4,96*	*4,47*	*4,60*
4,72	*4,80*	*4,43*	*4,81*	*4,73*	*4,83*
4,96	*4,97*	*4,88*	*4,68*	*4,75*	*4,79*
4,57	*4,98*	*4,84*	*4,43*	*4,35*	*5,11*
4,68	*4,30*	*5,20*	*4,92*	*4,55*	*4,91*
5,17	*4,61*	*4,56*	*5,00*	*4,63*	*4,71*
4,84	*5,07*	*4,88*	*4,70*	*4,63*	*4,85*
4,90	*4,53*	*4,67*	*4,79*	*4,69*	*4,43*

Le nombre de classe k est: $k = \sqrt{60} \approx 8$

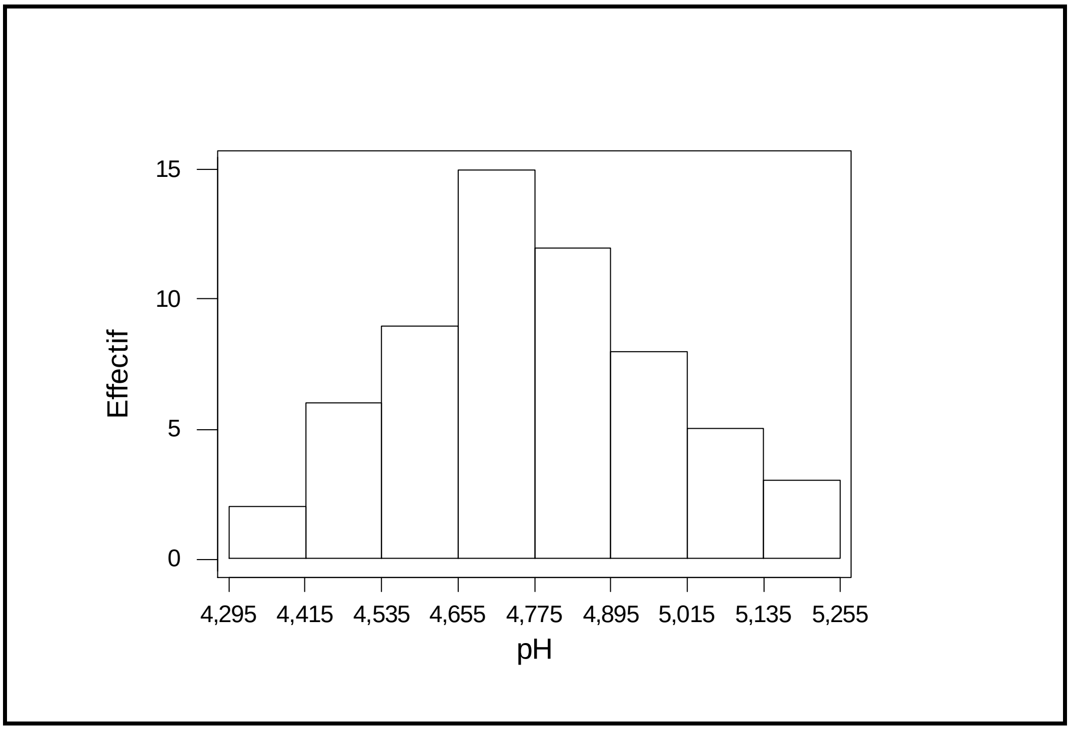
L'étendue R est: $R = 5{,}20 - 4{,}30 = 0{,}90$

L'intervalle de classe h est: $h = \frac{0{,}90}{8} \approx 0{,}12$ *en arrondissant au multiple immédiatement supérieur de la résolution de mesure (0,01 ici).*

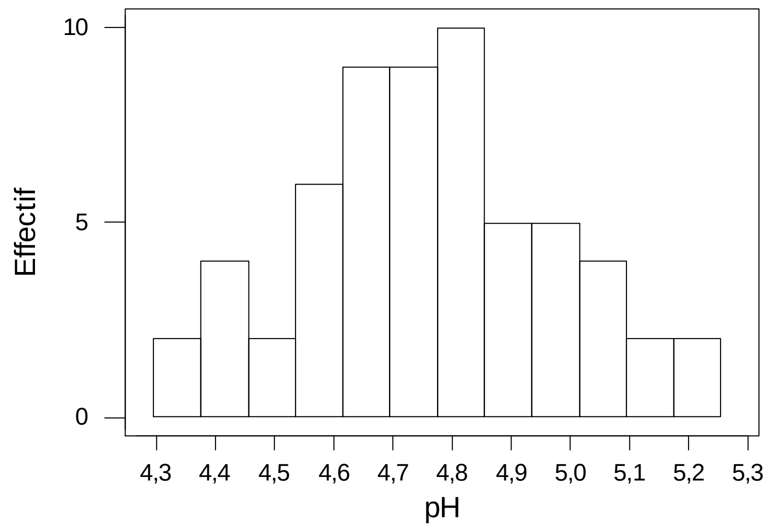
La limite inférieure de première classe est 4,30 – 0,5 . 0,01 = 4,295.

On en déduit alors le tableau suivant des classes et effectifs.

Intervalle de classe	*Effectif de la classe*
4,295 – 4,415	*2*
4,415 – 4,535	*6*
4,535 – 4,655	*9*
4,655 – 4,775	*15*
4,775 – 4,895	*12*
4,895 – 5,015	*8*
5,015 – 5,135	*5*
5,135 – 5,255	*3*

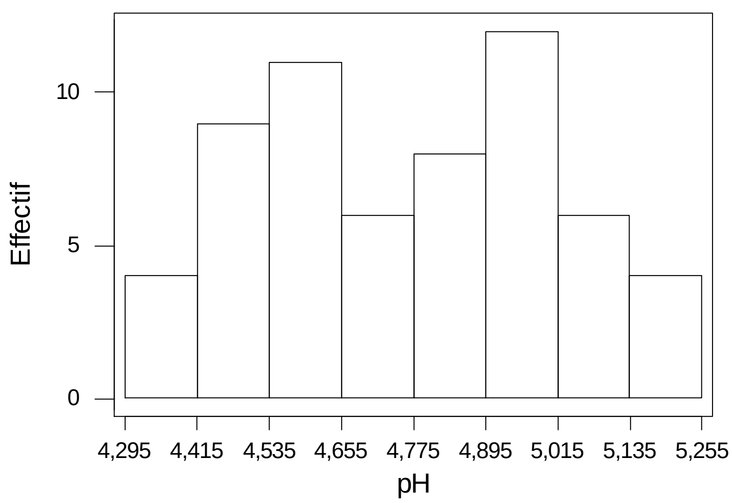


Dans le cas où d'une utilisation d'un nombre de classes plus élevé (12 par exemple), on obtiendrait l'histogramme suivant ce qui montre bien l'importance du nombre de classes dans l'aspect de l'histogramme.

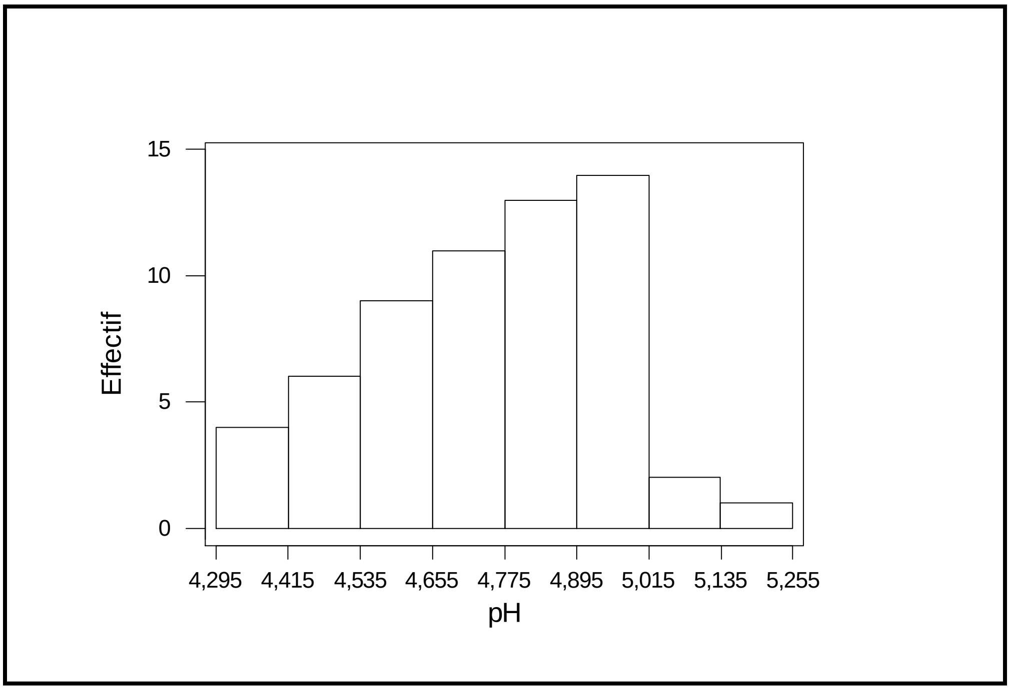


Les histogrammes permettent aussi de relever des anomalies:

- **histogramme bimodal :** il révèle une population hétérogène composé d'un mélange de plusieurs populations. Ainsi on peut déceler dans une production livrée un mélange de 2 lots. Dans l'exemple précédent un facteur expérimental non contrôlé pouvant prendre deux valeurs (par exemple deux lots de matière première) entraîne deux "populations de pH".



- **histogramme tronqué aux extrémités :** il peut révéler une suppression d'un certain nombre de valeurs expérimentales extrêmes sur un document de fabrication … afin par exemple de ne pas "sortir" des limites de contrôles !



IV/ TEST DE VALEURS ABERRANTES

Les boîtes à moustaches peuvent également aider à repérer les valeurs aberrantes. Pour le logiciel MINITAB une valeur est considérée comme aberrante si la valeur absolue de l'écart avec Q_1 ou Q_3 est supérieure à plus de 1,5 fois l'étendue interquartile.

L'examen des valeurs aberrantes avec les boîtes à moustache est donc possible mais ce n'est qu'une méthode "qualitative".

Plusieurs tests sont utilisés pour détecter des valeurs aberrantes. Le test de Dixon examine si la valeur soupçonnée d'être aberrante peut appartenir avec un risque donné à une population normale : il exige donc une distribution normale des valeurs. On présente le test de Dixon pour la recherche d'une seule valeur aberrante.

On commence par classer dans l'ordre croissant les valeurs de x_1 à x_n et suivant la valeur aberrante étudiée on détermine les fonctions discriminantes r_1 et r_2.

	x_1 est douteux	**x_n est douteux**
n ≤ 10	$r_1 = \dfrac{x_2 - x_1}{x_n - x_1}$	$r_1 = \dfrac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$
n > 10	$r_2 = \dfrac{x_3 - x_1}{x_{n-2} - x_1}$	$r_2 = \dfrac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_3}$

Les valeurs des tables pour r_1 et r_2 sont les valeurs limites (aux risques α de 1 et 5 %) pour considérer que les valeurs appartiennent à des populations normales. Si les valeurs calculées sont supérieures alors une des valeurs est aberrante … ou la population n'est pas normale.

De toute manière un résultat ne doit jamais être rejeté sans recherche d'une explication de l'anomalie.

<u>remarque :</u> dans le cas de deux valeurs douteuses la méthode est légèrement différente.

- si on suspecte x_1 et x_n d'être aberrantes, alors on applique successivement le test précédent aux deux valeurs avec la fonction r_2. n doit être supérieur à 10 pour appliquer le test.

- si on suspecte les deux valeurs les plus élevées (x_{n-1} et x_n) ou les deux plus faibles (x_2 et x_1), on applique le test à x_{n-1} ou x_2 sans s'occuper de x_n ou de x_1. Les fonctions discriminantes r_2' sont les suivantes:

$$\boxed{r_2' = \frac{x_4 - x_2}{x_{n-2} - x_2}} \text{ pour } x_2 \qquad \boxed{r_2' = \frac{x_{n-1} - x_{n-3}}{x_{n-1} - x_3}} \text{ pour } x_{n-1}$$

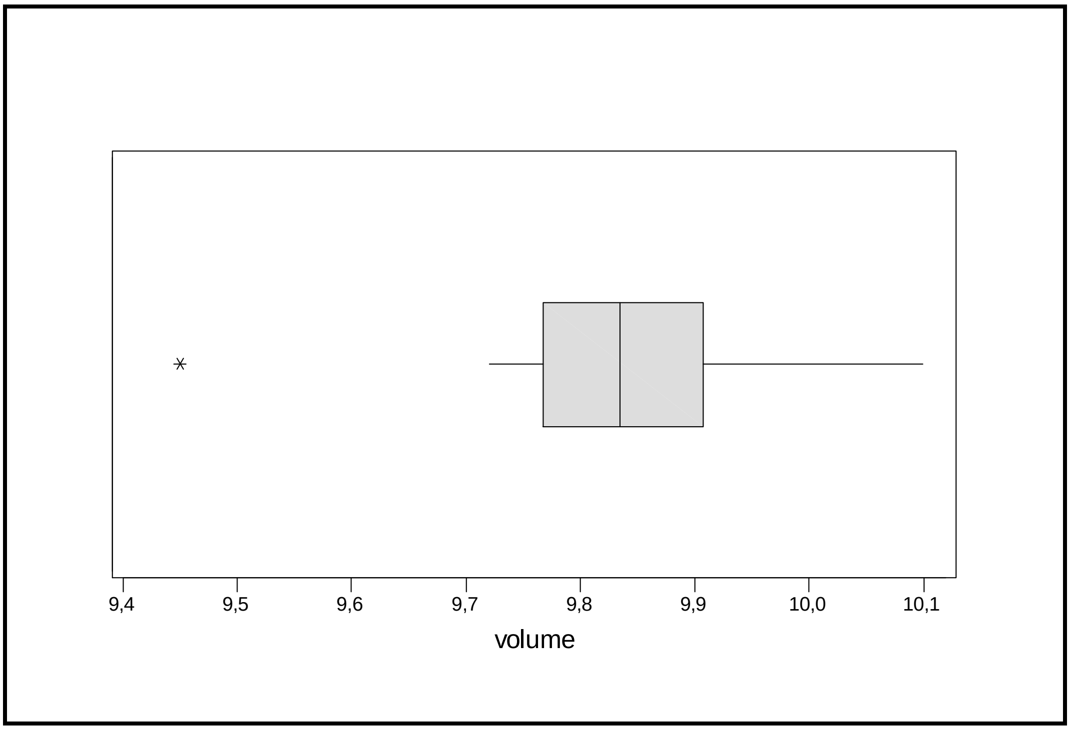
Les valeurs sont considérées comme aberrantes si r_2' calculée est supérieure à la limite donnée par la table de r_2 pour n-1 valeurs. Dans le cas contraire on reprend le test initial en testant x_n ou x_1 comme valeurs aberrantes.

Le test s'applique ici pour n supérieur à 11.

application 3 : *on considère une série classée de 18 volumes de chute de burette (exprimés en mL) lors du dosage d'ions sulfate par conductimétrie. On veut tester si la valeur la plus élevée ou la valeur la plus basse sont des valeurs aberrantes. On réalise une boîte à moustaches puis le test de Dixon.*

9,45	9,80	9,89
9,72	9,82	9,90
9,75	9,83	9,93
9,76	9,84	9,93
9,77	9,85	9,94
9,78	9,86	10,10

On obtient la boîte à moustaches suivante:



Q_1 = 9,7675 et Q_3 = 9,9075 donc

$Q_3 + 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1) = 10{,}12$ et $Q_1 - 1{,}5 \cdot (Q_3 - Q_1) = 9{,}56$

La donnée de 9,45 apparaît donc comme aberrante car elle est distante de Q_1 de plus de 1,5 fois la distance interquartile. Par contre la valeur de 10,10 n'est pas considérée comme aberrante … de très peu car une valeur de 10,12 le serait !

On construit le test de Dixon en prenant un risque de 5 %.

$\rightarrow$ *valeur inférieure 9,45 :* $r_2 = \dfrac{9{,}75 - 9{,}45}{9{,}93 - 9{,}45} = 0{,}625$ *> 0,475 (valeur pour n = 18)*

9,45 est considéré avec ce test aussi comme une valeur aberrante.

$\rightarrow$ *valeur supérieure 10,10 :* $r_2 = \dfrac{10{,}1 - 9{,}93}{10{,}1 - 9{,}75} = 0{,}486$ *> 0,475 (valeur pour n = 18)*

10,10 est considéré avec ce test comme une valeur aberrante mais on est proche de la limite … la valeur n'est plus considérée comme aberrante si on décide de limiter le risque à 1 % (il existe un risque de 1% de considérer 10,10 comme aberrante alors qu'elle ne l'est pas).

Il est nécessaire donc d'être prudent avec les valeurs aberrantes dans l'utilisation des tests ; néanmoins même si les outils statistiques ne donnent pas forcément la même conclusion, ils ont le mérite d'apporter une information bien supérieure à un simple examen forcément subjectif des données.

V/ LOI NORMALE (LOI DE GAUSS)

rappel : une variable aléatoire X est une variable qui prend ses valeurs au hasard parmi un ensemble fini ou infini de valeurs possibles. On parle de variable aléatoire continue quand les valeurs possibles de la variable ont une distribution continue. Ceci correspond au cas des mesures.

Cette loi est la plus importante en statistiques: elle s'applique à tout phénomène dans lequel la fluctuation de la variable aléatoire continue est due à un grand nombre de petites causes indépendantes dont les effets s'additionnent. Donc les résultats de mesures seront distribués selon une loi de Gauss si les conditions suivantes sont remplies :

⇒ les causes d'erreur sont nombreuses et indépendantes
⇒ les erreurs sont du même ordre de grandeur (pas d'erreur prépondérante)

On peut donner comme exemple de causes pour l'étalonnage d'une solution de soude :

- vibrations et courants d'air pendant la lecture de la masse sur la balance
- transvasement de la masse de solide dans l'erlenmeyer pour la dissolution
- réglage du zéro de la burette
- quantité d'indicateur coloré utilisé
- appréciation visuelle du virage de l'indicateur
- appréciation visuelle du volume de solution de soude dans la burette

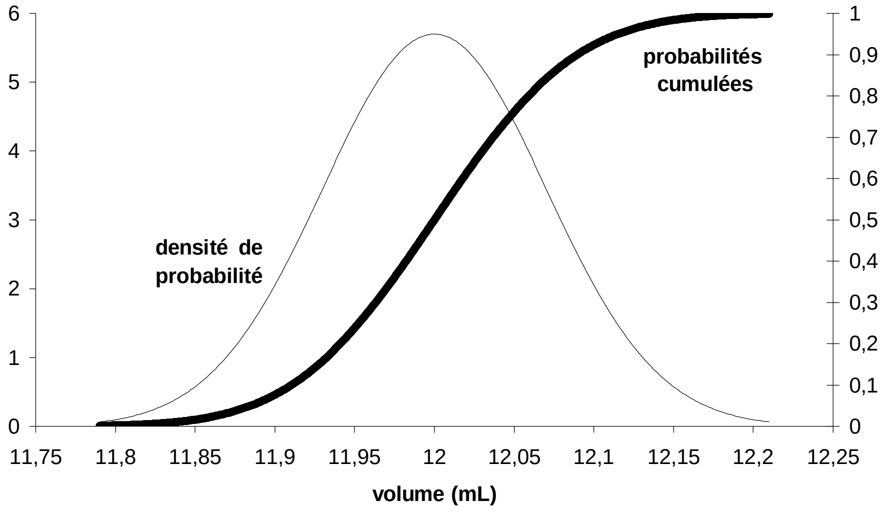
Si x est une valeur particulière prise par la variable aléatoire, la densité de probabilité f(x) de la loi normale N (m,σ) est donnée par :

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot \sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{(x-m)^2}{2 \cdot \sigma^2}}}$$

où m et σ sont respectivement la moyenne et l'écart-type de la population.

On peut tracer la courbe des probabilités cumulées (courbe de la fonction de répartition). L'intégration de cette fonction sur $]-\infty;+\infty[$ correspond graphiquement à l'aire totale sous la courbe : on obtient évidemment la valeur de 1.

Dans l'exemple ci-dessous, on représente la densité de probabilité et la fonction de répartition pour une mesure de volume de dosage de moyenne m = 12 mL et d'écart-type σ égal à 0,07 mL.



On remarque la symétrie de cette fonction par rapport à m. La courbe de densité de probabilité montre que toutes les valeurs ne sont pas équiprobables même si toutes peuvent être observées ; la probabilité d'observer une valeur donnée est d'autant plus faible qu'elle s'éloigne de la moyenne.

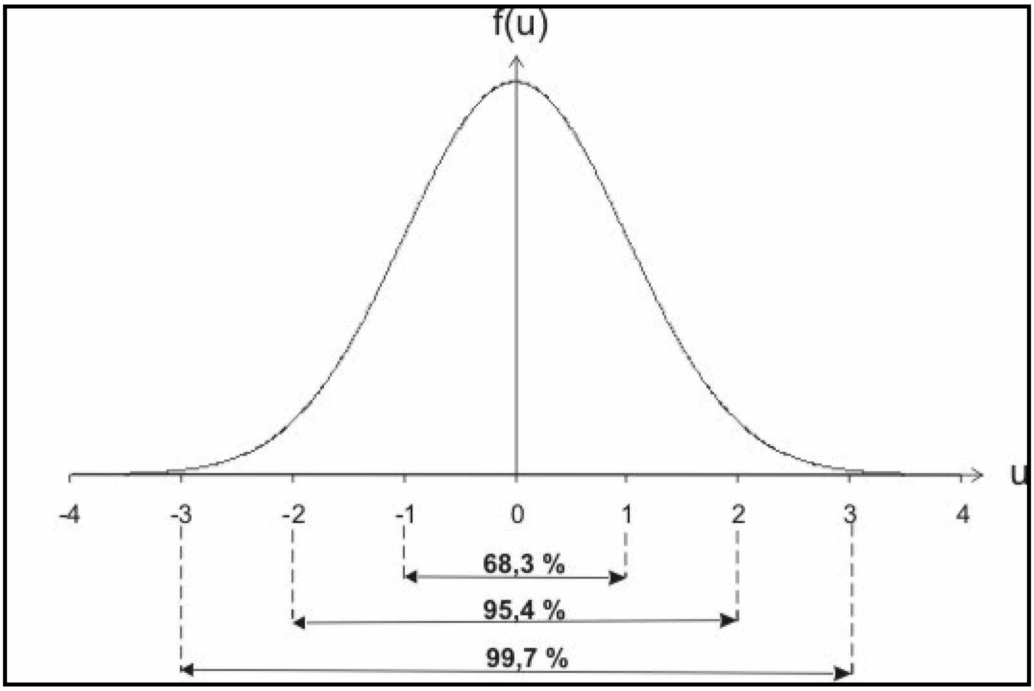
intervalle centré sur m	probabilité
$m \pm \sigma$	68,3 %
$m \pm 1{,}64\ \sigma$	90 %
$m \pm 1{,}96\ \sigma$	95 %
$m \pm 2\ \sigma$	95,4 %
$m \pm 2{,}57\ \sigma$	99 %
$m \pm 3\ \sigma$	99,7 %

Toute loi normale N (m,σ) peut se ramener à la loi normale centrée réduite N (0,1) par le changement de variable $u = \frac{x - m}{\sigma}$. Ceci permet d'utiliser les tables de cette loi normale centrée réduite pour résoudre des problèmes sur une distribution normale quelconque. La densité de probabilité y de la loi normale centrée réduite est donnée par :

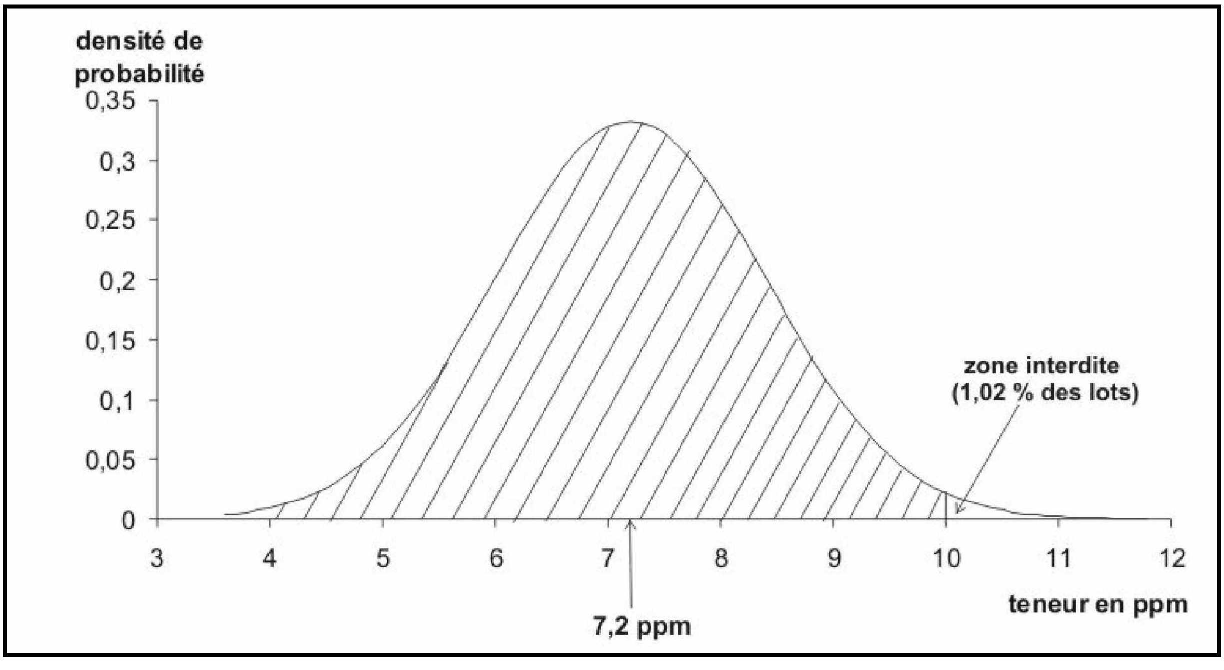
$$\boxed{y = f(u) = \frac{1}{\sqrt{2 \cdot \pi}} \cdot e^{-\frac{u^2}{2}}}$$

La fonction de répartition F(u) est telle que: $\boxed{F(-u) = 1 - F(u)}$

Dans le tableau suivant on donne pour différents intervalles les probabilités pour qu'une mesure de volume se trouve à l'intérieur des intervalles cités.



application 4 : *un produit alimentaire est fabriqué avec une teneur maximale x de 15 ppm en un composé que les autorités alimentaires souhaitent réduire à 10 ppm en deux ans. L'historique de la fabrication montre que sur quatre ans de production la teneur moyenne dans un lot est de 7,2 ppm avec un écart-type de 1,2 ppm. On souhaite examiner si les modes actuels de production permettent d'atteindre l'objectif provisoire fixé de ne pas dépasser la nouvelle spécification dans plus de 1 lot sur 100.*



Il faut chercher la probabilité de dépasser 10 ppm. On admet que la distribution des teneurs suit une loi normale. Pour utiliser les tables on travaille avec la loi normale réduite en effectuant le changement de variable suivant:

$u = \dfrac{x - 7{,}2}{1{,}2}$ *soit donc si x = 10 ppm alors u = 2,33. On détermine avec la table que F(2,33) = 0,9901.*

Par conséquent la probabilité de dépasser 10 ppm est 1 – F(2,33) = 0,0099

On dépassera donc 10 ppm dans moins de 1 cas sur 100: l'objectif est donc atteint.

On montre en fait que la distribution gaussienne ne s'applique que pour des échantillons dont l'effectif est supérieur à 30 : en dessous la loi de Student s'applique.

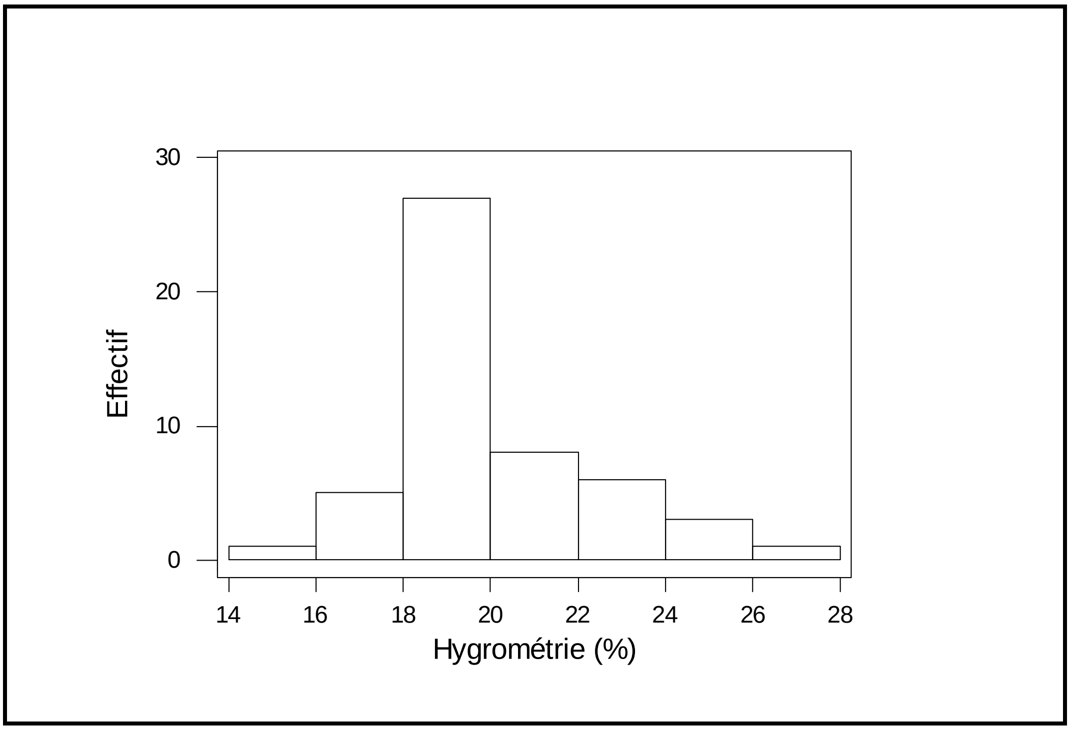
L'allure de la courbe de densité de probabilité pour la loi de Student est proche de celle d'une loi normale. La loi de Student de variable t_ν dépend d'un paramètre ν (entier > 0) nommé nombre de degrés de liberté.

Dans le tableau suivant on indique pour différents effectifs d'échantillon la valeur de la variable aléatoire pour laquelle on cumule 95 % de la distribution. On vérifie ainsi que pour un effectif supérieur à 30, la différence entre les deux lois devient négligeable pour les applications.

effectif	**loi normale (u)**	**loi de student (t_ν)**
5	1,64	2,13
15	1,64	1,76
30	1,64	1,70
50	1,64	1,68

De nombreux tests statistiques exigent pour leur validité de vérifier que les échantillons utilisés obéissent à une loi normale. Il existe dans les logiciels statistiques plusieurs tests qui vérifient cette adéquation. Ils nécessitent avant utilisation de consulter avec soin les aides fournies pour bien interpréter le critère de décision. On peut citer les tests de Anderson-Darling, Shapiro-Wilk et Kolmogorov-Smirnov. Suivant les tests il faut utiliser les valeurs individuelles ou les valeurs regroupées en classes.

On doit aussi signaler que si un phénomène ne vérifie pas une loi normale ceci peut recéler une information intéressante. Dans l'exemple suivant (voir référence bibliographique **1**), on examine l'hygrométrie de pièces en bois de hêtre laissées en phase de séchage. A partir des données représentées sous forme d'histogramme, on remarque une asymétrie de la distribution laissant pressentir qu'elle ne suit pas une loi normale ... ce que confirment les tests de normalité. La conclusion de l'étude est en fait que le processus d'équilibrage hygrométrique du bois avec le milieu extérieur n'est pas terminé. Quand il sera atteint, la distribution deviendra normale.


30
20
10
0
Effectif
14
16
18
20
22
24
26
28
Hygrométrie (%)

VI/ ESTIMATIONS A PARTIR D'UN ECHANTILLON

Soit X une variable aléatoire d'une population suivant une loi normale. La moyenne $\overline{X}$ de cette variable aléatoire X (calculée sur des échantillons de même taille n) est elle-même une variable aléatoire suivant une loi normale. On note m et σ respectivement la moyenne et l'écart-type de la population. Pour les valeurs mesurées sur un échantillon d'effectif n on utilise $\overline{x}$ et σ'. On emploie s pour l'écart-type de la population estimé à partir de l'échantillon.

On cherche donc à estimer m et σ à partir des résultats tirés d'un échantillon. Parfois on peut connaître σ grâce à des mesures tirées d'un historique de fabrication.

1/ Estimations ponctuelles de la moyenne et de l'écart-type

La meilleure estimation ponctuelle de la moyenne m de la population est de prendre la moyenne $\overline{x}$ de l'échantillon.

L'estimation ponctuelle s de l'écart-type de la population est obtenue avec la relation suivante qui prend en compte l'effectif de l'échantillon: plus l'effectif est important, plus l'écart-type σ' de l'échantillon se rapproche de s et donc de la valeur recherchée pour la population. En effet dans les échantillons la dispersion est sous-estimée puisque des valeurs "manquent".

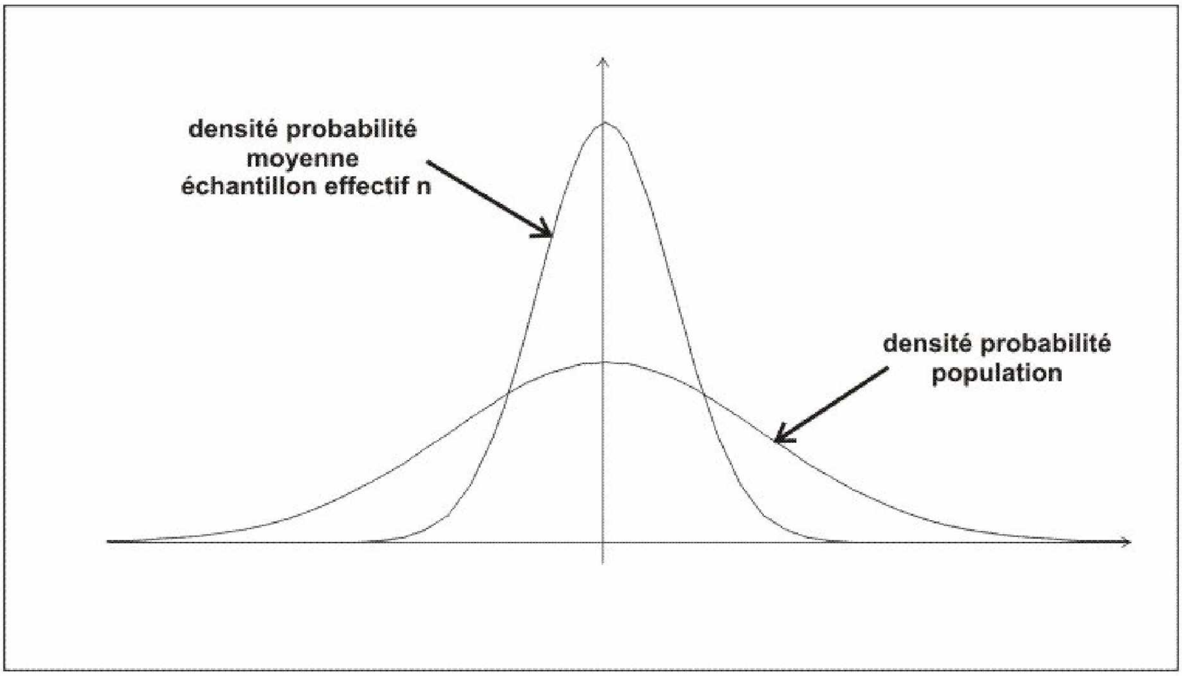
$$\boxed{s = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \sigma'} \quad \text{soit} \quad \boxed{s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}}$$

2/ Estimation par intervalle de confiance de la moyenne

On cherche à réaliser une estimation de la moyenne par intervalle de confiance: cet intervalle contiendra la moyenne dans (1-α) % des cas, soit un risque de α % que cet intervalle ne comprenne pas la moyenne du fait des fluctuations dues à l'échantillonnage. On distingue deux cas:

2.1/ Variance σ^2 connue

Pour n assez grand (en pratique supérieur à 30), on montre que la variable aléatoire $\overline{X}$ suit une loi normale de moyenne m et d'écart-type $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.



On en déduit que la variable u définie par $u = \dfrac{\overline{x} - m}{\sigma / \sqrt{n}}$ suit une loi normale centrée réduite où $\overline{x}$ est une moyenne particulière d'un échantillon. D'après les valeurs de la loi normale N(0,1), on en déduit alors que 95 % des intervalles suivants comprennent la valeur u.

$$-1{,}96 \leq u \leq +1{,}96 \quad \text{donc} \quad -1{,}96 \leq \frac{\overline{x} - m}{\sigma / \sqrt{n}} \leq +1{,}96$$

soit $\boxed{\overline{x} - 1{,}96 \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{x} + 1{,}96 \cdot \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ avec un niveau de confiance de 95 %

Si on considérait un grand nombre d'échantillons d'effectif n (on réalise n mesures par échantillon), dans 95 % des cas l'intervalle de confiance calculé précédemment encadre la moyenne. On a un risque de 5 % que la moyenne ne soit pas comprise dans cet intervalle.

Pour un risque α de 10 %, l'intervalle de confiance s'écrit :

$$\boxed{\overline{x} - 1{,}64 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{x} + 1{,}64 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

2.2 / Variance σ^2 inconnue

Or la plupart du temps l'écart-type de la population σ n'est pas connu en réalité; on considère donc s qui est l'écart-type de la population estimé à partir d'un échantillon. Dans ce cas la quantité $t_\upsilon = \dfrac{\overline{x}-m}{s/\sqrt{n}}$ suit une loi de Student de paramètre ν égal au nombre de degrés de liberté utilisés pour la détermination de s soit n-1.

Si on choisit un risque α, alors on recherche dans la table de Student la valeur de $t_{\nu,1-\frac{\alpha}{2}}$ telle que $F(t_\nu) = 1-\dfrac{\alpha}{2}$ où F est la fonction de répartition de la loi de Student.

L'intervalle de confiance de m est alors:

$$\boxed{\overline{x} - t_{\nu,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{x} + t_{\nu,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}}$$

Pour n supérieur à 30, on montre qu'il est possible de remplacer la loi de Student par la loi normale centrée réduite. Pour un risque α de 5 %, l'intervalle de confiance précédent devient alors:

$$\boxed{\overline{x} - 1{,}96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \leq m \leq \overline{x} + 1{,}96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}}$$

application 5 : *Pour obtenir une certification un laboratoire d'analyses de traces souhaite déterminer l'intervalle de confiance d'une concentration en ppb d'un contaminant. Les 16 mesures réalisées sont regroupées dans le tableau suivant.*

33,3	*33,5*	*33,2*	*32,5*	*32,7*	*32,8*	*33,4*	*32,3*
32,5	*32,7*	*33,3*	*33,4*	*32,6*	*33,2*	*33,0*	*33,1*

Après avoir vérifié qu'il n'y avait pas de valeur aberrante, on détermine la moyenne puis l'intervalle de confiance de cette moyenne avec un risque de 5 %.
L'écart-type étant inconnu et le nombre de valeurs étant inférieur à 16, on utilise la loi de Student avec 16-1 soit 15 degrés de liberté.

D'après les données, on trouve $\overline{x}$ *= 32.97 ppb et s = 0,3825 ppb comme estimations ponctuelles.*

A l'aide de la table de Student on en déduit: $t_{16-1,1-\frac{0{,}05}{2}} = t_{15,\,0{,}975} = 2{,}13$

$$32{,}97 - 2{,}13 \cdot \frac{0{,}3825}{\sqrt{16}} \leq m \leq 32{,}97 + 2{,}13 \cdot \frac{0{,}3825}{\sqrt{16}} \qquad \textit{donc} \quad 32{,}8 \leq m \leq 33{,}2$$

3/ Choix du risque et du nombre d'essais

Les relations précédentes montrent que plus le risque choisi est grand, plus l'intervalle de confiance est étroit. Les limites de l'intervalle de confiance dépendent donc seulement des exigences de l'expérimentateur quant à l'importance qu'il attache à la précision.

Dans le cas de l'utilisation de la loi normale on obtient ainsi des intervalles pour m égaux à $\bar{x} \pm \sigma$ pour un risque α de 32 % et à $\bar{x} \pm 3 \cdot \sigma$ pour un risque α de 0,3 %. On ne peut donc avoir à la fois un intervalle de confiance étroit et une grande certitude sur celui-ci. Un intervalle large est "très sûr" mais il n'apporte aucune information précise sur la valeur recherchée.

Dans tous les cas l'intervalle de confiance de la moyenne est d'autant plus étroit que l'effectif de l'échantillon est important. Pour un risque α choisi, ceci revient à examiner les termes $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ ou $\frac{s}{\sqrt{n}}$ (termes appelés parfois erreurs type de la moyenne dans les logiciels de statistique). Ainsi si on souhaite diviser par deux l'incertitude relative, il faut donc multiplier le nombre d'essais par 4 … ce qui conduit à privilégier soit la recherche de précision, soit l'économie de travail ! Cet arbitrage nécessaire est une constante dans toutes les études statistiques.

4/ Estimation par intervalle de confiance de l'écart-type

Cette estimation nécessite l'utilisation d'une loi statistique particulière dite loi du "Khi deux" notée χ^2 et définie pour un degré de liberté donné.

L'intervalle de confiance de l'écart-type σ au risque α est donné par la relation suivante avec un degré de liberté ν pour χ^2 de n-1. Dans cette expression figure s l'écart-type de la population estimé à partir de l'échantillon.

$$\boxed{\sqrt{\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{\nu,1-\alpha/2}}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(n-1)\cdot s^2}{\chi^2_{\nu,\alpha/2}}}}$$

Les valeurs de χ^2 s'obtiennent dans la table pour les valeurs de $\alpha/2$ et $1-\alpha/2$ choisies. On remarquera que contrairement à la moyenne l'intervalle de confiance n'est pas symétrique par rapport à l'estimation ponctuelle s.

__application 6 :__ *On reprend les données de l'application 5. On recherche l'intervalle de confiance pour l'écart-type σ de la concentration en contaminant avec un risque de 5 %.*

On utilise la loi χ^2 avec un degré de liberté de 16 – 1 = 15 degrés de liberté.

A l'aide de la table de χ^2 on trouve: $\chi^2_{16-1,1-0,05/2} = 27,49$ *et* $\chi^2_{16-1,0,05/2} = 6,26$

$$\sqrt{\frac{(16-1)\cdot 0,3825^2}{27,49}} \leq \sigma \leq \sqrt{\frac{(16-1)\cdot 0,3825^2}{6,26}} \qquad \textit{donc} \quad 0,28 \leq \sigma \leq 0,59$$

VII/ PRINCIPE DES TESTS STATISTIQUES

1/ Généralités sur les tests

Un test statistique permet de prendre une décision à partir d'informations recueillies sur un échantillon. Les tests visent à déterminer si une caractéristique (moyenne ou écart-type) tirée d'un échantillon est identique à une référence (un standard) ou à celle d'un autre échantillon. Ceci correspond par exemple aux deux cas suivants:

- comparaison d'une caractéristique physico-chimique d'un nouveau produit à une valeur fixée par le cahier des charges ; on examine si l'écart entre la valeur mesurée à partir de l'échantillon et la valeur standard est significatif c'est à dire s'il ne peut pas s'expliquer uniquement par le caractère aléatoire des mesures effectuées seulement sur un échantillon.

- comparaison d'une caractéristique physico-chimique d'un produit obtenu par deux procédés différents ; on examine si les valeurs obtenues à partir d'un échantillon pour chaque procédé montrent un écart significatif ou si la différence peut s'expliquer par le caractère aléatoire des mesures.

La décision prise à partir du test a un caractère aléatoire et dans tous les cas un certain risque est lié à cette décision.

2/ Construction et exploitation d'un test

Une hypothèse H_0 (dite hypothèse nulle) est faite sur une caractéristique de l'échantillon. Cette hypothèse s'énonce en disant que l'écart mesuré entre la valeur de la caractéristique pour l'échantillon et la valeur de la caractéristique du standard ou de l'autre échantillon, est du uniquement à des fluctuations aléatoires.

Une hypothèse H_1 (dite hypothèse alternative) est construite: elle correspond à une hypothèse opposée à l'hypothèse H_0.

On définit alors un risque α (risque de première espèce) qui est le risque de rejeter H_0 alors que cette hypothèse est vraie. Couramment on choisit un risque α de 5 %.

On calcule ensuite la probabilité d'observer l'écart mesuré et on applique la règle de décision suivante :

- si la probabilité est supérieure au risque α, on accepte H_0 comme n'étant pas invraisemblable et on en déduit que l'écart n'est pas significatif.

- si la probabilité est inférieure au risque α, H_0 est rejetée car il apparaît invraisemblable que l'écart soit causé par la seule cause du hasard. Néanmoins un écart supérieur peut parfaitement apparaître dans moins de α % des cas : c'est le risque α du test.

En conclusion rejeter **l'hypothèse nulle H_0** revient à accepter **l'hypothèse alternative H_1**.

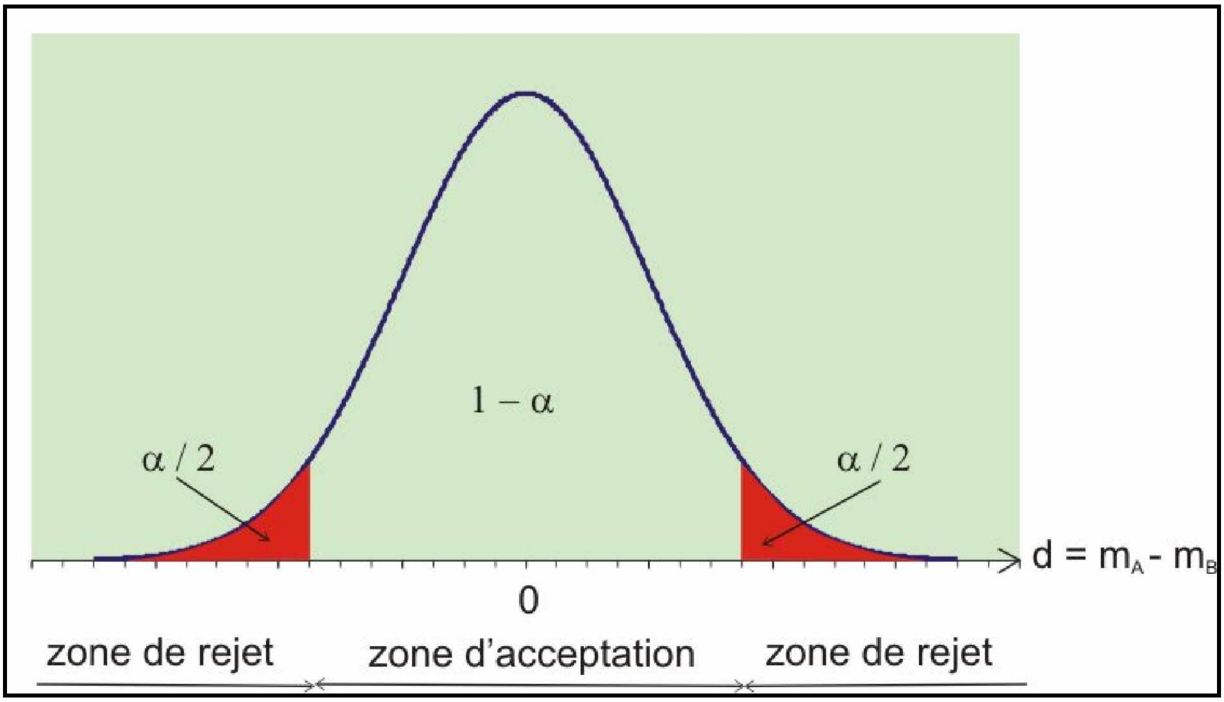
On examine maintenant un exemple : la caractéristique d'un procédé ancien A est égale à m_A. Un nouveau procédé B fournit une valeur de m_B pour cette caractéristique. Le test vise à déterminer si les procédés conduisent à des valeurs différentes de la caractéristique.

On bâtit alors les hypothèses H_0 et H_1.

H_0 : $m_A = m_B$ soit $m_A - m_B = 0$

H_1 : $m_A \neq m_B$ soit $m_A - m_B \neq 0$

On admet ici que les différences $m_A - m_B$ pouvant être observées suivent une loi normale de moyenne nulle. On peut alors tracer la représentation graphique suivante:



Il s'agit dans cette étude d'un **test bilatéral**: les différences $m_A - m_B$ pouvant a priori être positives ou négatives, le risque α sera donc partagé de chaque côté de la distribution avec une probabilité $\alpha / 2$.

On définit deux zones et on prend une décision suivant la valeur observée de la différence $m_A - m_B$ mesurée à partir de deux échantillons.

***Décision 1* :** si $m_A - m_B$ appartient à la zone de rejet, on rejette l'hypothèse H_0 et on accepte l'hypothèse alternative H_1.

***Décision 2* :** si $m_A - m_B$ appartient à la zone d'acceptation, on accepte l'hypothèse H_0. Statistiquement la différence n'est pas jugée significative.

3/ Les deux types de risque et la puissance d'un test

Les deux décisions précédentes présentent un certain risque de conclure à tort.

Décision 1 **:** on rejette H_0 à cause d'une différence m_A - m_B importante mais dans α % des cas il est effectivement possible d'observer une telle différence du fait de fluctuations aléatoires. L'hypothèse H_0 correspond donc à la réalité : il n'y a en fait pas de différence entre les deux procédés.

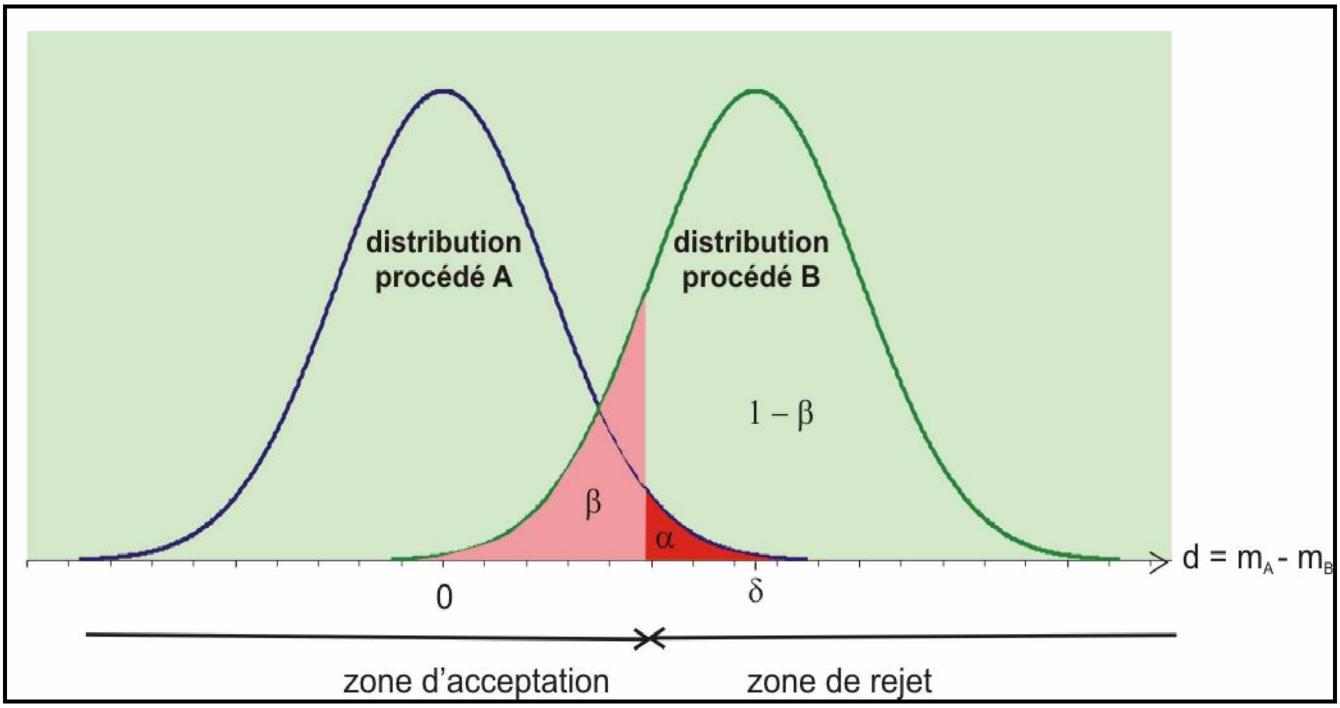
Décision 2 **:** on accepte H_0 mais il y a β % de cas où la valeur de la différence m_A - m_B se place dans la zone d'acceptation de H_0 du fait des fluctuations du hasard. Dans ce cas l'hypothèse H_1 correspond donc à la réalité.

On définit donc les risques α et β :

Risque α (risque de première espèce) : conclure à une différence inexistante

Risque β (risque de seconde espèce) : conclure à une égalité alors qu'il existe une différence.

On définit la puissance d'un test par $1 - \beta$: c'est la probabilité de détecter une différence m_A - m_B = δ dans le cas d'une différence réelle.



On résume les différentes possibilités dans le tableau suivant :

Décision prise	Réalité : H_0 vraie	Réalité : H_0 fausse
H_0 acceptée	décision correcte (1 - α) % des cas	décision erronée β % des cas
H_0 refusée	décision erronée α % des cas	décision correcte (1 - β) % des cas

remarque : α est nommé parfois seuil de signification et 1 – α est nommé également niveau de confiance.

Le risque α est fixé par l'expérimentateur (donc contrôlable) mais le risque β dépend de l'existence et de la valeur de la différence. Il faut insister sur le point que la réalité reste toujours inconnue pour l'expérimentateur …

On constate d'après la figure précédente que si la différence δ (quand elle existe !) entre les deux procédés est faible alors le risque β augmente pour un risque α fixé. De plus pour une même différence δ avec un risque α fixé, le risque β va diminuer si on parvient à diminuer la variabilité des procédés.

Deux illustrations des risques α et β peuvent être données :

⇒ ***Risques client – fournisseur***

On analyse un lot pour vérifier sa conformité par rapport aux spécifications. On construit un test avec les hypothèses H_0 et H_1 suivantes.

H_0 : le lot est conforme au standard
H_1 : le lot n'est pas conforme au standard

- le risque α correspond au risque du fabricant : conclure à une différence qui n'existe pas et donc rejeter un lot de fabrication correct. L'enjeu financier est important.

- le risque β correspond au risque du client : ne pas pouvoir détecter une différence qui existe et donc accepter un lot défectueux. Si la pièce est alors intégrée dans un ensemble et le rend défectueux, le coût de la non-qualité devient très élevé.

⇒ ***Risques dans la modification d'un procédé***

On modifie un procédé pour diminuer son coût. On vérifie ensuite si une caractéristique finale du produit est modifiée. Le tableau ci-dessous illustre les différentes situations pour les hypothèses H_0 et H_1 suivantes.

H_0 : le nouveau procédé n'entraîne pas de modification de la caractéristique étudiée
H_1 : le nouveau procédé modifie la caractéristique étudiée

risque	***décision***	***conséquences produit***	
		qualité	***coût***
α	ne pas modifier le procédé ⇒ pas de changement	identique à l'ancien procédé	
β	modifier le procédé ⇒ dégradation	non qualité ↑	coût procédé ↓ coût non qualité ↑

Dans certains cas la plus grave conséquence d'une erreur dans la décision est de ne pas modifier le procédé sans qu'il y ait en réalité de diminution de la qualité avec le nouveau procédé. On risque alors de se priver d'une diminution des coûts. On peut diminuer ce risque α en le fixant par exemple à 1 %.

En revanche si le risque β présente les inconvénients les plus graves (par exemple ne pas s'apercevoir d'une diminution de la qualité finale du produit à la suite d'une modification de procédé), il faut le diminuer en utilisant des échantillons plus importants pour diminuer la variabilité naturelle des mesures et donc pouvoir détecter une différence, même assez faible.

4/ Test unilatéral

Les tests réalisés dans les paragraphes précédents sont dits bilatéraux: il y a autant de chances a priori que l'écart $m_A - m_B$ soit positif ou négatif. Le risque est alors partagé aux deux extrémités de la zone d'acceptation.

Il est parfois nécessaire de construire des tests unilatéraux. Le test unilatéral est choisi quand l'écart dans un sens est soit physiquement impossible soit sans intérêt ou inconvénient pour le problème posé. Dans ce cas le risque est intégralement reporté à une des extrémités du domaine.

On peut citer deux exemples où un test unilatéral s'impose :

- on améliore une méthode d'analyse en utilisant un spectrophotomètre beaucoup plus performant : on étudie la dispersion des mesures qui ne peut qu'être inférieure à la variabilité de l'ancienne méthode.

- on diminue la durée d'un procédé pour des raisons de coût mais on ne veut pas pour autant diminuer la résistance à la rupture du matériau fabriqué : on étudie la résistance pour une durée plus courte en examinant si elle n'est pas plus faible qu'avec l'ancien procédé.

On construit donc deux types de test en reprenant l'exemple du 2/ avec la comparaison des procédés A et B.

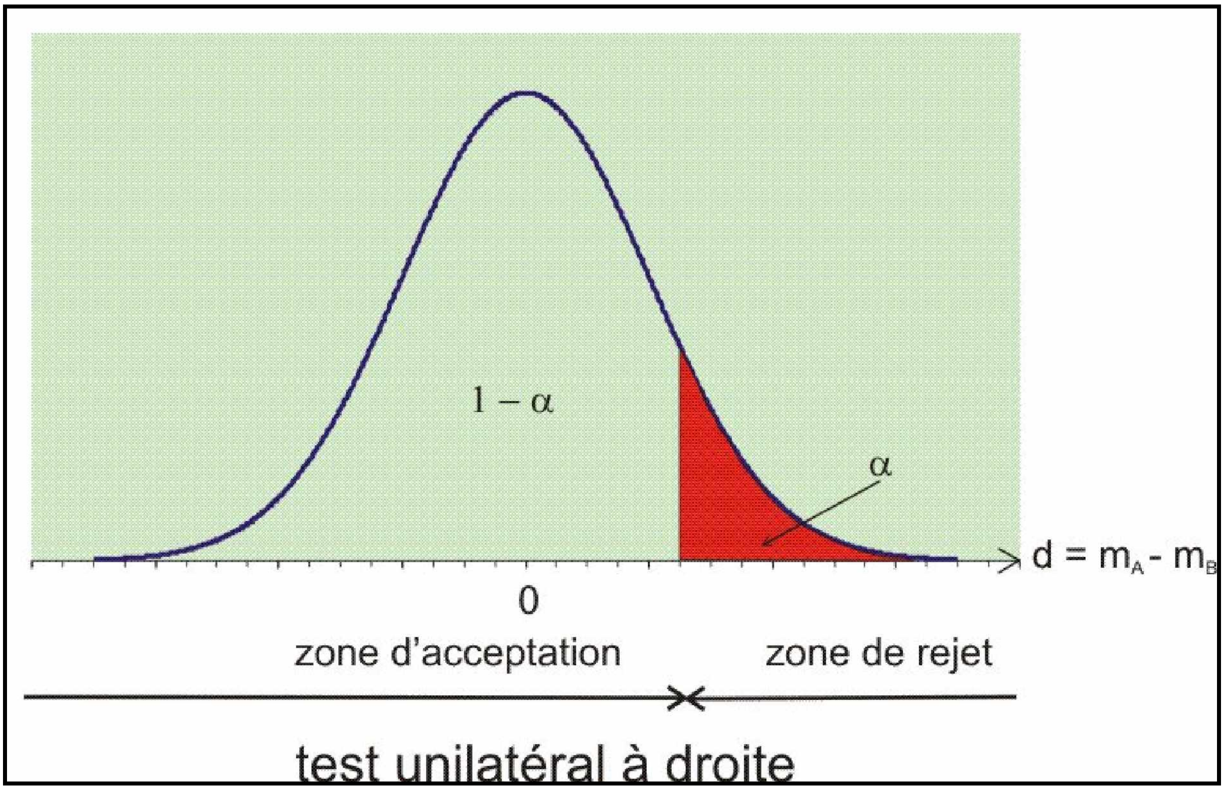
⇒ ***test unilatéral à droite***

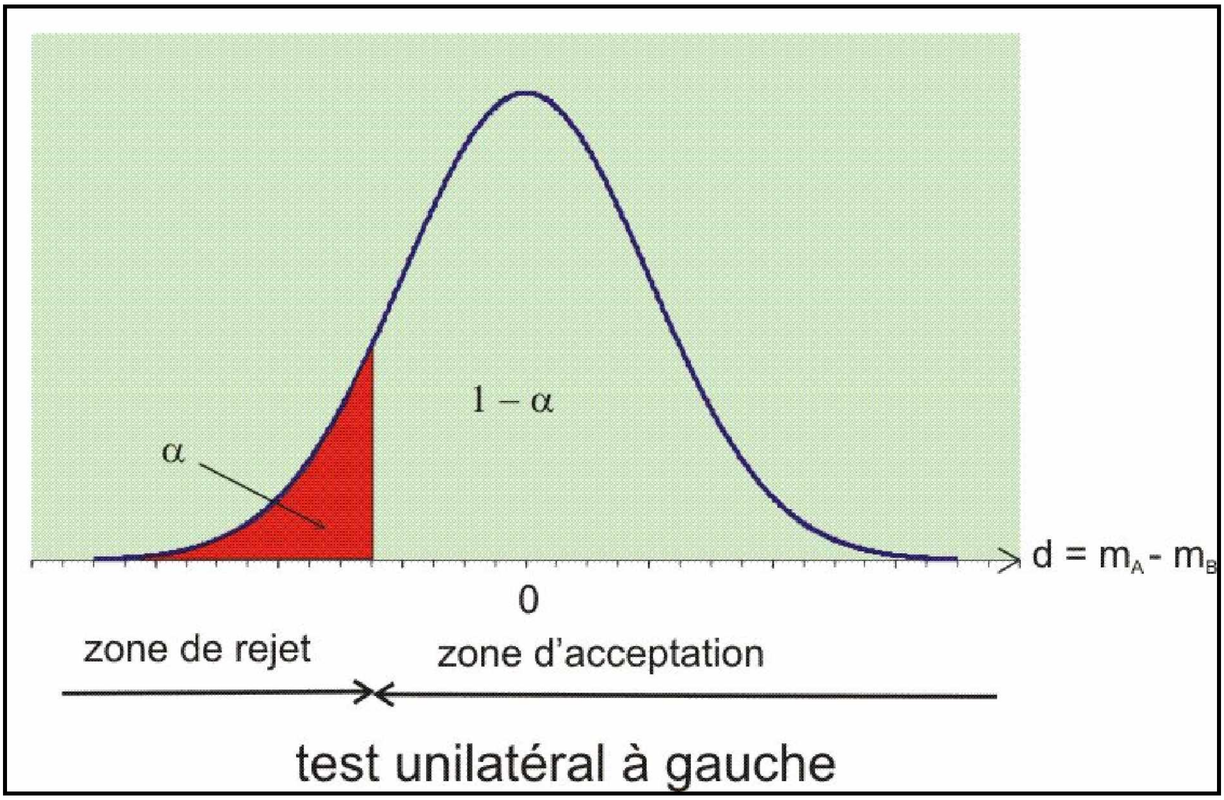
H_0 : $m_A = m_B$ **H_1 :** $m_A > m_B$ soit $m_A - m_B > 0$

⇒ ***test unilatéral à gauche***

H_0 : $m_A = m_B$ **H_1 :** $m_A < m_B$ soit $m_A - m_B < 0$

Les figures suivantes résument les deux tests.




1 − α
α
d = mA - mB
0
zone de rejet
zone d'acceptation
test unilatéral à gauche

VIII/ TESTS USUELS

On utilise par défaut un risque α de 5%.

1/ Comparaison d'une moyenne m_A à une valeur standard m_0

Une application courante de ce test est la vérification sur un échantillon qu'une modification de procédé permet soit de conserver la même caractéristique du produit qu'auparavant soit d'atteindre une nouvelle spécification.

On considère dans une population suivant une loi normale un échantillon d'effectif n_A qui fournit une estimation $\overline{x}_A$ de la moyenne m_A de la population. On cherche à comparer la moyenne inconnue m_A de la population avec un standard m_0.

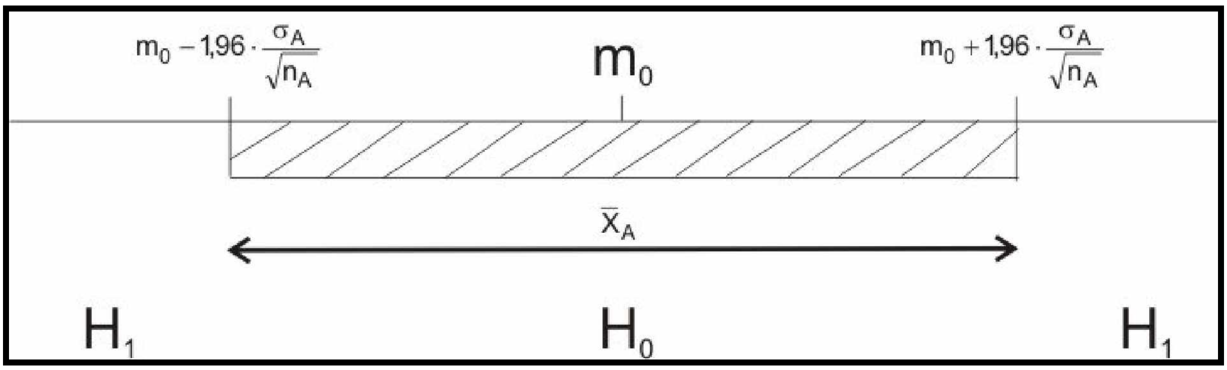
1.1/ Variance de la population σ_A^2 connue

σ_A est l'écart-type connu de la population. On suppose que la moyenne des échantillons obéit à une loi normale $N(m_A, \frac{\sigma_A}{\sqrt{n_A}})$. Suivant le type de test, bilatéral ou unilatéral, on définit alors les hypothèses et les règles de décision. A partir de l'intervalle de confiance défini pour m_A, la démarche consiste à vérifier si $\overline{x}_A$ appartient à l'intervalle.

test bilatéral **:** H_0: $m_A = m_0$ H_1: $m_A \neq m_0$

Pour l'hypothèse H_0, la moyenne des échantillons obéit à une loi normale $N(m_0, \frac{\sigma_A}{\sqrt{n_A}})$.

H_0 est vérifiée si : $\boxed{m_0 - 1{,}96 \cdot \frac{\sigma_A}{\sqrt{n_A}} \leq \overline{x}_A \leq m_0 + 1{,}96 \cdot \frac{\sigma_A}{\sqrt{n_A}}}$



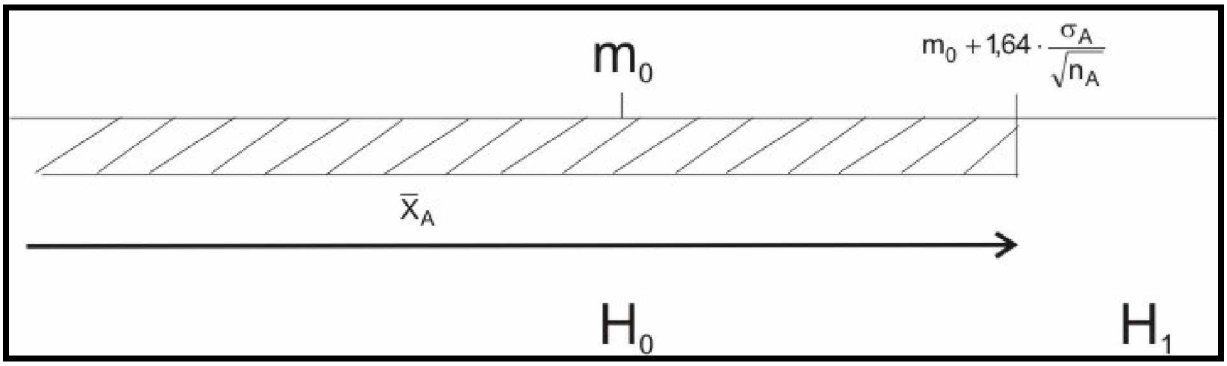
Si $\overline{x}_A$ n'appartient pas à l'intervalle de confiance de m_0, alors on en déduit que l'hypothèse où la moyenne m_A est égale à m_0 peut être rejetée avec un risque de 5 %.

remarque : les logiciels statistiques testent souvent la même condition sous la forme suivante pour l'hypothèse H_0 :

$$\boxed{\overline{x}_A - 1{,}96 \cdot \frac{\sigma_A}{\sqrt{n_A}} \leq m_0 \leq \overline{x}_A + 1{,}96 \cdot \frac{\sigma_A}{\sqrt{n_A}}}$$

test unilatéral à droite : H_0: $m_A = m_0$ H_1: $m_A > m_0$

H_0 est vérifiée si : $\boxed{\overline{x}_A < m_0 + 1{,}64 \cdot \frac{\sigma_A}{\sqrt{n_A}}}$

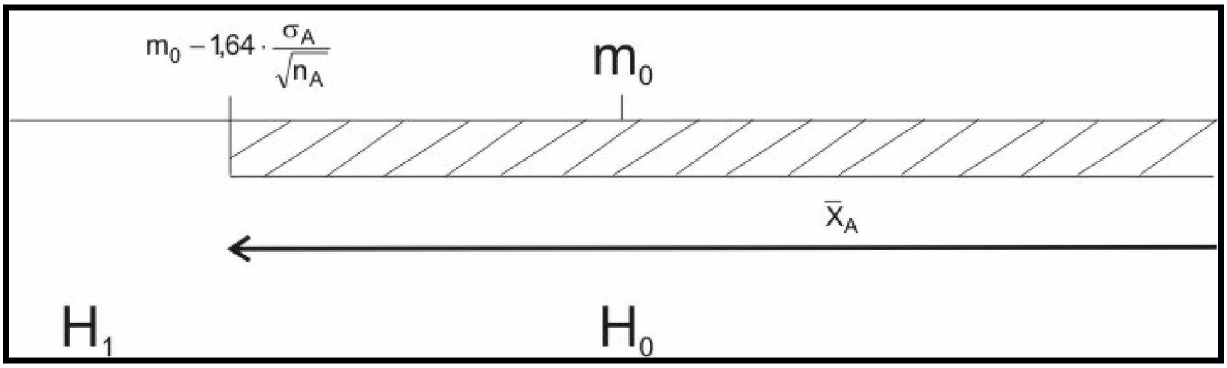


remarque : L'hypothèse H_0 est testée par certains logiciels sous la forme :

$$\boxed{m_0 > \overline{x}_A - 1{,}64 \cdot \frac{\sigma_A}{\sqrt{n_A}}}$$

test unilatéral à gauche **:** H_0: $m_A = m_0$ H_1: $m_A < m_0$

H_0 est vérifiée si : $\boxed{\overline{x}_A > m_0 - 1{,}64 \cdot \frac{\sigma_A}{\sqrt{n_A}}}$



1.2/ Variance de la population σ_A^2 inconnue

C'est le cas le plus courant. On considère s_A l'écart-type de la population estimé à partir de l'échantillon. Dans ce cas on utilise une loi de Student de paramètre ν égal au nombre de degrés de liberté intervenant dans la détermination de s_A soit n_A-1.

Les tests du **1.1/** pour $\bar{x}_A$ sont similaires en remplaçant σ_A par s_A et les valeurs de 1,96 par $t_{\nu,1-\frac{\alpha}{2}}$ pour le test bilatéral et 1,64 par $t_{\nu,1-\alpha}$ pour le test unilatéral (pour un risque α).

test bilatéral **:** H_0 est vérifiée si : $\boxed{m_0 - t_{\nu,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_A}{\sqrt{n_A}} \leq \bar{x}_A \leq m_0 + t_{\nu,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_A}{\sqrt{n_A}}}$

test unilatéral à droite : H_0 est vérifiée si : $\boxed{\bar{x}_A < m_0 + t_{\nu,1-\alpha} \cdot \frac{s_A}{\sqrt{n_A}}}$

test unilatéral à gauche **:** H_0 est vérifiée si : $\boxed{\bar{x}_A > m_0 - t_{\nu,1-\alpha} \cdot \frac{s_A}{\sqrt{n_A}}}$

Dans le cas où l'effectif de l'échantillon est supérieur à 30 (n_A > 30), on peut appliquer les tests tirés de la loi normale réduite du **1.1/** en remplaçant σ_A par s_A.

<u>application 7:</u> *une nouvelle pipette électronique de 20 µL est livrée dans un laboratoire d'analyses. Un contrôle interne est décidé pour vérifier la justesse de la pipette. Le tableau suivant reporte la série des 20 mesures réalisées.*

20,010	*19,984*	*19,996*	*19,990*	*20,010*
19,980	*19,998*	*20,014*	*19,976*	*19,984*
20,006	*20,006*	*19,994*	*19,998*	*19,994*
19,994	*19,998*	*20,012*	*20,000*	*20,022*

On calcule la moyenne et l'écart-type estimé :

$$\bar{x}_A = 19{,}998\ \mu L \text{ et } s_A = 0{,}0121\ \mu L \text{ avec } n_A = 20$$

On effectue un test bilatéral pour examiner si les mesures données pour la nouvelle pipette ne sont pas significativement différentes de 20,000 µL. Les hypothèses sont les suivantes et on considère un risque de 5 %

$$H_0 : m_A = m_0 \qquad H_1 : m_A \neq m_0 \text{ avec } m_0 = 20{,}000\ \mu L$$

L'effectif est inférieur à 30 donc on vérifie alors si

$$m_0 - t_{\nu,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_A}{\sqrt{n_A}} \leq \bar{x}_A \leq m_0 + t_{\nu,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s_A}{\sqrt{n_A}}$$

On recherche $t_{20-1,\,0{,}975}$ *dans la table de Student :* $t_{20-1,\,0{,}975} = 2{,}09$

$$\textit{soit}\ 20 - 2{,}09 \cdot \frac{0{,}0121}{\sqrt{20}} \le \overline{x}_A \le 20 + 2{,}09 \cdot \frac{0{,}0121}{\sqrt{20}}$$

donc $19{,}994 \le \overline{x}_A \le 20{,}006$ *ce qui est vrai d'après la valeur trouvée pour* $\overline{x}_A$ *.*

On en déduit que la nouvelle pipette de 20 µL est effectivement juste.

application 8 : *une modification dans la formulation d'une poudre a été réalisée pour diminuer la teneur en impuretés des cristaux. On craint que cette modification entraîne une augmentation de la taille moyenne des cristaux égale à 150 µm ce qui serait préjudiciable à l'utilisation ultérieure du produit. On vérifie sur une série de 40 cristallisations si la taille des cristaux n'est pas plus élevée après cette modification. Le tableau ci-dessous rassemble les différentes tailles obtenues exprimées en microns.*

150,4	160,1	160,7	156,0	145,6	146,6	144,9	150,0
151,3	156,5	161,2	150,5	149,9	147,5	148,1	150,0
153,0	155,1	152,7	160,4	149,0	148,8	148,9	148,1
160,7	156,9	159,9	152,8	149,2	145,9	145,8	147,4
150,7	156,6	157,5	153,9	149,1	148,1	145,8	149,8

On calcule la moyenne et l'écart-type estimé :

$\overline{x}_A$ *= 151,9 µm et* s_A *= 4,94 µm avec* n_A *= 40*

On effectue un test unilatéral à droite (on ne soupçonne qu'une seule possibilité de différence : l'augmentation de taille) pour examiner si les mesures données pour la nouvelle formulation ne sont pas significativement supérieures à150 µm. Les hypothèses sont les suivantes et on considère un risque α *de 5 % :*

$H_0 : m_A = m_0$ $H_1 : m_A > m_0$ *avec* $m_0 = 150$ *µm*

L'effectif est supérieur à 30 donc on vérifie alors si :

$$\overline{x}_A < m_0 + 1{,}64 \cdot \frac{s_A}{\sqrt{n_A}}$$

$$\textit{soit}\ \overline{x}_A < 150 + 1{,}64 \cdot \frac{4{,}94}{\sqrt{40}}$$

donc $\overline{x}_A < 151{,}3$ *ce qui est faux d'après la valeur trouvée pour* $\overline{x}_A$ *.*

L'hypothèse H_0 *n'est pas vérifiée : l'augmentation de taille relevée sur la moyenne de notre échantillon est donc significative. On peut en déduire que la nouvelle formulation entraîne une augmentation de taille.*

2/ Comparaison d'une variance à une valeur standard

Une application de ce test consiste à vérifier si la variabilité d'un nouvel instrument d'analyse (autrement dit la précision des mesures) est compatible avec le cahier des charges imposé.

Dans une population suivant une loi normale de paramètres m_A et σ_A, on considère un échantillon d'effectif n_A de moyenne $\overline{x}_A$ et qui fournit une variance estimée s_A^2. On cherche à comparer la variance σ_A^2 de la population avec une variance standard σ_0^2.

On calcule d'abord χ^2_{obs} (χ^2 des observations expérimentales) défini par:

$$\boxed{\chi^2_{obs} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x}_A)^2}{\sigma_0^2} = \frac{\text{somme des carrés des écarts}}{\sigma_0^2} = \frac{(n_A - 1)\cdot s_A^2}{\sigma_0^2}}$$

On lit dans la table de "Khi deux" les valeurs de χ^2 pour le degré de liberté $\nu = n_A - 1$. Les relations suivantes sont établies pour α égal à 5 %.

test bilatéral : $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_0^2$ contre $H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_0^2$

Le test vérifie en fait si σ_0 appartient à l'intervalle de confiance de l'écart-type de la population σ_A estimé à partir de celui de l'échantillon s_A.

On a ainsi pour l'hypothèse H_0 : $\sqrt{\frac{(n_A - 1)\cdot s_A^2}{\chi^2_{\nu,0,975}}} \leq \sigma_0 \leq \sqrt{\frac{(n_A - 1)\cdot s_A^2}{\chi^2_{\nu,0,025}}}$

$$\text{soit} \quad \chi^2_{\nu,0,975} \geq \frac{(n_A - 1)\cdot s_A^2}{\sigma_0^2} \geq \chi^2_{\nu,0,025}$$

$$\text{donc} \quad \boxed{\chi^2_{\nu,0025} \leq \chi^2_{obs} \leq \chi^2_{\nu,0,975}}$$

Si χ^2_{obs} vérifie cette relation alors on en déduit que l'hypothèse où la variance σ_A est égale à σ_0 ne peut être rejetée avec un risque de 5 %. La variance observée n'est pas significativement différente de la variance standard σ_0.

Sinon, la variance observée est significativement différente de la variance standard σ_0.

test unilatéral à gauche : $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_0^2$ contre $H_1 : \sigma_A^2 < \sigma_0^2$

Si $\boxed{\chi^2_{obs} > \chi^2_{\nu,0,05}}$ la variance observée n'est pas significativement plus petite que la variance standard avec un risque de 5 %. Dans le contraire on adopte l'hypothèse H_1.

test unilatéral à droite : $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_0^2$ contre $H_1 : \sigma_A^2 > \sigma_0^2$

Si $\boxed{\chi^2_{obs} < \chi^2_{\nu,0,95}}$ la variance observée n'est pas significativement plus grande que la variance standard avec un risque de 5 %. Dans le contraire on adopte l'hypothèse H_1.

<u>application 9 :</u> *une nouvelle balance à dessiccation a été livrée pour déterminer un rendement de séchage. Une comparaison de ces rendements est exploitable uniquement si l'écart-type des titres massiques est inférieur à 0,50 % (titre exprimé en pourcentage). On effectue donc 25 prélèvements homogènes d'une poudre séchée qu'on analyse avec la balance. Les titres obtenus sont reportés dans le tableau suivant.*

29,8	30,1	29,5	29,9	30,7
30,0	30,1	29,7	29,9	29,8
30,2	29,7	29,9	30,2	30,1
30,3	30,2	30,5	30,5	29,3
29,4	30,0	29,8	29,8	30,7

On effectue un test unilatéral à gauche car on veut vérifier si la nouvelle balance permet d'obtenir un écart-type inférieur à une valeur fixée σ_0.

Les hypothèses sont les suivantes et on considère un risque α de 5 % :

$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_0^2$ contre $H_1 : \sigma_A^2 < \sigma_0^2$ avec $\sigma_0 = 0,50$ %

On calcule l'écart-type estimé : $s_A = 0,36$ % pour $n_A = 25$ valeurs

On calcule d'abord χ^2_{obs} : $\chi^2_{obs} = \dfrac{(n_A - 1) \cdot s_A^2}{\sigma_0^2} = \dfrac{(25-1) \cdot 0,36^2}{0,50^2} = 12,4$

On lit dans les tables de "Khi deux" les valeurs de $\chi^2_{\nu,0,05}$ pour $\nu = 25 - 1 = 24$.

On en déduit que $\chi^2_{obs} < \chi^2_{24,0,05} = 13,8$.

Il en résulte que l'hypothèse H_0 est rejetée: les écart-types obtenus avec la nouvelle balance sont significativement inférieurs à 0,50 %.

3/ Comparaison de deux variances

Ce test est très utile pour comparer la dispersion des mesures provenant de deux appareils de mesure ou de deux procédés. Il est également le test permettant de conclure une analyse de variance.

Cette estimation nécessite l'utilisation d'une loi statistique particulière dite loi de Snedecor notée F et définie pour deux paramètres ν_A et ν_B correspondant à des degrés de liberté.

On considère deux populations A et B suivant des lois normales pour la caractéristique étudiée (variances σ_A^2 et σ_B^2) dont on tire deux échantillons (effectifs n_A et n_B, variances estimées s_A^2 et s_B^2). Si les lois ne sont pas normales, le test s'applique avec des effectifs supérieurs à 30.

On calcule le rapport $F_{obs} = s_A^2 / s_B^2$ en plaçant la plus grande variance au numérateur.

Le test consiste dans tous les cas à comparer ce rapport à une valeur seuil F_{seuil} donnée dans la table de Snedecor pour un risque α (couramment pris à 5 %) en prenant pour la colonne $\nu_A = n_A - 1$ degrés de liberté et pour la ligne $\nu_B = n_B - 1$ degrés de liberté.

Suivant la nature du test, on examine en fait si ce rapport en tenant compte des fluctuations aléatoires est effectivement différent de 1 (test bilatéral) ou supérieur à 1 (test unilatéral).

test bilatéral : $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ $H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$

Si $\boxed{F_{obs} < F_{(\nu A\,;\,\nu B),\ 0{,}975}}$ les deux variances observées ne sont pas significativement différentes en tenant compte des fluctuations aléatoires.

Sinon, les deux variances observées sont significativement différentes

test unilatéral à droite : $H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2$ $H_1 : \sigma_A^2 > \sigma_B^2$

Si $\boxed{F_{obs} < F_{(\nu A\,;\,\nu B),\ 0{,}95}}$ la variance σ_A^2 observée n'est pas significativement supérieure à la variance σ_B^2.

Sinon, la variance σ_A^2 observée est significativement supérieure à la variance σ_B^2.

<u>remarque :</u> le fait de placer au numérateur toujours la variance la plus élevée rend inutile le test unilatéral à gauche.

<u>application 10 :</u> *un nouveau spectrophotomètre UV-visible de marque Y doit être acheté dans un laboratoire afin de mesurer la concentration d'un ion métallique complexé. Un technicien de la société Y vient effectuer une démonstration sur un lot test fourni par le laboratoire. Il prétend que son appareil, de coût supérieur, a une* *précision supérieure à celle du spectrophotomètre possédé par le laboratoire. On effectue un test comparatif sur le même lot avec 15 déterminations (exprimées en mg.L^{-1}) pour chacun des appareils. On admettra que les distributions des concentrations suivent des lois normales.*

49,75	50,02	49,25
49,5	49,25	50,42
50,04	50,35	47,52
48,61	50,4	49,75
52,14	50,3	50,29

Spectrophotomètre du laboratoire (référence A)

50,94	51,74	48,86
49,04	48,86	49,75
50,02	49,75	49,5
49,11	49,6	49,5
49,64	51,88	48,59

Spectrophotomètre Y (référence B)

On effectue un test unilatéral car l'appareil du laboratoire a une variabilité a priori plus grande.

Les hypothèses sont les suivantes et on considère un risque α de 5 % :

$$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \qquad H_1 : \sigma_A^2 > \sigma_B^2$$

On calcule les écart-types estimés s_A et s_B pour $n_A = n_B = 15$ valeurs.

$s_A = 1,0145$ *et* $s_B = 0,9989$ *d'où* $s_A^2 = 1,02920$ *et* $s_B^2 = 0,9978$

On en déduit F_{obs} : $F_{obs} = \dfrac{1,0292}{0,9978} \approx 1,03$

D'après la table de Snedecor, on détermine $F_{(\nu A\,;\,\nu B),\ 0,95} = F_{(15-1\,;\,15-1),\ 0,95} = 2,48$

Comme $F_{obs} < F_{(14\,;\,14),\ 0,95}$, on en conclut que l'appareil du laboratoire n'a pas une variabilité supérieure à celle du spectrophotomètre Y : les deux variances observées ne sont pas significativement différentes. On doit admettre que l'appareil de la société Y n'a donc pas une meilleure précision.

4/ Comparaison de deux moyennes

Ce test est d'une très grande importance car ses applications sont multiples ; on distingue deux cas d'application bien différents.

remarque : dans cet exposé la comparaison de plus de deux moyennes n'est pas abordée car ce problème est plus difficile à résoudre : il s'agit d'effectuer alors une analyse de la variance. L'analyse de la variance est une technique très utilisée : elle intervient toutes les fois où on étudie l'influence de plusieurs facteurs sur une caractéristique, notamment lors de l'exploitation des plans d'expérience.

4.1/ Echantillons indépendants

Ce test intervient notamment toutes les fois où on souhaite comparer une caractéristique d'un produit obtenu suivant deux procédés différents ; on extrait alors un échantillon d'un lot obtenu à partir de chacun des procédés.

On distingue ici le cas des grands et des petits échantillons.

⇒ ***grands échantillons* (n_A et $n_B \geq 30$)**

On considère deux échantillons (extraits de deux populations A et B de moyennes m_A et m_B) d'effectifs n_A (n_B), de moyennes $\overline{x}_A$ ($\overline{x}_B$) et d'écarts-types estimés s_A et s_B. On choisit un risque α de 5 %.

On admet que la différence des variables aléatoires associées aux moyennes des deux échantillons suit une loi normale $N(m_A - m_B, \sigma_D)$. On définit l'écart-type estimé s_D de la différence par:

$$\boxed{s_D = \sqrt{\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}}}$$

On choisit un risque α de 5 % et on en déduit alors les tests suivants.

test bilatéral : $H_0 : m_A = m_B$ contre $H_1 : m_A \neq m_B$

On vérifie H_0 si: $\boxed{\left|\overline{x}_A - \overline{x}_B\right| \leq 1{,}96 \cdot s_D}$

test unilatéral à droite : $H_0 : m_A = m_B$ contre $H_1 : m_A > m_B$

On vérifie H_0 si: $\boxed{\overline{x}_A - \overline{x}_B \leq 1{,}64 \cdot s_D}$

⇒ ***petits échantillons (n_A ou n_B < 30)***

Dans ce cas les tests sont possibles en ajoutant deux hypothèses supplémentaires qui restreignent le champ d'application:

- la loi normale s'applique aux populations dont sont issus les deux échantillons.

- les deux écarts-types estimés s_A et s_B ne sont pas significativement différents. La comparaison de deux moyennes exige donc d'avoir auparavant examiné les variances des deux échantillons.

On calcule différemment l'écart-type de la différence s_D'.

$$\boxed{s_D' = \sqrt{\frac{s^2}{n_A} + \frac{s^2}{n_B}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{s^2 = \frac{(n_A - 1)\cdot s_A^2 + (n_B - 1)\cdot s_B^2}{n_A + n_B - 2}}$$

où s^2 est l'estimation de la variance commune.

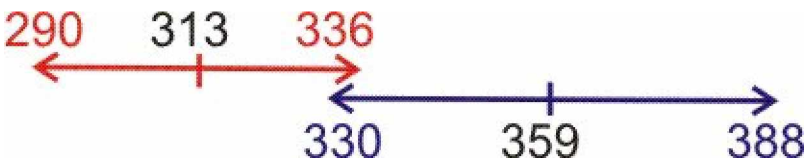
Pour un risque α de 5 %, on remplace ensuite dans les relations obtenus pour les grands échantillons 1,96 et 1,64 par respectivement $t_{\nu,1-\frac{\alpha}{2}}$ et $t_{\nu,1-\alpha}$ avec un nombre de degrés de liberté ν égal à $n_A + n_B - 2$.

Le tableau suivant récapitule les hypothèses H_0 à vérifier dans tous les cas de figures.

TEST	H_0 vérifiée si …	
	Grands échantillons	**Petits échantillons**
Test bilatéral	$\lvert\overline{x}_A - \overline{x}_B\rvert \leq 1{,}96 \cdot s_D$	$\lvert\overline{x}_A - \overline{x}_B\rvert < t_{\nu,1-\frac{\alpha}{2}} \cdot s_D'$
Test unilatéral à droite	$\overline{x}_A - \overline{x}_B \leq 1{,}64 \cdot s_D$	$\overline{x}_A - \overline{x}_B \leq t_{\nu,1-\alpha} \cdot s_D'$

<u>remarque :</u> il est faux d'examiner si les deux intervalles de confiance des moyennes se chevauchent; ils peuvent parfaitement se chevaucher … avec une différence significative !

Dans l'exemple ci-dessous la détermination d'une concentration par deux méthodes montrent que les intervalles de confiance avec 5 % de risque se chevauchent mais uniquement car les deux méthodes d'analyse ont une grande variabilité. Le test de comparaison des moyennes (313 et 359) montre qu'en fait les deux valeurs sont significativement différentes.



application 11: *un opérateur est chargée de vérifier l'évolution en deux semaines d'une solution analysée par un dosage acido-basique. Il effectue donc 10 essais à quatorze jours d'intervalle. Les concentrations relevées sont exprimées en mol.L^{-1}*

jour 1 *(échantillon A)*

0,0528	0,0529
0,0522	0,0522
0,0523	0,0523
0,0522	0,0522
0,0525	0,0523

jour 14 *(échantillon B)*

0,0518	0,0521
0,0521	0,0519
0,0522	0,0520
0,0516	0,0515
0,0521	0,0521

Comme les effectifs des échantillons sont inférieurs à 30, on doit d'abord examiner si les variances sont identiques avant de comparer les moyennes des deux échantillons. On admettra que les deux échantillons sont extraits de populations normales.

On effectue donc un test bilatéral avec les hypothèses suivantes en considérant un risque α de 5 % :

$$H_0 : \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \qquad H_1 : \sigma_A^2 \neq \sigma_B^2$$

On calcule les écarst-types estimés s_A et s_B pour $n_A = n_B = 10$ valeurs.

$$s_A = 0{,}0002601 \text{ et } s_B = 0{,}0002367$$

$$\text{d'où } s_A^2 = 6{,}77 \times 10^{-8} \text{ et } s_B^2 = 5{,}60 \times 10^{-8}$$

On en déduit F_{obs} : $F_{obs} = \dfrac{6{,}77\times10^{-8}}{5{,}60\times10^{-8}} = 1{,}209$

D'après la table de Snedecor, on détermine $F_{(\nu A\,;\,\nu B),\,0,975} = F_{(9\,;\,9),\,0,975} = 4{,}03$

Comme $F_{obs} < F_{(9\,;\,9),\,0,975}$, les deux variances observées ne sont pas significativement différentes: on peut donc maintenant comparer les moyennes en effectuant un test bilatéral avec les hypothèses suivantes pour un risque α de 5 %:

$$H_0 : m_A = m_B \qquad \text{contre} \qquad H_1 : m_A \neq m_B$$

Dans notre cas, $\bar{x}_A = 0{,}05239$ et $\bar{x}_B = 0{,}05194$

On calcule l'écart-type commun s_D'.

$$s_D' = \sqrt{\frac{s^2}{n_A} + \frac{s^2}{n_B}} \qquad \text{avec} \quad s^2 = \frac{9\times6{,}77\times10^{-8} + 9\times5{,}60\times10^{-8}}{10+10-2} = 6{,}185\times10^{-8}$$

donc $s_D' = \sqrt{\dfrac{6{,}185\times10^{-8}}{10} + \dfrac{6{,}185\times10^{-8}}{10}} = 1{,}11\times10^{-4}$

On détermine avec la table de Student que: $t_{10+10-2,\,0{,}975}$ *= 2,10*

$$\left|\overline{x}_A - \overline{x}_B\right| = 4{,}5\times10^{-4} > t_{10+10-2,\,0{,}975}\cdot s_D' = 2{,}09\cdot1{,}11\times10^{-4} = 2{,}32\times10^{-4}$$

On constate donc que les deux concentrations sont significativement différentes avec un risque de 5 %: la solution évolue donc en deux semaines.

4.2/ Echantillons appariés

Les applications industrielles sont nombreuses, on peut citer :

- comparaison de deux appareils de mesure
- comparaison de deux méthodes de préparation
- comparaison de déterminations visuelles par deux opérateurs

Par exemple on souhaite vérifier si deux spectrophotomètres de laboratoire fournissent la même valeur de concentration; pour cela on prépare une série de n solutions différentes; chacune des solutions est analysée avec les deux spectrophotomètres. On obtient donc n paires de mesures.

Plus généralement on dit que deux échantillons sont appariés quand ils constituent deux séries de mesures portant sur les mêmes objets. Cette méthode présente l'avantage du gain en puissance de test par rapport à celle où les échantillons ne sont pas appariés.

On constitue n paires de mesures (deux échantillons appariés de n individus) et on calcule la différence d_i pour chaque paire i. Les différences suivent une loi normale $N(m_d, \dfrac{\sigma_d}{\sqrt{n}})$. On calcule alors la moyenne et l'écart-type estimé des n différences d_i soit $\overline{x}_d$ et s_d.

<u>remarque :</u> il faut bien calculer les différences algébriques et non les valeurs absolues des différences.

On s'intéresse ici au test bilatéral. Suivant les cas on applique les règles ci-dessous pour un risque α de 5 %.

⇒ ***grands échantillons (n ≥ 30)***

$H_0 : m_d = 0$ contre $H_1 : m_d \neq 0$

On vérifie H_0 si $\boxed{\left|\overline{x}_d\right| < 1{,}96 \cdot \dfrac{s_d}{\sqrt{n}}}$

$\Rightarrow$ ***petits échantillons (n < 30)***

Le test s'applique seulement si la distribution des différences suit une loi normale dans le cas où n est inférieur à 11.

On applique alors la même règle de décision que pour les grands échantillons en remplaçant 1,96 par $t_{\nu,1-\frac{\alpha}{2}}$ avec n-1 degrés de liberté pour la loi de Student.

Soit pour vérifier H_0 : $\boxed{|\bar{x}_d| < t_{n-1,\,0{,}975} \cdot \frac{s_d}{\sqrt{n}}}$

application 12 : *deux techniciens de laboratoire déterminent par microscopie le pourcentage de cellules anormales sur des frottis sanguins. Pour vérifier qu'il existe une bonne adéquation il est décidé de faire lire 15 lames différentes par chacun des techniciens. Les résultats sont donnés dans le tableau suivant.*

Numéro de lame	***% lu par technicien 1***	***% lu par technicien 2***
1	*59*	*50*
2	*35*	*29*
3	*62*	*60*
4	*9*	*14*
5	*29*	*29*
6	*3*	*4*
7	*54*	*50*
8	*26*	*21*
9	*0*	*1*
10	*51*	*40*
11	*17*	*12*
12	*45*	*50*
13	*14*	*14*
14	*41*	*39*
15	*68*	*75*

On est en présence de 15 paires de valeurs : ceci correspond à un petit échantillon mais le nombre de paires étant supérieur à 11, il n'est pas nécessaire de vérifier l'hypothèse de normalité pour la distribution des différences.

On effectue un test bilatéral pour comparer la moyenne des différences à 0.

$H_0 : m_d = 0$ *contre* $H_1 : m_d \neq 0$ *pour* $n = 15$

On calcule $\bar{x}_d$ *et* s_d : $\bar{x}_d = 1{,}67$ *et* $s_d = 5{,}15$

On détermine avec la table de Student que $t_{15-1,\,0{,}975} = 2{,}14$

On obtient : $\left|\overline{x}_d\right| = 1{,}67 < t_{15-1,\,0{,}975} \cdot \dfrac{s_d}{\sqrt{n}} = 2{,}14 \cdot \dfrac{5{,}15}{\sqrt{15}} = 2{,}85$

Avec un risque α *de 5%, on en déduit que la détermination des cellules anormales par les deux opérateurs n'est pas significativement différente.*

IX/ UTILISATION DE LA PUISSANCE D'UN TEST

1/ Intérêt de la puissance

On a vu que la puissance d'un test est la probabilité de rejeter l'hypothèse nulle H_0 de façon correcte c'est-à-dire lorsqu'elle est effectivement fausse. En fait la puissance représente les chances d'identifier une différence significative lorsqu'elle existe.

La puissance peut être utilisée avant la planification d'expériences (analyse prospective) ou après leur exécution (analyse rétrospective).

- Une étude prospective est utilisée pour évaluer si la puissance choisie par l'expérimentateur (généralement 90 %) est suffisante pour détecter une différence minimale qu'on juge importante pour le cas étudié. Autrement dit l'expérimentateur se pose le type de question suivante : "si j'obtiens une différence de rendement avec les deux procédés égale à 1,5 %, mon test sera-t-il capable de détecter cette différence ou alors cette différence sera-t-elle masquée par les fluctuations aléatoires ? "

  En fonction de la réponse donnée, l'expérimentateur sera peut-être conduit à augmenter l'effectif des échantillons ou à prendre des mesures pour diminuer la variabilité des mesures.

- Une étude rétrospective est utilisée après avoir récupéré les mesures des expériences; si l'analyse ne révèle par exemple aucune différence statistiquement significative pour le risque α considéré, l'expérimentateur calcule la puissance du test à partir de l'effectif de l'échantillon et de la différence minimale qu'il juge importante à détecter.

  Si la puissance calculée est faible (inférieure à 90 % par exemple), l'expérimentateur peut alors décider d'effectuer des mesures supplémentaires. Cependant, si la puissance est élevée, l'expérimentateur conclut qu'il n'y a pas de différence significative et il termine ainsi son étude expérimentale.

Les logiciels proposent dans les calculs liés à la puissance plusieurs grandeurs à saisir :

$\Rightarrow$ la différence minimale intéressante à détecter pour l'étude considérée
$\Rightarrow$ l'effectif de l'échantillon
$\Rightarrow$ la puissance du test

L'utilisateur selon le besoin saisit deux des trois grandeurs: le logiciel fournit alors la valeur pour la troisième grandeur.

2/ Détermination de l'effectif minimum nécesaire

Il existe également des relations donnant avec une précision satisfaisante l'effectif minimum nécessaire quand on s'impose une valeur de puissance et une différence minimale.

2.1/ Comparaison d'une moyenne à une valeur de référence

Dans une approche prospective il est souvent intéressant de déterminer l'effectif minimum n de l'échantillon pouvant mettre en évidence une différence D entre la moyenne d'un échantillon et une référence avec une puissance de test de 90 %. Si on choisit d'exécuter le test bilatéral avec α = 5 % pour n > 30, on obtient :

$$\boxed{n \approx 10{,}5 \cdot \frac{CV^2}{\Delta^2}} \quad \text{avec} \quad CV = \frac{s}{m} \quad \text{et} \quad \Delta = \frac{D}{m}$$

m et s sont des ordres de grandeur envisagés pour la moyenne et l'écart-type d'un échantillon.

<u>application 13:</u> *la teneur en calcium d'une eau minérale est indiquée sur l'étiquette: 65 mg.L^{-1}. Les dosages complexométriques utilisés montrent un écart-type estimé de 1,3 mg.L^{-1}. On cherche le nombre de prélèvements nécessaire pour mettre en évidence une différence de 0,5 mg.L^{-1} avec une puissance de 90 %.*

On calcule CV et Δ: $CV = \frac{1{,}3}{65} = 0{,}020$ et $\Delta = \frac{0{,}5}{65} = 0{,}00769$

Donc $n \approx 10{,}5 \cdot \frac{0{,}020^2}{0{,}00769^2} = 71$ …

L'intérêt d'améliorer la précision des mesures (donc de diminuer l'écart-type) apparaît dans le calcul suivant où on admet que l'écart-type est maintenant descendu à 0,9 mg.L^{-1}.

On obtient alors $CV = \frac{0{,}9}{65} = 0{,}0138$ donc $n \approx 10{,}5 \cdot \frac{0{,}0138^2}{0{,}00769^2} = 34$

Une amélioration de 30 % de la précision entraîne 50 % de prélèvements en moins pour la détection réussie (puissance de test de 90 %) d'une différence de 0,5 mg.L^{-1}.

2.2/ Comparaison de deux moyennes

Si on s'impose comme puissance de test 90 % avec α = 5 %, la relation suivante indique l'effectif minimum nécessaire n pour de grands échantillons (n_A et n_B > 30) si on cherche à détecter une différence D entre les moyennes des deux échantillons :

On note s l'ordre de grandeur de l'écart-type commun (application ici dans le cas d'égalité des variances) et m l'ordre de grandeur de la moyenne.

$$\boxed{n \approx 21 \cdot \left(\frac{CV^2}{\Delta^2} \right)} \quad \text{avec} \quad CV = \frac{s}{m} \quad \text{et} \quad \Delta = \frac{D}{m}$$

application 14 : *deux procédés chimiques A et B conduisent à des rendements voisins de l'ordre de 78 % avec un écart-type estimé d'environ 2,2 % pour chacun des procédés. Les valeurs moyennes obtenues pour A et B (77,5 % pour A et 78,2 % pour B) n'ont pas permis de montrer une différence statistiquement significative avec un risque α de 5 %. Ces résultats ont été obtenus à l'issue d'une campagne de production de 40 lots pour chaque procédé. On se demande néanmoins si une différence de 1 % aurait pu être détectée avec une puissance de 90 %.*

On calcule CV et Δ : $CV = \frac{2,2}{78} = 0,0282$ et $\Delta = \frac{1}{78} = 0,0128$

Donc $n \approx 21 \cdot \frac{0,0282^2}{0,0128^2} = 102$ *…*

Il était donc impossible de détecter une différence de rendement de 1 % entre les deux procédés à partir de seulement 40 lots produits.

En utilisant le logiciel MINITAB, on arrive en fait à la conclusion qu'avec 40 lots, la puissance du test est de 51 % si il existe une différence réelle entre les rendements des deux procédés de 1 %. Il y donc près de 50 % de risque de conclure à tort qu'il n'y a aucune différence entre les procédés.

Pour répondre à la question posée il faut soit attendre d'autres lots de fabrication soit diminuer la variabilité de la production (diminuer l'écart-type).

X/ ANALYSE D'UNE DISTRIBUTION A DEUX CARACTERES

1/ Corrélation et régression

Plusieurs cas peuvent se produire quand on étudie simultanément deux caractères :

- les variables sont liées par une relation physique bien établie (température et volume d'un gaz par exemple).

- les variables sont complètement indépendantes (température et masse d'un objet par exemple).

- les variables ne sont pas complètement indépendantes, il existe une certaine relation due à une cause commune. L'existence d'une liaison ne signifie nullement qu'il y ait une relation de cause à effet car la variation des deux variables peut provenir d'une cause commune. Seule l'expérience est capable de trancher. Par exemple la densité et l'indice de réfraction dépendent de la composition d'un mélange mais ne sont pas liés par les lois physico-chimiques.

La mise en évidence de la liaison entre deux variables quantitatives s'effectue à l'aide de deux procédés statistiques très semblables: la corrélation et la régression. Leur distinction s'effectue selon le mode de prélèvement des échantillons :

- La corrélation ne distingue pas les variables : le prélèvement d'échantillon est effectué au hasard dans la population. La corrélation cherche seulement à établir s'il existe un lien entre deux caractères.

  Exemple : on examine une série de lots de poudre dont on détermine la taille moyenne des cristaux. Suivant le lot, les tailles obtenues montrent des différences notables. On s'aperçoit que lors de la fabrication des lots les valeurs des pH ajustés étaient également trop variables. On cherche donc à vérifier s'il existe une corrélation entre la taille des cristaux et la valeur du pH pendant la fabrication.

- La régression distingue les variables indépendantes dont l'expérimentateur fixe la valeur et les variables dépendantes obtenues dans l'expérience. L'échantillonnage est donc dirigé. La régression permet de définir un modèle expliquant une variable par une autre dite variable explicative.

  Exemple : on fabrique des alliages avec des teneurs en chrome différentes mais connues précisément. Pour chacune des teneurs en chrome on réalise plusieurs éprouvettes dont on teste la résistance à la corrosion. On cherche à établir ensuite une relation mathématique liant la résistance à la corrosion à la teneur en chrome.

Dans la suite on se limitera à l'étude de la corrélation et de la régression linéaires.

2/ Corrélation linéaire

On considère les n couples de valeurs (x_i , y_i) et on représente les couples sur un graphique.

On calcule la covariance cov(x,y) puis le coefficient de corrélation r :

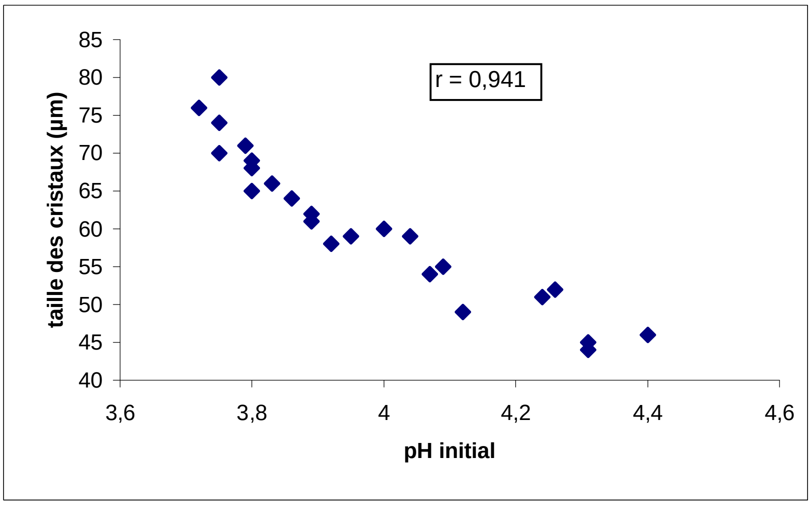
$$\boxed{\mathrm{cov}(x,y) = \frac{\sum\left[(x_i - \bar{x}) \cdot (y_i - \bar{y})\right]}{n}} \quad \text{et} \quad \boxed{r = \frac{\mathrm{cov}(x,y)}{\sigma_x \cdot \sigma_y}}$$

$$\text{avec} \quad \boxed{\sigma_x^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sigma_y^2 = \frac{\sum (y_i - \bar{y})^2}{n}}$$

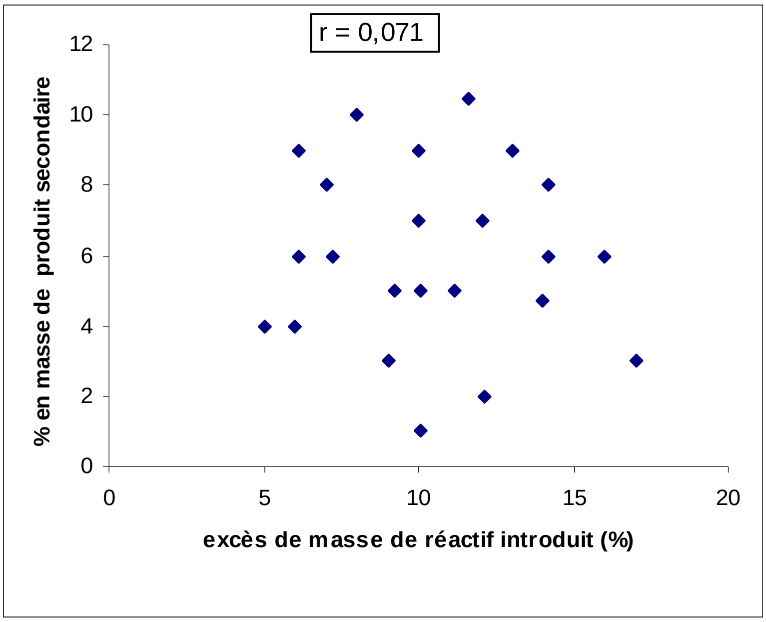
$\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont les moyennes respectives des x_i et y_i valeurs.

Suivant les valeurs de r, différents cas peuvent se présenter ; plus la corrélation est significative, plus $|r|$ tend vers 1. Un nuage de points réparti sur l'ensemble du plan correspond à r très proche de 0 au contraire.

Dans le cas présenté ci-dessous on peut penser, d'après l'allure du graphique et la valeur du coefficient de corrélation, qu'il existe effectivement une corrélation entre le pH initial de la précipitation et la taille des cristaux obtenus.

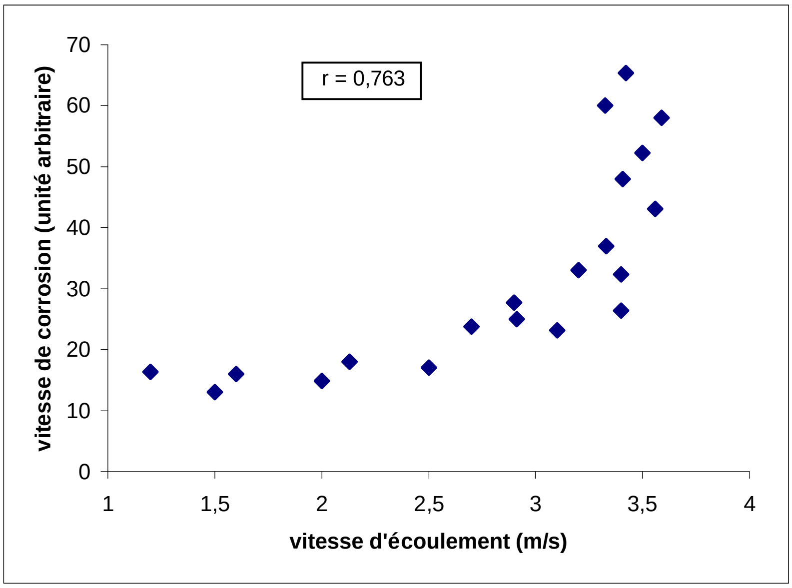


Dans l'exemple suivant on a soupçonné l'influence de l'excès de réactif introduit par un opérateur sur la quantité obtenu en produit secondaire après la synthèse ; l'allure du graphique ainsi que la valeur du coefficient de régression r montre qu'en fait il faut rechercher une autre cause car on ne relève aucune corrélation.



Pourtant un coefficient de corrélation faible signifie seulement qu'il n'y a pas de liaison linéaire entre les variables: une relation non linéaire est toujours possible.

On aborde dans le cas ci-dessous la vitesse de corrosion d'une plaque en fonction de la vitesse d'écoulement à sa surface d'une eau peu corrosive. A l'évidence il n'existe pas de corrélation linéaire (valeur de r trop faible) mais on montrerait qu'une corrélation exponentielle est une bonne hypothèse.



En réalité la valeur de $|r|$ ne peut s'interpréter seule. Son degré de signification est fonction du nombre de couples (x,y) : une valeur élevée ne signifie pas forcément une forte liaison si le nombre de couples est petit.

remarque : avec deux couples, donc deux points, r est forcément égal à 1 mais on sent bien intuitivement qu'il est impossible d'en tirer un renseignement sur une possible corrélation …

Le test de la liaison (test de Bravais Pearson) permet de vérifier ce point.

Pour un risque α de 5 %, le nombre de degrés de liberté ν est égal à n-2, n étant le nombre de couples de valeurs. Pour que la corrélation soit significative, la valeur de $|r|$ calculée doit être supérieure à la valeur de r_{seuil} indiquée dans le tableau de l'Annexe 2.

<u>remarque :</u> le risque d'erreur α correspond ici au risque d'affirmer que la corrélation entre deux variables est significative alors qu'il n'en est rien.

<u>application 15 :</u> *on reprend l'exemple précédent de corrélation entre la taille des cristaux et le pH initial en indiquant les valeurs observées dans un tableau.*

pH	*taille (µm)*	*pH*	*taille (µm)*	*pH*	*taille (µm)*	*pH*	*taille (µm)*
3,72	*76*	*3,8*	*68*	*3,92*	*58*	*4,12*	*49*
3,75	*80*	*3,8*	*65*	*3,95*	*59*	*4,24*	*51*
3,75	*70*	*3,83*	*66*	*4*	*60*	*4,26*	*52*
3,75	*74*	*3,86*	*64*	*4,04*	*59*	*4,31*	*45*
3,79	*71*	*3,89*	*62*	*4,07*	*54*	*4,31*	*44*
3,8	*69*	*3,89*	*61*	*4,09*	*55*	*4,4*	*46*

On calcule un coefficient de corrélation linéaire $|r|$ *égale à 0,941. Il est nécessaire alors de réaliser le test de la liaison pour trancher.*

Pour un risque α *de 5 %, le nombre de degrés de liberté* ν *est égal à 22 (24 couples de valeurs). La valeur de* r_{seuil} *indiquée dans le tableau de l'Annexe 2 est environ égale à 0,38.*

On obtient donc: $r_{seuil} = 0,38 < |r| = 0,941$

On en déduit que la corrélation linéaire est significative

3/ Régression linéaire

L'étude statistique sur la corrélation s'applique aussi à la régression, notamment pour le coefficient r et le test de la liaison.

La régression linéaire de y par rapport à x consiste à définir une relation du type :

$$y = a.\,x + b$$

On cherche les valeurs des paramètres a et b de façon que la droite passe au mieux dans l'ensemble des points expérimentaux. On utilise une méthode dite "des moindres carrés" qui minimise l'écart entre la droite et les points expérimentaux. La droite de régression s'obtient à partir des valeurs de a et b suivantes :

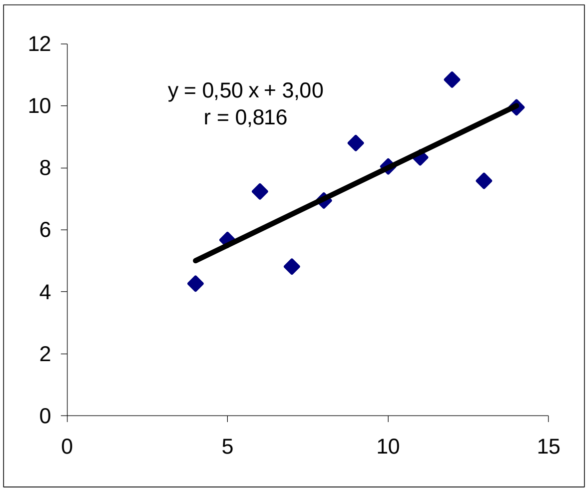
$$a = r \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x} \qquad \text{et} \qquad b = \overline{y} - a \cdot \overline{x}$$

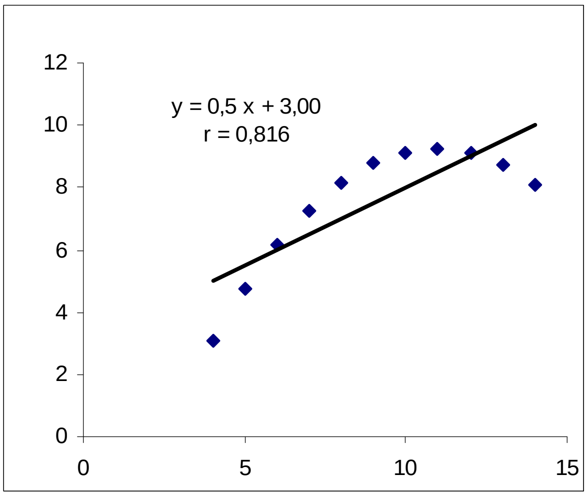
Le terme r^2 mesure la qualité de la liaison en exprimant le % des variations de y explicables par les variations de x. Le terme $1 – r^2$ mesure lui les variations de y dues aux fluctuations aléatoires.

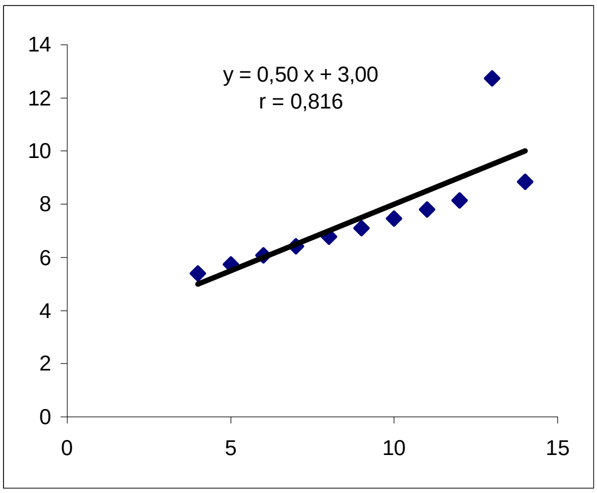
La variance de y s'explique comme la somme de la variance due à la variation du facteur x dans la régression (fraction r^2 de la variance totale) et à la variance résiduelle due à la dispersion aléatoire (fraction $1 - r^2$ de la variance totale).

remarque : on utilise souvent les termes de résidu (ou de valeur résiduelle); il s'agit de la différence entre la valeur expérimentale et la valeur déterminée d'après le modèle tiré de la régression. La régression est d'autant plus "précise" que les résidus sont faibles. Les résidus doivent également être distribués selon une loi normale.

Dans tous les cas pour éviter les erreurs d'interprétation il faut tracer le graphique et ne pas se contenter de calculer le coefficient r. Les exemples suivants (voir référence bibliographique **1/**) montrent que pour une même valeur de r et une même droite de régression les conclusions à donner peuvent être fort différentes …







XI/ BIBLIOGRAPHIE

Ouvrages

1/ "Guide du technicien qualité", B. BOITEUX, Delagrave, 2001

2/ Techniques de l'ingénieur: articles A166 A167 R250 R260

3/ "Statistiques appliquées à l'exploitation des mesures Tome 1", CEA, MASSON, 1978

4/ "Méthodes statistiques à l'usage des médecins et des biologistes", D. SCHWARTZ, 4ème Edition, Médecine-Sciences Flammarion, 1993

5/ "Statistique", S. GELLER, MASSON, 1983

6/ Documentation logiciel Minitab 13.31

Web

7/ www.educnet.education.fr/rnchimie/

Cours de statistiques par B. Benichou, ENCPB, Paris

8/ www.itl.nist.gov/div898/handbook/

NIST/SEMATECH e-Handbook of Statistical Methods

ANNEXE 1 : TESTS DE DIXON ET BRAVAIS PEARSON

TEST DE DIXON

Table de r_1		
n	**α = 5 %**	**α = 1 %**
3	**0,941**	**0,988**
4	**0,765**	**0,889**
5	**0,642**	**0,780**
6	**0,560**	**0,698**
7	**0,507**	**0,637**
8	**0,468**	**0,590**
9	**0,437**	**0,555**
10	**0,412**	**0,527**

Table de r_2		
n	**α = 5 %**	**α = 1 %**
11	**0,637**	**0,745**
12	**0,600**	**0,704**
13	**0,570**	**0,670**
14	**0,546**	**0,641**
15	**0,525**	**0,616**
16	**0,507**	**0,595**
17	**0,490**	**0,577**
18	**0,475**	**0,561**
19	**0,462**	**0,547**
20	**0,450**	**0,535**
21	**0,440**	**0,524**
22	**0,430**	**0,514**
23	**0,421**	**0,505**
24	**0,413**	**0,497**
25	**0,406**	**0,489**
26	**0,399**	**0,486**
27	**0,393**	**0,475**
28	**0,387**	**0,469**
29	**0,381**	**0,463**
30	**0,376**	**0,457**

CORRÉLATION LINÉAIRE : TEST DE BRAVAIS PEARSON

ν	r_{seuil}	ν	r_{seuil}	ν	r_{seuil}
1	0,9969	11	0,5529	25	0,3809
2	0,95	12	0,5324	30	0,3494
3	0,8783	13	0,5139	35	0,3246
4	0,8114	14	0,4973	40	0,3044
5	0,7545	15	0,4821	45	0,2875
6	0,7067	16	0,4683	50	0,2732
7	0,6664	17	0,4555	60	0,25
8	0,6319	18	0,4438	70	0,2319
9	0,6021	19	0,4329	80	0,2172
10	0,576	20	0,4227	90	0,205

ANNEXE 2 : NOTION DE P-VALUE

Les logiciels de statistique utilisent la notion importante de p-value pour l'interprétation des tests statistiques.

Pour un test l'expérimentateur fixe d'ordinaire le risque α de première espèce. En réalité il est souvent plus intéressant de déterminer la valeur limite du risque au-delà de laquelle l'hypothèse alternative H_1 aurait été acceptée.

La p-value se définit donc comme la probabilité d'obtenir la grandeur tirée de l'échantillon (moyenne par exemple) égale à celle spécifiée dans l'hypothèse nulle H_0. Si la valeur de la p-value est inférieure ou égale au risque de première espèce α on en déduit alors que l'hypothèse H_0 peut être rejetée et donc qu'on peut accepter l'hypothèse H_1.

La p-value est intéressante car elle permet en fait de déterminer le risque α qui pourrait être fixé pour ne pas rejeter une hypothèse H_0 ; donc il n'est pas utile de fixer le risque a priori.

L'application suivante permet de déterminer la p-value. On dispose d'une série de mesures de concentration obtenues avec un procédé modifié et on examine si on parvient à atteindre la valeur de référence recherchée m_0 de 3,41 $g.L^{-1}$. Les mesures en $g.L^{-1}$ sont répertoriées dans le tableau suivant.

3,43	3,41	3,49	3,48	3,51	3,48	3,40	3,39	3,50	3,45	3,45
3,45	3,43	3,46	3,38	3,47	3,39	3,40	3,42	3,41	3,49	3,43
3,36	3,37	3,38	3,42	3,34	3,43	3,42	3,37	3,38	3,42	3,40

On calcule la moyenne $\overline{x}_A$ et l'écart-type estimé s_A.

$$\overline{x}_A = 3{,}4246 \text{ g.L}^{-1} \qquad s_A = 0{,}04367 \text{ g.L}^{-1}$$

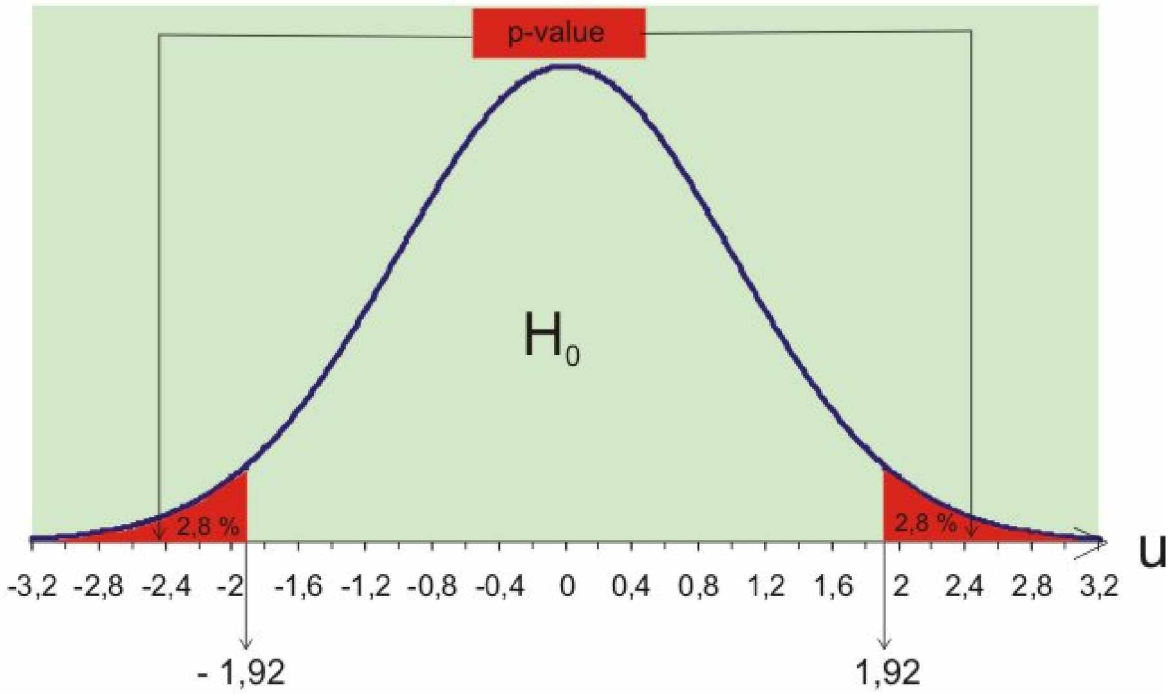
On construit le test bilatéral : $H_0 : m_A = m_0 = 3{,}41$ $H_1 : m_A \neq m_0 = 3{,}41$

L'effectif de l'échantillon n_A étant supérieur à 30, pour l'hypothèse H_0, la concentration moyenne des échantillons obéit à une loi normale $N(m_0, \frac{s_A}{\sqrt{n_A}})$, donc la variable $u = \frac{\overline{x}_A - m_0}{s_A / \sqrt{n_A}}$ suit une loi normale réduite.

On calcule alors la valeur u correspondante : $u = \frac{3{,}4246 - 3{,}41}{0{,}04367 / \sqrt{33}} = 1{,}92$

D'après la table de la loi normale réduite, F(1,92) = 0,972.

Par conséquent p-value = 2 . (1 – 0,972) = 2 . 0,028 = 0,056



α = 5 % **H_0 : -1,96 < u < + 1,96**

α = 10 % **H_0 : -1,64 < u < + 1,64**

Le risque α de 5,6 % apparaît comme le seuil limite. Dans l'hypothèse H_0 (la moyenne avec le nouveau procédé est égale à m_0), la zone en rouge apparaît en fait comme la probabilité d'observer des moyennes d'échantillons supérieures à 3,4246 et inférieures à 3,3954 (en effet: 3,41 – [3,4246 – 3,41] = 3,3954).

Si on choisit un risque α de 5 %, l'hypothèse H_0 (on ne peut pas dire que ce procédé entraîne des concentrations significativement différentes de 3,41) ne peut être rejetée. Le choix d'un risque α de 10 % entraîne une conclusion opposée : l'hypothèse H_0 est rejetée, la concentration obtenue avec le nouveau procédé est significativement différente de 3,41.

ANNEXE 3 : APPLICATIONS STATISTIQUES DE BASE AVEC EXCEL

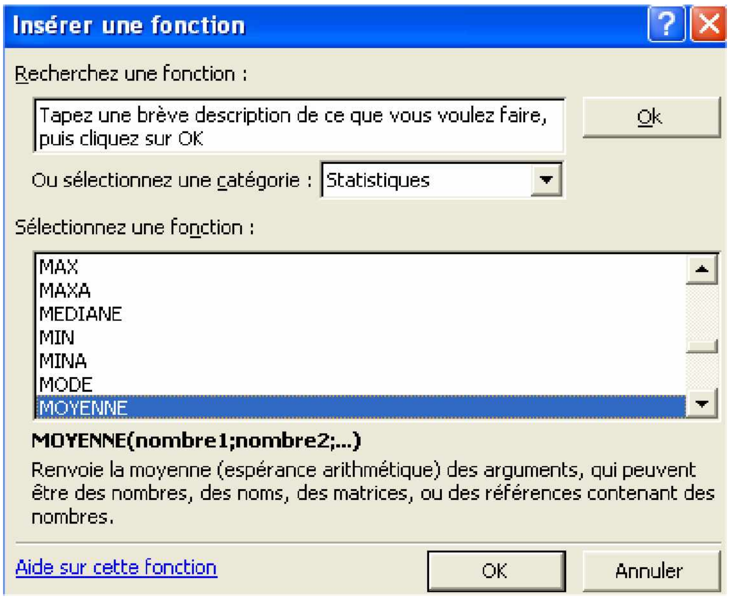
La version d'EXCEL utilisée est EXCEL 2002.

I/ FONCTIONNALITES EXCEL

Le logiciel EXCEL présente deux possibilités pour effectuer des études statistiques :

- **Menus: INSERTION puis FONCTION**

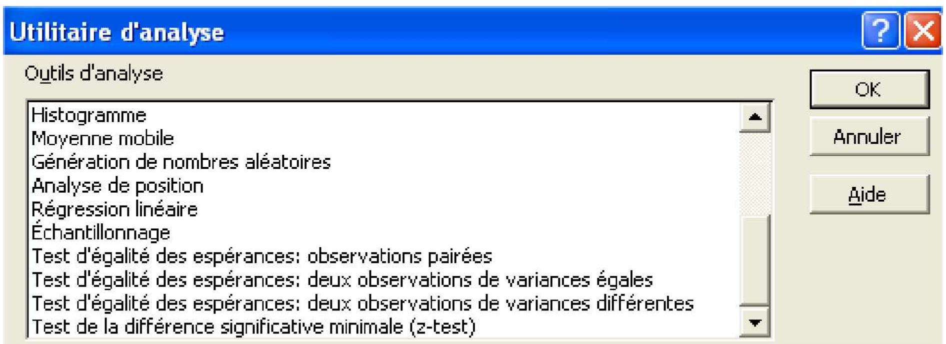
On choisit ensuite une catégorie de fonctions, STATISTIQUES dans notre cas.



Il est à noter que ces fonctions peuvent être saisies manuellement (en les précédant du signe =) … si on connaît la syntaxe.

EXCEL considère également comme fonction des tests : test de Fisher, test de Student …

- **Menus: OUTILS puis UTILITAIRE D'ANALYSE**



L'utilitaire est souvent plus facile à utiliser que la procédure par fonctions.

remarque : l'utilitaire d'analyse est en fait une macro qui n'est pas chargée par défaut à l'installation d'EXCEL. Si l'UTILITAIRE D'ANALYSES n'apparaît pas dans le menu OUTILS, il faut le sélectionner à partir des menus OUTILS puis MACROS COMPLÉMENTAIRES.

II/ ETUDE D'UNE DISTRIBUTION

1/ Avec les fonctions

On indique ici les caractéristiques recherchées et la syntaxe à utiliser pour une plage de valeurs pour la distribution définie par : A1:A16

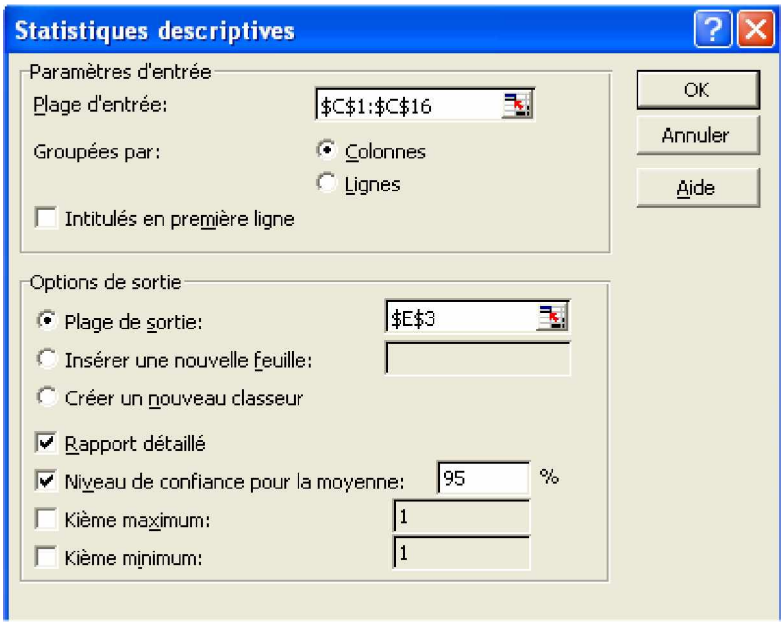
Mediane	mediane(A1:A16)
Valeur maximale	max(A1:A16)
Valeur minimale	min(A1:A16)
Moyenne	moyenne(A1:A16)
Ecart type de la population	ecartypep(A1:A16)
Ecart type estimé de la population	ecartype(A1:A16)

2/ Avec l'utilitaire d'analyses

On reprend la série de données de l'***application 3***.

On choisit dans l'utilitaire: STATISTIQUES DESCRIPTIVES.

Il suffit alors de saisir la plage des valeurs et de demander un rapport détaillé en fixant le risque de première espèce : le niveau de confiance de 95 % correspond à $\alpha = 0,05$.



On obtient alors le résultat suivant:

C	D	E	F
33,3			
32,5			
33,5		*Colonne1*	
32,7			
33,2		Moyenne	32,96875
33,3		Erreur-type	0,095620234
32,5		Médiane	33,05
33,4		Mode	33,3
32,7		Écart-type	0,382480936
32,6		Variance de l'échantillon	0,146291667
32,8		Kurstosis (Coefficient d'applatissement)	-1,356696131
33,2		Coefficient d'assymétrie	-0,257068069
33,4		Plage	1,2
33		Minimum	32,3
32,3		Maximum	33,5
33,1		Somme	527,5
		Nombre d'échantillons	16
		Niveau de confiance(95,0%)	0,20380983

L'écart-type indiqué est l'écart-type estimé de la population à partir des données de l'échantillon.

On peut déduire du tableau l'intervalle de confiance pour la moyenne avec l'indication du niveau de confiance :

$$32{,}97 - 0{,}20381 \leq m \leq 32{,}97 + 0{,}20381$$

<u>remarque :</u> Les coefficients d'aplatissement et d'assymétrie sont des grandeurs utilisées dans la comparaison d'une distribution à une distribution normale.

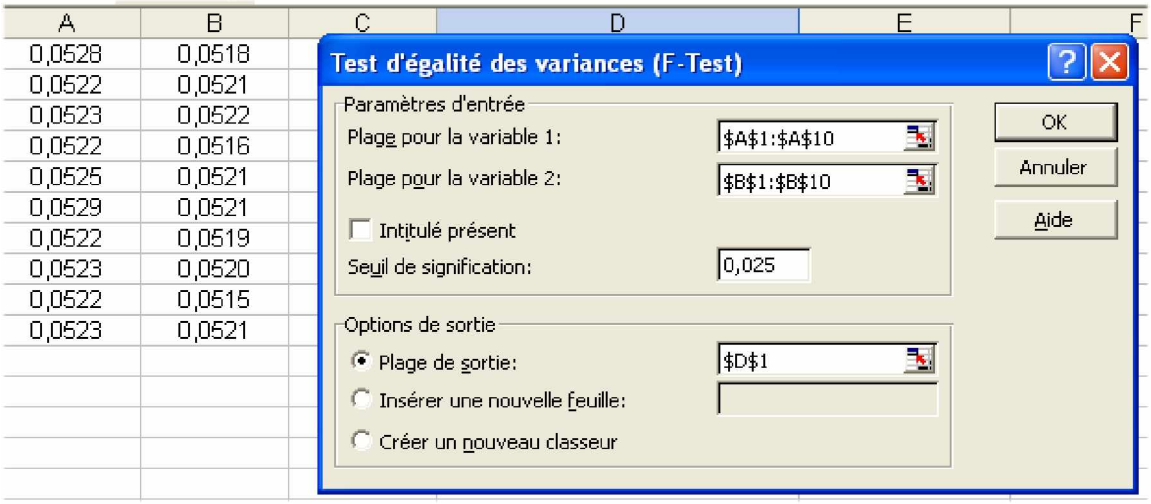
III/ EXEMPLES DE RÉALISATION DE TESTS STATISTIQUES

On utilise l'utilitaire d'analyses.

1/ Comparaison de deux variances dans un test bilatéral

On reprend la série de données de l'***application* 11** et on choisit dans l'utilitaire : TEST D'EGALITE DES VARIANCES (F-TEST).

Il est nécessaire de placer en première colonne l'échantillon ayant la variance la plus grande. Comme EXCEL effectue en fait un test unilatéral il faut définir un seuil de signification de 0,025 pour travailler en test bilatéral (risque partagé à gauche et à droite) avec un risque de première espèce de 5 %.



On retrouve dans le tableau les moyennes et les variances estimées pour chaque échantillon.

Test d'égalité des variances (F-Test)		
	Variable 1	*Variable 2*
Moyenne	0,05239	0,05194
Variance	6,76667E-08	5,6E-08
Observations	10	10
Degré de liberté	9	9
F	1,208333333	
P(F<=f) unilatéral	0,391311518	
Valeur critique pour F (unilatéral)	4,025991984	

- "Valeur critique pour F (unilatéral)" correspond à F_{seuil}.
- "P(F<=f) unilatéral" correspond à la demi p-value car le test d'EXCEL est unilatéral.
- F est le rapport du carré des variances soit F_{obs}.

Deux raisonnements sont possibles conduisant à la même conclusion : les deux variances ne sont pas significativement différentes :

- $F = F_{obs} = 1{,}208 < F_{seuil} = 4{,}03$
- p-value = 0,391x 2 = 0,782 > α = 0,05

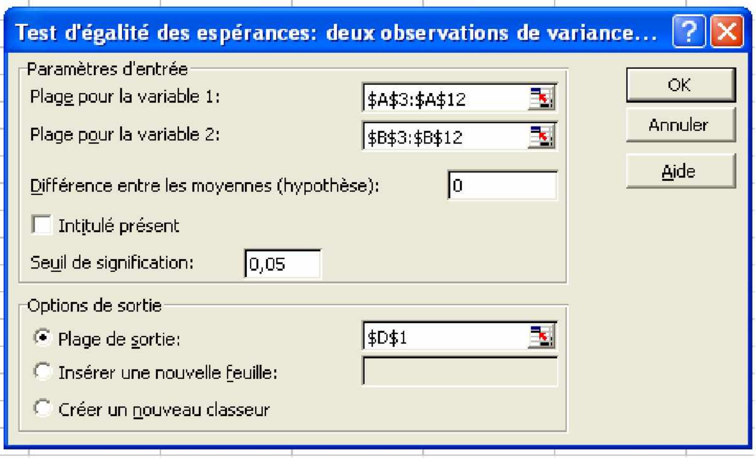
2/ Comparaison de deux moyennes dans un test bilatéral (échantillons indépendants)

On reprend la série de données précédentes et on choisit dans l'utilitaire :

TEST D'EGALITE DES ESPERANCES : DEUX OBSERVATIONS DE VARIANCES EGALES

Après le choix des deux plages de valeurs correspondants aux échantillons, on définit la différence des moyennes comme étant nulle ce qui correspond à l'hypothèse nulle H_0. Le risque de première espèce (seuil de signification) est fixée à 5 %.

A	B
échantillon A	échantillon B
0,0528	0,0518
0,0522	0,0521
0,0523	0,0522
0,0522	0,0516
0,0525	0,0521
0,0529	0,0521
0,0522	0,0519
0,0523	0,052
0,0522	0,0515
0,0523	0,0521



On obtient les résultats suivants :

D	E	F
Test d'égalité des espérances: deux observations de variances égales		
	Variable 1	*Variable 2*
Moyenne	0,05239	0,05194
Variance	6,76667E-08	5,6E-08
Observations	10	10
Variance pondérée	6,18333E-08	
Différence hypothétique des moyennes	0	
Degré de liberté	18	
Statistique t	4,046561883	
P(T<=t) unilatéral	0,000378558	
Valeur critique de t (unilatéral)	1,734063062	
P(T<=t) bilatéral	0,000757117	
Valeur critique de t (bilatéral)	2,100923666	

On peut raisonner de deux manières :

- On compare les grandeurs "Statistique t" et "Valeur critique de t (bilatéral)" pour ce test.

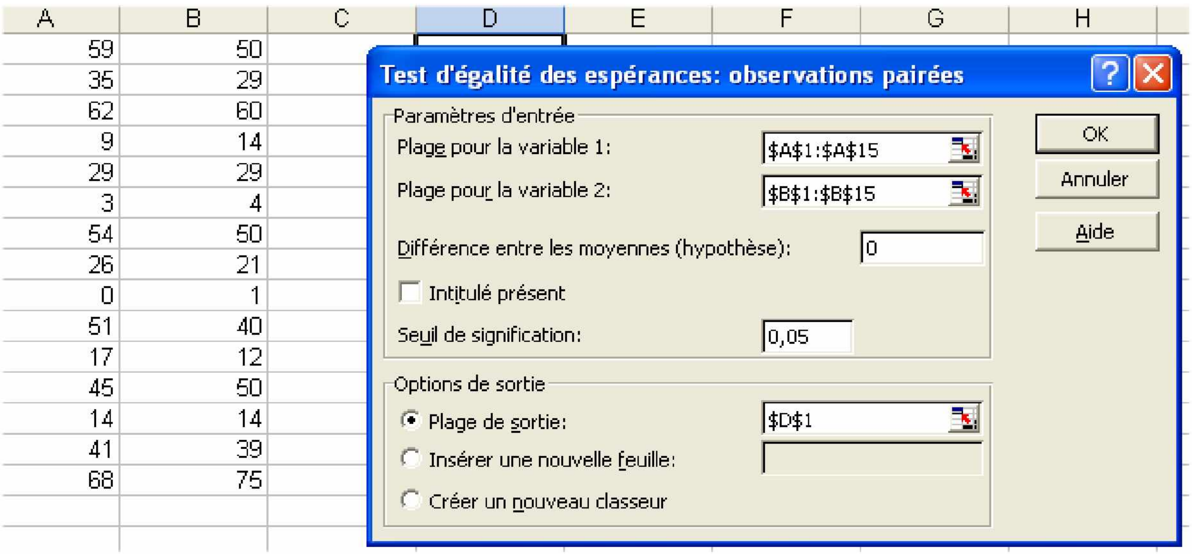
"Statistique t" se définit par $\frac{\overline{x}_A - \overline{x}_B}{s_D'}$. Si la valeur absolue de cette grandeur est supérieure à "Valeur critique de t (bilatéral)", on en déduit que les deux moyennes sont significativement différentes. Ici c'est le cas car $|4{,}047| > 2{,}10$.

- La grandeur "P(T<=t) bilatéral" correspond en fait à la p-value: dans notre cas la valeur 0,000757 étant bien inférieure au risque α de 5 %, on en tire la même conclusion.

3/ Comparaison de deux moyennes dans un test bilatéral (échantillons appariés)

On reprend la série de données de l'***application* 12** et on choisit dans l'utilitaire : TEST D'EGALITE DES ESPERANCES: OBSERVATIONS PAIREES .

Après le choix des deux plages de valeurs correspondants aux échantillons, on définit la différence des moyennes comme étant nulle ce qui correspond à l'hypothèse nulle H_0. Le risque de première espèce (seuil de signification) est fixée à 5 %.



D	E	F
Test d'égalité des espérances: observations pairées		
	Variable 1	*Variable 2*
Moyenne	34,2	32,5333333
Variance	496,028571	474,695238
Observations	15	15
Coefficient de corrélation de Pearson	0,97291123	
Différence hypothétique des moyennes	0	
Degré de liberté	14	
Statistique t	1,25336173	
P(T<=t) unilatéral	0,11530117	
Valeur critique de t (unilatéral)	1,76130925	
P(T<=t) bilatéral	0,23060234	
Valeur critique de t (bilatéral)	2,1447886	

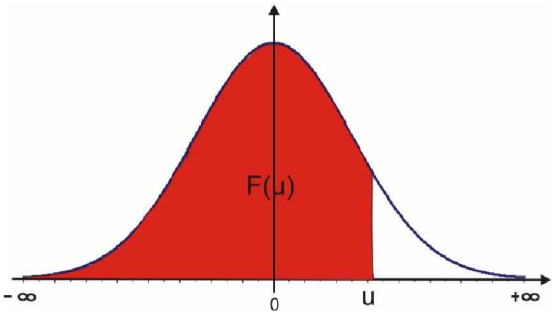
Les deux mêmes types d'interprétations qu'au 2/ s'appliquent :

- On compare les grandeurs "Statistique t" et "Valeur critique de t (bilatéral)" pour ce test.

"Statistique t" se définit par $\dfrac{\overline{x}_d}{s_d / \sqrt{n}}$. Si la valeur absolue de cette grandeur est supérieure à "Valeur critique de t (bilatéral)", on en déduit que les deux moyennes ne sont pas significativement différentes. Ici c'est le cas car $|1{,}253| < 2{,}14$.

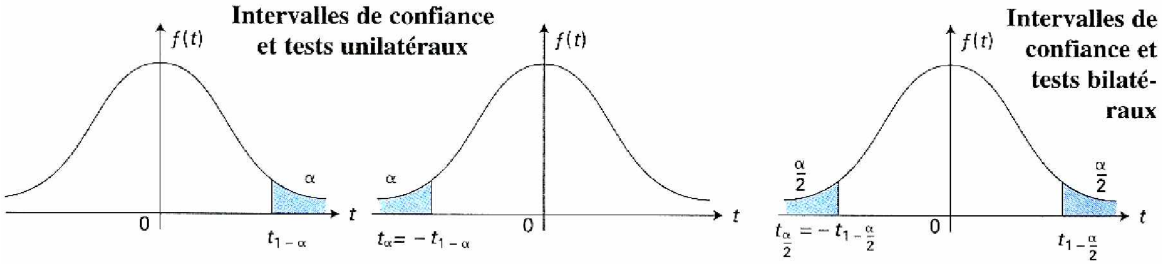
- La grandeur "P(T<=t) bilatéral" correspond en fait à la p-value : dans notre cas la valeur 0,23 étant supérieure au risque α de 5 %, on en tire la même conclusion.

ANNEXE 4 : FONCTION DE RÉPARTITION DE LA LOI NORMALE CENTRÉE RÉDUITE



u	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990

ANNEXE 5 : LOI DE STUDENT



Figures tirées de "Guide du technicien qualité", B. BOITEUX, Delagrave, 2001

TEST BILATERAL

	ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
α = 0,05	$t_{0,975}$	12,71	4,30	3,18	2,78	2,57	2,45	2,36	2,31	2,26	2,23	2,20	2,18	2,16	2,14	2,13	2,12	2,11
α = 0,01	$t_{0,995}$	63,66	9,92	5,84	4,60	4,03	3,71	3,50	3,36	3,25	3,17	3,11	3,05	3,01	2,98	2,95	2,92	2,90

	ν	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	35	40	50	100
α = 0,05	$t_{0,975}$	2,10	2,09	2,09	2,08	2,07	2,07	2,06	2,06	2,06	2,05	2,05	2,05	2,04	2,03	2,02	2,01	1,98
α = 0,01	$t_{0,995}$	2,88	2,86	2,85	2,83	2,82	2,81	2,80	2,79	2,78	2,77	2,76	2,76	2,75	2,72	2,70	2,68	2,63

TEST UNILATERAL

	ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
α = 0,05	$t_{0,95}$	6,31	2,92	2,35	2,13	2,02	1,94	1,89	1,86	1,83	1,81	1,80	1,78	1,77	1,76	1,75	1,75	1,74
α = 0,01	$t_{0,99}$	31,82	6,96	4,54	3,75	3,36	3,14	3,00	2,90	2,82	2,76	2,72	2,68	2,65	2,62	2,60	2,58	2,57

	ν	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	35	40	50	100
α = 0,05	$t_{0,95}$	1,73	1,73	1,72	1,72	1,72	1,71	1,71	1,71	1,71	1,70	1,70	1,70	1,70	1,69	1,68	1,68	1,66
α = 0,01	$t_{0,99}$	2,55	2,54	2,53	2,52	2,51	2,50	2,49	2,49	2,48	2,47	2,47	2,46	2,46	2,44	2,42	2,40	2,36

ANNEXE 6 : LOI DE F (LOI DE SNEDECOR)

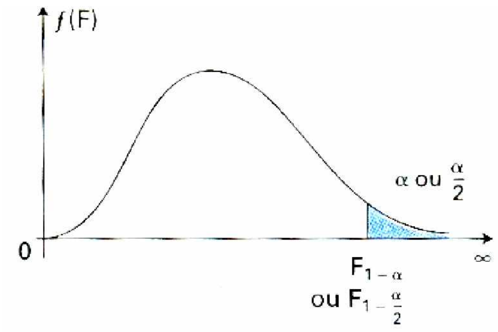


Figure tirée de "Guide du technicien qualité" , B. BOITEUX, Delagrave, 2001

TEST BILATERAL	F(ν1 , ν2)	**α = 0,05**

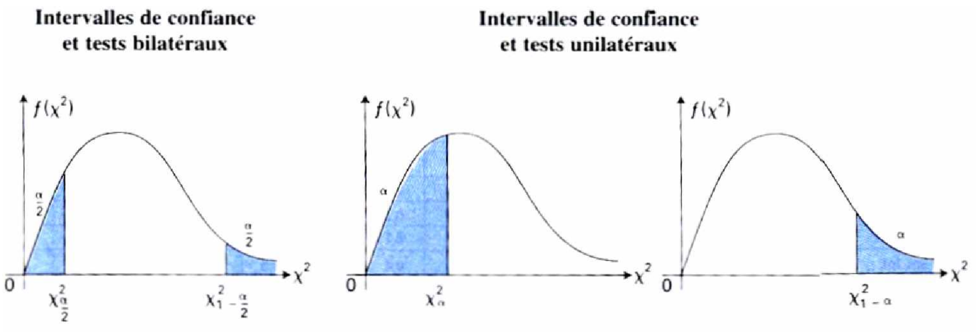
ν2 \ ν1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
1	647,8	799,5	864,2	899,6	921,8	937,1	948,2	956,6	963,3	968,6	973,0	976,7	979,8	982,5	984,9	986,9	988,7
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,41	39,41	39,42	39,43	39,43	39,44	39,44
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,37	14,34	14,30	14,28	14,25	14,23	14,21
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,79	8,75	8,72	8,68	8,66	8,63	8,61
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,57	6,52	6,49	6,46	6,43	6,40	6,38
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,41	5,37	5,33	5,30	5,27	5,24	5,22
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,71	4,67	4,63	4,60	4,57	4,54	4,52
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,24	4,20	4,16	4,13	4,10	4,08	4,05
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,91	3,87	3,83	3,80	3,77	3,74	3,72
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,66	3,62	3,58	3,55	3,52	3,50	3,47
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,47	3,43	3,39	3,36	3,33	3,30	3,28
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,32	3,28	3,24	3,21	3,18	3,15	3,13
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,20	3,15	3,12	3,08	3,05	3,03	3,00
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	3,09	3,05	3,01	2,98	2,95	2,92	2,90
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	3,01	2,96	2,92	2,89	2,86	2,84	2,81
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,93	2,89	2,85	2,82	2,79	2,76	2,74
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,87	2,82	2,79	2,75	2,72	2,70	2,67
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,81	2,77	2,73	2,70	2,67	2,64	2,62
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,76	2,72	2,68	2,65	2,62	2,59	2,57
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,72	2,68	2,64	2,60	2,57	2,55	2,52
21	5,83	4,42	3,82	3,48	3,25	3,09	2,97	2,87	2,80	2,73	2,68	2,64	2,60	2,56	2,53	2,51	2,48
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53	2,50	2,47	2,45
23	5,75	4,35	3,75	3,41	3,18	3,02	2,90	2,81	2,73	2,67	2,62	2,57	2,53	2,50	2,47	2,44	2,42
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70	2,64	2,59	2,54	2,50	2,47	2,44	2,41	2,39
25	5,69	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2,75	2,68	2,61	2,56	2,51	2,48	2,44	2,41	2,38	2,36
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73	2,65	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42	2,39	2,36	2,34
27	5,63	4,24	3,65	3,31	3,08	2,92	2,80	2,71	2,63	2,57	2,51	2,47	2,43	2,39	2,36	2,34	2,31
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,37	2,34	2,32	2,29
29	5,59	4,20	3,61	3,27	3,04	2,88	2,76	2,67	2,59	2,53	2,48	2,43	2,39	2,36	2,32	2,30	2,27
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,31	2,28	2,26
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39	2,33	2,29	2,25	2,21	2,18	2,15	2,13
50	5,34	3,97	3,39	3,05	2,83	2,67	2,55	2,46	2,38	2,32	2,26	2,22	2,18	2,14	2,11	2,08	2,06
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33	2,27	2,22	2,17	2,13	2,09	2,06	2,03	2,01
80	5,22	3,86	3,28	2,95	2,73	2,57	2,45	2,35	2,28	2,21	2,16	2,11	2,07	2,03	2,00	1,97	1,95
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,42	2,32	2,24	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,97	1,94	1,91

ν2 \ ν1	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	40	50	60	80	100
1	990,3	991,8	993,1	994,3	995,4	996,3	997,3	998,1	998,8	999,5	1000	1001	1001	1006	1008	1010	1012	1013
2	39,44	39,45	39,45	39,45	39,45	39,45	39,46	39,46	39,46	39,46	39,46	39,46	39,46	39,47	39,48	39,48	39,49	39,49
3	14,20	14,18	14,17	14,16	14,14	14,13	14,12	14,12	14,11	14,10	14,09	14,09	14,08	14,04	14,01	13,99	13,97	13,96
4	8,59	8,58	8,56	8,55	8,53	8,52	8,51	8,50	8,49	8,48	8,48	8,47	8,46	8,41	8,38	8,36	8,33	8,32
5	6,36	6,34	6,33	6,31	6,30	6,29	6,28	6,27	6,26	6,25	6,24	6,23	6,23	6,18	6,14	6,12	6,10	6,08
6	5,20	5,18	5,17	5,15	5,14	5,13	5,12	5,11	5,10	5,09	5,08	5,07	5,07	5,01	4,98	4,96	4,93	4,92
7	4,50	4,48	4,47	4,45	4,44	4,43	4,41	4,40	4,39	4,39	4,38	4,37	4,36	4,31	4,28	4,25	4,23	4,21
8	4,03	4,02	4,00	3,98	3,97	3,96	3,95	3,94	3,93	3,92	3,91	3,90	3,89	3,84	3,81	3,78	3,76	3,74
9	3,70	3,68	3,67	3,65	3,64	3,63	3,61	3,60	3,59	3,58	3,58	3,57	3,56	3,51	3,47	3,45	3,42	3,40
10	3,45	3,44	3,42	3,40	3,39	3,38	3,37	3,35	3,34	3,34	3,33	3,32	3,31	3,26	3,22	3,20	3,17	3,15
11	3,26	3,24	3,23	3,21	3,20	3,18	3,17	3,16	3,15	3,14	3,13	3,13	3,12	3,06	3,03	3,00	2,97	2,96
12	3,11	3,09	3,07	3,06	3,04	3,03	3,02	3,01	3,00	2,99	2,98	2,97	2,96	2,91	2,87	2,85	2,82	2,80
13	2,98	2,96	2,95	2,93	2,92	2,91	2,89	2,88	2,87	2,86	2,85	2,85	2,84	2,78	2,74	2,72	2,69	2,67
14	2,88	2,86	2,84	2,83	2,81	2,80	2,79	2,78	2,77	2,76	2,75	2,74	2,73	2,67	2,64	2,61	2,58	2,56
15	2,79	2,77	2,76	2,74	2,73	2,71	2,70	2,69	2,68	2,67	2,66	2,65	2,64	2,59	2,55	2,52	2,49	2,47
16	2,72	2,70	2,68	2,67	2,65	2,64	2,63	2,61	2,60	2,59	2,58	2,58	2,57	2,51	2,47	2,45	2,42	2,40
17	2,65	2,63	2,62	2,60	2,59	2,57	2,56	2,55	2,54	2,53	2,52	2,51	2,50	2,44	2,41	2,38	2,35	2,33
18	2,60	2,58	2,56	2,54	2,53	2,52	2,50	2,49	2,48	2,47	2,46	2,45	2,44	2,38	2,35	2,32	2,29	2,27
19	2,55	2,53	2,51	2,49	2,48	2,46	2,45	2,44	2,43	2,42	2,41	2,40	2,39	2,33	2,30	2,27	2,24	2,22
20	2,50	2,48	2,46	2,45	2,43	2,42	2,41	2,40	2,39	2,38	2,37	2,36	2,35	2,29	2,25	2,22	2,19	2,17
21	2,46	2,44	2,42	2,41	2,39	2,38	2,37	2,36	2,34	2,33	2,33	2,32	2,31	2,25	2,21	2,18	2,15	2,13
22	2,43	2,41	2,39	2,37	2,36	2,34	2,33	2,32	2,31	2,30	2,29	2,28	2,27	2,21	2,17	2,14	2,11	2,09
23	2,39	2,37	2,36	2,34	2,33	2,31	2,30	2,29	2,28	2,27	2,26	2,25	2,24	2,18	2,14	2,11	2,08	2,06
24	2,36	2,35	2,33	2,31	2,30	2,28	2,27	2,26	2,25	2,24	2,23	2,22	2,21	2,15	2,11	2,08	2,05	2,02
25	2,34	2,32	2,30	2,28	2,27	2,26	2,24	2,23	2,22	2,21	2,20	2,19	2,18	2,12	2,08	2,05	2,02	2,00
26	2,31	2,29	2,28	2,26	2,24	2,23	2,22	2,21	2,19	2,18	2,17	2,17	2,16	2,09	2,05	2,03	1,99	1,97
27	2,29	2,27	2,25	2,24	2,22	2,21	2,19	2,18	2,17	2,16	2,15	2,14	2,13	2,07	2,03	2,00	1,97	1,94
28	2,27	2,25	2,23	2,22	2,20	2,19	2,17	2,16	2,15	2,14	2,13	2,12	2,11	2,05	2,01	1,98	1,94	1,92
29	2,25	2,23	2,21	2,20	2,18	2,17	2,15	2,14	2,13	2,12	2,11	2,10	2,09	2,03	1,99	1,96	1,92	1,90
30	2,23	2,21	2,20	2,18	2,16	2,15	2,14	2,12	2,11	2,10	2,09	2,08	2,07	2,01	1,97	1,94	1,90	1,88
40	2,11	2,09	2,07	2,05	2,03	2,02	2,01	1,99	1,98	1,97	1,96	1,95	1,94	1,88	1,83	1,80	1,76	1,74
50	2,03	2,01	1,99	1,98	1,96	1,95	1,93	1,92	1,91	1,90	1,89	1,88	1,87	1,80	1,75	1,72	1,68	1,66
60	1,98	1,96	1,94	1,93	1,91	1,90	1,88	1,87	1,86	1,85	1,83	1,82	1,82	1,74	1,70	1,67	1,63	1,60
80	1,92	1,90	1,88	1,87	1,85	1,83	1,82	1,81	1,79	1,78	1,77	1,76	1,75	1,68	1,63	1,60	1,55	1,53
100	1,89	1,87	1,85	1,83	1,81	1,80	1,78	1,77	1,76	1,75	1,74	1,72	1,71	1,64	1,59	1,56	1,51	1,48

TEST UNILATERAL	F(ν1 , ν2)	α = **0,05**

ν2	ν1																																	
	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**	**21**	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**	**40**	**50**	**60**	**80**	**100**
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,0	243,9	244,7	245,4	245,9	246,5	246,9	247,3	247,7	248,0	248,3	248,6	248,8	249,1	249,3	249,5	249,6	249,8	250,0	250,1	251,1	251,8	252,2	252,7	253,0
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,40	19,41	19,42	19,42	19,43	19,43	19,44	19,44	19,44	19,45	19,45	19,45	19,45	19,45	19,46	19,46	19,46	19,46	19,46	19,46	19,47	19,48	19,48	19,48	19,49
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74	8,73	8,71	8,70	8,69	8,68	8,67	8,67	8,66	8,65	8,65	8,64	8,64	8,63	8,63	8,63	8,62	8,62	8,62	8,59	8,58	8,57	8,56	8,55
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91	5,89	5,87	5,86	5,84	5,83	5,82	5,81	5,80	5,79	5,79	5,78	5,77	5,77	5,76	5,76	5,75	5,75	5,75	5,72	5,70	5,69	5,67	5,66
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,70	4,68	4,66	4,64	4,62	4,60	4,59	4,58	4,57	4,56	4,55	4,54	4,53	4,53	4,52	4,52	4,51	4,50	4,50	4,50	4,46	4,44	4,43	4,41	4,41
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00	3,98	3,96	3,94	3,92	3,91	3,90	3,88	3,87	3,86	3,86	3,85	3,84	3,83	3,83	3,82	3,82	3,81	3,81	3,77	3,75	3,74	3,72	3,71
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57	3,55	3,53	3,51	3,49	3,48	3,47	3,46	3,44	3,43	3,43	3,42	3,41	3,40	3,40	3,39	3,39	3,38	3,38	3,34	3,32	3,30	3,29	3,27
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28	3,26	3,24	3,22	3,20	3,19	3,17	3,16	3,15	3,14	3,13	3,12	3,12	3,11	3,10	3,10	3,09	3,08	3,08	3,04	3,02	3,01	2,99	2,97
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07	3,05	3,03	3,01	2,99	2,97	2,96	2,95	2,94	2,93	2,92	2,91	2,90	2,89	2,89	2,88	2,87	2,87	2,86	2,83	2,80	2,79	2,77	2,76
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91	2,89	2,86	2,85	2,83	2,81	2,80	2,79	2,77	2,76	2,75	2,75	2,74	2,73	2,72	2,72	2,71	2,70	2,70	2,66	2,64	2,62	2,60	2,59
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,82	2,79	2,76	2,74	2,72	2,70	2,69	2,67	2,66	2,65	2,64	2,63	2,62	2,61	2,60	2,59	2,59	2,58	2,58	2,57	2,53	2,51	2,49	2,47	2,46
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,72	2,69	2,66	2,64	2,62	2,60	2,58	2,57	2,56	2,54	2,53	2,52	2,51	2,51	2,50	2,49	2,48	2,48	2,47	2,47	2,43	2,40	2,38	2,36	2,35
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,63	2,60	2,58	2,55	2,53	2,51	2,50	2,48	2,47	2,46	2,45	2,44	2,43	2,42	2,41	2,41	2,40	2,39	2,39	2,38	2,34	2,31	2,30	2,27	2,26
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,57	2,53	2,51	2,48	2,46	2,44	2,43	2,41	2,40	2,39	2,38	2,37	2,36	2,35	2,34	2,33	2,33	2,32	2,31	2,31	2,27	2,24	2,22	2,20	2,19
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,51	2,48	2,45	2,42	2,40	2,38	2,37	2,35	2,34	2,33	2,32	2,31	2,30	2,29	2,28	2,27	2,27	2,26	2,25	2,25	2,20	2,18	2,16	2,14	2,12
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,46	2,42	2,40	2,37	2,35	2,33	2,32	2,30	2,29	2,28	2,26	2,25	2,24	2,24	2,23	2,22	2,21	2,21	2,20	2,19	2,15	2,12	2,11	2,08	2,07
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,41	2,38	2,35	2,33	2,31	2,29	2,27	2,26	2,24	2,23	2,22	2,21	2,20	2,19	2,18	2,17	2,17	2,16	2,15	2,15	2,10	2,08	2,06	2,03	2,02
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,37	2,34	2,31	2,29	2,27	2,25	2,23	2,22	2,20	2,19	2,18	2,17	2,16	2,15	2,14	2,13	2,13	2,12	2,11	2,11	2,06	2,04	2,02	1,99	1,98
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,34	2,31	2,28	2,26	2,23	2,21	2,20	2,18	2,17	2,16	2,14	2,13	2,12	2,11	2,11	2,10	2,09	2,08	2,08	2,07	2,03	2,00	1,98	1,96	1,94
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,31	2,28	2,25	2,22	2,20	2,18	2,17	2,15	2,14	2,12	2,11	2,10	2,09	2,08	2,07	2,07	2,06	2,05	2,05	2,04	1,99	1,97	1,95	1,92	1,91
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,28	2,25	2,22	2,20	2,18	2,16	2,14	2,12	2,11	2,10	2,08	2,07	2,06	2,05	2,05	2,04	2,03	2,02	2,02	2,01	1,96	1,94	1,92	1,89	1,88
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,26	2,23	2,20	2,17	2,15	2,13	2,11	2,10	2,08	2,07	2,06	2,05	2,04	2,03	2,02	2,01	2,00	2,00	1,99	1,98	1,94	1,91	1,89	1,86	1,85
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,24	2,20	2,18	2,15	2,13	2,11	2,09	2,08	2,06	2,05	2,04	2,02	2,01	2,01	2,00	1,99	1,98	1,97	1,97	1,96	1,91	1,88	1,86	1,84	1,82
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,22	2,18	2,15	2,13	2,11	2,09	2,07	2,05	2,04	2,03	2,01	2,00	1,99	1,98	1,97	1,97	1,96	1,95	1,95	1,94	1,89	1,86	1,84	1,82	1,80
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,20	2,16	2,14	2,11	2,09	2,07	2,05	2,04	2,02	2,01	2,00	1,98	1,97	1,96	1,96	1,95	1,94	1,93	1,93	1,92	1,87	1,84	1,82	1,80	1,78
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,18	2,15	2,12	2,09	2,07	2,05	2,03	2,02	2,00	1,99	1,98	1,97	1,96	1,95	1,94	1,93	1,92	1,91	1,91	1,90	1,85	1,82	1,80	1,78	1,76
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,17	2,13	2,10	2,08	2,06	2,04	2,02	2,00	1,99	1,97	1,96	1,95	1,94	1,93	1,92	1,91	1,90	1,90	1,89	1,88	1,84	1,81	1,79	1,76	1,74
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,15	2,12	2,09	2,06	2,04	2,02	2,00	1,99	1,97	1,96	1,95	1,93	1,92	1,91	1,91	1,90	1,89	1,88	1,88	1,87	1,82	1,79	1,77	1,74	1,73
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,14	2,10	2,08	2,05	2,03	2,01	1,99	1,97	1,96	1,94	1,93	1,92	1,91	1,90	1,89	1,88	1,88	1,87	1,86	1,85	1,81	1,77	1,75	1,73	1,71
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,13	2,09	2,06	2,04	2,01	1,99	1,98	1,96	1,95	1,93	1,92	1,91	1,90	1,89	1,88	1,87	1,86	1,85	1,85	1,84	1,79	1,76	1,74	1,71	1,70
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,04	2,00	1,97	1,95	1,92	1,90	1,89	1,87	1,85	1,84	1,83	1,81	1,80	1,79	1,78	1,77	1,77	1,76	1,75	1,74	1,69	1,66	1,64	1,61	1,59
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,99	1,95	1,92	1,89	1,87	1,85	1,83	1,81	1,80	1,78	1,77	1,76	1,75	1,74	1,73	1,72	1,71	1,70	1,69	1,69	1,63	1,60	1,58	1,54	1,52
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,95	1,92	1,89	1,86	1,84	1,82	1,80	1,78	1,76	1,75	1,73	1,72	1,71	1,70	1,69	1,68	1,67	1,66	1,66	1,65	1,59	1,56	1,53	1,50	1,48
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,91	1,88	1,84	1,82	1,79	1,77	1,75	1,73	1,72	1,70	1,69	1,68	1,67	1,65	1,64	1,63	1,63	1,62	1,61	1,60	1,54	1,51	1,48	1,45	1,43
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,89	1,85	1,82	1,79	1,77	1,75	1,73	1,71	1,69	1,68	1,66	1,65	1,64	1,63	1,62	1,61	1,60	1,59	1,58	1,57	1,52	1,48	1,45	1,41	1,39

ANNEXE 7 : LOI DE χ^2 (LOI DE KHI DEUX)



Figures tirées de "Guide du technicien qualité", B. BOITEUX, Delagrave, 2001

TEST BILATERAL

	ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
α = 0,05	$\chi^2_{0,025}$	0,001	0,05	0,22	0,48	0,83	1,24	1,69	2,18	2,70	3,25	3,82	4,40	5,01	5,63	6,26	6,91	7,56
	$\chi^2_{0,975}$	5,02	7,38	9,35	11,14	12,83	14,45	16,01	17,53	19,02	20,48	21,92	23,34	24,74	26,12	27,49	28,85	30,19

	ν	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	35	50	75	100
α = 0,05	$\chi^2_{0,025}$	8,23	8,91	9,59	10,28	10,98	11,69	12,40	13,12	13,84	14,57	15,31	16,05	16,79	20,57	32,36	52,94	74,22
	$\chi^2_{0,975}$	31,53	32,85	34,17	35,48	36,78	38,08	39,36	40,65	41,92	43,19	44,46	45,72	46,98	53,20	71,42	100,84	129,56

	ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
α = 0,01	$\chi^2_{0,005}$	0,00004	0,01	0,07	0,21	0,41	0,68	0,99	1,34	1,73	2,16	2,60	3,07	3,57	4,07	4,60	5,14	5,70
	$\chi^2_{0,995}$	7,88	10,60	12,84	14,86	16,75	18,55	20,28	21,95	23,59	25,19	26,76	28,30	29,82	31,32	32,80	34,27	35,72

	ν	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	35	50	75	100
α = 0,01	$\chi^2_{0,005}$	6,26	6,84	7,43	8,03	8,64	9,26	9,89	10,52	11,16	11,81	12,46	13,12	13,79	17,19	27,99	47,21	67,33
	$\chi^2_{0,995}$	37,16	38,58	40,00	41,40	42,80	44,18	45,56	46,93	48,29	49,65	50,99	52,34	53,67	60,27	79,49	110,3	140,2

TEST UNILATERAL

	ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
α = 0,05	$\chi^2_{0,05}$	0,004	0,10	0,35	0,71	1,15	1,64	2,17	2,73	3,33	3,94	4,57	5,23	5,89	6,57	7,26	7,96	8,67
	$\chi^2_{0,95}$	3,84	5,99	7,81	9,49	11,07	12,59	14,07	15,51	16,92	18,31	19,68	21,03	22,36	23,68	25,00	26,30	27,59

	ν	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	35	50	75	100
α = 0,05	$\chi^2_{0,05}$	9,39	10,12	10,85	11,59	12,34	13,09	13,85	14,61	15,38	16,15	16,93	17,71	18,49	22,47	34,76	56,05	77,93
	$\chi^2_{0,95}$	28,87	30,14	31,41	32,67	33,92	35,17	36,42	37,65	38,89	40,11	41,34	42,56	43,77	49,80	67,50	96,22	124,3

	ν	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
α = 0,01	$\chi^2_{0,01}$	0,00016	0,02	0,11	0,30	0,55	0,87	1,24	1,65	2,09	2,56	3,05	3,57	4,11	4,66	5,23	5,81	6,41
	$\chi^2_{0,99}$	6,63	9,21	11,34	13,28	15,09	16,81	18,48	20,09	21,67	23,21	24,73	26,22	27,69	29,14	30,58	32,00	33,41

	ν	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	35	50	75	100
α = 0,01	$\chi^2_{0,01}$	7,01	7,63	8,26	8,90	9,54	10,20	10,86	11,52	12,20	12,88	13,56	14,26	14,95	18,51	29,71	49,48	70,06
	$\chi^2_{0,99}$	34,81	36,19	37,57	38,93	40,29	41,64	42,98	44,31	45,64	46,96	48,28	49,59	50,89	57,34	76,15	106,4	135,8