

Frankfurt School – Working Paper Series

No. 102

**Das IRB-Modell des Kreditrisikos
im Vergleich zum Modell einer
logarithmisch normalverteilten
Verlustfunktion**

by Michael Vetter and Prof. Dr. Heinz Cremers

September 2008



**Frankfurt School of
Finance & Management**
Bankakademie | HfB

Sonnemannstr. 9–11 60314 Frankfurt am Main, Germany
Phone: +49 (0) 69 154 008 0 Fax: +49 (0) 69 154 008 728
Internet: www.frankfurt-school.de

Abstract

In 2004 the Basel Committee published an extensive revision of the capital charges which creates more risk sensitive capital requirements for banks. The New Accord called “International Convergence of Capital Measurement and Capital Standard” provides in its first pillar for a finer measurement of credit risk. Banks that have received supervisory approval to use the Internal Ratings-Based (IRB) approach may rely on their own internal estimates of risk components in determining the capital requirement for a given exposure.

The IRB approach is based on measures of unexpected losses (UL) and expected losses (EL). The risk-weight functions produce capital requirements for the UL portion are based on a one-factor (Merton) model which relies furthermore on the assumption of an infinite fine-grained credit portfolio (also known as Vasicek-Model).

As Moody’s stated in 2000: „*Empirical tests ... verified the log normal distribution for granular pools.*” we compared both models in order to benchmark the IRB approach with an existing and in practice already verified model which obviously uses similar assumptions. We, therefore, compute the capital requirement or Credit Value at Risk for given portfolios in both approaches respectively and contrast the results.

Key words: Basel II, IRB, Expected Loss, Unexpected Loss, Kreditrisikomodell,
logarithmische Normalverteilung, Credit Value at Risk,

ISSN: 14369753

Contact:

Michael Vetter
Dr. Nagler & Company GmbH
Fellnerstrasse 7-9
60322 Frankfurt
Tel.: +49-69-905538-0
michael.vetter@nagler-company.com

Prof. Dr. Heinz Cremers
Frankfurt School of Finance & Management
Sonnemannstraße 9-11
60314 Frankfurt
Tel.: +49-69-154008-213
h.cremers@frankfurt-school.de

Inhaltsverzeichnis

1	Motive für den Einsatz von Kreditrisikomodellen	9
2	Grundlagen der Kreditrisikomessung	12
2.1	Einführung Beispielfortfolio	12
2.2	Grundlegende Begriffe und Definitionen	13
2.2.1	Ausfallereignis, Ausfallwahrscheinlichkeit	13
2.2.2	Exposure at Default, Loss Given Default / Recovery Rate	17
2.2.3	Verlust und Erwarteter Portfolioverlust	18
2.2.4	Unerwarteter Portfolioverlust	20
2.2.5	Verlustverteilung	21
2.2.6	Value at Risk	25
2.2.7	Ökonomisches Kapital / Credit Value at Risk	27
2.2.8	Korrelation	28
2.2.9	Risikodiversifizierung	31
3	Verteilungsmodelle	33
3.1	Verteilungsparameter und Verteilungsannahmen	33
3.2	Bernoulli-Verteilung	34
3.3	Binomialverteilung	34
3.4	Normalverteilung	37
3.5	Logarithmische Normalverteilung	39
3.5.1	Allgemeine Grundlagen	39
3.5.2	Moment Matching	40
3.5.3	Credit Value at Risk Bestimmung	43
4	Das Kreditrisiko in Basel II	44
4.1	Hintergründe und Zielsetzung von Basel II	44
4.2	Der IRB-Ansatz	45
4.3	Die IRB-Formel	46
4.3.1	Asset-Value-Modelle	46
4.3.2	Das Ein-Faktor-Modell	48
4.3.3	Granulare Portfolios	50
4.3.4	Eigenkapitalanforderung „K“	52
4.3.5	Segmentspezifische Eigenkapitalanforderungen	54
4.3.5.1	Forderungen an Unternehmen, Staaten und Banken	54
4.3.5.2	Forderungen an Privatkunden	56
5	Vergleichende Analyse	58
5.1	Für unkorrelierte Portfolios	58
5.2	Für uniforme Portfolios	59
5.2.1	Das 5 Kreditnehmerportfolio	59
5.2.2	Das granulare Kreditportfolio	62
5.2.2.1	Erhöhung der Kreditnehmeranzahl	62
5.2.2.2	Bestimmung eines identischen Credit Value at Risk	65
5.2.2.3	Veränderung der Portfoliogrannularität	65

5.2.2.4	Veränderung der Ausfallwahrscheinlichkeit.....	67
5.2.3	Fallstudie für ein heterogenes Kreditportfolio	69
6	Schlussbetrachtung	71
	Anhangverzeichnis	75
	Literaturverzeichnis	96

Abbildungsverzeichnis

Abb. 1: Risikoergebnis – ex post-Betrachtung	21
Abb. 2: Typische Verlustverteilung eines Kreditportfolios	22
Abb. 3: Verlustverteilung des Portfolios bei stochastischer Unabhängigkeit und $p_i = 0,2$	24
Abb. 4: Portfoliodiversifikation des schulderspezifischen Risikos	32
Abb. 5: Dichte der Normalverteilung bei unterschiedlichen Lage- und Streuungsparametern	38
Abb. 6: Dichte der Lognormalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$	40
Abb. 7: Lognormale Dichte des Portfolioverlustes im unkorrelierten Fall und $p_i = 0,01$	42
Abb. 8: Lognormale Verteilung des Portfolioverlustes im unkorrelierten Fall und $p_i = 0,01$	42
Abb. 9: The Black-Scholes-Merton structural model of default	47
Abb. 10: CVaR – Bestimmung nach Basel II	53
Abb. 11: Zusammenhang zwischen Assetkorrelation und PD im IRB-Ansatz	55
Abb. 12: Risikogewichtskurven im IRB-Ansatz	57
Abb. 13: Dichten des uniformen 5 Kreditnehmerportfolios bis zum Expected Loss	60
Abb. 14: Verteilungsfunktionen des uniformen 5 Kreditnehmerportfolios ab Expected Loss	61
Abb. 15: Dichten des granularen Portfolios	63
Abb. 16: Verteilungsfunktionen des granularen Portfolios zwischen 99% - 100%	64

Tabellenverzeichnis

Tabelle 1: Einjahresausfallwahrscheinlichkeiten zu S&P Ratingklassen	15
Tabelle 2: Verlustverteilung des Portfolios bei stochastischer Unabhängigkeit und $p_i = 0,2$	25
Tabelle 3: VaR-Bestimmung im Portfolio bei stochastischer Unabhängigkeit und $p_i = 0,2$	27
Tabelle 4: Bestimmung des EC im Portfolio bei stochastischer Unabhängigkeit und $p_i = 0,2$	27
Tabelle 5: Unerwarteter Portfolioverlust in Abhängigkeit von ρ bei $p_i = 0,01$	30
Tabelle 6: Verlustverteilung des Portfolios bei stochastischer Unabhängigkeit und $p_i = 0,01$	36
Tabelle 7: Zusammenhang zwischen Asset- und Ausfallkorrelation	50
Tabelle 8: CVaR – Vergleiche in Abhängigkeit der Portfoliogrannularität	66
Tabelle 9: Subportfolios eines Kreditinstituts	69
Tabelle 10: Assetkorrelationen der Subportfolios	70
Tabelle 11: Assetkorrelationsmatrix	70

Abkürzungsverzeichnis

Abb.	Abbildung
ABS	Asset Backed Securities
Basel I	Internationale Konvergenz der Kapitalmessung und Eigenkapitalanforderung vom Juli 1988 (Basel Committee (1988))
Basel II	Internationale Konvergenz der Kapitalmessung und Eigenkapitalanforderung vom Juni 2004 (Basel Committee (2004))
bp(s)	basispoint(s)
bzgl.	bezüglich
bzw.	beziehungsweise
ca.	circa
CCF	Credit Conversion Factor
COMM	commitment(s)
c. p.	ceteris paribus
CVaR	Credit Value at Risk
d. h.	das heisst
EAD	Exposure at Default
EC	Economic Capital
EDF	Expected Default Frequency
EL	Expected Loss
engl.	englisch
et al.	et alii
etc.	et cetera
EUR	EURO
f.	folgende [Seite]
FIRB	Fortgeschrittener Internal Ratings-Based [Approach]
gem.	gemäß
ggü.	gegenüber
grds.	grundsätzlich
Hrsg.	Herausgeber
i. d. R.	in der Regel
i. e.	id est
iid	independent identically distributed
i. H.	in Höhe
i. H. v.	in Höhe von
inkl.	inklusive
i. R.	im Rahmen
IRB	Internal Ratings-Based [Approach]
IRBB	Basis Internal Ratings-Based [Approach]
KMU	Klein- und Mittelständische Unternehmen

KMV	Kealhofer, Mc Quown, Vasicek
L	Loss
LGD	Loss Given Default
Log	Logarithmus / logarithmierte
LogNV	logarithmische Normalverteilung
M	Maturity
MaRisk	Mindestanforderungen an das Risikomanagement
max.	maximal
min.	minimum
mind.	mindestens
Mio.	Million
MNC	Multinational(s)
Mrd.	Milliarde
Nr.	Nummer
NR	not rated
NV	Normalverteilung
o.	ohne
OUT	outstanding(s)
PF	Portfolio
PD	Probabilty of Default
QIS	Quantitative Impact Study
S.	Seite
SME	Small- and Medium-sized Entity
S&P	Standard & Poor's
Tz.	Textziffer(n)
vgl.	vergleiche
u. a.	unter anderem
UL	Unexpected Loss
USA	United States of America
v.	von
v. s.	versus
VaR	Value at Risk
z. B.	zum Beispiel

1 Motive für den Einsatz von Kreditrisikomodellen

In der Messung und dem Management von Kreditrisiken wurden in den letzten Jahren viele Methoden neu entwickelt. Spätestens seitdem 1999 erstmalig vom Basler Ausschuss für Bankenaufsicht¹ vorgelegten Konsultationspapier, das die Eigenkapitalunterlegung von Kreditrisiken von Grund auf reformiert,² ist das Kreditrisiko sowie die portfolioorientierte Steuerung dieser Risiken verstärkt in den Fokus der Kreditwirtschaft und der öffentlichen Wahrnehmung getreten.

Das Kreditrisiko verdient diese Aufmerksamkeit allerdings auch deshalb, weil aus den verschiedenen auf eine Universalbank einwirkenden Risikoarten³ Kreditrisiken im Allgemeinen einen wesentlichen Teil - wenn nicht sogar den bedeutendsten Teil - der Risiken darstellen, denen ein Institut ausgesetzt ist.⁴

Die Modellierung dieser Risiken, sowohl für einzelne Kredite als auch für Kreditportfolios, ist somit eine wesentliche Voraussetzung dafür, dass Kreditinstitute ihre Risiken messen und steuern können. Dies wiederum ist Grundlage für eine risikoorientierte Bepreisung. Aus der Praxis heraus wurden daher verschiedene Modelle entwickelt, die das Ziel verfolgen, eine Wahrscheinlichkeitsverteilung der möglichen „Ausfallverluste“ eines Kreditportfolios zu berechnen. Kreditrisikomodelle versuchen demnach, die aus allen Einzelrisiken aggregierte Verteilung der Verluste zu berechnen. Ziel ist somit die exakte Quantifizierung des Portfoliorisikos in Form von Risikokennzahlen unter Berücksichtigung von Diversifikationseffekten.⁵ Dadurch soll eine qualitative Aussage darüber getroffen werden, ob die vereinnahmten Risikoprämien sowie das vorgehaltene ökonomische Eigenkapital einen möglichen eintretenden Portfolioverlust in ausreichendem Umfang decken bzw. wie viel Eigenkapital zur Abdeckung möglicher „unerwarteter Verluste“ vorgehalten werden muss.

Insofern haben gerade große und international tätige Banken oftmals Portfoliomodelle im Einsatz, um ihre Kreditportfolien nachhaltig und ertragsorientiert zu steuern. Dabei gehen die

¹ Der Basler Ausschuss für Bankenaufsicht ist ein Ausschuss von Bankenaufsichtsinstanzen, der von den Präsidenten der Zentralbanken der Länder der Zehnergruppe 1975 ins Leben gerufen wurde. Er setzt sich zusammen aus hochrangigen Vertretern der Bankenaufsichtsinstanzen und Zentralbanken von Belgien, Deutschland, Frankreich, Italien, Japan, Kanada, Luxemburg, den Niederlanden, Schweden, der Schweiz, Spanien, den USA und dem Vereinigten Königreich. Er tritt in der Regel bei der Bank für Internationalen Zahlungsausgleich in Basel zusammen, wo sich auch sein ständiges Sekretariat befindet.

² Vgl. Basel Committee (1999a).

³ Ein Überblick der verschiedenen Risikoarten ist u. a. in Schierenbeck, H. (2001), S. 3 - 8 zu finden.

⁴ Vgl. Deutsche Bank, (2007), S. 60; Fischer, T. (2001), S. 59; Schmidt, A. (2001), S. 66.

⁵ Vgl. Schulte, M. / Horsch, A. (2002), S. 119.

sich im Einsatz befindlichen Modelle oftmals weit über die von der Aufsicht gestellten Anforderungen hinaus.^{6 / 7}

Nach Abschluss eines mehrstufigen Konsultationsprozesses wurden im Juni 2004 unter dem Titel „International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards – A Revised Framework“ die neuen Eigenkapitalempfehlungen des Basler Ausschusses veröffentlicht. Die auch unter dem Schlagwort Basel II bekannt gewordene Eigenkapitalvereinbarung hat seit Ende 2006 verbindlichen Charakter.⁸

Das überarbeitete Regelwerk ermöglicht Kreditinstituten das zur Unterlegung von Kreditrisiken notwendige Eigenkapital entweder über einen auf externen Ratinginformationen gestützten Standardansatz oder einen auf internen Ratings basierenden Ansatz (IRB-Ansatz – Internal Ratings-Based Approach) zu ermitteln.⁹ Letztgenannter erlaubt Banken, eigene Rating-Modelle zur Bonitätseinschätzung ihrer Kunden zu entwickeln und zu verwenden. Der IRB-Ansatz gestattet den Instituten somit die eigene Schätzung der Ausfallwahrscheinlichkeiten von Schuldnern als zentralen Risikofaktor. In seiner fortgeschrittenen Variante erlaubt der IRB-Ansatz darüber hinaus die interne Schätzung weiterer Risikoparameter, auf die unter anderem in Abschnitt 2.2.2 eingegangen wird.

Im IRB-Ansatz ergibt sich der jeweilige Kapitalbedarf durch Einsetzen der Risikoparameter in die durch das Regelwerk vorgegeben Berechnungsvorschriften. Basel II geht also nicht soweit, dass es den Kreditinstituten die Möglichkeit eröffnet, die Eigenkapitalanforderung im Rahmen ihrer eigenen Kreditrisikomodelle zu berechnen. Jedoch wird den Instituten ein gewisser Spielraum bei der Festlegung von Risikoparametern eingeräumt. Dadurch soll ein Anreiz zur ökonomisch motivierten Eigenkapitalunterlegung für Kreditrisiken geschaffen werden. In der jüngsten Auswirkungsstudie (QIS V) aus dem Mai 2006 wurde deutlich, dass der Mehraufwand einer besseren Risikoeinschätzung, durch den Einsatz von internen Verfahren, zu geringeren Eigenkapitalanforderungen gegenüber dem alten Grundsatz I führt.¹⁰

⁶ Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 1 – 5.

⁷ Als Folge der internationalen Basler Eigenkapitalvereinbarungen existieren nationale Anforderungen an das Risikomanagement. Für deutsche Banken sind hier insbesondere die Solvabilitätsverordnung und die Mindestanforderungen an das Risikomanagement (MaRisk) zu nennen. Die MaRisk beinhalten teilweise auch Regelungen der zweiten Säule des neuen Basler Eigenkapitalakkords und könnten so auch als dessen (teilweise) nationale Umsetzung angesehen werden. Vgl. Klement, J. (2007), S. 157 – 176.

⁸ Vgl. Basel Committee (2004), Tz. 2; Deutsche Bundesbank (2004), S. 92.

⁹ Vgl. Basel Committee (2004), Tz. 50 und Tz. 211.

¹⁰ Abhängig von der Größe des Instituts sowie der Struktur des jeweiligen Kreditportfolios, konnten durchschnittliche Reduzierungen der Mindesteigenkapitalanforderungen von -1% bis -8,3% im Basis IRB-Ansatz bzw. von -5,3% bis -26,9% im fortgeschrittenen IRB-Ansatz von den einzelnen Banken erzielt werden. Vgl. Deutsche Bundesbank (2006), S. 1 – 3.

Auch wenn für die Kreditwirtschaft aktuell die Möglichkeit ausgeschlossen bleibt, intern entwickelte Kreditrisikomodelle zur aufsichtsrechtlichen Kapitalunterlegung heran zu ziehen, so können Institute bereits durch die Eigenentwicklung von Ratingverfahren und die interne Schätzung weiterer Parameter eine wahrscheinlich gerechtere Eigenkapitalunterlegung erreichen, die zur Verbesserung ihrer Rentabilität beiträgt.

Neben dem allgemeinen Nutzen des Risikomanagements und den aufsichtsrechtlichen Anforderungen an das Risikomanagement werden es auch Ratingagenturen als positiv, wenn ein Risikomanagement, auf moderner Methodik basierend, eingerichtet ist. Dies stellt insbesondere für international tätige bzw. börsennotierte Banken einen weiteren Treiber, zur Verwendung von Kreditrisikomodellen, dar.¹¹

Vorliegende Arbeit verfolgt die Zielsetzung, einen illustrativen Vergleich zwischen der dem IRB-Ansatz in Basel II zugrunde liegenden Verlustverteilung und der logarithmischen Normalverteilung aufzuzeigen. Dem Basler Ein-Faktor-Modell liegt eine Grenzverteilungsannahme (Anzahl der Kredite im Portfolio $\rightarrow \infty$) zugrunde, die ursprünglich auf Vasicek zurückzuführen ist. Die Lognormalverteilung wurde daher aufgrund ihrer Charakteristik und der Tatsache, dass sie sich, wie empirische Untersuchungen belegen, zur Risikomodellierung granularen Portfolios besonders gut eignet, als vergleichendes Modell ausgewählt.¹²

Für unsere Analyse führen wir in Kapitel zwei ein anschauliches Beispielportfolio ein, das den zentralen Ausgangspunkt der Arbeit darstellt und anhand dessen zunächst grundlegende Begriffe und Definitionen der Kreditrisikomessung erläutert werden.

Im dritten Kapitel werden wichtige Verteilungsmodelle für die Kreditrisikomessung vorgestellt, die insbesondere im Zusammenhang mit Basel II von besonderer Bedeutung sind und gleichzeitig eine Hinführung zur Lognormalverteilung darstellen. Unter Verwendung der Momentenmethode bestimmen wir anschließend die lognormale Verlustverteilung und den Credit Value at Risk für das Beispielportfolio.

Nachdem der Inhalt dieser Arbeit stark von Basel II geprägt ist, wird im vierten Themenkomplex einleitend ein kurzer Überblick zum Akkord gegeben, bevor das dem IRB-Ansatz zugrunde liegende Verteilungsmodell über das Ein-Faktor-Modell hergeleitet wird. Daran

¹¹ Das Berichtswesen des Risikomanagements liefert wichtige Informationen für die Ratingagenturen. Dies kann sich positiv auf das Rating eines Instituts auswirken, wodurch sich die Refinanzierung i. d. R. günstiger gestaltet. Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 5.

¹² "Empirical tests ... verified the log normal distribution for granular pools." Moody's (2000).

schließt sich ein Überblick der wesentlichen Kernelemente der segmentspezifischen Kapitalanforderungen im Rahmen des Regelwerks an.

In Kapitel fünf stellen wir beide Ansätze und die Auswirkungen geänderter Einflussparameter auf deren Verlustverteilungen gegenüber. Dadurch wollen wir der Frage nachgehen, ob sich mit der Lognormalverteilung vergleichbare Ergebnisse zum aufsichtsrechtlichen Akkord erzielen lassen, wodurch die jahrelange Diskussion, Entwicklung und mehrfache Modifikation der heutigen IRB-Formel durch Anwendung eines bereits bestehenden Modells eventuell weniger intensiv hätte stattfinden müssen.

Jedoch kann im Vorfeld dieser Arbeit nicht von einem völlig identischen Ansatz beider Modelle ausgegangen werden. Daher wollen wir dem Leser mit unserer vergleichenden Analyse insbesondere ermöglichen, das nach Basel II ermittelte unterlegungspflichtige Kapital mit einem Verlustverteilungsmodell zu vergleichen, das seine Eignung in der Praxis, für die Annahmen des Basler Ausschusses, bereits unter Beweis gestellt hat.

Die erzielten Ergebnisse des Vergleiches werden final im Rahmen einer kritischen Würdigung in Kapitel sechs zusammengefasst.

2 Grundlagen der Kreditrisikomessung

2.1 Einführung Beispielportfolio

Das Kreditportfolio eines Kreditinstituts lässt sich in der Regel in verschiedene Kategorien einteilen. Beispielsweise können Subportfolien für das Retail-/Privatkundensegment (z. B. Konsumkredite oder Immobilienfinanzierungen), für gewerbliche Kredite an Unternehmen oder an Staaten bzw. Banken gebildet werden.¹³ Die Zugehörigkeit eines Kredites zu einem bestimmten Subportfolio lässt häufig bereits Rückschlüsse auf das Risikoprofil und den Risikocharakter des Kredites zu. So sind langfristige wohnungswirtschaftliche Kredite im Privatkundengeschäft grundsätzlich mit werthaltigen Sicherheiten (z. B. Grundschulden auf Immobilien) ausgestattet, die im Falle einer Nicht-Rückzahlung des Kredites verwertet werden können. Dadurch lässt sich der Verlust des Kreditgebers bei Ausfall reduzieren.¹⁴

¹³ Vgl. Klement, J. (2007), S. 216 – 219. Im Regelwerk zu Basel II werden darüber hinaus Beteiligungsforderungen separat behandelt. Die dargestellte grobe Klassifizierung entspricht im Grossen und Ganzen der gängigen Bankpraxis. Vgl. Basel Committee (2004), Tz. 215 und Tz. 216.

¹⁴ Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 9 f.

Für die Zielsetzung der vorliegenden Arbeit verwenden wir zunächst ein einfaches, jedoch sehr illustratives Kreditportfolio, das lediglich aus fünf Kreditnehmern mit exakt gleich strukturierten Engagements besteht. Im Einzelnen stellt sich das Portfolio wie folgt dar:

- Jeder der fünf Kreditnehmer i erhält zum heutigen Zeitpunkt ($T = 0$) einen Kredit über EUR 1 Mio. von der Bank.
- In einem Jahr ($T = 1$) muss jeder der Kreditnehmer den geliehenen Betrag von EUR 1 Mio. zurückzahlen, was somit dem maximalen Rückzahlungsbetrag entspricht.¹⁵

Die Kreditvolumina der Einzelkredite, die ohne Sicherstellung für eine kurze Laufzeit gewährt wurden, lassen den Rückschluss zu, dass es sich um Forderungen gegenüber Unternehmen handelt, die z. B. im Rahmen einer Investition als Vorfinanzierung gewährt wurden. Die weitere Beschreibung des Portfolios bzw. der Einzelpositionen erfolgt in folgendem Kapitel, das gleichzeitig Definitionen und Erläuterungen zu den wichtigsten Begriffen der Kreditrisikomodellierung beinhaltet.

2.2 Grundlegende Begriffe und Definitionen

2.2.1 Ausfallereignis, Ausfallwahrscheinlichkeit

Ein Kreditengagement wird als „Ausfall“ bezeichnet, wenn der Kreditnehmer nicht bzw. nicht mehr vollständig seinen Zahlungsverpflichtungen nachkommt.¹⁶ Unter eine „ordnungsgemäße Bedienung“ eines Kredites fallen alle vertraglich vereinbarten Zahlungen eines Kreditnehmers. Diese umfassen in der Regel sowohl die Kapital- (Tilgungen) als auch Zinsströme (Zinszahlungen).¹⁷

Das (potenzielle) Eintreten eines Ausfalls nennt man Ausfallereignis (engl. Default oder Default Event)¹⁸. Es ist jedoch offensichtlich, dass künftige Ereignisse wie der Ausfall eines

¹⁵ Zur besseren Nachvollziehbarkeit wird auf eine Einbeziehung von Zinszahlungen verzichtet, wenngleich eine Berücksichtigung dieser Zahlungen, z. B. über die Barwertmethode, korrekt wäre. Weiterführende Ausführungen zur Barwertmethode bietet z. B. Kruschwitz, L. (2007).

¹⁶ Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 17.

¹⁷ Der Basler Akkord gibt eine verbindliche Mindestdefinition, ab wann eine Forderung als ausgefallen gilt. Demnach kann die Bank von einem Ausfall ausgehen, wenn der Schuldner seinen Verpflichtungen mit sehr hoher Wahrscheinlichkeit nicht in vollem Umfang nachkommen kann, ohne dass die Bank auf Maßnahmen wie z. B. Sicherheitenverwertung zurückgreifen muss oder wenn eine wesentliche Verbindlichkeit des Schuldners ggü. der Bankengruppe mehr als 90 Tage überfällig ist. Vgl. Basel Committee (2004), Tz. 452.

¹⁸ Default Events werden verstanden als Kreditereignisse, wie z. B. Konkurs, nicht erfolgte Zahlungen bei Fälligkeit, Zahlungsverweigerung, Umstrukturierungen, Moratorium, qualifizierter Verzug. Vgl. Schierenbeck, H. (2001), S. 324.

Kreditnehmers nicht mit Sicherheit vorhergesagt werden können. In dieser Unsicherheit liegt das Risiko des Kreditgeschäftes.¹⁹ Daher bedient man sich der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, so dass das Ausfallereignis eine Ausfallwahrscheinlichkeit erhält. Die im Englischen auch als Probability of Default (PD)²⁰ bezeichnete Wahrscheinlichkeit quantifiziert den Erwartungswert (in Prozent) eines eigentlichen Default Events.

Die gängigste Methode zur Ermittlung der Ausfallwahrscheinlichkeit eines Kreditnehmers bzw. Kreditengagements erfolgt über die Ableitung aus Ratings.²¹ Kreditnehmer werden entsprechend ihrer Bonität in (interne oder externe) Ratingklassen²² eingeteilt. Jeder Ratingklasse wird eine Ausfallwahrscheinlichkeit zugeordnet, wodurch eine Aussage darüber getroffen wird, mit welcher Wahrscheinlichkeit der Kreditnehmer seinen Zahlungsverpflichtungen innerhalb einer bestimmten Periode (häufig 1 Jahr) nicht nachkommen kann.²³

In Tabelle 1 wird illustrativ die Einjahresausfallwahrscheinlichkeit einer S&P-Ratingskala zugeordnet. Je besser ein Kreditnehmer geratet ist, desto geringer ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Schuldner innerhalb der Periode ausfällt. Ein Unternehmen mit einem „AAA“-Rating wird danach lediglich zu 0,01% seinen Verpflichtungen innerhalb eines Jahres nicht nachkommen. Übertragen auf ein Portfolio, das aus 10.000 Unternehmenskrediten der Kategorie „AAA“ besteht, würde (im Mittel) einmal im Jahr eines dieser Unternehmen ausfallen. In einem analogen Portfolio, bestehend jedoch aus nur „B“-gerateten Unternehmen, würde es (im Mittel) zu 675 Unternehmensausfällen binnen Jahresfrist kommen.

¹⁹ Denn: Könnte man die Ausfälle ex ante genau vorherbestimmen, würden künftige Ausfälle keinen Kredit bekommen und künftige Nicht-Ausfälle Kredite zu günstigen Konditionen.

²⁰ Die Ausfallhäufigkeit wird in der Literatur auch als expected default frequency (EDF) bezeichnet. Vgl. Basel Committee (1999b); Schmidt, A (2001); Deutsche Bundesbank (2003).

²¹ Vgl. Klement, J. (2007), S. 111.

²² Ratingklassen werden über Buchstaben oder Zahlen definiert, abhängig von der jeweiligen Ratingagentur bzw. dem Ratingssystem einer Bank.

²³ Für weiterführende Literatur zur Ratingermittlung sowie zur Erhebung von Ausfallwahrscheinlichkeiten einzelner Ratingklassen, vgl. z. B. Buchmann, P. (2003), Munsch, M. / Weiß, B. (2000); detaillierte Informationen über die Ratingmethodik bzw. konkrete Ratingkriterien der einzelnen Ratingagenturen lassen sich auch unter www.standardandpoors.com oder www.moodys.com downloaden.

Rating-Klasse	PD	Rating	
1	0,01%	AAA	Investment grade
2	0,01%	AA+	
3	0,02%	AA	
4	0,03%	AA-	
5	0,05%	A+	
6	0,08%	A	
7	0,13%	A-	
8	0,22%	BBB+	
9	0,36%	BBB	
10	0,58%	BBB-	
11	0,94%	BB+	Non investment / Speculative grade
12	1,55%	BB	
13	2,50%	BB-	
14	4,08%	B+	
15	6,75%	B	
16	10,88%	B-	
17	17,75%	CCC+	
18	29,35%	CCC/CCC-	
19	100,00%	D	

Tabelle 1: Einjahresausfallwahrscheinlichkeiten zu S&P Ratingklassen²⁴

Die Trennung der einzelnen Ratingklassen zwischen Investment und Non investment grade wird durch folgende Aussage von S&P verdeutlicht: „*Issuers in investment-grade rating categories seldom default, so the number of defaults among these rating categories is very low...*“, was auch in der jüngsten jährlichen Untersuchung der Agentur zu Ausfällen von gerateten Unternehmen weiter bestätigt wird „... *in 2007, the total number of defaults (22) was the lowest recorded since 1996, with all defaulters originally rated speculative grade (BB+ or lower).*“²⁵

Nachdem Risikobetrachtungen jedoch nicht immer auf dem Einjahreshorizont stattfinden, werden in Anhang 1 die in der Studie ermittelten kumulierten durchschnittlichen Ausfallraten der Jahre 1981 – 2007 für verschiedene Laufzeiten dargestellt. Auch kann sich die Bonitätsnote eines Kreditnehmers im Zeitablauf verändern. Diese laufzeitabhängige „Wanderung“ zwischen einzelnen Ratingklassen wird als Migration bezeichnet.²⁶

²⁴ Die Ausfallwahrscheinlichkeiten wurden von Bluhm, Fahrmeir und Henking linear auf logarithmischer Skala gewählt und geben im Sinne einer exponentiellen Regression historische Ausfallquoten der letzten 20 Jahre wieder. Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 17 f.

²⁵ S&P (2008a), S. 2 und S. 10.

²⁶ Anhang 2 gibt die durchschnittliche Ratingklassenmigration nach S&P für verschiedene Zeithorizonte wieder. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Kreditnehmer seine Ratingklasse im Zeitablauf bestätigt bzw. beibehält, nimmt mit zunehmender Betrachtungsdauer ab.

Für unser Beispielportfolio nehmen wir eine einjährige Ausfallwahrscheinlichkeit (p_i) aller Kreditnehmer von 1,00% an ($p_i = 0,01$), was der durchschnittlichen PD aller Ratingklassen aus Anhang 1 gleichkommt. Gleichzeitig legen wir fest, dass zum Zeitpunkt der Rückzahlung ($T = 1$) lediglich zwei mögliche Zustände für jeden Kredit existieren.

- „0“ der Kredit wird ordnungsgemäß zurückgeführt
- „1“ der Kredit fällt aus

Die Ausfallwahrscheinlichkeit p_i entspricht in diesem Fall also der Wahrscheinlichkeit, dass der Kreditnehmer vom Status „0“ im Zeitpunkt $T = 0$ zum Status „1“ innerhalb des gegebenen Zeithorizontes wechselt. Jedoch können wir nicht mit Bestimmtheit sagen, ob der Kreditnehmer i im Zeitpunkt $T = 1$ ausfallen wird.

Dem Ereignis „1“ (Kredit fällt aus) des i -ten Kredites geben wir formal die Bezeichnung D_i und führen die Zufallsvariable²⁷ 1_{D_i} ein, die jedoch nur Werte in $\{0,1\}$ ($1_{D_i} = „0“$ kein Ausfall und $1_{D_i} = „1“$ Ausfall) annehmen kann. Die Rolle von Zufallsvariablen ist es, aus komplexen Ergebnissen reell wertige Funktionen zu bilden, denen auf Basis des zugrunde liegenden Modells Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden können. In unserem Fall lässt sich die Zufallsvariable durch folgende Dichte beschreiben:

1_{D_i}	0	1
$\mathbb{P}(X_i = 1_{D_i})$	$1 - p_i$	p_i

Zufallsvariablen wie 1_D werden auch als diskrete Indikatorenvariablen bezeichnet und helfen uns, den per heute unsicheren Verlust am Einjahreshorizont zu beschreiben, indem sie die Anzahl der Ausfälle im Zeitablauf zählt.

Mit der Ausfallwahrscheinlichkeit ist bereits eine der wichtigsten Größen zur Ermittlung eines potenziellen Portfolioverlustes bekannt. Die weiteren Parameter zur Bestimmung dieser Größe werden nun vorgestellt.

²⁷ Eine Variable oder ein Merkmal X , dessen Werte oder Ausprägungen die Ergebnisse eines Zufallsvorgangs sind, heisst Zufallsvariable X . Die Zahl oder Ausprägung x , die X bei der Durchführung des Zufallsvorgangs annimmt, heißt Realisierung oder Wert von X . Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 46.

2.2.2 Exposure at Default, Loss Given Default / Recovery Rate

Im Falle des Eintritts eines Ausfallereignisses ($1_D = 1$) bestimmt sich der Verlust eines Kreditengagements über die ausstehende Forderung zu diesem Zeitpunkt (Exposure at Default - EAD) sowie der Verlustquote (Loss Given Default - LGD).

Die Höhe des tatsächlichen Kreditrisikopotenzials, welches auch als Kreditäquivalent oder Credit Exposure bezeichnet wird, ist bei einer Vielzahl von Kreditprodukten nicht von vornherein bekannt.²⁸ Beispielsweise stellt die Höhe der tatsächlichen Inanspruchnahme einer gewährten Kontokorrentlinie bei Eintritt eines Default Events eine zufallsabhängige Größe dar, so dass die Inanspruchnahme im Ausfallzeitpunkt nicht mit Sicherheit bekannt ist.²⁹ In der vorliegenden Betrachtung wird jedoch davon ausgegangen, dass sowohl EAD als auch LGD deterministisch, also nicht zufällig, sind. Dies ist aufgrund der einfachen Struktur der Kreditengagements unseres Portfolios vertretbar und geht mit den ebenfalls deterministischen Vorgaben des Basler Basisansatzes konform.

Das EAD zum Ausfallzeitpunkt kann über die ausstehende Verbindlichkeit (outstandings, OUT) und den zugesagten, jedoch noch nicht abgerufenen Kreditlinien (commitments, COMM) bestimmt werden.³⁰

$$(1) \quad \text{EAD} = \text{OUT} + \text{CCF} * \text{COMM} \quad (\text{mit } 0 \leq \text{CCF} \leq 1)$$

CCF steht für Credit Conversion Factor (Kreditumrechnungsfaktor), der im IRB-Basisansatz einheitlich auf 0,75 für alle Kreditzusagen festgelegt wurde.³¹ Im fortgeschrittenen IRB-Ansatz ist eine bankinterne Schätzung des CCF erlaubt.³² Das EAD jeden Kreditnehmers unseres Portfolios beträgt während des gesamten Zeitraumes EUR 1 Mio., nachdem dies in unserer Betrachtung der einzigen Forderung entspricht.

Die Verlustquote (LGD) stellt den prozentualen Anteil einer Forderung dar, welcher bei Eintritt des Ausfallereignisses uneinbringlich ist, d. h. die Bank erhält diesen Betrag nicht mehr zurück.³³ Sicherheitenerlöse können den LGD positiv beeinflussen, der zwischen

²⁸ Vgl. Basel Committee (1999b), S. 45 f.

²⁹ Es lässt sich z. B. eine stark positive Korrelation zwischen der Höhe der tatsächlichen Inanspruchnahme einer Kreditlinie und einer Ratingverschlechterung vermuten. Vgl. Basel Committee (1999b), S. 45 f.

³⁰ Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 20.

³¹ Vgl. Basel Committee (2004), Tz. 312.

³² Vgl. Basel Committee (2004), Tz. 316.

³³ Vgl. Basel Committee (1999b), S. 18.

$0 \leq \text{LGD} \leq 1$ liegt. Häufig findet man auch die Bezeichnung Recovery Rate, die als Komplement zum LGD zu verstehen ist und durch folgende Beziehung deutlich wird:³⁴

$$(2) \quad \text{LGD} = 1 - [\text{Recovery Rate}]$$

Für das Beispielportfolio legen wir eine Recovery Rate von 40% fest, was gem. Formel (2) einen LGD von 60% bzw. 0,6 bedeutet. Formal lässt sich der LGD eines einzelnen Kreditengagements des Portfolios mit einer Recovery Rate von 40% auch wie folgt ermitteln:³⁵

$$(3) \quad \text{LGD} = \frac{\text{Verlust}}{\text{EAD}} = \frac{1.000.000 - 400.000}{1.000.000} = 0,6$$

Im IRB-Basisansatz wird der LGD für alle vorrangigen Forderungen pauschal mit 45% und für nachrangige Forderungen mit 75% vorgegeben.³⁶ Der fortgeschrittene IRB-Ansatz erlaubt Kreditinstituten die Schätzung des LGD auf Basis eigener Erfahrungswerte.³⁷

2.2.3 Verlust und Erwarteter Portfolioverlust

Der Verlust (Loss) L_i eines Kreditengagements ergibt sich im Ausfallereignis ($1_{D_i} = 1$) aus:

$$(4) \quad L_i = \text{EAD}_i * \text{LGD}_i * 1_{D_i}$$

Im Beispielportfolio beträgt der Verlust bei Ausfall eines Kredites gemäß dieser Formel EUR 600.000. Ein Kreditportfolio PF setzt sich jedoch i. d. R. aus mehreren Einzelkrediten i zusammen ($i = 1, \dots, n$), so dass sich der Portfolioverlust aus der Summe aller Verluste der einzelnen Kreditengagements ergibt:

$$(7) \quad L_{\text{PF}} = \sum_{i=1}^n \text{EAD}_i * \text{LGD}_i * 1_{D_i}$$

Für das Beispielportfolio ergeben sich demnach folgende sechs Szenarien ($\omega_1 - \omega_6$):

- ω_1 Kein Kredit fällt aus	$L_{\text{PF}} = \text{EUR} \quad 0$
- ω_2 Genau ein Kredit fällt aus	$L_{\text{PF}} = \text{EUR} \quad 600.000$
- ω_3 Genau zwei Kredite fallen aus	$L_{\text{PF}} = \text{EUR} \quad 1.200.000$
- ω_4 Genau drei Kredite fallen aus	$L_{\text{PF}} = \text{EUR} \quad 1.800.000$
- ω_5 Genau vier Kredite fallen aus	$L_{\text{PF}} = \text{EUR} \quad 2.400.000$
- ω_6 Alle fünf Kredite fallen aus	$L_{\text{PF}} = \text{EUR} \quad 3.000.000$ (= maximaler Verlust)

³⁴ Vgl. Klement, J. (2007), S. 114 – 116.

³⁵ Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 21 und S. 268. Weiterführende Literatur zur Bestimmung von Recovery Rates bietet z. B. Klement, J. (2007), S. 114 – 116.

³⁶ Vgl. Basel Committee (2004), Tz. 287 und Tz. 288.

³⁷ Vgl. Basel Committee (2004), Tz. 455 und Tz. 456.

Nachdem es sich um ein uniformes Kreditportfolio handelt, in dem alle fünf Kredite die gleichen Parameter besitzen, ist es in diesem Beispiel für die Berechnung unerheblich, wie sich der Portfolioverlust im Einzelnen (i. e. aus welchen Engagements) zusammensetzt. Während es jedoch für die vier Szenarien $\omega_2 - \omega_5$ mehrere Möglichkeiten gibt, existieren für die Szenarien ω_1 bzw. ω_6 je nur eine Möglichkeit des Eintritts.³⁸

Nun verfügen wir über die nötigen Parameter, um den erwarteten Verlust (Expected Loss - EL)³⁹ in Geldeinheiten eines einzelnen Kredites $i = 1, 2, 3, 4, 5$ zu bestimmen. Dieser ergibt sich als Produkt der Ausfallwahrscheinlichkeit ($p_i = 0,01$) mit dem möglichen Verlust im Ausfallereignis.^{40 / 41}

$$\begin{aligned}(6) \quad EL_i &= EAD_i * LGD_i * p_i \\ EL_i &= \text{EUR } 1.000.000 * 0,6 * 0,01 \\ EL_i &= \text{EUR } 6.000\end{aligned}$$

Dieser Betrag entspricht den Standardrisikokosten, die im Rahmen einer risikoadäquaten Preisgestaltung in der Prämien-/Zinskalkulation zu berücksichtigen sind. Es handelt sich damit vielmehr um einen kalkulierbaren Kostenfaktor, der vom Kunden als eine Art Versicherungsprämie zu vereinnahmen ist.⁴²

Der intuitive und richtige Rückschluss, dass die Summe der erwarteten Einzelverluste dem erwarteten Portfolioverlust entspricht, spiegelt sich in Formel (7) wider:

$$\begin{aligned}(7) \quad EL_{PF} &= \sum_{i=1}^n EAD_i * LGD_i * p_i \\ EL_{PF} &= \text{EUR } 30.000\end{aligned}$$

³⁸ Für einen Portfolioverlust i. H. v. EUR 600.000 bzw. EUR 2.400.000 gibt es je fünf Alternativen: i. e. beispielsweise aus dem Ausfall bzw. Nicht-Ausfall des Einzelengagements L_1 , oder L_2 , oder L_3 , oder L_4 , oder L_5 . In den Szenarien ω_3 und ω_4 sind zehn Kombinationsmöglichkeiten vorhanden. Für $L_{PF} = 0$ müssen hingegen alle Kreditnehmer ihren Verpflichtungen ordnungsgemäß nachkommen, bzw. müssen für $L_{PF} = \text{EUR } 3.000.000$ alle Kreditnehmer ausfallen, was somit dem maximalen Portfolioverlust entspricht.

³⁹ Der erwartete Verlust ist der Erwartungswert des Verlustes und ein statistischer (Verteilungs-) Parameter. Über eine Häufigkeitsinterpretation kann er als der im Mittel realisierte Verlust interpretiert werden. Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 23.

⁴⁰ Vgl. Basel Committee (1999b), S. 18; Schmidt, A. (2001), S. 68 – 72; Meier, C. (2004), S. 255.

⁴¹ Nachdem das EAD und der LGD nicht als zufällig angenommen werden, benötigt man lediglich den Erwartungswert des Ausfallindikators 1_{D_i} , der der Ausfallwahrscheinlichkeit $PD = p_i = 0,01$ entspricht.

⁴² Die vereinnahmten Risikoprämien sollen im Zeitablauf den erwarteten Verlust abdecken; vgl. Schierenbeck, H. (1997), S. 54; Schmidt, A. (2001), S. 67.

Diese Additivität ist jedoch nicht selbstverständlich und wird bereits beim unerwarteten Verlust seine Gültigkeit verlieren.

2.2.4 Unerwarteter Portfolioverlust

Durch die Berücksichtigung der erwarteten Verluste in der Risikoprämienberechnung können diese Verluste nicht mehr als Risiko im eigentlichen Sinne betrachtet werden. Dagegen beinhaltet der unerwartete Verlust (Unexpected Loss – UL) das eigentliche Kreditrisiko, in dem er angibt, wie weit ein realisierter Verlust vom erwarteten Verlust entfernt liegt. Der unerwartete Verlust eines Einzelengagements kann z. B. über die Standardabweichung des Verlustes gemessen werden, die sich aus der Quadratwurzel der Varianz ergibt.⁴³ Dann gilt:

$$(8) \quad UL_i = EAD_i * LGD_i * \sqrt{p_i(1 - p_i)}$$

Statistisch gesehen ist der unerwartete Verlust ein Maß für die Streuung der Verluste um den erwarteten Verlust. Je kleiner der unerwartete Verlust ausfällt, desto besser ist der erwartete Verlust als Schätzung des Verlustes.⁴⁴

Der unerwartete Verlust eines Kredites $i = 1, \dots, 5$ aus dem Beispielportfolio beträgt somit:

$$UL_i = \text{EUR } 1.000.000 * 0,6 * \sqrt{0,01(1 - 0,01)}$$

$$UL_i = \text{EUR } 59.699,25$$

Ausgehend von der Annahme, dass die einzelnen Ausfälle untereinander stochastisch unabhängig bzw. unkorreliert sind und sich somit gegenseitig nicht beeinflussen, lässt sich der unerwartete Portfolioverlust aus der Summe der Einzelvarianzen bestimmen. Die Varianz V ist der quadrierte unerwartete Verlust. Der unerwartete Portfolioverlust ergibt sich, unter der Annahme der Unkorreliertheit⁴⁵ der einzelnen Kreditausfälle, wie folgt:⁴⁶

⁴³ Der unerwartete Verlust wird in der Literatur jedoch nicht einheitlich über die Standardabweichung definiert. Gundlach / Lehrbass oder auch Theiler verstehen den unerwarteten Verlust als Synonym für den in dieser Arbeit verwendeten Begriff des ökonomischen Kapitals, auf das unter 2.2.7 eingegangen wird. Vgl. Gundlach, M. / Lehrbass, F. (2004); Theiler, U. (2002), S. 25 f.

⁴⁴ Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 24 f.

⁴⁵ Unkorreliertheit bedeutet nicht zwingend, dass die Zufallsvariablen stochastisch unabhängig sind. Es können nichtlineare Abhängigkeitsstrukturen vorliegen, die die Korrelation bzw. Kovarianz nicht erfassen kann. Zwei stochastisch unabhängige Zufallsvariablen sind jedoch stets auch unkorreliert, jedoch ist der Unterschied zwischen unkorreliert und unabhängig für den unerwarteten Verlust irrelevant. Vgl. Abschnitt 2.2.8; Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 35.

⁴⁶ Auf die Währungsangabe wird durch die mathematischen Operationen verzichtet.

$$(9) \quad UL_{PF} = \sqrt{\mathbb{V}(L_{PF})} \quad \text{mit} \quad \mathbb{V}(L_{PF}) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(L_i) \quad \text{und} \quad \mathbb{V}(L_i) = UL_i^2$$

$$\mathbb{V}(L_i) = 59.699,25^2 = 3.564.000.000$$

$$UL_{PF} = \sqrt{5 * 3.564.000.000} = 133.491,57$$

Besonders sei darauf hingewiesen, dass die Additivität der Einzelvarianzen $\mathbb{V}(L_i)$ zur Gesamtvarianz $\mathbb{V}(L_{PF})$ im Allgemeinen nicht gilt. Dies ist lediglich aufgrund der Annahme einer stochastischen Unabhängigkeit bzw. Unkorreliertheit der Engagements möglich, wohingegen in der Praxis sehr wohl von einer gegenseitigen Beeinflussung von Kreditnehmern auszugehen ist. Daher lassen wir diese Annahme später auch fallen.

2.2.5 Verlustverteilung

Dass das tatsächliche Kreditrisiko der (negativen) Abweichung vom erwarteten Verlust entspricht, lässt sich auch durch eine ex post Betrachtung, wie z. B. in Abbildung 1 dargestellt, belegen. Darüber hinaus wird deutlich, dass es im Zeitablauf zu deutlichen Schwankungen um den ermittelten Erwartungswert kommt.

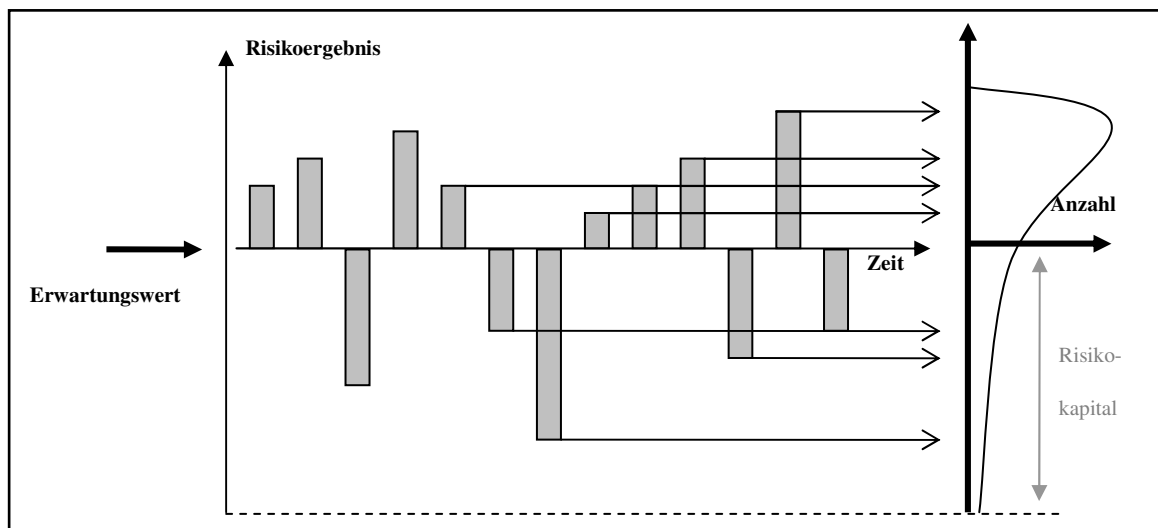


Abb. 1: Risikoergebnis – ex post-Betrachtung⁴⁷

⁴⁷ In Anlehnung an Schierenbeck, H. (2001), S. 260.

Die Verlustverteilung stellt zu jedem möglichen (Portfolio-)Verlust die zugehörige Eintrittswahrscheinlichkeit bereit. Sie ist z. B. erforderlich, um die Risikostruktur eines Portfolios abzulesen, und Risikokennzahlen oder Wahrscheinlichkeiten für verschiedene Verlustszenarien zu bestimmen. In Abbildung 2 wird die typische Verlustverteilung eines Kreditportfolios, mit Angabe wichtiger, teilweise später noch zu erläuternder Risikokennzahlen, skizziert.

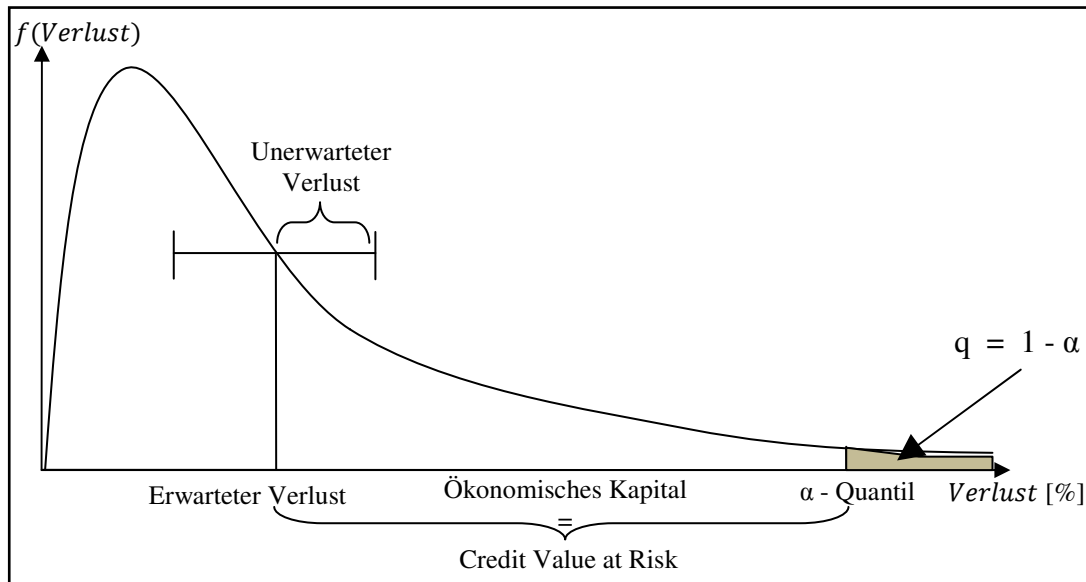


Abb. 2: Typische Verlustverteilung eines Kreditportfolios^{48 / 49}

Auffällig ist die Asymmetrie der Verlustverteilung. Diese rechtsschiefe Verteilung in Richtung hoher Verluste kann einerseits dadurch begründet werden, dass Kreditausfälle relativ seltene Ereignisse sind (hohe Wahrscheinlichkeit der ordnungsgemäßen Rückzahlung mit $\mathbb{P}(1_{D_i} = 0) = 1 - p_i$). Andererseits ist im Falle eines Ausfalls der Verlust unter Umständen sehr hoch, wohingegen die Gewinnmöglichkeiten begrenzt sind.⁵⁰

Die Verlustverteilung eines Kreditportfolios unterscheidet sich daher wesentlich von der aus Marktportfolios bekannten normalverteilten Verlustverteilung. Somit lassen sich folgende Aussagen zur Verlustverteilung eines Kreditportfolios festhalten:⁵¹

⁴⁸ Die Verlustverteilung wird mit einer durchgezogenen Linie dargestellt, was suggeriert, dass jeder Verlust unter der Verteilung prinzipiell möglich ist. Dies ist zumindest für große Portfolios bzw. Portfolios mit einer hohen Granularität, grundsätzlich richtig. Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 25 - 28.

⁴⁹ Vereinfacht lässt sich ein α -Quantil q definieren als die Integrationsgrenze für eine betrachtete Wahrscheinlichkeitsverteilung, so dass die Fläche links von q der Konfidenzwahrscheinlichkeit α entspricht. Vgl. Theiler, U. (2002), S. 78.

⁵⁰ Gewinnmöglichkeiten werden i. d. R. im Vorhinein durch die Kreditkonditionen (z. B. Zinssatz, Kredithöhe, Bearbeitungsprovision, Erstattung direkt zurechenbarer Kosten) festgelegt. Vgl. Klement, J. (2007), S. 136.

⁵¹ Vgl. Huschens, S. (2000), S. 9; Schulte, M. / Horsch, A. (2002), S. 116; Klement, J. (2007), S. 136.

- Im Vergleich zum Marktrisiko⁵² treten Verluste seltener, jedoch in stark schwankenden Höhen ein.
- Für große Verlustwerte wird die Verlustverteilung immer flacher, so dass extreme Verluste zunehmend unwahrscheinlicher werden. Dadurch überwiegt die Menge vieler kleiner Kreditausfälle. Eine Folge hiervon ist, dass in den meisten Geschäftsjahren die tatsächlichen Verluste den Expected Loss unterschreiten. In den übrigen Jahren fallen die tatsächlichen Verluste jedoch besonders hoch aus (vgl. Abb. 1 und Abb. 2).⁵³

Unter 2.2.3 wurden die möglichen Verlustereignisse beschrieben. Zur Bestimmung der Verlustverteilung werden darüber hinaus die Wahrscheinlichkeiten zu den jeweiligen Ereignissen benötigt. Aufgrund der angenommenen Unabhängigkeit/Unkorreliertheit der Ausfälle ist die Ermittlung über einfache Multiplikation der dazugehörigen Wahrscheinlichkeiten möglich. Für rein illustrative Zwecke erhöhen wir vorübergehend die Ausfallwahrscheinlichkeit p_i pro Kredit von 1% auf 20% ($p_i = 0,2$). Für die beiden eindeutig bestimmten Ereignisse ω_1 (kein Kredit fällt aus) bzw. ω_6 (alle Kredite fallen aus) lassen sich die Wahrscheinlichkeiten wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\omega_1) &= \mathbb{P}(1_{D_1} = 0) * \mathbb{P}(1_{D_2} = 0) * \mathbb{P}(1_{D_3} = 0) * \mathbb{P}(1_{D_4} = 0) * \mathbb{P}(1_{D_5} = 0) \\ &= (1 - p_i)^5 \\ &= 0,3277\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\omega_6) &= \mathbb{P}(1_{D_1} = 1) * \mathbb{P}(1_{D_2} = 1) * \mathbb{P}(1_{D_3} = 1) * \mathbb{P}(1_{D_4} = 1) * \mathbb{P}(1_{D_5} = 1) \\ &= p_i^5 \\ &= 0,0003\end{aligned}$$

Für die beiden Ereignisse ω_2 (genau ein Kredit fällt aus) bzw. ω_5 (genau vier Kredite fallen aus) existieren, wie unter 2.2.3 erläutert, jeweils fünf Möglichkeiten des Eintritts, so dass sich die Wahrscheinlichkeiten für die Ereignisse wie folgt ermitteln lassen:

⁵² Marktrisiken bzw. Marktpreisrisiken lassen sich anhand der analysierten Finanzinstrumente z. B. unterscheiden in: Zinsänderungs-, Aktienkurs-, Fremdwährungs- und sonstige Preisrisiken. Vgl. Theiler, U. (2002), S. 18; Schierenbeck, H. (1997), S. 511.

⁵³ Dies ist u. a. darauf zurückzuführen, dass der Median (auch Zentralwert genannt), der die Verlustverteilung (die Fläche unter der Kurve von Abb. 2) in zwei gleichgroße Hälften teilt und somit als 50%-Quantil aufgefasst werden kann, kleiner ausfällt als der Erwartungswert.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\omega_2) &= 5 * p_i * (1 - p_i)^4 \\ &= 5 * 0,2 * 0,8^4 \\ &= 0,4096\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\omega_5) &= 5 * p_i^4 * (1 - p_i) \\ &= 5 * 0,2^4 * 0,8 \\ &= 0,0064\end{aligned}$$

Für Ereignisse ω_3 (genau zwei Kredite fallen aus) bzw. ω_4 (genau drei Kredite fallen aus) existieren hingegen zehn Kombinationsmöglichkeiten:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\omega_3) &= 10 * p_i^2 * (1 - p_i)^3 \\ &= 10 * 0,2^2 * 0,8^3 \\ &= 0,2048\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\omega_4) &= 10 * p_i^3 * (1 - p_i)^2 \\ &= 10 * 0,2^3 * 0,8^2 \\ &= 0,0512\end{aligned}$$

Abbildung 3 gibt die Verlustverteilung des Portfolios in Form eines Stabdiagramms wieder. Durch die Erhöhung der Ausfallwahrscheinlichkeit konnte die typische Verlustverteilung auch bei der geringen Anzahl von Kreditnehmern erzielt werden (vgl. Abbildung 2).

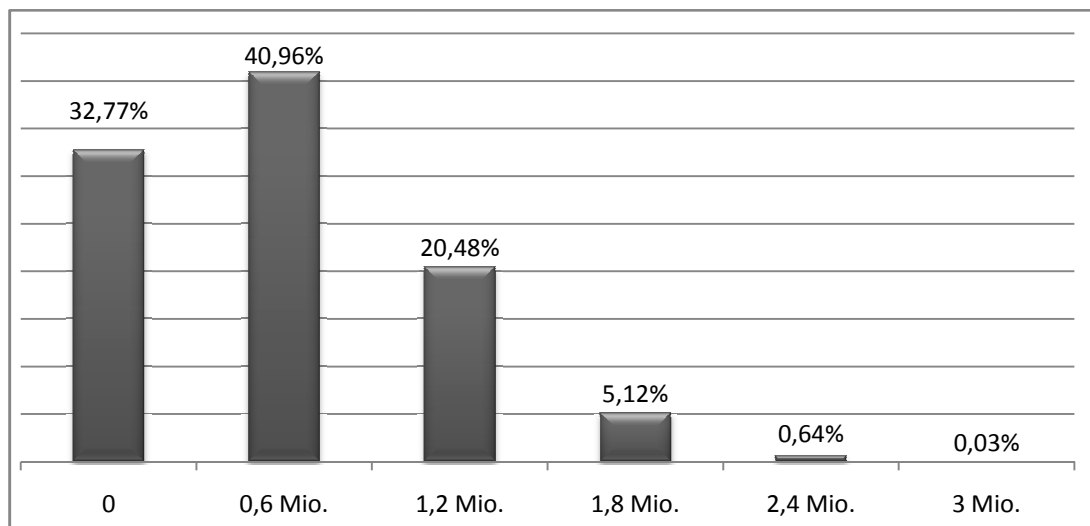


Abb. 3: Verlustverteilung des Portfolios bei stochastischer Unabhängigkeit und $p_i = 0,2$

Die sechs Wahrscheinlichkeiten bilden zusammen die Wahrscheinlichkeitsfunktion. Nachdem eines der sechs Szenarien auf jeden Fall eintreten wird, summieren sie sich zu 1.⁵⁴ Gewichten wir jedes Verlustereignis mit seiner Wahrscheinlichkeit und summieren dies über alle Verlustereignisse, so erhalten wir den Erwartungswert der Verlustverteilung, den Expected Loss des Portfolios. Dieser fällt gegenüber dem unter 2.2.3 ermittelten EL aufgrund der um 20fach erhöhten Ausfallwahrscheinlichkeit um diesen Faktor höher aus.⁵⁵

⁵⁴ Vgl. auch Tabelle 2.

⁵⁵ Die grundsätzliche Vorgehensweise bleibt davon jedoch unberührt und verdeutlicht, dass die Erwartungswertbildung linear erfolgt. Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 24 und S. 66 – 68.

$$\begin{aligned} EL_{PF} &= 0 * 0,3277 + 0,6 \text{ Mio.} * 0,4096 + 1,2 \text{ Mio.} * 0,2048 + 1,8 \text{ Mio.} * 0,051 \\ &\quad + 2,4 \text{ Mio.} * 0,0064 + 3 \text{ Mio.} * 0,0003 = \text{EUR } 600.000 \end{aligned}$$

Für die Bestimmung von so genannten Downside-Risikomaßen, wie z. B. der Value at Risk oder auch den Expected Shortfall, werden die kumulierten Wahrscheinlichkeiten benötigt. Diese ergeben sich durch Aufsummierung nach Verlustgröße und bilden mit den korrespondierenden Verlusten die Verteilungsfunktion des Portfolioverlustes.⁵⁶ Tabelle 2 liefert die entsprechende Übersicht.

Ereignis	Verlust in EUR	Wahrscheinlichkeit	kumulierte Wahrscheinlichkeit
kein Kredit fällt aus	0	0,3277	0,3277
genau ein Kredit fällt aus	600.000	0,4096	0,7373
genau zwei Kredite fallen aus	1.200.000	0,2048	0,9421
genau drei Kredite fallen aus	1.800.000	0,0512	0,9933
genau vier Kredite fallen aus	2.400.000	0,0064	0,9997
alle fünf Kredite fallen aus	3.000.000	0,0003	1

Tabelle 2: Verlustverteilung des Portfolios bei stochastischer Unabhängigkeit und $p_i = 0,2$

2.2.6 Value at Risk

Ursprünglich wurde der Value at Risk (VaR) als Downside Risikomaß im Kontext der Markt-risikomessung eingeführt. Die Besonderheit von Downside Risikomaßen liegt darin, dass sie sich lediglich auf das Ausmaß der negativen Abweichungen einer Wertveränderung konzentrieren. Der Value at Risk einer Position oder eines Portfolios kann insofern als dasjenige Verlustpotenzial beschrieben werden, das

- mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit α (Konfidenzniveau)⁵⁷,
- in einer bestimmten Zeitperiode (Haltedauer / Zeithorizont)
- als absolute Wertänderung

nicht überschritten wird.⁵⁸

⁵⁶ Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 25.

⁵⁷ Das Niveau auf dem ein VaR bestimmt wird, wird häufig als Konfidenzniveau bezeichnet. In der Statistik wird mit dem Konfidenzniveau üblicherweise die Überdeckungswahrscheinlichkeiten bei der Intervallschätzung bezeichnet. Beim VaR handelt es sich jedoch formal nicht um eine Intervallschätzung, sondern um ein Quantil der Verlustverteilung. Dennoch hat sich der Begriff Konfidenzniveau bei der VaR - Bestimmung etabliert. Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 30.

⁵⁸ Vgl. Theiler U. (2002), S. 78; Klement, J. (2007), S. 137.

Der VaR eines Portfolios oder einer Position wird i. d. R. als EUR – Betrag und grundsätzlich als positive Größe angegeben. Zum Beispiel bedeutet ein einjähriger Value at Risk von EUR 5.000, dass bei einem angenommenen Konfidenzniveau von $\alpha = 0,99$ ($q = 0,01$) im Mittel bei 99 von 100 gleichartigen und unabhängigen Portfolios innerhalb eines Jahres kein Verlust eintritt, der größer oder gleich dem Value at Risk von EUR 5.000 ist. Im Umkehrschluss bedeutet dies jedoch auch, dass im Mittel mit der Gegenwahrscheinlichkeit von $1 - \alpha = q$, also in einem Prozent der Fälle bzw. in einem von den beispielhaften 100 Portfolien, ein Verlust möglich ist, der größer als EUR 5.000 ausfällt. Der VaR ist demzufolge kein Floor, da ein höherer Wertverlust stets mit der entsprechenden Gegenwahrscheinlichkeit möglich ist, dessen Eintritt jedoch mit zunehmendem Konfidenzniveau immer unwahrscheinlicher wird.

Eine weitere Eigenschaft des Value at Risk liegt darin, dass er unempfindlich gegenüber „Ausreißern“ ist. Das bedeutet, ein sehr großes Verlustereignis muss keinen Einfluss auf den Value at Risk haben, wenn die Eintrittswahrscheinlichkeit dieses Ereignisses nur klein genug ist. Bezogen auf vorgenanntes Beispiel bleibt z. B. ein Verlust i. H. v. EUR 10.000 unberücksichtigt, wenn dessen Eintrittswahrscheinlichkeit lediglich bei 0,1% liegt (also rechts des in diesem Beispiel gewählten Konfidenzniveaus von 99%). Demzufolge gibt der VaR auch keine Auskunft darüber, wie hoch ein tatsächlicher Verlust bei Überschreiten der Verlustschränke ausfallen könnte.⁵⁹

An diesem Punkt setzen weitere Downside-Risikomaße, wie z. B. der Expected Shortfall, an. Dieser ist als bedingter Erwartungswert zu verstehen, der bei Überschreiten der Value at Risk Grenze eintreten wird. Nachdem der Expected Shortfall im Rahmen des Basler Akkords keine Berücksichtigung findet, wird auch in vorliegender Arbeit nicht weiter auf die „Weiterentwicklung des Value at Risk“ eingegangen.⁶⁰

Unter anderem wird bei der Kreditrisikomodellierung aufgrund oben angeführter Kritikpunkte in der Regel ein Sicherheits- / Konfidenzniveau von 99 bis 99,98 Prozent verwendet, so dass der VaR einem extremen und äußerst seltenen Ereignis entspricht.⁶¹

Eine VaR-Bestimmung für einzelne Kreditengagements ist, vor allem wenn EAD und LGD als deterministisch angenommen werden, nicht sinnvoll, nachdem die Verlustverteilung für diese Position nur aus zwei Punkten besteht. Für das Beispielfortfolio lassen sich folgende

⁵⁹ Vgl. Kleeberg, M. / Schlenger C. (2000), S. 976.

⁶⁰ Weiterführende Literatur, zur Anwendung des Expected Shortfalls in der Kreditrisikomessung und -steuerung bietet z. B. Theiler, U. (2002).

⁶¹ Vgl. Hüschen, S. (2000), S. 7.

VaR-Werte durch $\text{VaR}_\alpha = \max.(x \mid F(x) \leq \alpha)$ über die kumulierten Wahrscheinlichkeiten der Tabelle 2 ermitteln:⁶²

Niveau α	VaR_α
99%	EUR 1,8 Mio.
99,9%	EUR 2,4 Mio.
99,99%	EUR 3,0 Mio.

Tabelle 3: VaR-Bestimmung im Portfolio bei stochastischer Unabhängigkeit und $p_i = 0,2$ ⁶³

2.2.7 Ökonomisches Kapital / Credit Value at Risk

Wie bereits erläutert besteht das eigentliche Kreditportfoliorisiko darin, dass der tatsächlich eintretende Verlust vom erwarteten Verlust abweicht und damit die vereinnahmten Risiko-/Versicherungsprämien nicht zur Deckung der realisierten Verluste ausreichen.⁶⁴ Zum Ausgleich dieses Betrages bzw. um die Verluste „auffangen“ zu können ist eine ausreichend hohe Eigenkapitalsubstanz erforderlich. Das ökonomische Kapital (Economic Capital) bildet damit, wie bereits in Abbildung 2 dargestellt, den Differenzbetrag zwischen dem Value at Risk und dem Expected Loss.⁶⁵ Als Synonym zur Definition des ökonomischen Kapitals wird in dieser Arbeit der Begriff des Credit Value at Risk (CVaR) verwendet.

Das vorzuhaltende ökonomische Kapital korrespondiert somit wesentlich mit dem vom Kreditinstitut gewählten Konfidenzniveau des Value at Risk. Tabelle 4 verdeutlicht den Zusammenhang für das Beispielportfolio anschaulich.

EL_{PF}	Niveau α	VaR_α	Economic Capital - EC_α
EUR 600.000	99%	EUR 1,8 Mio.	EUR 1,2 Mio.
EUR 600.000	99,9%	EUR 2,4 Mio.	EUR 1,8 Mio.
EUR 600.000	99,99%	EUR 3,0 Mio.	EUR 2,4 Mio.

Tabelle 4: Bestimmung des EC im Portfolio bei stochastischer Unabhängigkeit und $p_i = 0,2$

⁶² $F(x)$ steht für die kumulative Wahrscheinlichkeit und entspricht der Verteilungsfunktion; vgl. auch Tabelle 2.

⁶³ Nachdem es für die gewählten Wahrscheinlichkeiten von 99% bzw. 99,99% keinen maximalen Verlust gibt, der genau mit dieser Wahrscheinlichkeit eintritt, legt man als VaR denjenigen Verlust fest, bei dem zum ersten Mal das 99%-Niveau (-Quantil) überschritten wird. Der $\text{VaR}_{99\%}$ beträgt somit EUR 1,8 Mio. Zum 99,9%-Niveau (-Quantil) beträgt der Value at Risk EUR 2,4 Mio. und zum 99,99%-Niveau (-Quantil) EUR 3 Mio. was einem Totalverlust des Portfolios bis auf die Recovery-Rates gleichkommt. Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 30.

⁶⁴ Vgl. Basel Committee (1999b), S. 13; Hushens, S. (2000), S. 7.

⁶⁵ Vgl. Basel Committee (1999b), S. 14.

Das Basler Committee führt das von einem Institut gewählte Sicherheitsniveau auf das von der Bank angestrebte Rating zurück, wie nachfolgende Formulierung verdeutlicht: „... *the economic capital for credit risk is determined so that the estimated probability of unexpected credit loss exhausting economic capital is less than some target insolvency rate ... in practice, the target insolvency rate is often chosen to be consistent with the bank's desired credit rating*”.^{66/67}

In vorgenannter Aussage kann das ökonomische Kapital als der unerwartete Verlust verstanden werden, was jedoch nicht mit der Definition in vorliegender Arbeit konform geht. Die synonyme Verwendung der Begriffe Unexpected Loss und Economic Capital ist in der Literatur aber auch nicht völlig unüblich, nachdem das Committee keine klare Definition der Bezeichnungen vorgibt. „*Banks typically express the risk of the portfolio with a measure of unexpected credit loss (i. e. the amount by which actual losses exceeds the expected loss) such as the standard deviation of losses or the difference between the expected loss and some selected target credit loss quantile*”.⁶⁸ Es ist demnach in der jeweiligen Anwendung darauf zu achten, wie die einzelnen Begriffe verwendet werden.

2.2.8 Korrelation

Die Annahme der stochastischen Unabhängigkeit im Portfolio wird nun fallen gelassen, da sich in der Realität Ausfallereignisse zweier Kreditnehmer gegenseitig beeinflussen bzw. gemeinsame Ursachen für den Ausfall von Krediten existieren.⁶⁹

Dies hat eine Erhöhung des Portfoliorisikos zur Folge, bedeutet eine gleichläufige (positive) Abhängigkeit eine gemeinsame Tendenz zum Ausfall von Schuldnern. Wie nachfolgende Ausführungen nahelegen, gestaltet sich die Modellierung und Quantifizierung von Abhängigkeiten als schwierig. Darin dürfte der Hauptgrund für die Bildung von Portfoliomodellen liegen, in die z. B. gemeinsame Ausfallursachen oder gemeinsame Treiber für die Ausfallneigung eingehen.⁷⁰

⁶⁶ Basel Committee (1999b), S. 14.

⁶⁷ Die Deutsche Bank verwendet z. B. zur internen Bestimmung des einjährigen ökonomischen Kapitalbedarfes über alle Risikoarten hinweg ein Konfidenzniveau von 99,98%. Vgl. Deutsche Bank (2007), S. 58. Die angestrebte Insolvenzrate der Bank entspricht somit der historischen 1-Jahres-Ausfallrate für „AA“ bewertete Unternehmensanleihen (etwa 2 Basispunkte nach Tabelle 1).

⁶⁸ Basel Committee (1999b), S. 13 f.

⁶⁹ Viele Portfoliomodelle gehen davon aus, dass die Korrelationen in einem Kreditportfolio auf einen oder mehrere Risikofaktoren zurückzuführen sind, die die Kreditqualität der Schuldner beeinflussen (z. B. Wirtschaftslage, Zinsniveau, Branche). Vgl. Meier, C. (2004), S. 256; Schulte, M. / Horsch, A. (2002), S. 114.

⁷⁰ Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 34. Einen Überblick verschiedener Kreditrisikomodelle, die sich als Benchmarkmodelle etabliert haben, bieten Crouhy, M. / Galai, D. / Mark, R. (2000), S. 59 - 117.

Die bekannteste und üblichste Modellierung stochastischer Abhängigkeiten erfolgt über die Korrelation bzw. den Korrelationskoeffizienten⁷¹, der folgende Eigenschaften aufweist:

- Der Korrelationskoeffizient ρ ist ein Maß für den linearen Zusammenhang, was zur Folge hat, dass der Betrag des Korrelationskoeffizienten umso größer ist, je besser sich der Zusammenhang zweier Zufallsvariablen durch eine Gerade erklären lässt.
- Der Wertebereich des Korrelationskoeffizienten ist $[-1,1]$.
- Positive Vorzeichen deuten auf eine gleichläufige, negative Vorzeichen auf eine gegenläufige Abhängigkeit hin.
- Unkorreliert sind Ereignisse bei einem Korrelationskoeffizienten von $\rho = 0$.⁷²

Aus Risikogesichtspunkten wäre somit eine negative Korrelation der Schuldner wünschenswert, da sich somit das Ausfallrisiko eines Kreditnehmers verringert, wenn ein anderer Schuldner ausfällt. Eine solche Annahme bzw. Beobachtung wird sich in der Praxis jedoch nur selten treffen lassen. Vielmehr belegen Untersuchungen des statischen Bundesamtes, dass Ausfallraten einzelner Branchen positiv korreliert sind.⁷³

Die Korrelation $\rho_{ik} = \text{Kor}(1_{D_i}, 1_{D_k})$ zwischen zwei Default-Indikatoren 1_{D_i} und 1_{D_k} wird auch Ausfall- oder Defaultkorrelation zwischen den Defaultereignissen D_i und D_k genannt. Ist die Wahrscheinlichkeit eines gemeinsamen Ausfalls zweier Kreditnehmer bekannt ($\mathbb{P}(1_{D_1} = 1; 1_{D_2} = 1)$ bzw. $p_{ik} = p(D_i \cap D_k)$), so berechnet sich die Korrelation ρ_{ik} wie folgt:

$$(10) \quad \rho_{ik} = \frac{p_{ik} - p_i p_k}{\sqrt{p_i(1-p_i)p_k(1-p_k)}}$$

⁷¹ Dieser erfasst allerdings nicht das ganze Spektrum möglicher statistischer Abhängigkeiten und ist somit der stochastischen Unabhängigkeit nicht gleichzusetzen. Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 34 - 36 und 73 - 76. Weiterführende Literatur, z. B. zur Risikoaggregation mittels Kopulas, mit der sich beliebig verteilte Zufallsvariable mit (fast) beliebig vorgegebener Abhängigkeitsstruktur zu einer gemeinsamen Verteilung verknüpfen lassen, bieten z. B. Böcker, K. / Spielberg, H. (2005).

⁷² Dies ist einer stochastischen Unabhängigkeit allerdings nicht gleichzusetzen, nachdem unkorrelierte Ausfälle nicht unbedingt auch stochastisch unabhängig sein müssen, was eng mit der Messung der linearen, paarweisen Abhängigkeit des Korrelationskoeffizienten zusammenhängt. Umgekehrt gilt jedoch, dass - wenn zwei Zufallsvariablen stochastisch unabhängig sind - sie auch stets als unkorreliert zu bezeichnen sind. Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 34 - 36 und 73 - 76.

⁷³ In Anhang 3 wurden die durchschnittlichen Ausfallraten verschiedener Branchen im Zeitablauf dargestellt. Vgl. auch Lesko, M. / Schlottmann, F. / Vorgrimler, S. (2001), S. 437.

Die gemeinsame Wahrscheinlichkeit eines Ausfalls ergibt sich umgekehrt, wenn die Korrelation ρ_{ik} bekannt ist mit:

$$(11) \quad p_{ik} = p_i * p_k + \rho_{ik} \sqrt{p_i(1-p_i)p_k(1-p_k)}$$

Der erwartete Verlust als „Schätzung“ des eintretenden Portfolioverlustes kann, wie unter 2.2.3 bereits dargestellt, ohne Kenntnis der Abhängigkeitsstrukturen eines Portfolios berechnet werden und ändert sich auch unter Berücksichtigung von Korrelationen nicht. Für unser Portfolio beträgt der Expected Loss unabhängig der zu berücksichtigenden Korrelation im Portfolio bei einer Ausfallwahrscheinlichkeit von $p_i = 0,01$ EUR 30.000.

Zur Ermittlung des unerwarteten Verlustes ist die Korrelation bzw. die mit der Korrelation verwandte Kovarianz $\text{Cov}(L_i, L_k)$ jedoch von maßgeblicher Bedeutung. Dadurch ergeben sich für unterschiedliche Abhängigkeitsstrukturen auch unterschiedliche Verlustverteilungen und folglich Unterschiede in allen weiteren Risikokennzahlen.⁷⁴ Der unerwartete Portfolioverlust des Portfolios errechnet sich unter Berücksichtigung der Korrelation zwischen zwei Kreditnehmern nach:⁷⁵

$$(12) \quad \text{UL}_{\text{PF}} = \sqrt{\mathbb{V}(L_1) + \mathbb{V}(L_2) + \mathbb{V}(L_3) + \mathbb{V}(L_4) + \mathbb{V}(L_5) + 2\text{Cov}(L_1, L_2) + \dots + 2\text{Cov}(L_1, L_5) + 2\text{Cov}(L_2, L_3) + \dots + 2\text{Cov}(L_2, L_5) + 2\text{Cov}(L_3, L_4) + 2\text{Cov}(L_3, L_5) + 2\text{Cov}(L_4, L_5)}$$

$$\text{mit: } \text{Cov}(L_i, L_k) = \text{EAD}_i * \text{LGD}_i * \text{EAD}_k * \text{LGD}_k * \rho_{ik} \sqrt{p_i(1-p_i)p_k(1-p_k)}$$

$$\text{bzw.: } \text{Cov}(L_i, L_k) = \text{UL}_i * \text{UL}_k * \rho_{ik}$$

Tabelle 5 zeigt den unerwarteten Verlust für das Portfolio unter Angabe verschiedener Korrelationskoeffizienten ρ und der Ausfallwahrscheinlichkeit $p_i = 0,01$.

ρ	$\text{UL}_{\text{PF}\rho}$
0	EUR 133.491,57
0,1	EUR 157.949,36
0,2	EUR 179.097,74
0,5	EUR 231.214,19
1	EUR 298.496,25

Tabelle 5: Unerwarteter Portfolioverlust in Abhängigkeit von ρ bei $p_i = 0,01$

⁷⁴ Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 35.

⁷⁵ Bei der Berechnung wurde vorausgesetzt, dass die Ausfälle zweier Kreditnehmer den Korrelationskoeffizienten ρ haben, unabhängig davon, um welche zwei Kreditnehmer es sich handelt.

Für den unkorrelierten Fall $\rho = 0$ wurde der UL_{PF} bereits auch unter 2.2.4 berechnet. In Folge einer zunehmenden Ausfallkorrelation steigt der unerwartete Verlust an, was bedeutet, dass der Verlust stärker streut. Höhere Verluste werden dadurch wahrscheinlicher und der erwartete Verlust eignet sich weniger gut als Schätzung des eintretenden Portfolioverlustes. Für den unrealistischen Fall der totalen Abhängigkeit mit $\rho = 1$ entspricht der unerwartete Portfolioverlust der Summe der einzelnen unerwarteten Verluste jedes Kreditengagements aus Abschnitt 2.2.4 mit $5 * \text{EUR } 59.699,25 = \text{EUR } 298.496,25$. Dieses Szenario hätte zur Folge, dass bei Ausfall eines Kredites die anderen vier Kreditnehmer mit Sicherheit ebenfalls ausfallen. Das Kreditportfolio könnte dann als ein einziges Kreditengagement mit fünffachem Exposure betrachtet werden, wodurch der nachfolgend beschriebene Diversifizierungseffekt verloren gegangen wäre.

2.2.9 Risikodiversifizierung

Der Effekt der Risikodiversifikation, im Sinne eines kleineren unerwarteten Verlustes, geht aus Tabelle 5 hervor und tritt offensichtlich ein, sobald eine Korrelation < 1 existiert, die Ereignisse also nicht vollständig korreliert sind. Dadurch wird die Unsicherheit der Prognose verringert und es muss weniger Risikokapital vorgehalten werden. Hohe Verluste werden also seltener. Weiterhin wurde bereits angedeutet, dass bei der Vergabe eines festen Kreditvolumens (unter der Bedingung $\rho < 1$), die Verteilung des Volumens auf mehrere Kreditnehmer gegenüber der Gewährung eines großvolumigen Engagements zur Reduktion des Portfoliorisikos beiträgt.

Die Risikodiversifikation wird demzufolge von zwei Faktoren maßgeblich bestimmt: der Schuldner- bzw. Größenklassenkonzentration und den Korrelationen im Portfolio.⁷⁶ Diese Größen bestimmen letztlich auch die Schiefe der Verlustverteilung innerhalb des Portfolios. Je schlechter die Streuung des Portfolios nach Kreditbeträgen ist und je stärker die Schuldner korreliert sind, desto schiefer wird die Verlustverteilung und umso höher die Wahrscheinlichkeit extremer Verluste.⁷⁷

⁷⁶ Vgl. Kirmße, S. / Schweizer, S. (2001), S. 24 f.; Boegelein, L. et al. (2002), S. 38.

⁷⁷ Vgl. Meier, C. (2004), S. 256; Ein Portfolio ist als gut diversifiziert zu bezeichnen, wenn es aus einer möglichst großen Zahl von kleinen Einzelkrediten besteht, die untereinander weitgehend unabhängig sind. Z. B. 100.000 Kredite à EUR 10.000 = EUR 1 Mrd. Kreditvolumen, vs. 10 Kredite à EUR 100 Mio. Vgl. Schulte, M. / Horsch, A. (2002), S. 114.

Aus Abbildung 4 ist jedoch ersichtlich, dass sich das schulnerspezifische bzw. unsystematische Risiko, das sich aus einer ungenügenden Streuung der Kreditbeträge nach Schuldnern ergibt, mit zunehmender Portfoliogröße wegdiversifizieren lässt.⁷⁸

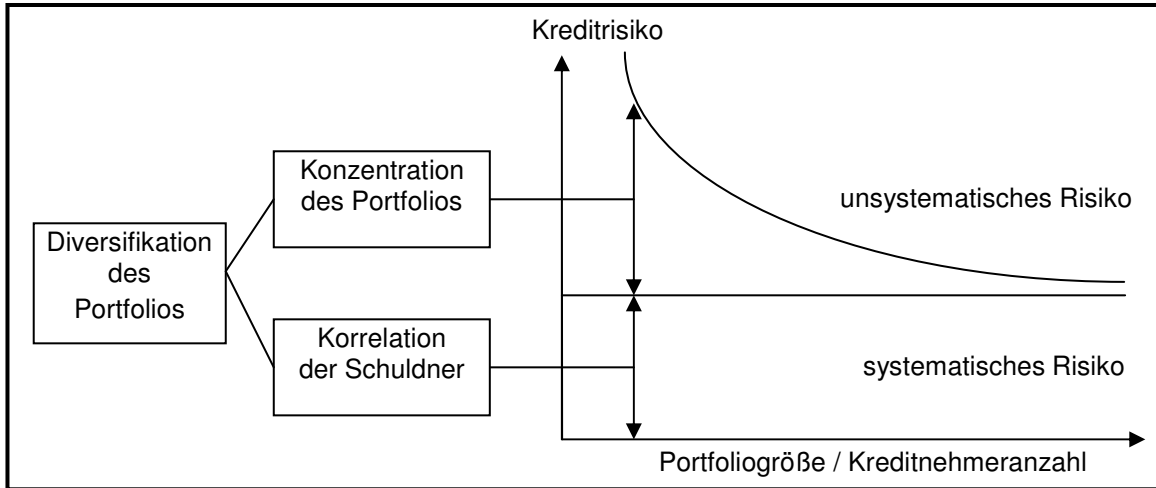


Abb. 4: Portfoliodiversifikation des schulnerspezifischen Risikos⁷⁹

Wie bereits unter 2.2.5 erwähnt, unterscheiden sich Marktportfolios aufgrund der unterschiedlichen Risikostruktur grundsätzlich von Kreditportfolios. Dennoch existieren Analogien wie z. B. die Tatsache, dass risikomindernde Diversifikationseffekte in Abhängigkeit von der Portfoliogröße eintreten. In Anhang 4 wird vereinfachend dargestellt, dass sich die Portfoliovarianz bei einer großen Anzahl von Wertpapieren im Portfolio im Wesentlichen durch die durchschnittliche Kovarianz beschreiben lässt.

Die Granularität im Kreditportfolio ist ein wesentliches Element zur Bestimmung des vorzuhaltenden ökonomischen Kapitals nach Basel II und wird daher unter 4.3.3 erneut aufgegriffen und weiter ausgeführt. Die Höhe des Value at Risk bzw. Credit Value at Risk fällt jedoch in Abhängigkeit der Verteilungsannahme des zugrundeliegenden Kreditrisikomodells unterschiedlich aus. Im Folgenden Kapitel werden deshalb zunächst verschiedene Verlustverteilungen vorgestellt, die in Zusammenhang mit Basel II von besonderer Bedeutung sind. Gleichzeitig stellen sie eine Hinführung zur Logarithmischen Normalverteilung dar, die wir zur vergleichenden Analyse verwenden.

⁷⁸ "The more fine-grained the portfolio, the more thoroughly has the bank diversified away the idiosyncratic component of credit risk associated with individual positions, and ... the lower is the portfolio's economic capital requirement. In the theoretical limit of an infinitely fine-grained portfolio, such idiosyncratic risk has been diversified away perfectly, so that only systematic risk remains. As no bank portfolio can ever be infinitely granular, there is always in fact a residual of undiversified idiosyncratic risk in the portfolio." Basel Committee (2001), Tz 422.

⁷⁹ In Anlehnung an Meier, C. (2004), S. 257.

3 Verteilungsmodelle

3.1 Verteilungsparameter und Verteilungsannahmen

Zur Bestimmung einer Verlustverteilung ist im Allgemeinen zunächst die Bestimmung der Verteilungsparameter notwendig. Die bekanntesten Parameter in diesem Zusammenhang sind Erwartungswert und Varianz, wobei der Erwartungswert auch als Moment der 1. Ordnung, die Varianz als Moment der 2. Ordnung bezeichnet wird.⁸⁰ Diese Momente wurden bereits in 2.2.3 bzw. 2.2.4 auf die Verlustverteilung übertragen und als erwarteter Verlust bzw. Quadrat des unerwarteten Verlustes eingeführt. Es existieren allerdings auch Verteilungsmodelle, wie z. B. die Binomialverteilung, mit denen die in Abbildung 2 dargestellte typische Verlustverteilung eines Kreditportfolios erzielt werden kann, obwohl sie nicht über den Erwartungswert und die Varianz parametrisiert werden. Beide Momente können jedoch i. d. R. aus den Verteilungsparametern dieser Modelle gewonnen werden.

Nachdem die Verteilungsparameter also nicht zwangsläufig den Momenten einer Verteilung entsprechen müssen, werden sie auch allgemeiner als Lage- oder Streuungsparameter bezeichnet. Diese Bezeichnung ist intuitiv aussagekräftiger. So ist der Lageparameter für die Lage der Verteilung zuständig, beispielsweise ob der Schwerpunkt der Verteilung größer oder kleiner null ist. Der Streuungsparameter lässt dagegen Rückschlüsse zu, wie ausladend, also wie stark streuend, eine Verteilung ist.⁸¹

Den einzelnen Kreditrisiko- bzw. Verteilungsmodellen liegen i. d. R. unterschiedlichste Verteilungsannahmen für die darin verwendeten Zufallsvariablen zugrunde, wobei die Wahl eines Verteilungsmodells z. B. auch in den Eigenschaften der Zufallsvariablen begründet sein kann. Ein wichtiges Beispiel, das später in Kapitel 3.4 nochmals aufgegriffen wird, ist, dass die Summe unabhängiger Zufallsvariablen näherungsweise normalverteilt ist.⁸² Sind die beiden Momente Erwartungswert und Varianz der normalverteilten Verlustverteilung bekannt, so kann z. B. der Value at Risk entsprechend bestimmt werden.

Bei den in den nachfolgenden Kapiteln dargestellten Verteilungsmodellen der Kreditrisikomessung hat jedes Verteilungsmodell ein festes Symbol. Die Normalverteilung wird beispielsweise durch $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ dargestellt, wobei das $\mathcal{N}$ für Normalverteilung steht und die

⁸⁰ Auf weitere Momente höherer Ordnung wie z. B. die Schiefe und Wölbung einer Verteilung wird in vorliegender Arbeit nicht weiter eingegangen. Weiterführende Literatur bieten hierzu z. B. Fahrmeir, L. / Künstler, R. / Pigeot, I. / Tutz, G. (2004).

⁸¹ Vgl. hierzu auch Kapitel 3.4 sowie Abbildung 5; Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 76 f.

⁸² Vgl. Kapitel 3.4; Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 76 f.

Werte in den Klammern die Verteilungsparameter des Modells bestimmen. Im Falle der Normalverteilung sind dies der Erwartungswert μ und die Varianz σ^2 .

3.2 Bernoulli-Verteilung

Das einfachste Verteilungsmodell haben wir implizit schon für unser Portfolio verwendet. So definierten wir unter 2.2.1 die Zufallsvariable 1_{D_i} und legten fest, dass diese Variable nur zwei Zustände annehmen kann, Ausfall und Nicht-Ausfall. Dem Ausfallereignis D_i , was einem Statuswechsel entspricht, wurde die Wahrscheinlichkeit p_i zugeordnet.

Zufallsvariablen werden allgemein mit X bezeichnet, wobei wir für eine Zufallsvariable X , die einer Bernoulli-Verteilung folgt, kurz

$$X \sim B(1, p)$$

schreiben. Aufgrund der digitalen Struktur der Bernoulli-verteilten Zufallsvariable X besteht die Wahrscheinlichkeitsfunktion von X nur aus zwei Wahrscheinlichkeiten:⁸³

Kreditereignis	Wert von X	Wahrscheinlichkeit
Ausfall	1	$\mathbb{P}(X = 1) = p$
kein Ausfall	0	$\mathbb{P}(X = 0) = 1 - p$

Ohne Angabe der Herleitung erhalten wir aus dem Verteilungsparameter einer Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen X die beiden Momente Erwartungswert und Varianz als

$$(13) \quad \mathbb{E}(X) = p \quad =: \mu$$

$$(14) \quad \mathbb{V}(X) = p * (1 - p) =: \sigma^2$$

3.3 Binomialverteilung

Für die Tatsache, dass die Zufallsvariable X einer Binomialverteilung folgt, schreiben wir

$$X \sim B(n, p).$$

Diese Notation legt bereits die enge Verbindung zur Bernoulli-Verteilung nahe und ist darauf zurückzuführen, dass aus der Summe von n stochastisch unabhängigen Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen mit dem Parameter p eine binomialverteilte Zufallsvariable entsteht. Die

⁸³ Aufgrund der nominalen Skalierung einer Bernoulli-verteilten Zufallsvariable ist die Angabe einer Verteilungsfunktion formal nicht möglich, denn die Ereignisse Ausfall und Kein-Ausfall können streng genommen nicht geordnet werden. Alle denkbaren stochastischen Aussagen können jedoch über die Dichte (Wahrscheinlichkeitsfunktion) der Bernoulli-Verteilung ermittelt werden. Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 77 f.

Bernoulli-Verteilung entspricht damit einer Binomialverteilung mit dem Parameter $n = 1$. Dieser Zusammenhang lässt sich formal wie folgt beschreiben:⁸⁴

$$(15) \quad X_1, \dots, X_n \stackrel{iid}{\sim} B(1, p), \text{ woraus folgt:}$$

$$(16) \quad \sum_{i=1}^n X_i \sim B(n, p)$$

Das Kürzel *iid* steht für *independent identically distributed* und drückt aus, dass die X_i sowohl stochastisch unabhängig sind als auch alle die gleiche Verteilung besitzen.

Modelltheoretisch handelt es sich bei einer Binomialverteilung um eine n -malige Wiederholung eines Bernoulli-Experiments (Bernoulli-Kette), bei dem die Anzahl der Treffer k , bei unabhängigen Versuchen und einer gleichen Erfolgswahrscheinlichkeit p , ermittelt wird. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion, auf die die Wahrscheinlichkeiten einer Bernoulli-Kette führen, heißt Binomialverteilung, weil der Ausdruck für die Wahrscheinlichkeit in einer binomischen Formel auftritt. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion einer binomialverteilten Zufallsvariablen $X \sim B(n, p)$ lautet:

$$(17) \quad \mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, n$$

und entspricht der Wahrscheinlichkeit, dass bei einer Bernoulli-Kette der Länge n und dem einheitlichen Parameter p genau k Treffer (Ausfälle) erzielt werden.

Im Fall eines unkorrelierten Ausfalls von Kreditnehmern in einem Portfolio ist der Ausfall eines jeden Kreditnehmers Bernoulli-verteilt. Besitzen die Kreditnehmer darüber hinaus eine einheitliche Ausfallwahrscheinlichkeit, ist die Anzahl X der Ausfälle binomialverteilt und die Wahrscheinlichkeit für eine bestimmte Anzahl von Ausfällen kann aus Formel (17) bestimmt werden.

Für unser unkorreliertes Fünf-Kreditnehmer-Portfolio mit einer einheitlichen Ausfallwahrscheinlichkeit von $p_i = 0,01$ können wir $X \sim B(5; 0,01)$ schreiben. In Tabelle 6 ist die dazugehörige Wahrscheinlichkeits- und Verteilungsfunktion für eine bestimmte Anzahl von Ausfällen des Portfolios gegeben.⁸⁵

⁸⁴ Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 79.

⁸⁵ Eine übersichtliche Darstellung der Verteilungsfunktion existiert nicht. Das Konstruktionsprinzip kann durch $F(x) = \sum_{k=0}^x \mathbb{P}(X = k)$ angegeben werden. Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 79 - 84.

k	Ereignis	Wahrscheinlichkeitsfunktion $\mathbb{P}(X = k)$	Verteilungsfunktion $\mathbb{P}(X \leq k)$
0	kein Kreditnehmer fällt aus	95,10%	0,9510
1	genau ein Kreditnehmer fällt aus	4,80%	0,9990
2	genau zwei Kreditnehmer fallen aus	0,10%	~1
3	genau drei Kreditnehmer fallen aus	~0%	~1
4	genau vier Kreditnehmer fallen aus	~0%	~1
5	alle fünf Kreditnehmer fallen aus	~0%	1

Tabelle 6: Verlustverteilung des Portfolios bei stochastischer Unabhängigkeit und $p_i = 0,01$ ⁸⁶

Die Wahrscheinlichkeit, keinen Verlust zu erleiden, ist in unserem unkorrelierten Portfolio mit 95,10% sehr hoch. Dennoch ist auch ein gleichzeitiger Ausfall von mehr als zwei Kreditnehmern möglich, wenngleich die Wahrscheinlichkeit hierfür äußerst gering ist.

Durch die Tatsache, dass die Ausfälle der Kreditnehmer in dem Portfolio das einzige stochastische Element sind, kann aus der Verteilung der Anzahl der Ausfälle die Verlustverteilung abgeleitet werden, indem die Anzahl der Ausfälle durch den dadurch entstehenden Verlust ersetzt wird.

Der Erwartungswert und die Varianz einer $B(n, p)$ verteilten Zufallsvariable lassen sich aus der Kenntnis ableiten, dass binomialverteilte Zufallsvariablen der Summe unabhängiger Bernoulli-verteilter Zufallsvariablen entspricht. Wir erhalten die Momente somit als:

$$(18) \quad \mathbb{E}(X) = np =: \mu$$

$$(19) \quad \mathbb{V}(X) = np * (1 - p) =: \sigma^2$$

Bluhm, Fahrmeir und Henking zeigen graphisch den Charakter und die Eigenschaften der Binomialverteilung auf. Dabei wird u. a. deutlich, dass bei zunehmender Kreditnehmeranzahl die Sprünge der Wahrscheinlichkeitsverteilung verschwimmen und der diskrete Charakter der Verteilung, wie in Abbildung 3, verloren geht. Für große n könnte eine Binomialverteilung also durch eine stetige Verteilung approximiert werden. ⁸⁷

⁸⁶ Für $p_i = 0,2$ würden die Ergebnisse aus 2.2.5 in Tabelle 2 bzw. Abbildung 3 erzielt werden.

⁸⁷ Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 79 - 82.

3.4 Normalverteilung

Bei der Normalverteilung, als stetige Verteilungsfunktion, handelt es sich wahrscheinlich um den prominentesten Vertreter von Verteilungsmodellen. Allerdings kommt sie aufgrund ihrer Eigenschaften in der Portfoliomodellierung von (Kredit-)Verlusten kaum zum Einsatz. Dies liegt unter anderem an der symmetrischen Form ihrer Dichte, dem grundsätzlich (nach links) offenen / unbegrenzten Träger, sowie der Tatsache, dass extreme Ereignisse im Normalverteilungsmodell recht unwahrscheinlich sind.⁸⁸

Dennoch findet die Normalverteilung bzw. die Normalverteilungsannahme von Zufallsvariablen bei gängigen Portfoliomodellen, wie z. B. dem Ein-Faktor-Modell, ihren Eingang. Die herausragende Bedeutung der Normalverteilung ergibt sich aus der bemerkenswerten Tatsache, dass die Summe einer großen Anzahl unabhängiger Zufallsvariablen, deren Einzelbetrag zur Summe jeweils nur unbedeutend ist, annähernd normalverteilt ist, und zwar unabhängig von der Verteilung der einzelnen Zufallsvariablen. Mathematisch präzisiert wird diese Aussage durch den zentralen Grenzwertsatz in Anhang 5, der die Rechtfertigung liefert, dass eine normalverteilte Zufallsvariable eine Größe angemessen beschreiben kann, die sich additiv aus vielen kleinen und zufälligen Beiträgen, die sich gegenseitig nicht beeinflussen, zusammensetzt.⁸⁹

Die Notation einer normalverteilten Zufallsvariable X mit den Parametern μ und σ^2 lautet:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$$

Somit entsprechen die beiden Verteilungsparameter der Normalverteilung genau dem Erwartungswert und der Varianz, so dass wir die beiden Momente direkt erhalten, als:

$$(20) \quad \mathbb{E}(X) = \mu \quad \text{und}$$

$$(21) \quad \mathbb{V}(X) = \sigma^2$$

Die Dichtefunktion der Normalverteilung wird auch als Glockenkurve bezeichnet und ergibt sich durch:

$$(22) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right), x \in \mathbb{R}$$

Abbildung 5 illustriert in diesem Zusammenhang die Bezeichnung „Glockenkurve“ und verdeutlicht die Begrifflichkeiten des Lageparameters μ bzw. Streuungsparameters σ^2 .⁹⁰

⁸⁸ Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 104 f.

⁸⁹ Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 129 – 133.

⁹⁰ Eine Veränderung von μ verschiebt die Dichte nach links oder rechts, hat aber keinen Einfluss auf die Form. Die Glockenkurve wird flacher für große Werte von σ^2 und steiler für kleinere Werte von σ^2 .

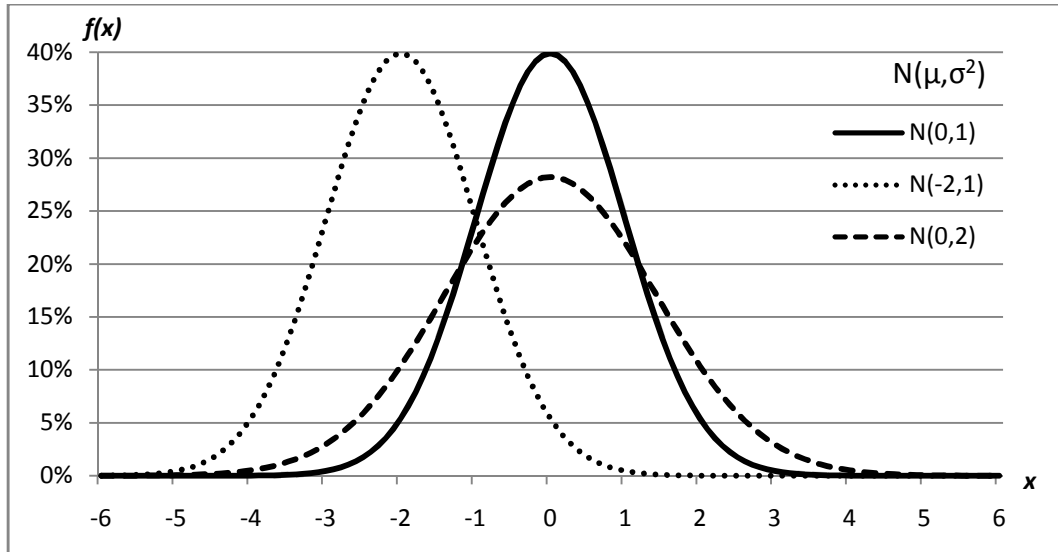


Abb. 5: Dichte der Normalverteilung bei unterschiedlichen Lage- und Streuungsparametern

Auf die Symmetrieeigenschaft der Dichte- und Verteilungsfunktion der Normalverteilung sei an dieser Stelle ebenso wie auf die besondere Bedeutung der Standardnormalverteilung mit den Parametern $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ und deren Verteilungsfunktion

$$(23) \quad F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = N(x)$$

hingewiesen. Denn oftmals führt man normalverteilte Zufallsvariable auf ihr standardisiertes Analog zurück, was aufgrund der linearen Transformation ohne Informationsverlust möglich ist.⁹¹ Dieser Vorgang wird auch als Standardisierung bezeichnet. Sei X eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilte Zufallsvariable, so ist die standardisierte Zufallsvariable

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

standardnormalverteilt, also $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Dadurch, dass Z den Erwartungswert 0 und die Varianz 1 annimmt, lässt sich die Verteilungsfunktion F einer $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -verteilten Zufallsvariable X durch die Verteilungsfunktion N der Standardnormalverteilung ausdrücken. Der Vollständigkeit halber sei die Herleitung zu (23) mit dem Hinweis angegeben, dass wir die kumulative Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen, i. e. die Wahrscheinlichkeit, dass eine normalverteilte Zufallsvariable mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ kleiner oder gleich x ist, mit N bezeichnen:

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{X - \mu}{\sigma} \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{x - \mu}{\sigma}\right) = N\left(\frac{x - \mu}{\sigma}\right)$$

⁹¹ Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 107.

Daher sind in den meisten Tabellen- / Statistikwerken nur die Wahrscheinlichkeiten der Standardnormalverteilung aufgeführt, wobei es aufgrund der Symmetrieeigenschaft der Verteilungsfunktion $N(-x) = 1 - N(x)$, $x \in \mathbb{R}$ ausreicht positive Argumente anzugeben.⁹²

Diese Eigenschaften sind im Rahmen des Ein-Faktor-Modells von grundlegender Bedeutung. Doch widmen wir uns zunächst der logarithmischen Normalverteilung (Lognormalverteilung), die sich über Transformation einer normalverteilten Zufallsvariablen ableitet.

3.5 Logarithmische Normalverteilung

3.5.1 Allgemeine Grundlagen

Ist die Zufallsvariable Z normalverteilt mit Erwartungswert μ und Varianz σ^2 , $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, dann ist $X \sim e^Z$ logarithmisch normalverteilt mit den Parametern μ und σ^2 , so dass wir schreiben:⁹³

$$X \sim LN(\mu, \sigma^2)$$

Der Erwartungswert sowie die Varianz einer lognormalverteilten Zufallsvariablen wird ohne Herleitung angegeben:

$$(24) \quad \mathbb{E}(X) = \exp\left(\mu + \frac{1}{2} \sigma^2\right)$$

$$(25) \quad \begin{aligned} \mathbb{V}(X) &= \exp(2\mu + \sigma^2) (\exp(\sigma^2) - 1) \\ &= \mathbb{E}(X)^2 (\exp(\sigma^2) - 1) \end{aligned}$$

Eine analytische Darstellung der Verteilungsfunktion einer Lognormalverteilung kann, analog der Normverteilung, nicht durch elementare Ausdrücke angegeben werden. Die Dichtefunktion kann jedoch angegeben werden als:

$$(26) \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{(\ln x - \mu)}{\sigma}\right)^2\right], x \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$$

Durch die nichtlineare Transformation der Normalverteilung geht der symmetrische Verlauf verloren und wir erkennen in Abbildung 6 den typisch linkssteilen / rechtsschiefen Verlauf der Lognormalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$.

⁹² Weiterführende Literatur bieten u. a. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006); Fahrmeir, L. et al. (2004).

⁹³ Wenn X lognormalverteilt ist, gilt natürlich vice versa für $Z \sim \ln(X)$.

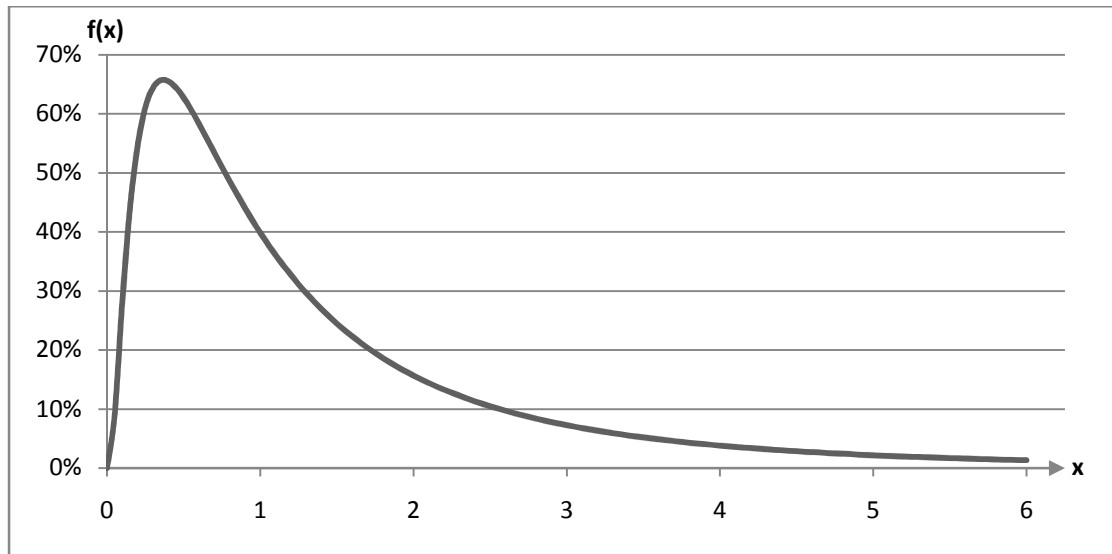


Abb. 6: Dichte der Lognormalverteilung mit $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$

In einer historischen Betrachtung der Ratingagentur Moody's von ABS-Portfolios, die i. d. R. eine hohe Granularität aufweisen, kam die Agentur zum Ergebnis, dass die Portfolioverluste / -ausfälle einer logarithmischen Normalverteilung folgen. Konkret stellte Moody's dabei fest, dass „... in many cases, the shape of the histogram follows the shape of the theoretical “log-normal” probability distribution” und zog das Fazit “Empirical tests ... verified the log normal distribution for granular pools.”⁹⁴ Die Lognormalverteilung eignet sich demzufolge als vergleichende Verlustverteilung des Basler Ansatzes, nachdem, wie unter 4.3.3 noch näher ausgeführt, in Basel von granularen Kreditportfolios ausgegangen wird.

Allerdings liegen für unser Kreditportfolio keine historischen Daten vor, um eine lognormale Verlustverteilung zu ermitteln. Daher greifen wir auf die Momentenmethode (Moment Matching) zur Bestimmung des Portfolioverlustes zurück.

3.5.2 Moment Matching

Beim Moment Matching werden die Momente einer interessierenden Variablen, die ohne komplexes Modell und ohne Verteilungsannahmen zur Verfügung stehen, ermittelt. Im Kontext des Portfolioverlustes sind dies, wie bereits erwähnt, typischerweise Erwartungswert und Varianz. Diese Momente werden dann als Parameter einer Modellverteilung eingesetzt. Unter Umständen ist hierzu noch eine Transformation der Momente in die Verteilungsparameter notwendig, wie dies z. B. auch bei der Lognormalverteilung erforderlich ist. Die Anwendung der Momentenmethode setzt allerdings voraus, dass die gesuchte Verteilung

⁹⁴ Moody's (2000).

ausreichend gut durch die Momente charakterisiert werden kann. Inwieweit dies erfüllt ist, lässt sich in der Praxis nicht immer befriedigend abschätzen. Somit geht mit der Momentenmethode ein starkes Modellrisiko einher.⁹⁵

Unter 2.2.3 ermittelten wir einen erwarteten Portfolioverlust i. H. v. EUR 30.000 und unter 2.2.4 wurde der unerwartete Verlust im unkorrelierten Fall mit EUR 133.491,57 errechnet. Über (24) bzw. (25) ermitteln wir nun aus den gegebenen Momenten die Verteilungsparameter μ und σ^2 der Lognormalverteilung:

$$E(X) = EL_{PF} = 30.000 = \exp\left(\mu + \frac{1}{2} \sigma^2\right)$$

$$V(X) = UL_{PF}^2 = 133.491,57^2 = \exp(2\mu + \sigma^2) (\exp(\sigma^2) - 1) = E(X)^2 (\exp(\sigma^2) - 1)$$

$$\sigma^2 = \ln\left(\frac{UL_{PF}^2}{EL_{PF}^2} + 1\right) = 3,0350 \quad \text{und} \quad \mu = \ln(EL_{PF}) - \frac{\sigma^2}{2} = 8,7915$$

Die Notation der Zufallsvariablen X lässt sich im unkorrelierten Fall somit durch $X \sim LN(8,7915; 3,0350)$ beschreiben. Die Dichte bestimmen wir aus Formel (26) und erhalten die in Abbildung 7 graphisch dargestellte Verlustverteilung des Portfolios.

Die Fläche unterhalb der Kurve verteilt die gesamte Wahrscheinlichkeitsmasse 1 (=100%) auf der Zahlengeraden (Abszissenachse), die synonym als Portfolioverlust zu verstehen ist. Die durchgezogene Linie legt nahe, dass grundsätzlich jeder Portfolioverlust möglich ist, was allerdings aufgrund der geringen Portfoliogranularität nicht möglich ist.⁹⁶

Dennoch wollen wir mit dieser Annahme weiterarbeiten und erkennen aus Abbildung 7, dass bereits ein Großteil der Fläche bis zum erwarteten Verlust „eingesammelt“ wird. Über die korrespondierende Verteilungsfunktion, die sich mittels gängiger Standardsoftware berechnen lässt, kann der in Abbildung 8 dargestellte Graph ermittelt werden.⁹⁷ Wir erkennen, dass die Wahrscheinlichkeit für einen Verlust, der größer als der erwartete Verlust ausfällt, bei unter 20% liegt.

⁹⁵ Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 128.

⁹⁶ Ziel ist nicht die Kalkulation einer konkreten Risikoposition, sondern die formale Darstellung des richtigen Verfahrens.

⁹⁷ Der Aufruf in Excel erfolgt über die Funktion: „LOGNORMVERT“.

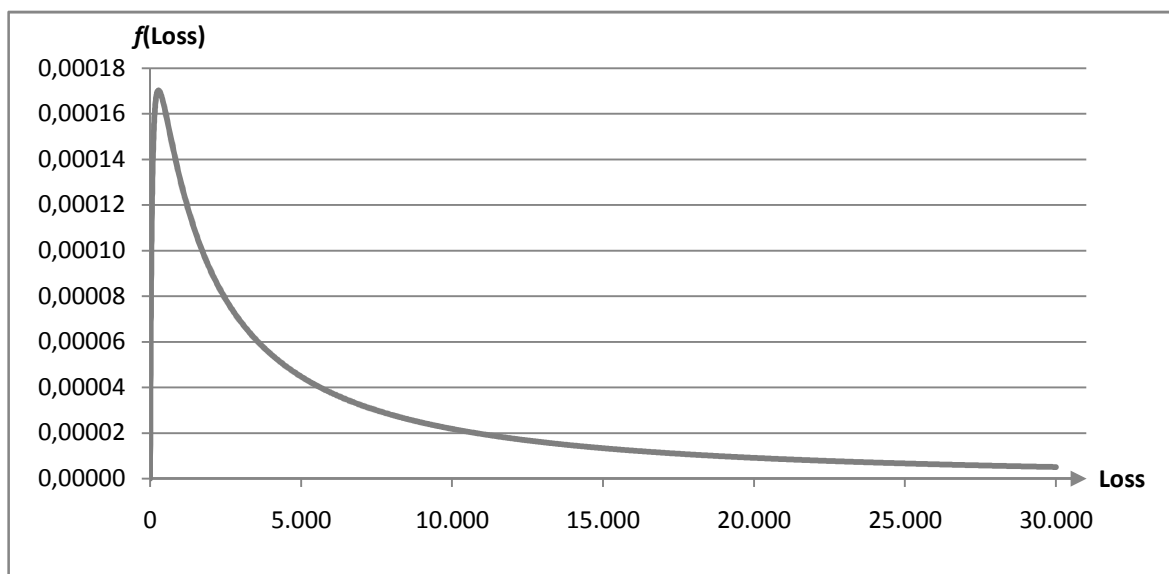


Abb. 7: Lognormale Dichte des Portfolioverlustes im unkorrelierten Fall und $p_i = 0,01$

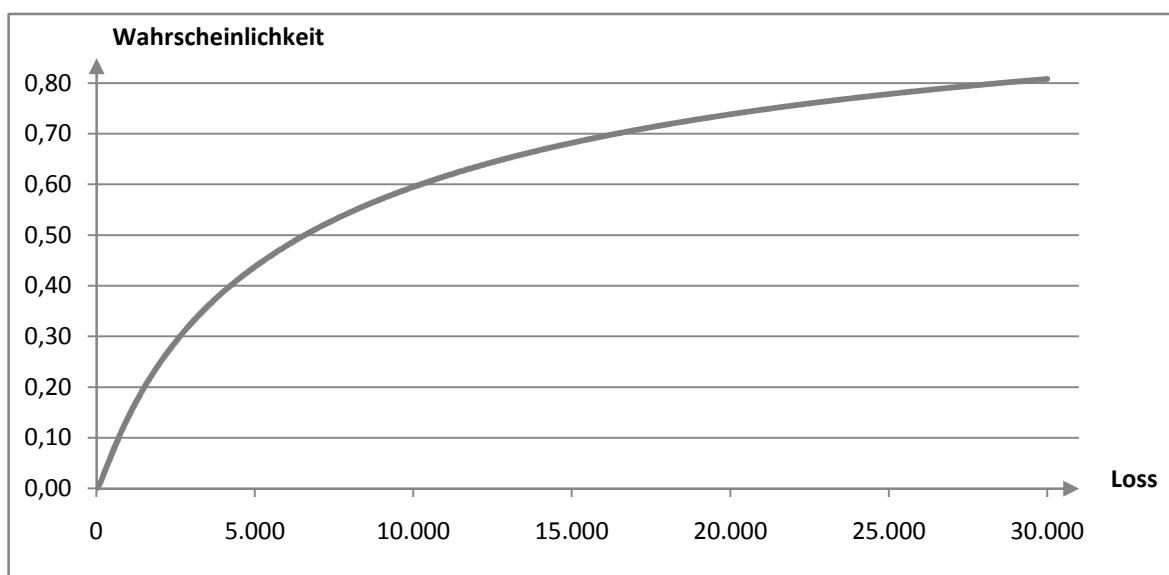


Abb. 8: Lognormale Verteilung des Portfolioverlustes im unkorrelierten Fall und $p_i = 0,01$

Dieser Logik folgend, bestimmen wir nun den Value at Risk bzw. Credit Value at Risk des Portfolios unter der Annahme, dass der Portfolioverlust logarithmisch normalverteilt ist.

3.5.3 Credit Value at Risk Bestimmung

Wir sind an der Wahrscheinlichkeit interessiert, dass der eintretende Verlust unterhalb des gewählten Quantils liegt.

$$\begin{aligned}(27) \quad \mathbb{P}(L \leq Q_{1-q}) &= 1 - q \leftrightarrow \mathbb{P}(\ln L \leq \ln Q_{1-q}) = 1 - q \\ &\leftrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{\ln L - \mu}{\sigma} \leq \frac{\ln Q_{1-q} - \mu}{\sigma}\right) = 1 - q \\ &\leftrightarrow \frac{\ln Q_{1-q} - \mu}{\sigma} = N_{1-q} \\ Q_{1-q} &= \exp(\mu + \sigma N_{1-q})\end{aligned}$$

Der Credit Value at Risk ergibt sich durch Subtraktion des Expected Loss als:

$$(28) \quad \text{CVaR} = Q_{1-q} - \text{EL} = \exp(\mu + \sigma N_{1-q}) - \text{EL}$$

Für $q = 0,001$, das entspricht einem Konfidenzniveau α von 99,9%, erhalten wir für $N_{1-q} = 3,0902$ und dadurch nach (28) einen CVaR für das unkorrelierte Portfolio i. H. v.:

$$\text{CVaR} = \exp\left(8,7915 + \sqrt{3,0350} * 3,0902\right) - 30.000 = \text{EUR } 1.402.606,19$$

Obwohl bei der Lognormalverteilung bereits zu Beginn relativ viel „Wahrscheinlichkeitsfläche“ eingesammelt wird, besitzt sie folglich auch am Ende noch Wahrscheinlichkeitsmasse, so dass bereits für den unkorrelierten Fall ökonomisches Kapital in Höhe von ca. EUR 1,4 Mio. für das Portfolio vorzuhalten wäre. Die Lognormalverteilung unterscheidet sich somit wesentlich von der vorgestellten Binomialverteilung (Tabelle 6), die zu gleichem Konfidenzniveau lediglich einen Portfolioverlust von EUR 0,6 Mio. aufweist.⁹⁸

In Kapitel fünf werden wir die lognormale Verlustverteilung des Portfolios für korrelierte Fälle untersuchen. Nachdem Basel II jedoch konkrete Parameter für die Korrelation im Kreditportfolio vorgibt, stellen wir nachfolgend die Annahmen des Basler Akkords vor.

⁹⁸ Aufgrund der Portfoliostruktur ist ein Ausfall i. H. v. EUR 1,43 Mio. (inkl. EL) nicht möglich. Die diskrete Verteilungsfunktion würde einen Portfolioverlust von EUR 1,8 Mio. ergeben, was dem Ausfall von drei Kreditnehmern entsprechen würde. Vgl. auch Tabelle 6.

4 Das Kreditrisiko in Basel II

4.1 Hintergründe und Zielsetzung von Basel II

Die generelle Aussage sowohl von Basel I als auch von Basel II ist, dass die Risiken eines Instituts die vorhandenen Eigenmittel höchstens um den Faktor 12,5 übersteigen dürfen.⁹⁹ Das fundamentale Ziel der Revision der Eigenkapitalvereinbarung von 1988 (Basel I) war es, eine neue Rahmenvereinbarung zu entwickeln, die die Solidität und Stabilität des internationalen Bankensystems weiter stärken und gleichzeitig Kohärenz dahingehend sicherstellen würde, dass die Regelungen zur angemessenen Eigenkapitalausstattung keine wesentliche Quelle von Wettbewerbsverzerrungen zwischen international tätigen Banken sein werden.¹⁰⁰ Der auf drei gleichberechtigt nebeneinander stehenden Säulen basierende Ansatz, die sich gegenseitig ergänzen und verstärken, trägt dadurch zur Sicherheit und Stabilität im nationalen und internationalen Banken- und Finanzsystem bei.

Ausgangspunkt der neuen Vereinbarung sind die Vorschriften zur Eigenmittelunterlegung der ersten Säule (Minimum Capital Requirements). In dieser werden die Anforderungen an die bankenaufsichtsrechtlichen Eigenmittel formuliert, über die ein Kreditinstitut mindestens verfügen muss, um die von ihm eingegangenen Risiken abzudecken. Dabei wird die Summe aller gewichteten Risikoaktiva bestimmt, indem die Eigenkapitalanforderungen für Marktrisiken (EK_{MR}) und operationelle Risiken (EK_{OP}) mit 12,5 (dem Kehrwert der Mindesteigenkapitalquote von 8 %) multipliziert und zur Summe der gewichteten Risikoaktiva (RWA – risk weighted assets) aus dem Kreditgeschäft addiert werden.¹⁰¹ Es gilt somit:

$$(29) \quad \frac{\text{Eigenmittel}}{\text{RWA} + 12,5 * (EK_{MR} + EK_{OP})} \geq 8 \%$$

Die Mindesteigenmittelquote von 8% ist als strenger Floor zu interpretieren, der in jedem Fall einzuhalten ist. Dies wird auch in der zweiten Säule des Akkords betont: „*In the Framework, bank management continues to bear responsibility for ensuring that the bank has adequate capital to support its risk beyond the core minimum requirements.*”¹⁰² Insgesamt zielt der „Supervisory Review Process“ der zweiten Säule darauf ab, das individuelle Risikoprofil

⁹⁹ Vgl. Basel Committee (2004), Tz. 41.

¹⁰⁰ Vgl. Basel Committee (2004), Tz. 4.

¹⁰¹ Allerdings wird derzeit (noch) ein Skalierungsfaktor von 1,06 auf die gewichtete Risikoaktiva aus dem Kreditgeschäft angewandt, um die Mindestkapitalanforderungen auf aggregierter Ebene in etwa gleich zu halten und gleichzeitig den Banken Anreize zu geben, die fortgeschritteneren risikosensitiven Ansätze zu verwenden. Vgl. Basel Committee (2004), Tz. 44. Dieser Skalierungsfaktor wurde nach Auswertung der QIS V nochmals vom Committee bestätigt. Vgl. Basel Committee (2006).

¹⁰² Basel Committee (2004), Tz. 721.

einer Bank zu bestimmen und verstärkt Vorgaben zur qualitativen Bankenaufsicht mit intensiven Kontakten der Bankenaufseher zu etablieren.

Die dritte Säule (Market Discipline) soll die Transparenz über die Risikoposition einer Bank erhöhen, so dass Finanzmarktteilnehmer Kreditinstitute besser einschätzen können und die Institute über ihre Renditeforderungen disziplinieren können.¹⁰³

Nach diesem grundlegenden Überblick des neuen Basler Akkords, widmen wir uns der Ermittlung der gewichteten Risikoaktiva (RWA) nach dem IRB-Ansatz, wobei der Schwerpunkt auf der dem Ansatz zugrunde liegenden Verlustverteilung liegen wird.^{104 / 105}

4.2 Der IRB-Ansatz

Der auf internen Ratings basierende Ansatz ermöglicht den Kreditinstituten einzelne Parameter, die in die bankaufsichtlichen Formeln einfließen, selbst zu ermitteln. Für die Berechnung der gewichteten Risikoaktiva werden benötigt:¹⁰⁶

- die Ausfallwahrscheinlichkeit (Probability of Default),
- Schadensschwere (Loss Given Default),
- Forderungsvolumen bei Ausfall (Exposure at Default),
- Restlaufzeit (Maturity, M).

Unter 2.2.1 bzw. 2.2.2 wurde bereits erwähnt, dass im IRB-Basisansatz (IRBB) mit Ausnahme der Ausfallwahrscheinlichkeit alle Parameter von der Aufsicht fest vorgegeben werden. Neben dem einheitlichen CCF – Faktor von 0,75 zur Ermittlung des EAD und dem festen LGD Wert von 45% für vorrangig besicherte Forderungen wird die Restlaufzeit einheitlich auf 2,5 Jahre im IRBB festgelegt.¹⁰⁷ Diese Parameter sind im fortgeschrittenen Ansatz (FIRB) grundsätzlich individuell von jedem Kreditinstitut zu bestimmen.¹⁰⁸

¹⁰³ Vgl. Paul, S. (2001), S. 9 f.

¹⁰⁴ Kreditrisikomindernde Maßnahmen wie Sicherheitenstellung, Netting, Garantien etc. bleiben in nachfolgender Betrachtung ebenso wie die Eigenkapitalanforderung zur Unterlegung von operationellen – und Marktrisiken außen vor.

¹⁰⁵ Im Standardansatz zur Ermittlung der RWA wird jedem Schuldner in Abhängigkeit seines externen Ratings und seiner Schuldnerklasse (z.B. Staaten, Banken, Unternehmen, Retail) ein Bonitätsgewicht zugeordnet. Das Produkt aus Bonitätsgewicht und Exposure ergibt die gewichtete Risikoaktiva, die mit mind. acht Prozent Eigenkapital zu unterlegen ist. Für Kreditnehmer, die über kein externes Rating verfügen, ergeben sich im Standardansatz von Basel II für bilanzielle Forderungen nur wenige Änderung (wie z. B. Handhabung kreditrisikomindernder Instrumente) gegenüber den bereits implementierten Regeln von Basel I. Vgl. Basel Committee (2004), Tz. 50 – 210; Klement, J. (2007), S. 177 – 192; Chech, C. (2004), S. 5 f. und S. 30.

¹⁰⁶ Vgl. Klement, J. (2007), S. 192; auf die mögliche, unter bestimmten Voraussetzungen zu berücksichtigende Kreditnehmergröße (Size) wird unter 4.3.5.1 gesondert eingegangen.

¹⁰⁷ Vgl. Abschnitte 2.2.1, 2.2.2; Basel Committee (2004), Tz. 287, 312, 318, 324, 391.

¹⁰⁸ Vgl. Abschnitte 2.2.1, 2.2.2; bzgl. der effektiven Restlaufzeit gibt es Einschränkungen / Vorgaben, auf die unter 4.3.5.1 gesondert eingegangen werden. Vgl. Basel Committee (2004), Tz. 316, 320, 391, 455, 456.

Die Ansatzunterscheidung hat jedoch grundsätzlich keinen Einfluss auf die Berechnungsmethodik der gewichteten Risikoaktiva. Diese ergibt sich aus dem Produkt:¹⁰⁹

$$(30) \quad RWA = 12,5 * K * EAD$$

K bezeichnet dabei die erforderlichen Eigenmittel, die zur Unterlegung von einer Forderung in Höhe von einer Geldeinheit benötigt werden. In Abhängigkeit vom Kreditnehmersegment sind unterschiedliche Formeln zur Ermittlung von K zu verwenden. Bevor jedoch auf die Eigenkapitalanforderungen unter 4.3.4 und die segmentspezifischen Anpassungen unter 4.3.5 eingegangen wird, ist es zielführend, sich mit den Modellannahmen der IRB-Formel und der daraus resultierenden Verlustverteilung vertraut zu machen.

4.3 Die IRB-Formel

4.3.1 Asset-Value-Modelle

Der IRB-Formel liegt ein Ein-Faktor-Asset-Value-Modell zugrunde. Asset-Value-Modelle gehen ursprünglich auf Merton (1974) zurück, der Kredite als Putoptionen auf die Assets des Kreditnehmers beschreibt und mit dem Black/Scholes-Kalkül bewertet.¹¹⁰ Dieser Ansatz wird im Rahmen einer Exkursion in Anhang 6 weiter ausgeführt.

Für die vereinfachenden Annahmen des Basler Modells ist ein Verständnis der Grundidee dieser Modelle ausreichend, wie sie in Abbildung 9 graphisch motiviert ist und die sich wie folgt beschreiben lässt. Ein Asset Value (Unternehmenswert) wird einer Ausfallschranke gegenübergestellt. Sinkt der Unternehmenswert unter diesen Wert, so bedeutet dies den Ausfall des Unternehmens, i. e. ein Default tritt ein. Als Ausfallschranke wird der Buchwert der Verbindlichkeiten in der Grafik verwendet.¹¹¹ Die somit in Geldeinheiten definierte Ausfallschranke kann jedoch auch als Rendite ausgedrückt werden.¹¹²

¹⁰⁹ Vgl. Basel Committee (2004), Tz. 44.

¹¹⁰ Vgl. Merton, R. (1974).

¹¹¹ Bohn und Crosbie geben jedoch den Hinweis, „... *general firms do not default when their asset value reaches the book value of their total liabilities. While some firms certainly default at this point, many continue to trade and service their debts. The long-term nature of their liabilities provides these firms with some breathing space. We have found that the default point, the asset value at which the firm will default, generally lies somewhere between total liabilities and current, or short-term, liabilities.*“ Bohn, J. / Crosbie, P. (2003), S. 6 f.

¹¹² In der Praxis ist es üblich, anstelle mit Vermögenswerten mit den (logarithmierten) Vermögenswertrenditen – relativ zum Startvermögen – zu argumentieren. Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 202.

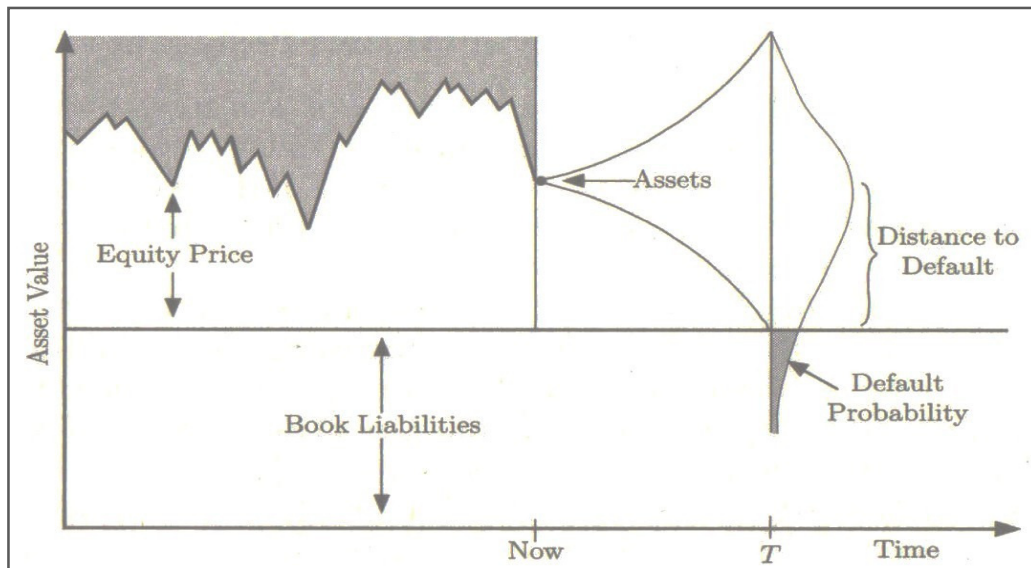


Abb. 9: The Black-Scholes-Merton structural model of default ¹¹³

Der IRB-Formel liegt ein Modell zugrunde, das die standardisierte Rendite der Aktiva des Schuldners einer kritischen Schranke gegenüberstellt. Hierbei wird unterstellt, dass die Rendite der Unternehmenswerte normalverteilt ist und somit leicht in eine standard-normalverteilte Rendite umgerechnet werden kann.¹¹⁴

Die standardisierte Assetrendite eines Kreditnehmers i in einem n Kreditnehmer Portfolio wird in der Folge mit Z_i bezeichnet. Sobald der Wert / Score von Z_i unter eine gewisse kritische Schranke c_i fällt, sprechen wir von einem Ausfall des Kreditnehmers i . Der dabei betrachtete Zeithorizont T beträgt ein Jahr. Betrachten wir Z_i als Zufallsvariable, deren Ausgang in der Zukunft unsicher und damit nicht perfekt vorhersagbar ist, dann entspricht die Ausfallwahrscheinlichkeit p_i des Kreditnehmers i gleich der Wahrscheinlichkeit, dass der Wert Z_i am Horizont T ausfällt bzw. kleiner als der Cut-off Wert c_i ist, i. e.

$$(31) \quad p_i = \mathbb{P}(Z_i < c_i), \quad Z_i = \sqrt{\varrho_i}Y + \sqrt{1 - \varrho_i}\varepsilon_i \quad (i = 1, \dots, n)$$

Beim zweiten Teil der Gleichung handelt es sich um eine gängige Art, die standardisierten Vermögenswertänderungen Z_i der Schuldner im Portfolio mittels eines systematischen Risikofaktors Y sowie je eines idiosynkratischen Risikofaktors ε_i zu beschreiben. Die Variablen ε_i bezeichnen dabei unabhängige, identisch verteilte (i. e. normalverteilte) Zufallsvariab-

¹¹³ Duffie, D. / Singleton, K. (2003), S. 54.

¹¹⁴ Vgl. Kapitel 3.4; Anhang 6.

len, unabhängig von Y , welche die residuale, nicht durch Schwankungen des systematischen Faktors Y erklärbare Schwankungen der latenten Variablen Z_i widerspiegeln.

Das Gewicht ϱ_i in Formel (31) quantifiziert das Maß der Abhängigkeit der Variablen Z_i vom systematischen Faktor Y .¹¹⁵ Die Bezeichnung „Ein-Faktor-Modell“ ist auf diese Abhängigkeit zurückzuführen und wird im Folgenden weiter ausgeführt.

4.3.2 Das Ein-Faktor-Modell

Als Folge der geometrisch Brownschen Bewegung der latenten Prozesse hat Merton in seinem Modell die Normalverteilungsannahme $Y, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n \sim \mathcal{N}(0,1)$ iid getroffen. Daraus ergibt sich der Erwartungswert $\mathbb{E}(Z_i) = 0$ und die Varianz $\mathbb{V}(Z_i) = 1$ der Variablen Z_i , nachdem Z_i als spezielle Linearkombination zweier unabhängiger, standardnormalverteilter Zufallsvariablen ebenfalls standardnormalverteilt ist. Der Schwellenwert c_i als Ausfallereignis ist demnach ein Quantil der Standardnormalverteilung und kann bestimmt werden als:^{116 / 117}

$$(32) \quad c_i = N^{-1}(p_i)$$

Das Ausfallereignis D_i eines Kreditnehmers lässt sich demnach wie folgt beschreiben.

$$(33) \quad D_i = \{Z_i < c_i\} = \{\sqrt{\varrho_i}Y + \sqrt{1 - \varrho_i}\varepsilon_i < c_i\}; \quad (i = 1, \dots, n)$$

Dabei wird die Eigenschaft aufgegriffen, dass bedingt auf eine konkrete Realisierung des systematischen Faktors $Y = y$ die Werte von $Z_1, \dots, Z_n$ stochastisch unabhängig sind, was für Bernoulli-Mischungsmodelle, wie das Ein-Faktor-Modell, typisch ist. Der Ausfallindikator des Kreditnehmers i kann somit durch 1_{D_i} dargestellt werden und folgt einer Bernoulli-Verteilung, wie sie bereits unter 3.2 dargestellt wurde.¹¹⁸

Ist eine Realisierung y von Y gegeben, folgt die Summe der Ausfälle im Portfolio demnach einer Binomialverteilung mit den Parametern n und $p = p_i$, was einer einheitlichen Ausfallwahrscheinlichkeit aller Kreditnehmer im Portfolio entspricht. Dies legt nahe, die

¹¹⁵ Vgl. Dhamotharan, S. / Görg, A. (2003), S. 4 f.; Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 163.

¹¹⁶ Vgl. Dhamotharan, S. / Görg, A. (2003), S. 5; Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 163.

¹¹⁷ Wie bereits erläutert, bezeichnet $N(x)$ die kumulative Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen (i. e. die Wahrscheinlichkeit, dass eine normalverteilte Zufallsvariable mit einem Mittelwert von Null und einer Varianz von eins kleiner oder gleich x ist). $N^{-1}(z)$ bezeichnet die inverse kumulative Verteilungsfunktion einer standardnormalverteilten Zufallsvariablen (d. h. der Wert von x so, dass $N(x) = z$ ist).

¹¹⁸ Vgl. Kapitel 3.2; Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 163 f.

bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit der unabhängigen Kreditausfälle im Fall $Y = y$ unter der Voraussetzung $p = p_i$ zu spezifizieren:¹¹⁹

$$\begin{aligned}
 (34) \quad p_i(y) &= \mathbb{P}(Z_i < c_i | Y = y) = \mathbb{P}(\sqrt{\varrho_i}Y + \sqrt{1 - \varrho_i}\varepsilon_i < c_i | Y = y) \\
 &= \mathbb{P}\left(\varepsilon_i < \frac{c_i - \sqrt{\varrho_i}Y}{\sqrt{1 - \varrho_i}} \middle| Y = y\right) \\
 &= N\left(\frac{c_i - \sqrt{\varrho_i}y}{\sqrt{1 - \varrho_i}}\right)
 \end{aligned}$$

Die unbedingte Ausfallwahrscheinlichkeit aus (32) bzw. (33) wird über $c_i = N^{-1}(p_i)$ berücksichtigt, so dass wir für die auf $Y = y$ bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit erhalten:

$$(35) \quad p_i(y) = N\left(\frac{N^{-1}(p_i) - \sqrt{\varrho_i}y}{\sqrt{1 - \varrho_i}}\right)$$

Sei Y nun ein globaler Einflussfaktor, der sich durch einen Index beschreiben lässt und die makroökonomische Entwicklung einer Volkswirtschaft wiedergibt. Der wirtschaftliche Erfolg eines Kreditnehmers als Teil dieser Volkswirtschaft lässt sich damit bis zu einem gewissen Grad durch Y erklären. ϱ_i quantifiziert in diesem Zusammenhang dann das statistische Bestimmtheitsmaß, welches die Güte der Regression der latenten Kreditnehmervariablen Z_i (zu erklärende Variable) nach der erklärenden Variablen Y quantifiziert.¹²⁰ Diese Abhängigkeit wird in der bedingten Wahrscheinlichkeit der Formel (35) ausgedrückt.

Dem Faktor ϱ_i kommt als Maß der Abhängigkeit von Z_i vom systematischen Faktor Y eine bedeutende Rolle zu. Die Korrelation zweier *multivariat standardnormalverteilter* Zufallsvariablen ergibt sich aufgrund der diesem Modell zugrunde liegenden Annahmen zu:

$$(36) \quad \text{Corr}(Z_i, Z_k) = \sqrt{\varrho_i}\sqrt{\varrho_k} \quad (i \neq k)$$

Zurückführend auf Merton, der in seiner Arbeit die zugrunde liegenden Variablen als Asset-Werte auffasste, spricht man in diesem Zusammenhang auch von der Assetkorrelation zweier Kreditnehmer. Ohne Angabe der Herleitung wird nachfolgend die Formel zur Umrechnung von Assetkorrelation $\varrho_{ik} = \sqrt{\varrho_i}\sqrt{\varrho_k}$ in Ausfallkorrelation ρ_{ik} widergegeben:¹²¹

¹¹⁹ Vgl. Dhamotharan, S. / Görg, A. (2003), S. 5 – 7; Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 164 f.

¹²⁰ Dieser Logik folgend sind die Ausfallwahrscheinlichkeiten von Kreditnehmern niedriger, wenn der Makrofaktor Y gut (i. e. weit rechts in der Gauß'schen Glockekurve) ist, und größer, wenn Y schlecht ist (i. e. weit links auf der Gauß'schen Glockekurve liegt). Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 165.

¹²¹ Die Herleitung findet sich u. a. in Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 165 – 167.

$$(37) \quad \rho_{ik} = \text{Corr}(1_{D_i}, 1_{D_k}) = \frac{N_2(N^{-1}(p_i), N^{-1}(p_k); \sqrt{q_i q_k}) - p_i p_k}{\sqrt{p_i(1-p_i)} \sqrt{p_k(1-p_k)}}$$

wobei $N_2(\cdot, \cdot; \sqrt{q_i q_k})$ die Verteilungsfunktion der bivariaten Standardnormalverteilung mit der Assetkorrelation $\sqrt{q_i q_k}$ bezeichnet. In Tabelle 7 wird der Zusammenhang zwischen Asset- und Ausfallkorrelationen für ausgewählte Wahrscheinlichkeiten aufgezeigt. Dabei fällt auf, dass die Ausfall- bzw. Defaultkorrelationen deutlich kleiner ausfallen als die Assetkorrelationen, was eine Verwechslung zwar grundsätzlich ausschließen sollte, jedoch zu einer genauen Beachtung der „Korrelationenbezeichnung“ anregt.

Ausfallwahrscheinlichkeit p	Assetkorrelation q	Ausfallkorrelation ρ
0,01	0,1	0,009
0,01	0,2	0,024
0,01	0,3	0,046
0,03	0,1	0,019
0,03	0,2	0,045
0,03	0,3	0,078
0,05	0,1	0,026
0,05	0,2	0,058
0,05	0,3	0,098

Tabelle 7: Zusammenhang zwischen Asset- und Ausfallkorrelation ¹²²

Erweitern wir nun unsere Betrachtungen des Ein-Faktor-Modells, in dem wir in einem homogenen Portfolio, das durch die uniformen Parameter der Ausfallwahrscheinlichkeit $p_i = p$ und Assetkorrelation $q_i = q$ charakterisiert ist, die Kreditnehmeranzahl $n \rightarrow \infty$ konvergieren lassen und dadurch eine Grenzverteilung (Vasicek-Modell) herleiten. ¹²³

4.3.3 Granulare Portfolios

Unter diesen Annahmen haben wir es im Fall eines uniformen Portfolios unter der Bedingung $Y = y$ mit einer Binomialverteilung zu tun. Diese konvergiert gegen eine Normalverteilung, wenn die Granularität im Portfolio durch $n \rightarrow \infty$ erhöht wird.

Unbedingt, d. h. im Fall einer Mischung durch den systematischen Faktor Y , konvergiert die gemischte Verteilung zwar immer noch, jedoch gegen eine rechtsschiefe Verteilung, welche die Grenzverteilung der geschlossenen Verlustverteilung des uniformen Portfolios darstellt.

¹²² Nach Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 167.

¹²³ Das aus dem Ein-Faktor-Modell hergeleitete Grenzverteilungsmodell für den Fall eines Portfolios mit einer hinreichend großen Anzahl von Krediten / Kreditnehmern, geht ursprünglich auf Vasicek zurück, so dass das Ein-Faktor-Modell im Grenzfall (Anzahl der Kredite im Portfolio $\rightarrow \infty$) auch als Vasicek-Modell bezeichnet wird. Vgl. Vasicek, O. (1991).

Konkret konvergiert die Verlustquote mit einer Wahrscheinlichkeit von 1, für $n \rightarrow \infty$ gegen:¹²⁴

$$(38) \quad \text{LGD} * p(Y) \quad \text{mit} \quad p(Y) = N\left(\frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\varrho}Y}{\sqrt{1 - \varrho}}\right)$$

Offensichtlich leisten in diesem speziellen Fall die idiosynkratischen Effekte ε_i des einzelnen Kreditnehmers keinen Risikobeitrag zum Portfoliorisiko. Dies resultiert aus der Tatsache, dass kein Einzelexposure über einen bestimmenden Anteil am Gesamtrisiko verfügt, bzw. der Anteil eines einzelnen Kredites in einem Portfolio gegen null tendiert und das spezifische Risiko als „wegdiversifiziert“ angenommen wird. Die Risikostreuung ist soweit fortgeschritten, dass, wie bereits in Abbildung 4 dargestellt, nur noch systematische Risiken Auswirkungen auf das Portfolio haben.¹²⁵

Für ein uniformes Portfolio, in welchem die LGDs als deterministische Größen angenommen werden, ist die Grenzverteilung für den Portfolioverlust bereits bekannt, wenn wir die Verteilung von $p(Y)$ kennen. Die ersten beiden Momente, Erwartungswert und Varianz, sind demnach wie folgt bestimmt:¹²⁶

$$(39) \quad \mathbb{E}(p(Y)) = p$$

$$(40) \quad \mathbb{V}(p(Y)) = p_{ij} - p^2 = N_2(N^{-1}(p), N^{-1}(p); \varrho) - p^2$$

p_{ij} stellt die (uniforme) gemeinsame Ausfallwahrscheinlichkeit zweier Kreditnehmer eines uniformen Portfolios dar. Die Verteilungsfunktion von $p(Y)$ ist bei $\text{LGD} = 1$ durch

$$(41) \quad F_{p,\varrho}(x) = \mathbb{P}(p(Y) \leq x) = N\left(\frac{N^{-1}(x)\sqrt{1 - \varrho} - N^{-1}(p)}{\sqrt{\varrho}}\right)$$

gegeben. Durch Ableitung nach x ergibt sich die korrespondierende Dichtefunktion mit:¹²⁷

$$(42) \quad f_{p,\varrho}(x) = \sqrt{\frac{1 - \varrho}{\varrho}} \exp\left(\frac{(N^{-1}(x))^2}{2} - \frac{(N^{-1}(p) - N^{-1}(x)\sqrt{1 - \varrho})^2}{2\varrho}\right)$$

¹²⁴ Vgl. Bluhm, C. / Overbeck, L. / Wagner, C. (2002), S. 84 - 90; Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 171. In Anhang 7 wird darüber hinaus erläutert, dass die Varianz bei unendlich feiner Granularität gegen Null tendiert und somit die Interpretation zulässt, dass für $n \rightarrow \infty$ die durch die idiosynkratischen Risikofaktoren induzierte unsystematische Streuung der bedingten Portfolioverluste um ihren Erwartungswert vernachlässigt werden kann.

¹²⁵ Vgl. Abbildung 4; Meier, C. (2004), S. 256 f.

¹²⁶ Vgl. Bluhm, C. / Overbeck, L. / Wagner, C. (2002), S. 94; Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 171.

¹²⁷ Vgl. Bluhm C. / Overbeck L. / Wagner C. (2002), S. 90 f; Vasicek, O. (1991), S. 2.

Die nunmehr vorhandene Verteilung / Dichte, die aus dem Ein-Faktor-Modell abgeleitet wurde, stimmt mit keiner der aus Kapitel drei dargestellten Verteilungen überein. In Anhang 8 ist die Dichte dieser Verteilung für einige beispielhafte, uniforme pq -Parameter und einem deterministischen $LGD = 1$ dargestellt.

Nachdem der systematische Faktor Y standardnormalverteilt ist, ist der Rückschluss möglich, dass die standardnormalverteilte Rendite Y bei einem Konfidenzniveau (α -Quantil) zumindest den Wert $N^{-1}(\alpha) = -N^{-1}(1 - \alpha)$ annimmt. Somit ergibt sich zur Bestimmung des Value at Risk zum α -Quantil folgende Formel:

$$(43) \quad F_{p,\varrho}^{-1}(\alpha) = N\left(\frac{N^{-1}(p) + \sqrt{\varrho} * N^{-1}(\alpha)}{\sqrt{1 - \varrho}}\right)$$

Die Formel stellt auf relativ einfache Art und Weise die Auswirkung von Ausfallwahrscheinlichkeit und Assetkorrelation auf das Risiko dar.¹²⁸ Sie ist die Grundlage zur Ermittlung der Eigenkapitalanforderung „K“ aus 4.2 bzw. Formel (30) und Ausgangspunkt zur Bestimmung der Verlustverteilung nach der IRB Formel des Basler Akkords.

4.3.4 Eigenkapitalanforderung „K“

Im IRB-Ansatz wurde das Quantil zur Berechnung der unterlegungspflichtigen Eigenmittel mit 0,001 festgelegt. Das der Eigenkapitalanforderung (K) zugrunde liegende Konfidenzniveau ermittelte ursprünglich einen Value at Risk, der zu 99,9%iger Sicherheit nicht überschritten wird. Im Oktober 2003 hat der Basler Ausschuss jedoch ausdrücklich klargestellt, dass die Eigenmittelanforderung im IRB-Ansatz ausschließlich der Deckung des Credit Value at Risk dienen soll.¹²⁹ Die Eigenkapitalanforderung (K_i) für den i -ten Kredit ermittelt sich seither in ihrer Reinform für alle Segmente über:¹³⁰

$$(44) \quad K_i = \left[LGD_i * N\left(\frac{N^{-1}(p_i) + \sqrt{\varrho} * N^{-1}(0,999)}{\sqrt{1 - \varrho}}\right) - p_i * LGD_i \right]$$

¹²⁸ Durch Umrechnung mit Formel (37) kann auch die Wechselwirkung zwischen Ausfallwahrscheinlichkeit und Defaultkorrelation untersucht werden.

¹²⁹ Vgl. Basel Committee (2003); Chech, C. (2004), S. 25; Klement, J. (2007) S. 219.

¹³⁰ Grundsätzlich liese sich die Formel weiter vereinfachen, indem $N^{-1}(0,999)$ direkt durch den Wert der Standardnormalverteilungsfunktion von ca. 3,0902 ersetzt würde. Allerdings könnte dies zu Rundungsdifferenzen führen und der fassbare Hinweis auf des 99,9%ige Konfidenzniveau ginge verloren.

Die Zusammenhänge lassen sich auch bildlich beschreiben (Annahme: LGD = 1):

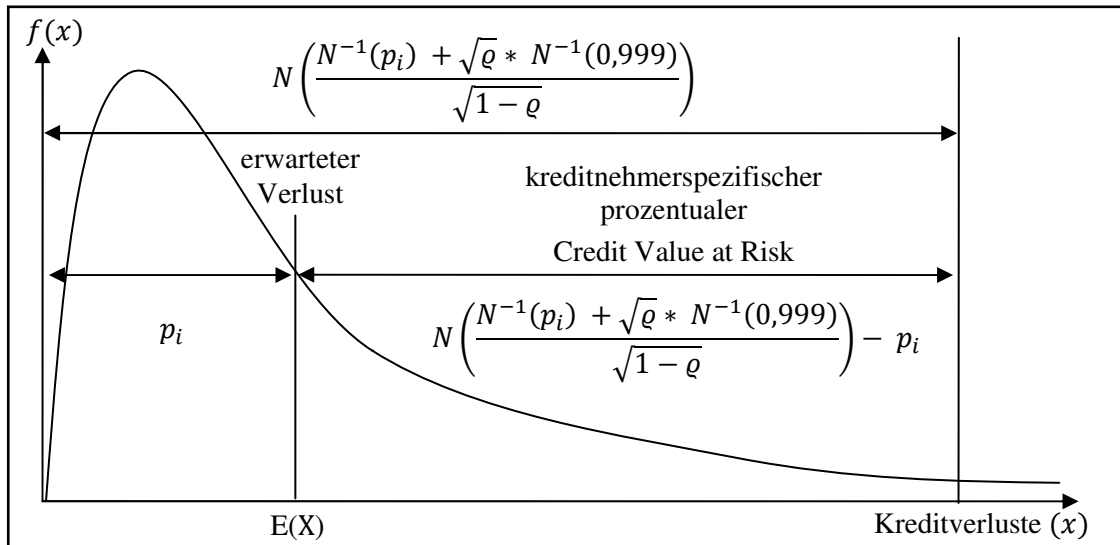


Abb. 10: CVaR – Bestimmung nach Basel II

Der zentrale Term $N(\dots)$ des Risikogewichts für den Schuldner i hängt also rein von seiner Ausfallwahrscheinlichkeit p_i und seiner Bindung q an den systematischen Risikofaktor ab. Der Risikobeitrag einer Position ist somit unabhängig von der Portfoliozusammensetzung, was grundsätzlich der Grundidee von Portfoliomodellen entgegen steht. Jedoch belegt Gordy, dass unter den beiden Bedingungen:

- „First the portfolio must be asymptotically fine-grained, in the sense that no single exposure in the portfolio can account for more than an arbitrarily small share of total portfolio exposure.
- Second, there must be at most a single systematic risk factor.“

der Risikobeitrag eines Schuldners zum Portfoliorisiko nur von seiner Charakteristik abhängt¹³¹ Die Auswirkungen dieser Annahmen werden in Kapitel fünf aufgezeigt.

Im IRB Ansatz werden die relativen Größen pro Geldeinheit zur Ermittlung des Unterlegungspflichtigen Eigenkapitals ermittelt. Der Credit Value at Risk eines Kredites ergibt sich aus der Multiplikation des kreditnehmerspezifischen Exposures mit der individuellen Kapitalanforderung „K“. Der CVaR des gesamten Portfolios ergibt sich anschließend durch einfache Addition der einzelnen kreditnehmerspezifischen Eigenkapitalanforderungen. Dadurch könnte die IRB-Formel auch als Expected Loss verstanden werden, der mit einer 99,9%igen worst case Ausfallwahrscheinlichkeit zu berechnen ist.

¹³¹ Gordy, M. (2003), S. 201.

Für die Bindung ρ eines Kreditnehmers an den systematischen Risikofaktor werden in Basel II segmentspezifische Vorgaben (Risikogewichtsregelungen) getroffen, mit dem Ziel, eine angemessene, am Risiko orientierte Eigenmittelunterlegung herbeizuführen. Grundsätzlich lassen sich zwei große Segmente für nicht ausgefallene Forderungen unterscheiden. Es gibt jedoch innerhalb der beiden Klassen verschiedenste Vorgaben, Erweiterungen und Ausnahmen zur Bestimmung der Eigenkapitalanforderung, so dass in einem gesonderten Abschnitt ein Überblick zu den einzelnen Gewichten erfolgt.

4.3.5 Segmentspezifische Eigenkapitalanforderungen

4.3.5.1 Forderungen an Unternehmen, Staaten und Banken ¹³²

Nachfolgende Formel zeigt auf, dass zur Ermittlung der Bindung eines Kreditnehmers an den systematischen Risikofaktor in diesem Segment auf die Ausfallwahrscheinlichkeit p des einzelnen Schuldners zurückgegriffen wird:

$$(45) \quad \rho = 0,12 * \left(\frac{1 - e^{-50*p}}{1 - e^{-50}} \right) + 0,24 * \left(1 - \frac{1 - e^{-50*p}}{1 - e^{-50}} \right)$$

Die Terme in den Klammern sind nicht negativ und summieren sich gegenseitig auf 1, wodurch die Assetkorrelation ρ , in Abhängigkeit der Ausfallwahrscheinlichkeit des Kreditnehmers, immer zwischen 0,12 und 0,24 liegen wird. Aus kleineren Ausfallwahrscheinlichkeiten resultieren dabei höhere Assetkorrelationen, was auf folgende Argumentation zurückzuführen ist:¹³³ Große international tätige Unternehmen (Multinationals – MNCs) haben i. d. R. ein besseres Rating. Diese Unternehmen sind jedoch stärker von makroökonomischen Schwankungen betroffen und haben somit einen größeren Anteil ihres Risikos in der systematischen Komponente und nicht in der idiosynkratischen Komponente zu tragen. Dies führte im Rahmen des Konsultationsprozesses zur Einigung, kleine Ausfallwahrscheinlichkeiten als Indiz für hohes systematisches Risiko trendweise anzuerkennen. Dieser Zusammenhang wird in Abbildung 11 graphisch verdeutlicht.

¹³² Vgl. Basel Committee (2004), Tz. 272 f.

¹³³ Vgl. Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 174 f.

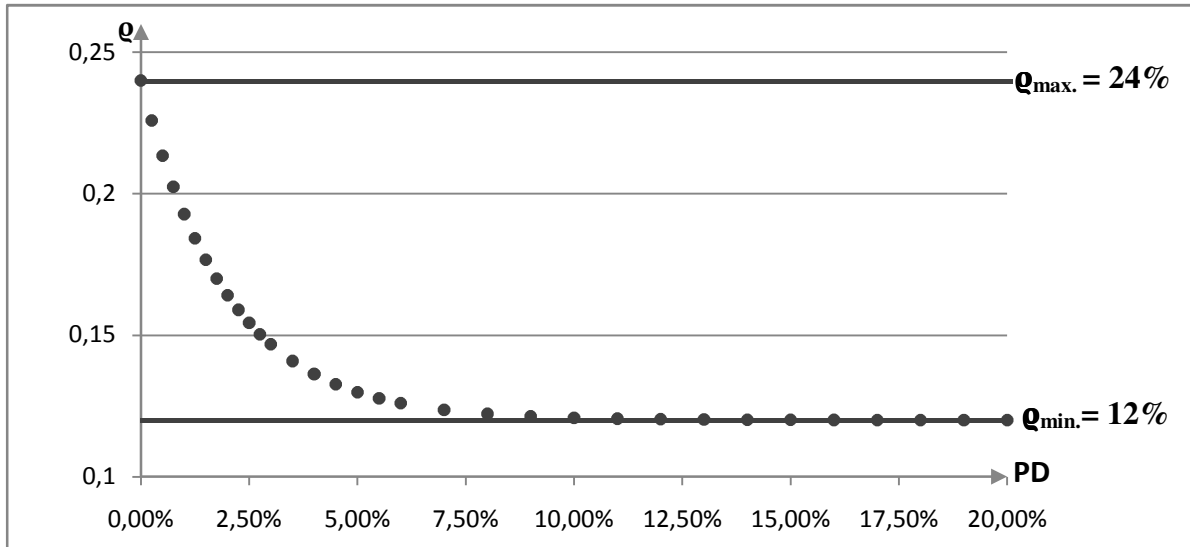


Abb. 11: Zusammenhang zwischen Assetkorrelation und PD im IRB-Ansatz ¹³⁴

Für Unternehmen mit einem Umsatz unter EUR 50 Mio. (KMU – Klein und Mittelständische Unternehmen) existiert eine Grössenanpassung, die sich in Form einer geringeren Assetkorrelation widerspiegelt. Diese Korrelation ergibt sich aus: ¹³⁵

$$(46) \quad q = 0,12 * \left(\frac{1 - e^{-50*p}}{1 - e^{-50}} \right) + 0,24 * \left(1 - \frac{1 - e^{-50*p}}{1 - e^{-50}} \right) - 0,04 * \left(1 - \frac{\text{Size} - 5}{45} \right)$$

„Size“ steht für den Umsatz eines Unternehmens und nimmt mindestens einen Wert von EUR 5 Mio. an, auch für Unternehmen mit einem geringeren Umsatz. Folglich fällt bei gleicher Ausfallwahrscheinlichkeit die Korrelation für Unternehmen mit einem Umsatz bis EUR 5 Mio. um vier Prozent geringer aus, als für jene Unternehmen mit einem Umsatz von EUR 50 Mio. und mehr.

Neben dem zentralen Term $N(\dots)$, in den die zuvor ermittelte Assetkorrelation einfließt, erfolgt eine Anpassung des Risikogewichtes in Abhängigkeit der Restlaufzeit des Kredites, da $N(\dots)$ von einer Restlaufzeit von einem Jahr ausgeht. Diese Laufzeitanpassung ist ausschließlich für Kredite an Unternehmen, Banken und Staaten vorgesehen und entspricht mit einer Untergrenze von einem und einer Obergrenze von fünf Jahren bereits im FIRB nur bedingt der tatsächlichen Restlaufzeit eines Kredites. ¹³⁶

¹³⁴ In Anlehnung an Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 174.

¹³⁵ Es handelt sich um die dabei oft, vor allem in den deutschen Fachmedien, diskutierte Anpassung für Klein- und Mittelständische Unternehmen (KMU bzw. SME – Small- and Medium-sized Entity).

¹³⁶ Vgl. Basel Committee (2004), Tz. 320; die effektive Restlaufzeit, innerhalb der genannten Laufzeiteinschränkung, errechnet sich nach $\sum_t t * CF_t / \sum_t CF_t$, wobei CF_t alle vertraglichen Zahlungen bezeichnet, die der Kreditnehmer im Zeitraum t

Für den Basisansatz wurde die Restlaufzeit auf einheitliche 2,5 Jahre festgelegt. Das Risikogewicht ermittelt sich innerhalb des Segmentes nach:

$$(47) \quad K = \left[\text{LGD} * N \left(\frac{N^{-1}(p) + \sqrt{\varrho} * N^{-1}(0,999)}{\sqrt{1 - \varrho}} \right) - p * \text{LGD} \right] * \left(\frac{1 + (M - 2,5) * b(p)}{1 - 1,5 * b(p)} \right)$$

mit $b(p) = (0,11852 - 0,05478 * \ln(p))^2$

Auch die Restlaufzeitanpassung ist folglich abhängig von der kreditnehmerspezifischen Ausfallwahrscheinlichkeit. Anhang 9a zeigt, dass eine geringe Ausfallwahrscheinlichkeit eines Kreditnehmers zu einem höheren Laufzeit-Anpassungsfaktor führt. Dass sich das unterlegungspflichtige Kapital mit zunehmender Restlaufzeit erhöht, sollte in diesem Zusammenhang nicht überraschen.

Für den Fall, dass eine KMU-Forderung weniger als EUR 1 Mio. beträgt, haben Kreditinstitute die Möglichkeit, den Kredit dem Retailportfolio zuzuordnen, was die im nachfolgenden Abschnitt beschriebenen Anpassungen mit sich bringen.¹³⁷

4.3.5.2 Forderungen an Privatkunden¹³⁸

Für Forderungen im Retailsegment gibt es drei verschiedene Risikogewichtsfunktionen, wobei der Zentrale Term $N(\dots)$ aus Formel (44) in seiner „Reinform“ (ohne Ergänzungen / Anpassungen) zur Anwendung kommt. Je nach Art der Finanzierung werden unterschiedliche Assetkorrelationen vom Ausschuss vorgegeben:

- Private Baufinanzierung $\varrho = 0,15$
- Revolvierende Kredite $\varrho = 0,04$
- andere Retail Kredite $\varrho = 0,03 * \left(\frac{1 - e^{-35p}}{1 - e^{-35}} \right) + 0,16 * \left(1 - \frac{1 - e^{-35p}}{1 - e^{-35}} \right)$

Mit Ausnahme von wohnwirtschaftlichen und revolvingenden Krediten ist auch in diesem Segment die Assetkorrelation von der Ausfallwahrscheinlichkeit des einzelnen Kreditnehmers abhängig. In Anhang 9b wird die abnehmende Bindung des Schuldners an den systematischen Risikofaktor bei zunehmender PD graphisch dargestellt.

zu leisten hat. In Ausnahmefällen kann von einer Restlaufzeit < 1 Jahr ausgegangen werden, vgl. Tz. 321. Auch können Kredite an kleinere Unternehmen (Umsatz und Bilanzsumme ≤ EUR 500 Mio.) mit einer einheitlichen Restlaufzeit von 2,5 Jahren im FIRB versehen werden, Tz. 319.

¹³⁷ Vgl. Basel Committee (2004), Tz. 231.

¹³⁸ Vgl. Basel Committee (2004), Tz. 328 – 330.

Aufgrund des Wegfalls der Laufzeitanpassung und der grundsätzlich geringeren Assetkorrelationen ist die Kapitalanforderung für Retailkredite bei gleicher Ausfallwahrscheinlichkeit und LGD-Quote immer geringer als jene für Unternehmenskredite, wie dies in Abbildung 12 auch dargestellt wird.

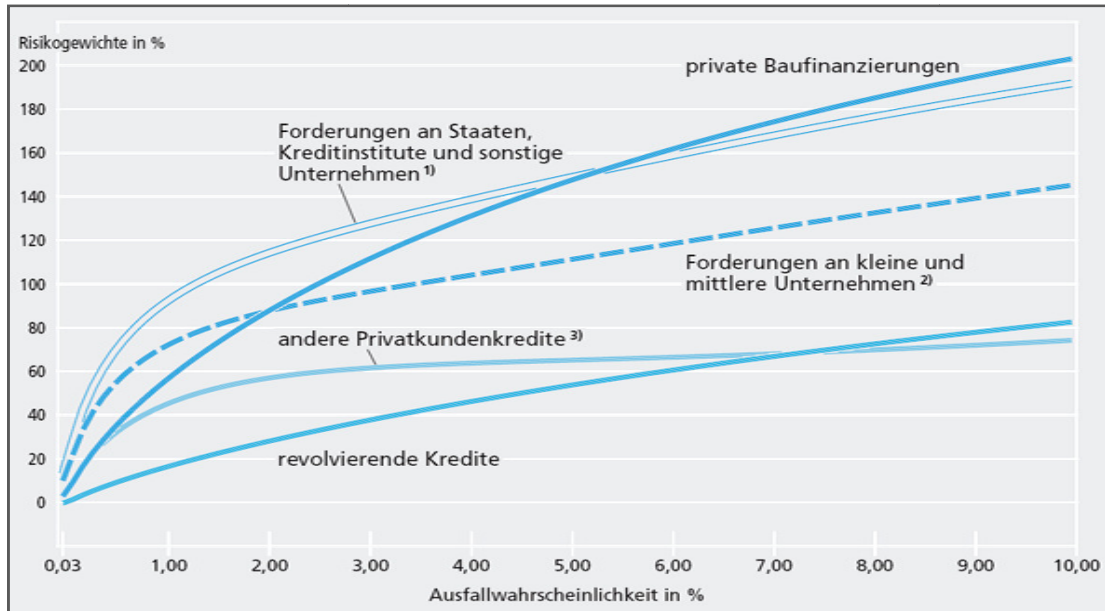


Abb. 12: Risikogewichtskurven im IRB-Ansatz¹³⁹

Im Folgenden Kapitel bewerten wir unser Portfolio im Basel II Kontext und ziehen, bei Veränderung verschiedener, bereits vorgestellter Einflussparameter, einen Vergleich zur logarithmischen Normalverteilung.

¹³⁹ Aus Deutsche Bundesbank (2004), S. 97. Dabei blieb die Laufzeitkomponente ohne Berücksichtigung und es wurde eine einheitliche LGD-Quote von 45% unterstellt. Ebenso blieb der Skalierungsfaktor von 1,06 unberücksichtigt; zu 1) Unternehmen ohne Kapitalerleichterung; zu 2) Unternehmen mit Kapitalerleichterung (KMU); zu 3) Kredite an KMU mit einer Kreditsumme $\leq$ EUR 1 Mio.

5 Vergleichende Analyse

5.1 Für unkorrelierte Portfolios

Unter Anwendung der lognormalen Verlustverteilung ermittelten wir in Abschnitt 3.5.3 den 99,9%igen Credit Value at Risk des unkorrelierten Portfolios i. H. v. EUR 1.402.606,19.

Gemäß Formel (44) zur Bestimmung der Eigenkapitalanforderung K_i würde sich der Risikobeitrag eines Schuldners in Basel II bei $\rho = 0$ aus $LGD_i * p_i$ ergeben. Dieser Wert entspricht genau dem prozentualen Expected Loss pro Geldeinheit und wird, da das unterlegungspflichtige Kapital auf den CVaR abzielt (vgl. auch Abbildung 10), in der Folge wieder abgezogen. Der Risikobeitrag dieses Kreditnehmers zum Portfoliorisiko würde somit null betragen. Dieses möglicherweise zunächst überraschende Ereignis geht jedoch völlig konform mit der Modellannahme, denn ein Gewicht $\rho = 0$ bedeutet, dass der Schuldner nur mit unsystematischem Risiko behaftet ist, das im Rahmen des Modells als vollständig diversifizierbar angesehen wird. In der Folge bleibt für solche Schuldner der Unexpected Loss, also die mögliche Abweichung vom Erwartungswert, unberücksichtigt.

Die Basler Vorgaben lassen jedoch, wie oben bereits angeführt, keine Ausprägung der Assetkorrelation mit $\rho = 0$ zu, so dass es sich hierbei, ebenso wie bei den beiden Extremwerten der Korrelation $\rho = -1$ bzw. $\rho = 1$, um Annahmen außerhalb des Basler Akkords handelt. In den nachfolgenden Betrachtungen bleiben wir mit unseren Annahmen innerhalb der Basler Vorgaben, möchten jedoch den ergänzenden Hinweis geben, dass für die Annahme $\rho = 1$ der Kreditnehmer rein mit systematischem Risiko behaftet wäre. Dieses Risiko wird im Rahmen des Modells als nicht diversifizierbar angesehen und der Schuldner würde folglich genau dann ausfallen, wenn seine Ausfallschranke c_i über der Realisierung y des systematischen Risikofaktors liegt. Der Risikobeitrag des Schuldners zum Credit Value at Risk würde sich somit aus $EAD_i * LGD_i - EL_i$ ergeben, falls seine Ausfallwahrscheinlichkeit p_i über dem Niveau $1 - \alpha$ liegt, bzw. wenn $p_i < 1 - \alpha$ gilt, hätte dies eine Nullanrechnung zur Folge.¹⁴⁰

¹⁴⁰ Für eine Nullanrechnung müsste die Ausfallwahrscheinlichkeit des Schuldners im Basel II Ansatz unterhalb des gewählten Quantilwertes $q = 0,001$ bzw. 0,1% liegen. Vgl. Dhamotharan S. / Görg, A. (2003), S. 8 f.

5.2 Für uniforme Portfolios

5.2.1 Das 5 Kreditnehmerportfolio

Bei dem in Kapitel zwei eingeführten Kreditportfolio mit einem Gesamtexposure über EUR 5 Mio. handelt es sich um einjährige Forderungen ($M = 1$) gegenüber Unternehmen, wobei die Ausnahmeregelungen für KMU aus Gründen der Übersichtlichkeit nachfolgend unberücksichtigt bleiben. Das Portfolio lässt sich durch folgende uniforme Parameter für alle $i = 1, 2, 3, 4, 5$ kurz beschreiben:

$$\begin{aligned} \text{LGD}_i &= \text{LGD} & 0,6 \\ p_i &= p & 0,01 \end{aligned}$$

Gehen wir davon aus, dass die Kreditnehmer über ein externes Rating verfügen, so dürfte dieses bei einer Ausfallwahrscheinlichkeit von 1,00% bereits im Speculative grade – Bereich liegen.¹⁴¹ Aus der einheitlichen Probability of Default ermitteln wir über (45) die identische Assetkorrelation aller Kreditnehmer in Höhe von:

$$\varrho_i = \varrho \quad 0,1928$$

Setzen wir die Parameter nun in Formel (47) ein, erhalten wir für die einzelnen Kredite die relativen Kapitalanforderungen K_i pro Geldeinheit i. H. v. 0,07816361.¹⁴²

Pro Kredit muss demzufolge ökonomisches Kapital i. H. v. EUR 78.163,61 vorgehalten werden, das sich aus der Multiplikation der EAD_i i. H. v. EUR 1 Mio. mit K_i ergibt.¹⁴³ Der Credit Value at Risk des gesamten Portfolios wird durch einfache Addition des vorzuhaltenden Kapitalbetrages pro Kreditnehmereinheit bestimmt und entspricht:

$$\text{CVaR}_{\text{Basel II}} = \text{EUR } 390.818,05$$

Zur Ermittlung des CVaR_{LN} benötigen wir die Defaultkorrelation zwischen den Kreditnehmern, die im uniformen Portfolio paarweise identisch sind. Diese berechnen wir aus der zuvor ermittelten Assetkorrelation des Basler Akkords über Formel (37) und erhalten:¹⁴⁴

$$\rho_{ik} = 0,0228 \quad (i \neq k)$$

¹⁴¹ Vgl. Tabelle 1, mit PD = 0,94% bei einem „BB+“ Rating; vgl. auch Anhang 1.

¹⁴² Nachdem bei $M = 1$ lauffzeitabhängige Anpassungen entfallen, bzw. der zweite Term in Formel (47) als Ergebnis 1 ergibt, wäre auch die Verwendung von Formel (44) möglich.

¹⁴³ Anmerkung: Unter Basel I hätte die Kapitalanforderung EUR 80.000 pro Kreditnehmer betragen (8%).

¹⁴⁴ Zur Berechnung der Verteilungsfunktion der bivariaten Standardnormalverteilung $N_2(\dots)$ in Excel wurde ein Makro verwendet, das unter www.vbnumericalmethods.com kostenlos downloadbar ist. Vgl. o. V. (2007).

Über Formel (12) können wir nun den unerwarteten Verlust i. H. v. EUR 139.459,56 des uniformen Portfolios ermitteln. Diesen verwenden wir, wie bereits schon unter 3.5.2, gemeinsam mit dem erwarteten Verlust i. H. v. EUR 30.000 (vgl. 2.2.3) zur Ermittlung des Lage- bzw. Streuungsparameters μ bzw. σ^2 der Lognormalverteilung nach (24) bzw. (25). Die Zufallsvariable X lässt sich somit durch $X \sim LN(8,7498; 3,1184)$ beschreiben.

Den Credit Value at Risk der Lognormalverteilung berechnen wir aus Formel (28). Das zugrunde liegende Konfidenzniveau α wird gem. den Vorgaben von Basel II auf 99,9% festgelegt, was für $N_{1-\alpha} = 3,0902$ entspricht und zu einem vergleichenden CVaR i. H. v.

$$CVaR_{LN} = \text{EUR } 1.448.861,12$$

führt. In Anhang 10 ist das zur Ermittlung beider CVaRs verwendete Excelsheet abgebildet. Dort wird u. a. auch das Verhältnis beider Größen zueinander ermittelt. So fällt der CVaR der logarithmischen Normalverteilung um das 3,7fache höher aus als der CVaR nach Basel II bzw. beträgt der Basler CVaR lediglich rund 27% des lognormalverteilten CVaR.

Die graphische Darstellung der Dichtefunktionen bis zur Größe des erwarteten Verlust, ergibt auf Basis der deterministischen LGD Vorgabe von 0,6 folgendes Bild für das uniforme 5 Kreditnehmerportfolio:

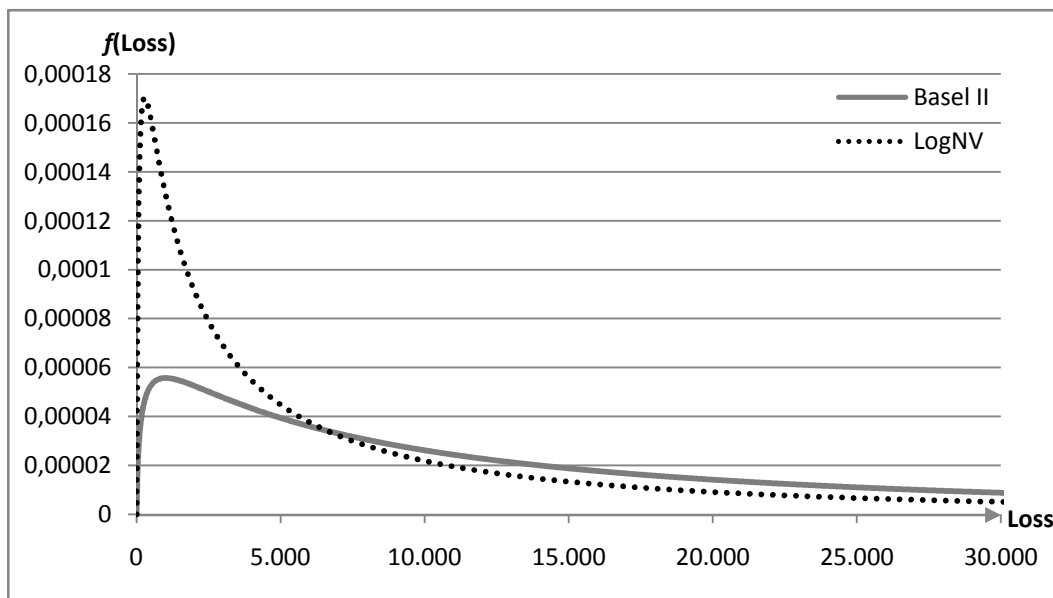


Abb. 13: Dichten des uniformen 5 Kreditnehmerportfolios bis zum Expected Loss¹⁴⁵

¹⁴⁵ Die Dichten wurden über (26) für die Lognormalverteilung bzw. über (42) für die IRB-Formel ermittelt.

Vorstehende Grafik würde zunächst ein anderes Ergebnis für die verbleibende Verlustverteilung zur Ermittlung des CVaRs beider Ansätze nahelegen. Mit Blick auf die korrespondierende Verteilungsfunktion beider Ansätze in Anhang 11 erkennen wir, dass bis zum erwarteten Verlust die Lognormalverteilung etwas mehr als 80% der Wahrscheinlichkeitsfläche eingesammelt hat. Die Verlustverteilung des Basler Akkords hingegen erst ca. 70% der Fläche „aufsammeln“ konnte.

Daher betrachten wir in Abbildung 14 den verbleibenden Verlauf beider Verteilungsfunktionen ab dem erwarteten Portfolioverlust von EUR 30.000 genauer. Daraus erkennen wir, dass ab einer Wahrscheinlichkeit von ca. 95% die Verlustverteilung des IRB-Ansatzes einen deutlich steileren Anstieg verzeichnet. Der Schnittpunkt entspricht gem. der in Anhang 12 beigefügten Tabelle einem eintretenden Portfolioverlust i. H. v. ca. EUR 105.485, was einem Konfidenzniveau von 94,46% gleichkommt. An diesem Punkt besitzen beide Ansätze einen identischen CVaR von ca. EUR 75.485.

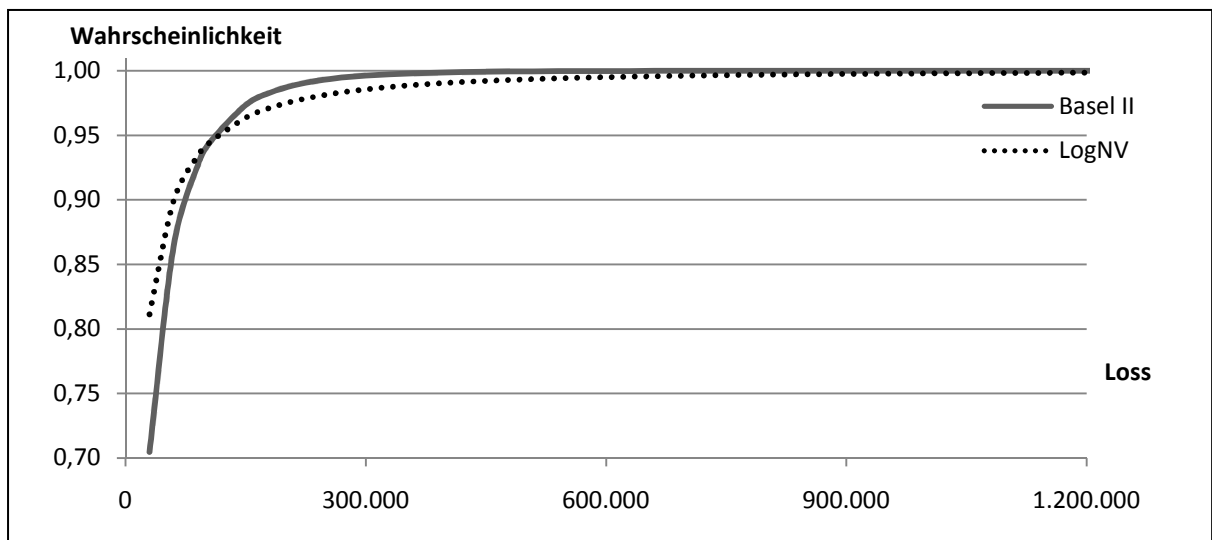


Abb. 14: Verteilungsfunktionen des uniformen 5 Kreditnehmerportfolios ab Expected Loss¹⁴⁶

Jedoch sind große Verlustereignisse für unser Portfolio mit oben angeführten Parametern in Basel II nur mit einer äußerst geringen Wahrscheinlichkeit möglich. So tritt beispielsweise ein Portfolioverlust über EUR 1,2 Mio.¹⁴⁷ nur mit einer Wahrscheinlichkeit von $< 0,00009\%$ ein,

¹⁴⁶ Die lognormale Verlustverteilung wurde über die Funktion „LOGNORMVERT“ in Excel ermittelt, die Verlustverteilung der IRB-Formel wurde über Formel (41) berechnet.

¹⁴⁷ Dies würde einen Ausfall von mehr als zwei Kreditnehmern bedeuten.

wohingegen ein Verlust in der logarithmischen Normalverteilung über EUR 1,2 Mio. immerhin noch mit einer Wahrscheinlichkeit von $< 0,14798\%$ möglich ist.¹⁴⁸

Das Ergebnis ist, ausgehend von der Annahme, dass sich die Lognormalverteilung zur Abbildung von Verlustverteilungen granularer Portfolios eignet, überraschend. Offensichtlich weicht die Risikoeinschätzung beider Ansätze deutlich voneinander ab und eine vergleichende Analyse erscheint in diesem Blickwinkel zunächst wenig zielführend. Jedoch entspricht unser Portfolio mit lediglich fünf Kreditnehmern auch nicht den Anforderungen einer hohen Portfoliogranularität. Zur Beurteilung der soeben ermittelten Ergebnisse wollen wir daher zunächst den Vergleich auf ein Portfolio erweitern, das eine deutlich höhere Granularität aufweist.

5.2.2 Das granulare Kreditportfolio

5.2.2.1 Erhöhung der Kreditnehmeranzahl

Die soeben beschriebene Vorgehensweise bleibt grundsätzlich identisch, jedoch erhöhen wir die Anzahl der Kreditnehmer so, dass der Anteil eines jeden Schuldners $0,01\%$ am Portfolioexposure entspricht. Die Kreditnehmeranzahl wurde damit auf $n = 10.000$ erhöht, wobei wir das EAD aller Kreditnehmer aus Gründen der Übersichtlichkeit auf $EAD_i = 10.000$ reduzieren, wodurch das Gesamtvolumen des Portfolios EUR 100 Mio. beträgt.

Alle weiteren Parameter des Portfolios bleiben unverändert, so dass wir die bereits unter 5.2.1 angegebenen bzw. ermittelten uniformen Größen verwenden können:

$LGD_i = LGD$	0,6
$p_i = p$	0,01
$q_i = q$	0,1928
$K_i = K$	0,07816361
$\rho_{ik} \ (i \neq k)$	0,0228

Durch Multiplikation des Portfoliovolumens mit der Eigenkapitalanforderung K_i erhalten wir den Credit Value at Risk nach Basel II für das granulare Portfolio in Höhe von

$$CVaR_{\text{Basel II}} = \text{EUR } 7.816.360,71$$

¹⁴⁸ Vgl. Anhang 12. Bei genauer Betrachtung von Abbildung 14 wird die hier getroffene Aussage auch graphisch bestätigt, da die rote Linie der logarithmischen Verteilungsfunktion bei einem Portfolioverlust von EUR 1,2 Mio. leicht unterhalb der blauen Linie von Basel II verläuft.

Auf Basis der paarweise identischen Defaultkorrelation $\rho_{ik} = 0,0228$ ($i \neq k$) ermitteln wir aus Formel (12) den unerwarteten Portfolioverlust i. H. v. EUR 904.338,38. Diesen benötigen wir ebenso wie den erwarteten Verlust i. H. v. EUR 600.000 zur Ermittlung der Verteilungsparameter der Lognormalverteilung über Formel (24) bzw. (25) und erhalten $X \sim \text{LN}(12,7120; 1,1853)$. Wir erkennen, dass der Streuungsparameter σ^2 mit ca. 1,2 für das granulare Portfolio gegenüber 5.2.1 mit ca. 3,1 deutlich geringer ausfällt, Verluste offensichtlich weniger stark streuen. Die zum Basler Ansatz korrespondierende CVaR - Größe für die Lognormalverteilung wurde über Formel (28) berechnet und beträgt:

$$\text{CVaR}_{\text{LN}} = \text{EUR } 8.991.981,58$$

Damit fällt der CVaR der logarithmischen Normalverteilung zwar immer noch höher aus als der gegenübergestellte Betrag des Basler CVaR, jedoch übersteigt er die aufsichtsrechtliche Größe lediglich noch um den Faktor 1,15. Dass die beiden Risikogrößen relativ nah beieinander liegen, wird auch im graphischen Vergleich beider Dichten in Abbildung 15 deutlich. Der vergrößerte Bereich gibt die Dichte eines Portfolioverlustes zwischen EUR 7 Mio. und EUR 10 Mio. wieder und lässt erkennen, dass trotz eines fast identischen Verlaufes im Bereich hoher Portfolioverluste sehr wohl Unterschiede existieren.

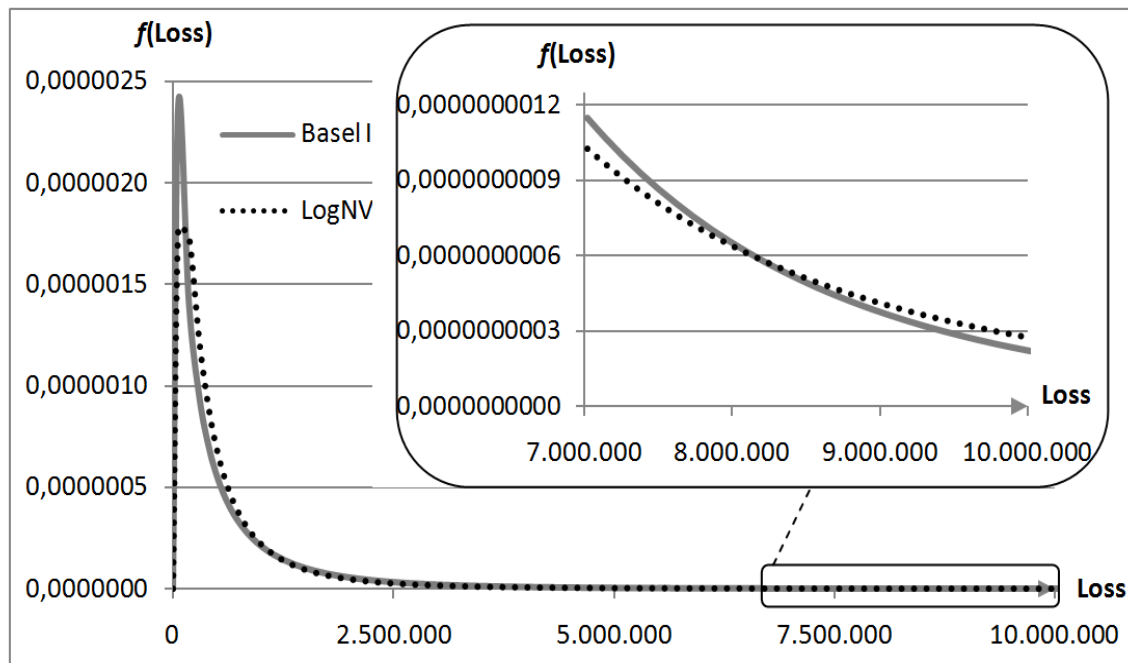


Abb. 15: Dichten des granularen Portfolios

Bei der korrespondierenden Verteilungsfunktion beider Ansätze dieses granularen Portfolios betrachten wir in Abbildung 16 einen Ausschnitt innerhalb des Wahrscheinlichkeitsbereiches zwischen 99% und 100%. Der homogene Verlauf soll jedoch nicht darüber hinwegtäuschen, dass der VaR bzw. CVaR des IRB-Ansatzes um ca. EUR 1,18 Mio. geringer ausfällt als die zum Vergleich herangezogene logarithmische Normalverteilung.

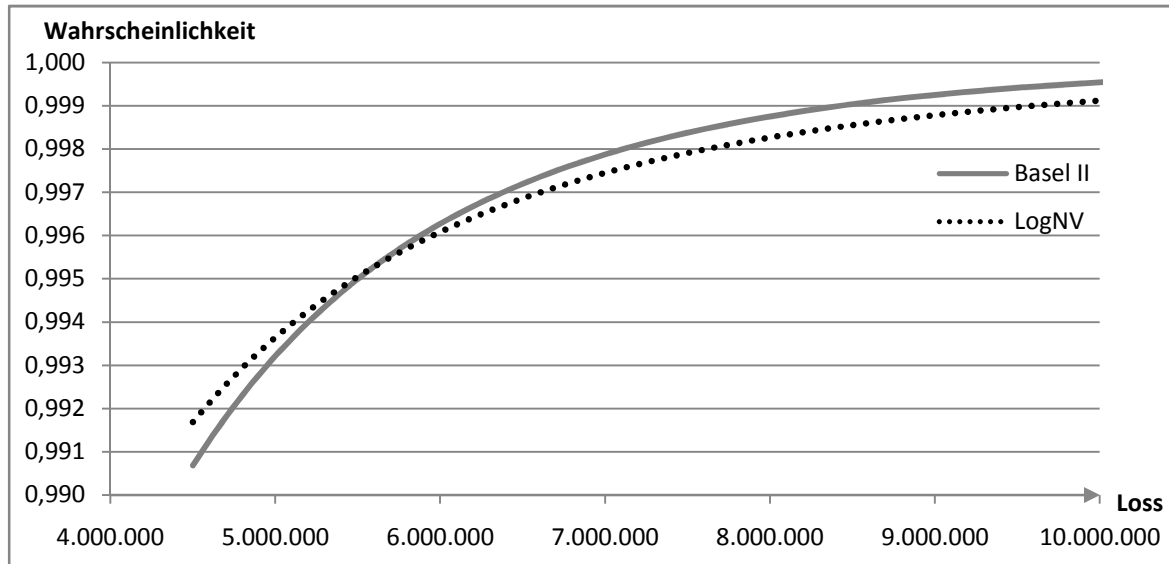


Abb. 16: Verteilungsfunktionen des granularen Portfolios zwischen 99% - 100%

Eine Veränderung des Exposures pro Kreditnehmer, z. B. statt EUR 10.000 pro Kredit – EUR 1 Mio., hat keinen Einfluss auf das Verhältnis beider CVaR – Größen zueinander, solange sich der Anteil eines Kredites am Gesamtexposure nicht verändert.¹⁴⁹

Aus Abbildung 16 ist ersichtlich, dass der Schnittpunkt beider Verteilungsfunktionen zwischen 99,5% und 99,6% liegt, was gem. Anhang 13 einem Portfolioverlust von rund EUR 5,6 Mio. bei einem Konfidenzniveau von 99,5265% entspricht.

In dem soeben verwendeten uniformen granularen Portfolio wollen wir den Schnittpunkt der Verteilungsfunktionen so bestimmen, dass er genau auf dem 99,9%igen Konfidenzniveau liegt, i. e. der Value at Risk bzw. Credit Value at Risk beider Modelle ist identisch.

¹⁴⁹ Wir würden beispielsweise bei einem Kreditvolumen von EUR 1 Mio. pro Schuldner einen analogen Verlauf der Verteilungsfunktion aus Abbildung 16 erhalten, mit dem Unterschied, dass der hier gezeigte Ausschnitt zwischen 99% und 100% sodann einem Portfolioverlust von EUR 400 Mio. und EUR 1 Mrd. entsprechen würde (die Abszisse wird mit dem Faktor 100 = Exposureveränderung multipliziert). Der Shape der Dichtefunktionen wäre ebenfalls identisch, wobei sich die Achsenbeschriftungen um den Faktor der Exposureveränderung ebenfalls erhöhen (Loss) bzw. reduzieren $f(\text{Loss})$ würde.

5.2.2.2 Bestimmung eines identischen Credit Value at Risk

Der zentrale Ausgangspunkt ist die uniforme Ausfallwahrscheinlichkeit im Portfolio. Wie erläutert determiniert sie alle weiteren Parameter des Portfolios bzw. der Kreditnehmer im IRB-Ansatz. Das vorzuhaltende ökonomische Kapital des im vorigen Abschnitt vorgestellten Portfolios ist in beiden Modellen für eine Probability of Default aller Kreditnehmer von $p_i = p = 0,184775\%$ identisch.

Zur Bestimmung des ökonomischen Kapitals verwenden wir die uniforme Ausfallwahrscheinlichkeit und berechnen, wie bereits in den vorausgegangenen Abschnitten erläutert, die benötigten Parameter für beide Modelle mit:¹⁵⁰

$$\begin{aligned} q_i &= q & 0,2294 \\ K_i &= K & 0,0303996 \\ \rho_{ik} \ (i \neq k) & & 0,0112 \end{aligned}$$

Die um ca. 80bp geringere PD im Vergleich zu 5.2.2.1 führt nach Formel (45) zu einem Anstieg der Assetkorrelation, reduziert jedoch gleichzeitig die aus Formel (37) abgeleitete paarweise identische Defaultkorrelation um mehr als 50%. Diese Größen lassen uns einen übereinstimmenden Value at Risk bzw. Credit Value at Risk für beide Modelle zu dem aufsichtsrechtlich geforderten Konfidenzniveau von $\alpha = 99,9\%$ i. H. v.

$$\text{CVaR}_{\text{Basel II}} = \text{CVaR}_{\text{LN}} = \text{EUR } 3.039.960,84$$

berechnen (vgl. auch Anhang 14). Diese Erkenntnis lädt ein, weitere Untersuchungen für das uniforme Portfolio anzustellen.

5.2.2.3 Veränderung der Portfoliogranelarität

Wie bereits erläutert hat eine Veränderung der EADs als nicht zufällige Größe im uniformen Portfolio keinen Einfluss auf das relative Verhältnis beider CVaRs, solange sich der Anteil des Schuldners am Gesamtexposure nicht verändert. Auch eine Veränderung des deterministischen LGDs im uniformen Portfolio hat keinen Einfluss auf die Verhältniszahl.¹⁵¹

Konzentrieren wir uns also zunächst auf die Granularität und reduzieren den Anteil eines Kredites am Gesamtexposure um den Faktor 10, was einem Anteil von 0,001% und

¹⁵⁰ Zur Bestimmung der einzelnen Größen wurde wie unter 5.2.1 bzw. 5.2.2.1 beschrieben vorgegangen.

¹⁵¹ EAD und LGD werden im IRB-Ansatz mit dem zentralen Term $N(\dots)$ multipliziert (vgl. Abbildung 10 bzw. Formel (44) und Formel (30)), so dass beide Größen zur Bestimmung des Credit Value at Risks linear verwendet werden und somit lediglich die Lage der Verlustverteilung bzw. Dichte beeinflussen, jedoch nicht deren Verlauf / Form als solche.

$n = 100.000$ entspricht (Gesamtvolumen EUR 1 Mrd.). Unter sonst gleichen Bedingungen (c. p.) wie 5.2.2.2 erhalten wir einen CVaR der logarithmischen Normalverteilung von ca. EUR 30,27 Mio. gegenüber einem CVaR des IRB-Ansatzes von ca. EUR 30,4 Mio.

Erstmalig in unserer Betrachtung übersteigt das aufsichtsrechtlich geforderte Kapital das zur vergleichenden Analyse herangezogene Modell. Selbst bei einer weiteren Erhöhung der Granularität (hypothetisches Portfolioexposure von EUR 1 Billion) erreichen wir keine weitere, deutliche Auswirkung auf das relative Verhältnis beider CVaRs, die über eine signifikante Abweichung beider Größen von 0,5% hinaus gehen würde.

Aus Kenntnis der Ergebnisse von 5.2.1 ist es nicht überraschend, dass, sobald wir die Portfoliogrannularität (c. p. 5.2.2.2) reduzieren, beispielsweise auf 100 Kreditnehmer der CVaR des Basler Akkords nur noch ca. 75% des ökonomischen Kapitals der logarithmischen Normalverteilung i. H. v. EUR 41.306,78 entspricht. Je weiter wir die Granularität reduzieren, desto größer wird das Delta beider Ansätze, wie in Tabelle 8 illustrativ aufgezeigt wird. Zur Berechnung der Tabelle wurden folgende uniforme Parameter verwendet:

EAD_i	EUR 10.000
$LGD_i = LGD$	0,6
$p_i = p$	0,184775%
$q_i = q$	0,2294
$K_i = K$	0,0303996
$\rho_{ik} (i \neq k)$	0,0112

n	n - Anteil in %	Portfolio- volumen	$CVaR_{LN}$ ca. in EUR	$CVaR_{Basel II}$ ca. in EUR	$\frac{CVaR_{LN}}{CVaR_{Basel II}}$
100.000.000	0,000001	1 Billion	30,26 Mrd.	30,4 Mrd.	0,9953
100.000	0,001	1 Mrd.	30,27 Mio.	30,4 Mio.	0,9958
10.000	0,01	100 Mio.	3,04 Mio.	3,04 Mio.	1
5.000	0,02	50 Mio.	1,53 Mio.	1,52 Mio.	1,0047
2.500	0,04	25 Mio.	0,77 Mio.	0,76 Mio.	1,0140
1.000	0,10	10 Mio.	316.490	304.000	1,0411
500	0,50	5 Mio.	164.793	152.000	1,0842
250	0,40	2,5 Mio.	88.411	76.000	1,1633
100	1,00	1 Mio.	41.307	30.400	1,3588
50	2,00	0,5 Mio.	24.288	15.200	1,5979
25	4,00	0,25 Mio.	14.557	7.600	1,9154
10	10,00	0,1 Mio.	7.340	3.040	2,4146

Tabelle 8: CVaR – Vergleiche in Abhängigkeit der Portfoliogrannularität

Offensichtlich ist die Portfoliogrularität mit $n = 10.000$ bereits weit fortgeschritten und bietet bei gleichbleibender Ausfallwahrscheinlichkeit nur noch begrenztes Potenzial in der logarithmischen Normalverteilung, das Risiko - und somit das vorzuhaltende ökonomische Kapital - weiter zu reduzieren. Solche Portfolios werden auch als asymptotische Portfolios bezeichnet, was gem. Abbildung 4 den Rückschluss zulässt, dass das unsystematische Risiko als weitestgehend wegdiversifiziert angenommen werden kann.¹⁵²

Eine hohe Portfoliokonzentration, hervorgerufen durch eine geringe Anzahl von Schuldern, müsste, wie bereits unter 2.2.9 erläutert, zur Steigerung des CVaRs beitragen. Für die Lognormalverteilung ist dies der Fall. Beispielsweise reduziert sich der CVaR bei einer Halbierung der Kreditnehmeranzahl von 100 auf 50 um weniger als die Hälfte, nachdem der unsystematische Teil der Risiken im Portfolio wieder zunimmt.

Der CVaR des IRB-Ansatzes hingegen verändert sich linear mit steigender / fallender Anzahl der Kreditnehmer. Dies ist zwar intuitiv einleuchtend, nachdem in Basel II, unabhängig der Kreditnehmeranzahl, der idiosynkratische Teil des Risikos unberücksichtigt bleibt, führt jedoch für konzentrierte Portfolios, wie beispielsweise unser 5 Kreditnehmerportfolio unter 5.2.1, zu einer Unterschätzung des Portfoliorisikos.

Im Rahmen der Schlussbetrachtung werden wir diesen Punkt erneut aufgreifen und wollen nun die Ausfallwahrscheinlichkeit als zentralen Einflussfaktor (u. a. auf die Korrelation) des Basler Ein-Faktor-Modells betrachten.

5.2.2.4 Veränderung der Ausfallwahrscheinlichkeit

Wir reduzieren die uniforme Ausfallwahrscheinlichkeit des granularen Portfolios bei einer Kreditnehmeranzahl von $n = 10.000$ auf $p = 0,05\%$. Diese Ausfallwahrscheinlichkeit entspricht gem. Tabelle 1 bzw. Anhang 1 einem Rating von „A+“ und kann somit als solides Investment grade Rating betrachtet werden.¹⁵³

Dies wird auch bei Betrachtung der nach Formel (45) berechneten uniformen Assetkorrelation deutlich, die mit $\rho = 0,2370$ bereits nahe am oberen Ende der Bandbreite (0,12 – 0,24 - vgl.

¹⁵² Die asymptotische Bezeichnung wird in diesem Zusammenhang als Kurve verstanden, die sich einer ins Unendliche verlaufenden Geraden beliebig nähert, ohne sie jedoch je zu erreichen. Vgl. Abb. 4; Chech, C. (2004), S. 13.

¹⁵³ “An obligor rated ‘A’ has strong capacity to meet its financial commitments but is somewhat more susceptible to the adverse effects of changes in circumstances and economic conditions than obligors in higher-rated categories ... the ratings from ‘AA’ to ‘CCC’ may be modified by the addition of a plus (+) or minus (-) sign to show relative standing within the major rating categories.” S&P (2008b).

auch Abb. 11) liegt. Die berechnete Ausfallkorrelation i. H. v. $\rho_{ik} = 0,0055$ ($i \neq k$) fällt aufgrund der geringen Ausfallwahrscheinlichkeit entsprechend niedrig aus.

Wir berechnen in Anhang 15 den Credit Value at Risk beider Modelle, wobei die deterministischen Größen EAD und LGD mit EUR 10.000 bzw. 0,6 unverändert bleiben und erhalten für $\text{CVaR}_{\text{Basel II}} = \text{EUR } 1.196.524,62$, und für

$$\text{CVaR}_{\text{LN}} = \text{EUR } 1.104.979,05.$$

Das nach der logarithmischen Normalverteilung vorzuhaltende ökonomische Kapital beträgt damit rund 92,35% des aufsichtsrechtlich geforderten Betrages.¹⁵⁴

Betrachten wir die beste Ratingkategorie mit einer Ausfallwahrscheinlichkeit nach Tabelle 1 von lediglich 0,01%, so steigt die uniforme Assetkorrelation ϱ mit 0,2394 auf den fast maximal möglichen Wert, wohingegen die Defaultkorrelation ρ_{ik} ($i \neq k$) mit 0,0021 aufgrund der geringen PD der Schuldner sehr niedrig ausfällt. Das ermittelte ökonomische Kapital unseres EUR 100 Mio. Kreditportfolios fällt für die logarithmische Normalverteilung um ca. EUR 44.400 gegenüber dem Basler Ansatz geringer aus. Wir erhalten als

$$\text{CVaR}_{\text{Basel II}} = \text{EUR } 335.589,00, \text{ und als}$$

$$\text{CVaR}_{\text{LN}} = \text{EUR } 291.164,61,$$

was einem CVaR - Verhältnis $\left(\frac{\text{CVaR}_{\text{LN}}}{\text{CVaR}_{\text{Basel II}}} \right)$ von 86,76% entspricht.

Unter 5.2.2.1 ermittelten wir bereits bei $n = 10.000$ für die durchschnittliche Ausfallwahrscheinlichkeit aller Ratingklassen i. H. v. 1,00% (vgl. Anhang 1) einen um ca. 1,15fachen bzw. ca. EUR 1,18 Mio. höheren CVaR der logarithmischen Normalverteilung im Verhältnis zum aufsichtsrechtlich geforderten Kapital nach Basel II.

Für eine Ausfallwahrscheinlichkeit von 2,50% (entspricht einem Rating von „B+“ aus Anhang 1) übersteigt der Lognormale CVaR den Basler CVaR um den Faktor von 1,23.

Daraus kann der Rückschluss gezogen werden, dass für Kredite mit einem erhöhten Ausfallrisiko nach Basel II ein geringeres ökonomisches Kapital vorgehalten werden muss, als dies der Fall wäre, wenn zur Berechnung des Credit Value at Risks die logarithmische Normalverteilung verwendet würde.

¹⁵⁴ Durch eine weitere Erhöhung der Kreditnehmeranzahl, z. B. auf 100.000, könnte der CVaR der logarithmischen Normalverteilung auf ca. 91,67% des Basler CVaRs reduziert werden.

Bevor wir die gewonnen Ergebnisse final zusammenfassen, wollen wir die beiden Modelle noch im Rahmen einer kurzen Fallstudie vergleichen. Hierzu erweitern wir unsere Betrachtung auf ein heterogenes Portfolio und führen fünf Kreditportfolios ein, die zusammen das Gesamtkreditportfolio eines Kreditinstitutes repräsentieren.

5.2.3 Fallstudie für ein heterogenes Kreditportfolio

Insgesamt verfügt unser Kreditinstitut über fünf Kreditportfolios, die in sich uniform sind und mit einer Kreditnehmeranzahl i. H. v. $n = 10.000$ eine entsprechend hohe Granularität aufweisen. Das Institut hat somit Forderungen gegenüber 50.000 Kreditnehmern.

Das Kreditportfolio der Bank mit einem Volumen von EUR 4,4 Mrd. teilt sich in folgende Subportfolios mit den uniformen, nachfolgend aufgeführten Parametern auf:

Subportfolio	n	EAD	PD	LGD	Anteil Subportfolio am Gesamtportfolio
1 Retail I	1 ... 10000	15.000	3,50%	0,8	3,41%
2 Retail II	10001 ... 20000	50.000	1,50%	0,75	11,36%
3 Revolvierende KMU	20001 ... 30000	100.000	0,75%	0,45	22,73%
4 Wohnungsbau	30001 ... 40000	125.000	0,15%	0,2	28,41%
5 Firmenkunden I	40001 ... 50000	150.000	0,10%	0,25	34,09%

Tabelle 9: Subportfolios eines Kreditinstituts

Weder ein Subportfolio noch ein einzelner Kreditnehmer verfügt bei dieser Zusammensetzung über einen bestimmten Anteil am Portfolio. Die Ausfallwahrscheinlichkeiten wurden entsprechend der Bonität der Schuldner festgelegt und der LGD wurde aus historischen Erfahrungswerten des Instituts abgeleitet.

Je nach Segment bzw. in Abhängigkeit der Ausfallwahrscheinlichkeit eines Kreditnehmers ermitteln wir die Assetkorrelation nach Basel II und erhalten eine für jedes Subportfolio einheitliche Assetkorrelation.

Retail I	$\rho = 0,05259$	andere Retailforderungen
Retail II	$\rho = 0,09141$	andere Retailforderungen
Revolvierende KMU	$\rho = 0,04$	KMU – Forderung / Revolvierende Kredite
Wohnungsbau	$\rho = 0,15$	Private Baufinanzierung
Firmenkunden I	$\rho = 0,23415$	Keine KMU-Forderung / ohne Kapitalerleichterung

Tabelle 10: Assetkorrelationen der Subportfolios ¹⁵⁵

Diese Informationen sind bereits ausreichend, um den aufsichtsrechtlichen Credit Value at Risk im IRB-Ansatz zu bestimmen. Er beträgt EUR 72.079.264,87.

Zur Ermittlung der korrespondierenden Größe im Modell der logarithmischen Normalverteilung werden die Defaultkorrelationen benötigt. Diese sind zwar innerhalb der Subportfolios paarweise identisch, jedoch weisen die Subportfolios zueinander unterschiedliche Korrelationen auf. Die Ermittlung des unerwarteten Portfolioverlustes ist somit nicht trivial, verdeutlicht aber umso mehr, dass es sich beim Akkord um ein einfaches, leicht anwendbares Modell handelt, nachdem Wechselwirkungen und Beziehungen zwischen den einzelnen Portfolien und Kreditnehmern völlig außen vor bleiben.

Über Formel (36) können die Korrelation zweier *multivariat standardnormalverteilter* Zufallsvariablen ermittelt werden, wodurch wir folgende Assetkorrelationsmatrix erhalten:

Assetkorrelationsmatrix	1	2	3	4	5
1	0,05259	0,06933	0,04587	0,08882	0,11097
2	0,06933	0,09141	0,06047	0,11709	0,14630
3	0,04587	0,06047	0,04000	0,07746	0,09678
4	0,08882	0,11709	0,07746	0,15000	0,18741
5	0,11097	0,14630	0,09678	0,18741	0,23415

Tabelle 11: Assetkorrelationsmatrix

Vorstehende Matrix wurde in Anhang 16 über Formel (37) in eine Defaultkorrelationsmatrix umgewandelt. Daraus leitet die sich ebenfalls in Anhang 16 dargestellte Kovarianzmatrix ab, die Ausgangspunkt zur Ermittlung des unerwarteten Verlustes nach Formel (12) bildet. Wir berechnen den unerwarteten Verlust des Portfolios i. H. v. ca. EUR 10,45 Mio. aus Formel (12) und verwenden diesen gemeinsam mit dem aus Formel (7) ermittelten erwarteten Verlust

¹⁵⁵ Für die ersten vier Subportfolios, i. e. Retail I, Retail II, KMU und Wohnungsbau wurden die Korrelationen aus Abschnitt 4.3.5.2 (Forderungen an Privatkunden) verwendet. Die uniforme Assetkorrelation des Subportfolios Firmenkunden I wurde über Formel (45) ermittelt.

des Portfolios i. H. v. EUR 13,95 Mio., um den Lage- bzw. Streuungsparameter μ bzw. σ^2 der Lognormalverteilung nach (24) bzw. (25) zu erhalten. Der erwartete Verlust fällt mit ca. EUR 3,5 Mio. um mehr als 30% höher aus als der unerwartete Verlust. Dies spiegelt sich auch in den Verteilungsparametern der Lognormalverteilung wieder, die mit $LN(16,2281; 0,4457)$ notiert werden.

Der über Formel (28) berechnete Credit Value at Risk der logarithmischen Normalverteilung beträgt EUR 73.912.383,59 und liegt somit lediglich um rund 2,5% (ca. EUR 1,83 Mio.) über der ermittelten Größe des ökonomischen Kapitals nach der IRB Formel.

Vergleichen wir hingegen die beiden CVaR – Größen ohne die vorgenommene Granularitätsannahme, indem wir nochmals unser Fünf-Kreditnehmer-Portfolio betrachten. Die Kreditengagements haben die gleiche Struktur wie die in Tabelle 9 vorgestellten Subportfolios. Jedoch steht bei diesem Vergleich ein Subportfolio nun für einen einzigen Kreditnehmer. Diese Betrachtungsweise führt zu einer um ca. 9,5fach höheren Kapitalanforderung der logarithmischen Normalverteilung gegenüber dem Basler Akkord.

Dieses Resultat ist auf Basis der bereits im Vorfeld gewonnen Ergebnisse nicht überraschend. Allerdings stoßen wir mit einer um fast 90% geringeren aufsichtsrechtlichen Kapitalanforderung in eine neue Dimension vor, und ziehen auf Basis der herausgearbeiteten Ergebnisse nun unser Resümee der vergleichenden Analyse.

6 Schlussbetrachtung

Im Kern basieren die Risikogewichte der IRB-Formel auf dem dargestellten rudimentären Ein-Faktor-Modell. Durch die vereinfachenden Modellannahmen werden die erforderlichen Eingangsparameter im Wesentlichen auf die Ausfallwahrscheinlichkeiten und die Assetkorrelation, d. h. die Kopplung der Schuldner an den systematischen Risikofaktor, reduziert, wobei es sich hierbei um standardisierte Vermögenswertänderungen handelt.

Die Assetkorrelation eines Schuldners wird jedoch ebenso wie die Restlaufzeitanpassung entweder vom Ausschuss sektorspezifisch vorgegeben, oder über Funktionen bestimmt, die als einzigen Inputparameter die Ausfallwahrscheinlichkeit des Kreditnehmers benötigen. Aus einer ursprünglichen zweiparametrischen Verteilung wurde dadurch eine einparametrische Verteilung erzeugt. Die erforderlichen Parameter des Modells werden somit auf die Ausfallwahrscheinlichkeiten der Kreditnehmer reduziert.¹⁵⁶

¹⁵⁶ Dhamotharan und Görg merken an, dass bei einer einheitlichen Assetkorrelation von 0,2 und einem 99,5%igen Konfidenzniveau für den zentralen Term $N(\dots)$ der Ausdruck $N(1.118 * N^{-1}(p) + 1,288)$ entsteht, der bereits im Konsultationspapier vom Januar 2001 i. R. von Benchmarkrisikogewichten zu finden war. Vgl. Dhamotharan, S. / Görg, A. (2003), S. 10; Basel Committee (2001), Tz. 174 und Tz. 508.

In vorliegender Arbeit wurde die aufsichtsrechtliche Formel zur Ermittlung des unterlegungspflichtigen ökonomischen Kapitals für Kreditrisiken mit der logarithmischen Normalverteilung verglichen. Die Lognormalverteilung wurde herangezogen, nachdem sie sich zur Risikomodellierung für granulare Portfolios in empirischen Untersuchungen der Ratingagentur Moody's als besonders geeignet herausstellte. Die Ergebnisse der vorliegenden Analyse bestätigen dies, nachdem zwischen den beiden Modellen teilweise, vor allem beim Vergleich von asymptotischen Kreditportfolios, sehr ähnliche Resultate erzielt wurden. Dennoch ergab sich ein differenziertes Bild bei der Betrachtung beider Ansätze.

Zum Vergleich der Modelle wurde ein uniformes Portfolio mit deterministischen EAD und LGD Vorgaben verwendet. Die Kreditnehmer wurden im Rahmen der Betrachtung dem Segment „Forderungen an Unternehmen, Staaten und Banken“ zugeordnet. Gleichzeitig wurde die Forderung, dass kein Einzelkredit über einen bestimmenden Anteil am Gesamtexposure verfügt, über eine Kreditnehmeranzahl von $n = 10.000$ erfüllt.

Dabei ergab sich für das untersuchte Portfolio eine uniforme Ausfallwahrscheinlichkeit i. H. v. $p = 0,184775\%$, die für beide Ansätze einen identischen Credit Value at Risk auf Basis des zugrunde gelegten Konfidenzniveaus von 99,9% liefert.

Für Unternehmen bzw. Kredite deren Probability of Default oberhalb dieses Wertes ($p > 0,184775\%$) liegt, i. e. Forderungen die von Banken und Ratingagenturen mit einem deutlich höheren Ausfallrisiko eingestuft werden, muss in Basel II weniger ökonomisches Kapital vorgehalten werden, als dies bei Anwendung der logarithmischen Normalverteilung der Fall wäre. Vice versa werden Kredite an Unternehmen mit einem guten Rating bzw. einer geringeren Ausfallwahrscheinlichkeit im Verhältnis zur logarithmischen Normalverteilung schlechter gestellt. Daraus resultiert im IRB-Ansatz eine höhere Kapitalanforderung für gute Risiken im Vergleich zum herangezogenen Modell.

Im Rahmen des Vergleiches blieb der derzeit zur Anwendung kommende Skalierungsfaktor auf die Summe der gewichteten Risikoaktiva aus dem Kreditgeschäft unberücksichtigt. Gemäß Aussagen des Ausschusses handelt es sich hierbei um eine temporäre Anpassung, um die Mindestkapitalanforderungen auf aggregierter Ebene in etwa gleich zu halten und den Banken gleichzeitig Anreize zu geben, die fortgeschritteneren risikosensitiven Ansätze zu verwenden. Der aktuelle Skalierungsfaktor beträgt 1,06 auf die RWA.

Unter Berücksichtigung dieser Anpassung für das verwendete granulare, uniforme Portfolio würde sich die einheitliche Ausfallwahrscheinlichkeit, die einen identischen

Credit Value at Risk zum geforderten Konfidenzniveau von 99,9% liefert, auf $p = 0,388589\%$ erhöhen.

Die Ausfallwahrscheinlichkeit des letzten Investment grade Ratings der S&P Ratingskala in Anhang 1 beträgt $p = 0,31\%$. Aktuell müssen Speculative grade Risiken im Basler Ansatz also mit weniger ökonomischem Eigenkapital unterlegt werden, als dies bei Anwendung der Lognormalverteilung für uniforme Portfolios erforderlich wäre.

Dieses Ergebnis soll jedoch nicht darüber hinwegtäuschen, dass Banken durch die Anwendung der IRB-Formel gegenüber dem alten Grundsatz I eine gerechtere Eigenkapitalunterlegung erzielen. Banken müssen im IRB-Ansatz für Kredite mit einer hohen Ausfallwahrscheinlichkeit mehr Kapital für den potenziellen Eintritt eines Default Events vorhalten als für Kredite mit einer niedrigen Ausfallwahrscheinlichkeit. Die an der Bonität des Kreditnehmers ausgerichtete Kapitalanforderung wird auch von der Ratingagentur bestätigt: „*All of Standard & Poor's default studies have found a clear correlation between credit quality and default remoteness: the higher the rating, the lower the probability of default, and vice versa ...*“ und weiter „*... over each time span, lower ratings correspond to higher default rates. This also holds true in every region worldwide.*“¹⁵⁷

Auch wenn Moody's keine Aussage darüber getroffen hat, inwieweit sich die logarithmische Normalverteilung zur Modellierung von konzentrierten Portfolios eignet, so konnte doch aufgezeigt werden, dass das unterlegungspflichtige Kapital für gering diversifizierte Portfolios im IRB-Ansatz teilweise deutlich unterhalb der korrespondierenden Größe der Lognormalverteilung liegt. Dies gilt sowohl für uniforme als auch heterogene Portfolios und resultiert aus der Annahme, dass das unsystematische Risiko in Basel II, unabhängig von der tatsächlichen Portfoliogranelarität, immer als vollständig eliminiert angenommen wird. Eine reine Betrachtung des systematischen Risikos in konzentrierten, i. e. nicht asymptotischen Portfolios führt jedoch zu einer Unterschätzung des Risikos. Gordy hat hierzu bereits 2003 angemerkt, dass „*capital charges calibrated to the asymptotic case, which assume that idiosyncratic risk is diversified away completely, must understate required capital for any given finite portfolio.*“¹⁵⁸

Basel II sah ursprünglich vor, das unsystematische Risiko mittels einer Granularitätsanpassung zu berücksichtigen. Konkret sollte es sich um einen „Granularity add-on“ handeln, der zum Eigenkapital, das für asymptotische Portfolios vorzuhalten wäre, hinzugeschlagen

¹⁵⁷ S&P (2008a), S. 10.

¹⁵⁸ Gordy, M. (2003), S. 201.

wird.¹⁵⁹ Dadurch sollte berücksichtigt werden, dass die Volatilität der Verluste eines Portfolios mit wenigen, dafür aber großen Krediten höher ist, als wenn es viele kleine Kredite enthält. Zur Umsetzung der neuen Vereinbarungen wurde jedoch letztlich darauf verzichtet.

2007 haben Gordy und Lütkebohmert einen Vorschlag publiziert, der eine Berücksichtigung von Konzentrationsrisiken im Portfolio ermöglicht. Die in dieser Arbeit vorgestellte Granularitätsanpassung könnte zum Beispiel im Rahmen des aufsichtsrechtlichen Überprüfungsverfahrens (Säule II) zur Anwendung kommen, nachdem sie gegenüber dem vom Basler Committee 2001 ursprünglich vorgesehen „Granularity add-on“ eine deutlich leichtere Anwendung verspricht.¹⁶⁰

Es bleibt festzuhalten, dass der IRB-Ansatz in seiner heutigen zur Anwendung kommenden Form den Kreditinstituten mit der eigenen Schätzung der Ausfallwahrscheinlichkeiten von Schuldnern die eigenständige Bestimmung des zentralen (und effektiv einzigen) Risikofaktors innerhalb des Basler Ein-Faktor-Modells gestattet. Unbestreitbar ist Basel II ein Schritt zur gerechteren Eigenkapitalunterlegung gegenüber dem Akkord aus dem Jahre 1988. Jedoch wurde in der vorliegenden Arbeit herausgestellt, dass weiteres Optimierungspotenzial für die seit Ende 2006 geltende Richtlinie vorhanden ist.

Mit Blick auf den ungeheuren Aufwand, den Basel II in finanzieller und ressourcentechnischer Sicht sowohl auf regulatorischer Seite, wie auch auf Bankenseite erzeugt hat, dürfte mit einer Weiterentwicklung des Ansatzes in naher Zukunft jedoch nicht zu rechnen sein. Umso mehr sind Vorstöße wie derer von Gordy und Lütkebohmert zu unterstützen, nachdem sie zu einer gerechteren Unterlegung und Bepreisung von Risiken beitragen. Eine risikogerechte Bepreisung von Risiken ist wiederum Voraussetzung, um die Stabilität des Finanzsystems zu gewährleisten, wie auch aktuelle Diskussionen um die „richtige Bepreisung“ von Subprime – Krediten zu verdeutlichen.

¹⁵⁹ „Die ... Risikogewichte sind für Banken mit Portfolien von „typischer“ Granularität kalibriert. Mit der Granularitätsanpassung soll der Tatsache Rechnung getragen werden, dass eine Bank mit Portfolien grober Granularität, die einen großen Anteil an nichtdiversifiziertem Residualrisiko beinhalten (d. h. Einzelkreditnehmer-Risikokonzentrationen), zusätzliches Kapital haben sollte. Gleichzeitig sollten an eine Bank, deren Portfolien durch eine Granularität charakterisiert sind, die feiner als der Durchschnitt ist, geringere als die durchschnittlichen Kapitalanforderungen gestellt werden.“ Basel Committee (2001), Tz. 503.

¹⁶⁰ Vgl. Gordy, M. / Lütkebohmert, E. (2007).

Anhangverzeichnis

Anhang	1: Durchschnittliche Ausfallraten von 1981 – 2007 in Prozent.....	76
Anhang	2: Durchschnittliche Ratingklassenmigration von 1981 – 2007 in Prozent	77
Anhang	3: Insolvenzzzeitreihen in Deutschland.....	78
Anhang	4: Diversifikationseffekt in Abhängigkeit von der Wertpapieranzahl n	79
Anhang	5: Bedeutung der Normalverteilung – Zentraler Grenzwertsatz.....	80
Anhang	6: Exkursion zu Asset-Value-Modellen.....	81
Anhang	7: Varianz im Grenzfall unendlich feiner Granularität.....	84
Anhang	8: Dichtefunktion der Grenzverteilung des uniformen Portfolios im Ein-Faktor-Modell für verschiedene Werte der Ausfallwahrscheinlichkeit p und der Assetkorrelation ρ	85
Anhang	9a: Restlaufzeitanpassung in Abhängigkeit der Ausfallwahrscheinlichkeit im IRB-Ansatz.....	87
Anhang	9b: Zusammenhang zwischen Assetkorrelation und PD im Segment Forderungen an Privatkunden.....	87
Anhang	10: CVaR – Berechnung im uniformen 5 Kreditnehmerportfolio.....	88
Anhang	11: Verteilungsfunktion im uniformen 5 Kreditnehmerportfolios bis zum Expected Loss	89
Anhang	12: Dichte- und Verteilungswerte beider Modelle im uniformen 5 Kreditnehmerportfolio im Bereich eines Portfolioverlustes zwischen EUR 30.000 und EUR 1,2 Mio.	90
Anhang	13: Dichte- und Verteilungswerte beider Modelle im uniformen granularen Portfolio im Bereich eines Portfolioverlust zwischen EUR 60.000 und EUR 10,02 Mio.	92
Anhang	14: Bestimmung eines identischen CVaR im granularen Portfolio.....	93
Anhang	15: CVaR – Bestimmung für $p = 0,05\%$ im granularen Portfolio.....	94
Anhang	16: Matrizen zum heterogenen Gesamtbankportfolio.....	95

Anhang1: Durchschnittliche Ausfallraten von 1981 – 2007 in Prozent

Cumulative Average Default Rates By Rating Modifier, 1981 - 2007 (%)

Rating	—Time horizon (years)—														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
AAA	0.00	0.00	0.09	0.18	0.28	0.41	0.48	0.59	0.63	0.67	0.67	0.67	0.67	0.73	0.79
AA+	0.00	0.06	0.06	0.13	0.20	0.28	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35	0.35
AA	0.00	0.00	0.00	0.09	0.18	0.25	0.35	0.48	0.60	0.72	0.81	0.88	1.03	1.10	1.14
AA-	0.02	0.09	0.20	0.32	0.45	0.61	0.76	0.86	0.96	1.08	1.21	1.35	1.41	1.53	1.60
A+	0.05	0.10	0.25	0.45	0.61	0.77	0.95	1.10	1.29	1.46	1.66	1.88	2.08	2.31	2.51
A	0.07	0.18	0.30	0.42	0.60	0.80	1.00	1.21	1.42	1.73	1.98	2.12	2.26	2.35	2.61
A-	0.06	0.20	0.32	0.49	0.73	1.02	1.44	1.71	1.95	2.12	2.19	2.32	2.42	2.53	2.65
BBB+	0.15	0.46	0.91	1.30	1.74	2.22	2.58	2.91	3.36	3.71	4.07	4.27	4.62	5.14	5.72
BBB	0.23	0.54	0.85	1.39	1.95	2.47	2.95	3.48	3.93	4.44	5.00	5.44	5.93	6.12	6.50
BBB-	0.31	1.02	1.78	2.78	3.74	4.60	5.25	5.87	6.33	6.91	7.42	7.94	8.54	9.37	10.03
BB+	0.52	1.41	2.85	4.20	5.41	6.71	7.88	8.41	9.36	10.21	10.82	11.41	11.85	12.35	13.07
BB	0.81	2.50	4.62	6.53	8.38	10.13	11.52	12.79	13.82	14.62	15.71	16.63	17.10	17.19	17.28
BB-	1.44	4.16	7.04	9.90	12.32	14.66	16.52	18.35	19.87	21.03	21.93	22.62	23.51	24.22	24.87
B+	2.53	6.97	11.22	14.92	17.65	19.74	21.64	23.29	24.70	26.11	27.32	28.29	29.29	30.31	31.19
B	6.27	12.74	17.75	21.27	23.84	26.03	27.44	28.52	29.43	30.43	31.40	32.36	33.42	34.20	35.04
B-	9.06	16.94	22.75	26.66	29.44	31.56	33.38	34.53	35.25	35.73	36.26	36.64	36.84	37.07	37.32
CCC/C	25.59	34.06	39.04	41.86	44.50	45.62	46.67	47.25	48.86	49.76	50.50	51.26	51.87	52.50	52.50
Investment grade	0.10	0.30	0.52	0.81	1.11	1.42	1.69	1.95	2.19	2.44	2.66	2.85	3.05	3.24	3.47
Speculative grade	2.81	6.54	10.00	12.92	15.23	17.23	18.87	20.25	21.46	22.54	23.52	24.34	25.12	25.79	26.43
All rated	0.98	2.30	3.53	4.62	5.52	6.32	6.98	7.56	8.06	8.53	8.96	9.31	9.66	9.98	10.32

Sources: Standard & Poor's Global Fixed Income Research and Standard & Poor's CreditPro®.

Anhang 2: Durchschnittliche Ratingklassenmigration von 1981 – 2007 in Prozent

Einjährige Wanderungswahrscheinlichkeit

From/to	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C	D	NR
AAA	88.53	7.70	0.46	0.09	0.09	0.00	0.00	0.00	3.15
AA	0.60	87.50	7.33	0.54	0.06	0.10	0.02	0.01	3.84
A	0.04	2.07	87.21	5.36	0.39	0.16	0.03	0.06	4.67
BBB	0.01	0.17	3.96	84.13	4.03	0.72	0.16	0.23	6.61
BB	0.02	0.05	0.21	5.32	75.62	7.15	0.78	1.00	9.84
B	0.00	0.05	0.16	0.28	5.92	73.00	3.96	4.57	12.05
CCC/C	0.00	0.00	0.24	0.36	1.02	11.74	47.38	25.59	13.67

Dreijährige Wanderungswahrscheinlichkeit

From/to	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C	D	NR
AAA	68.78	18.76	2.50	0.39	0.12	0.03	0.03	0.09	9.29
AA	1.40	66.79	17.65	2.31	0.39	0.24	0.02	0.09	10.93
A	0.09	4.78	67.15	12.03	1.51	0.61	0.11	0.31	13.42
BBB	0.04	0.49	9.36	60.57	7.79	2.26	0.40	1.21	17.87
BB	0.02	0.09	0.78	11.42	43.73	11.90	1.42	5.48	25.16
B	0.01	0.06	0.42	1.35	11.44	37.38	4.31	15.91	29.12
CCC/C	0.00	0.00	0.35	1.04	2.36	15.32	13.31	40.61	27.03

Fünfstährige Wanderungswahrscheinlichkeit

From/to	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C	D	NR
AAA	53.95	23.71	4.93	1.02	0.13	0.13	0.03	0.29	15.81
AA	1.73	51.60	23.56	4.18	0.63	0.37	0.04	0.31	17.57
A	0.11	5.83	53.09	15.41	2.52	0.99	0.18	0.70	21.16
BBB	0.05	0.81	10.70	46.72	8.56	3.02	0.48	2.75	26.90
BB	0.02	0.14	1.56	12.16	27.76	11.09	1.58	10.64	35.05
B	0.03	0.06	0.54	2.08	10.53	20.51	2.84	24.53	38.88
CCC/C	0.00	0.00	0.25	1.10	3.39	10.17	3.73	50.17	31.19

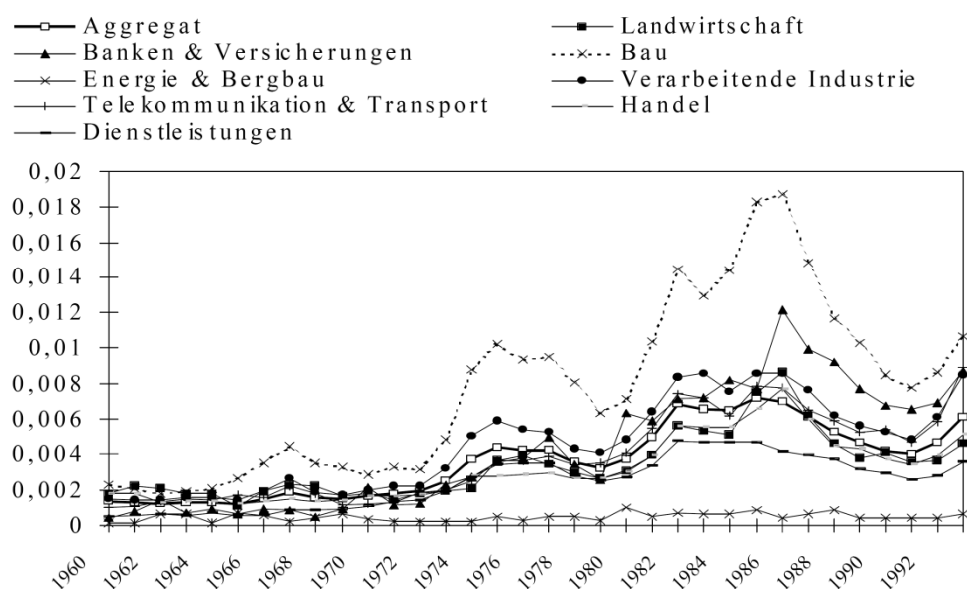
Siebenjährige Wanderungswahrscheinlichkeit

From/to	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC/C	D	NR
AAA	43.06	26.32	7.10	1.91	0.21	0.07	0.07	0.52	20.75
AA	1.83	40.58	26.50	5.55	0.86	0.32	0.02	0.57	23.77
A	0.13	6.02	43.33	16.65	3.19	1.15	0.17	1.26	28.10
BBB	0.07	1.12	11.03	37.39	8.13	2.94	0.43	4.21	34.68
BB	0.00	0.14	1.99	12.24	18.56	9.23	1.04	15.38	41.42
B	0.01	0.05	0.75	2.47	8.22	12.17	1.80	29.90	44.63
CCC/C	0.00	0.00	0.35	1.53	3.42	6.14	2.01	51.95	34.59

Quelle: Standard&Poor's Global Fixed Income Research and Standard&Poor's CreditPro®

Anhang 3: Insolvenzzeitreihen in Deutschland

DURCHSCHNITTliche INDUSTRIESPEZIFISCHE AUSFALLRATEN IN DEUTSCHLAND



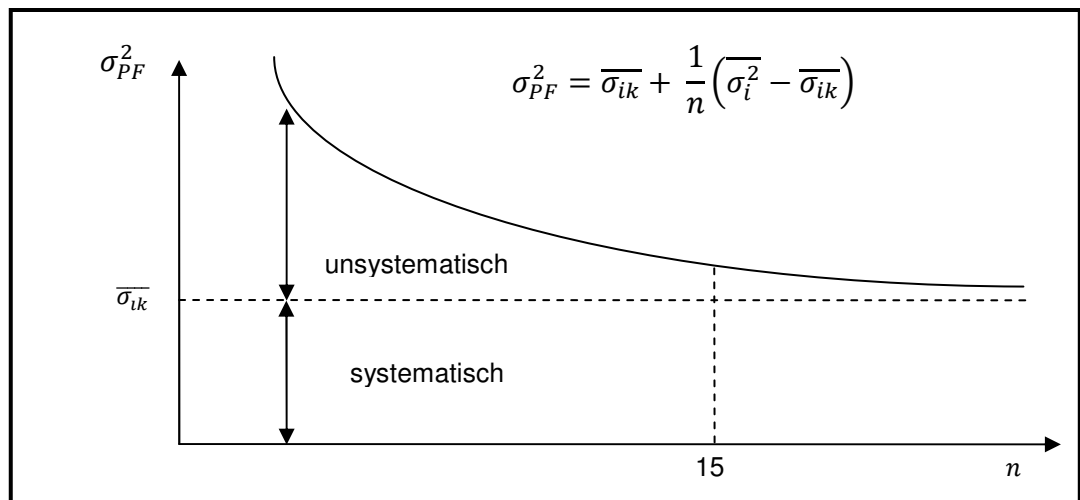
Quelle: Statistisches Bundesamt

Anhang 4: Diversifikationseffekt in Abhängigkeit von der Wertpapieranzahl n

Zur Illustration des Diversifikationseffekts in Abhängigkeit von der Wertpapieranzahl wähle man vereinfachend alle Gewichte gleich $\omega_i = \frac{1}{n}$ und ersetze alle Varianzen σ_i^2 durch ihr arithmetisches Mittel $\overline{\sigma_i^2}$ sowie alle Kovarianzen $\sigma_{ik} (i \neq k)$ durch ihr arithmetisches Mittel $\overline{\sigma_{ik}}$. Für die Portfoliovarianz σ_{PF}^2 ergibt sich damit:

$$\begin{aligned}
 \sigma_{PF}^2 &= \sum_{i=1}^n \omega_i^2 \sigma_i^2 + 2 * \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \omega_i \omega_k \sigma_{ik} \\
 &= \underbrace{\sum_{i=1}^n \frac{1}{n^2} \overline{\sigma_i^2}}_{n \text{ Summanden}} + 2 * \underbrace{\sum_{i=1}^n \sum_{k=1+i}^n \frac{1}{n} \frac{1}{n} \overline{\sigma_{ik}}}_{\frac{n^2-n}{2} \text{ Summanden}} \\
 &= n \left[\frac{1}{n^2} \overline{\sigma_i^2} \right] + (n^2 - n) \left[\frac{1}{n^2} \overline{\sigma_{ik}} \right] \\
 \sigma_{PF}^2 &= \overline{\sigma_{ik}} + \frac{1}{n} (\overline{\sigma_i^2} - \overline{\sigma_{ik}})
 \end{aligned}$$

Für große n ist die Portfoliovarianz σ_{PF}^2 im Wesentlichen durch die durchschnittliche Kovarianz $\overline{\sigma_{ik}}$ gegeben



In Anlehnung an Garz, H. / Günther, S. / Moriabadi, C. (2002), S. 37 – 41.

Anhang 5: Bedeutung der Normalverteilung – Zentraler Grenzwertsatz

Der zentrale Grenzwertsatz liefert die mathematische Rechtfertigung, dass eine normalverteilte Zufallsvariable eine Größe angemessen beschreiben kann, die sich additiv aus vielen kleinen und zufälligen Beiträgen, die sich gegenseitig nicht beeinflussen, zusammensetzt.

Eine große Anzahl ($n \rightarrow \infty$) von unabhängigen Zufallsvariablen $X_1, \dots, X_n$, hat aufgrund ihrer identischen (nicht notwendig normalverteilten) Verteilung den Erwartungswert $\mathbb{E}(X_i) = \mu$ und die Varianz $\mathbb{V}(X_i) = \sigma^2$.

Für $n \rightarrow \infty$ konvergiert die Verteilungsfunktion $F_n(z) = \mathbb{P}(Z_n \leq z)$ der standardisierten Summe

$$Z_n = \frac{X_1 + \dots + X_n - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{X_i - \mu}{\sigma}$$

an jeder Stelle $z \in \mathbb{R}$ gegen die Verteilungsfunktion $N(z)$ der Standardnormalverteilung.

$F_n(z) = N(z)$; i. e. $Z_n \stackrel{a}{\sim} N(0,1)$.

Die Schreibweise $\stackrel{a}{\sim}$ steht für *approximativ* (nährungsweise für große n) bzw. *asymptotisch* (für $n \rightarrow \infty$) verteilt. Die standardisierten Summen unabhängiger und identisch verteilter Zufallsvariablen können also als nährungsweise normalverteilt betrachtet werden.

Anmerkung: Dies gilt auch, wenn die Zufallsvariablen nicht identisch verteilt sind, aber keine einzelne Zufallsvariable einen (im mathematischen näher zu präzisierenden Sinne) bestimmenden Einfluss auf die Summe hat.

Aus der Kenntnis, dass der Erwartungswert der Summe von zwei oder mehr Zufallsvariablen gleich der Summe der Erwartungswerte ist, $\mathbb{E}(X_1 + \dots + X_n) = \mathbb{E}(X_1) + \dots + \mathbb{E}(X_n)$, sowie der Tatsache, dass für stochastisch unabhängige Zufallsvariablen X_1 und X_2 die Varianz der Summe der beiden Zufallsvariablen gleich der Summe der Varianzen ist, $\mathbb{V}(X_1 + X_2) = \mathbb{V}(X_1) + \mathbb{V}(X_2)$, lassen sich der Erwartungswert und die Varianz der Zufallsvariablen $Y_n = X_1 + \dots + X_n$ bestimmen:

$$\mathbb{E}(Y_n) = n\mu$$

$$\mathbb{V}(Y_n) = n\sigma^2$$

Dadurch wird deutlich, dass Z_n die standardisierte Version von Y_n ist.

Quelle: Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 130 f.

Anhang 6: Exkursion zu Asset-Value-Modellen

Ursprünglich gehen alle Varianten von Asset-Value-Modellen auf Black/Scholes (1973) und Merton (1974) zurück. In diesen Ansätzen folgt das Underlying des Unternehmenswertes (die Aktiva / Assets) dem stochastischen Prozess

$$dV_A = \mu_A V_A dt + \sigma_A V_A dz$$

mit:

V_A, dV_A als Unternehmenswert und der Veränderung der Aktiva / Assets,
 μ_A, σ_A als erwartete Rendite und Volatilität der Unternehmensaktiva,
 dz als Wiener Prozess / Brownsche Bewegung.

Der Unternehmenswert setzt sich zusammen aus Eigen- und Fremdkapital, wobei das Black/Scholes-Modell lediglich eine Ausprägung für Fremdkapital und eine Ausprägung für Eigenkapital zulässt.

Ist X der Buchwert der Verbindlichkeiten mit Fälligkeit im Zeitpunkt T , dann lassen sich die Marktwerte des Eigenkapitals und der Assets in folgende Beziehung zueinander setzen:

$$V_E = V_A N(d1) - e^{-rT} X N(d2)$$

mit:

V_E als Marktwert des Eigenkapitals,

$$d1 = \frac{\ln\left(\frac{V_A}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma_A^2}{2}\right)T}{\sigma_A \sqrt{T}},$$

$$d2 = d1 - \sigma_A \sqrt{T}, \text{ und}$$

r als risikofreiem Zins.

(Anmerkung: Dies entspricht der Formel zur Bewertung einer Call Option nach Black/Scholes, die als Grundlage die geometrische Brownsche Bewegung verwenden.)

Die Eigenkapital- und Assetvolatilität lassen sich wie folgt in Beziehung setzen:

$$\sigma_E = \frac{V_A}{V_E} \Delta \sigma_A$$

Die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Unternehmens entspricht danach der Wahrscheinlichkeit, dass der Wert der Assets eines Unternehmens weniger als der Buchwert Verbindlichkeiten beträgt. Der Vermögenswertprozess $(V_A^t)_{t \geq 0}$ des Unternehmens wird dabei am Zeithorizont T betrachtet (= fester Evaluierungshorizont). Wir erhalten somit:

$$p_T = \mathbb{P}[V_A^T \leq X_T | V_A^0 = V_A] = \mathbb{P}[\ln V_A^T \leq \ln X_T | V_A^0 = V_A]$$

mit:

- p_T als Wahrscheinlichkeit für den Ausfall im Zeitpunkt T ,
- V_A^T als Marktwert der Firmenassets zum Zeitpunkt T , und
- X_T als Buchwert der Verbindlichkeiten im Zeitpunkt T .

Die Veränderung der Assetwerte ist durch den stochastischen Prozess zu Beginn der Exkursion beschrieben. Demnach ergibt sich der Assetwert V_A^T zum Zeitpunkt T , für den Wert V_A im Zeitpunkt 0, mit:

$$\ln V_A^T = \ln V_A + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) T + \sigma_A \sqrt{T} \varepsilon$$

wobei μ die erwartete Unternehmenswertrendite, und ε den zufälligen, unabhängigen Teil der Unternehmensrendite widerspiegelt.

Vorstehende Gleichung beschreibt die Entwicklung der Vermögenswertprozesse, wie sie in Abbildung 9 graphisch dargestellt werden. Da die Vermögenswerte mittels geometrisch Brownscher Bewegung simuliert werden, sind die Log-Vermögenswertrenditen normalverteilt. Die Gauß'sche Glockenkurve ist daher die Verteilung, die wir vertikal über dem Evaluierungshorizont T erwarten – vgl. Abbildung 9.

Wir können nun die Ausfallwahrscheinlichkeit eines Unternehmens angeben als:

$$p_T = \mathbb{P} \left[\ln V_A^T + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) T + \sigma_A \sqrt{T} \varepsilon \leq \ln X_T \right]$$

Durch Umformung erhalten wir:

$$p_T = \mathbb{P} \left[- \frac{\ln \frac{V_A^T}{X_T} + \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) T}{\sigma_A \sqrt{T}} \geq \varepsilon \right] = \mathbb{P}[\varepsilon \leq c_T]$$

wobei c_T als Cut-off-Wert, im Sinne eine kritische Schranke im Zeitpunkt T zu verstehen ist:

$$c_T = \frac{\ln \frac{X_T}{V_A^T} - \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) T}{\sigma_A \sqrt{T}} \quad \left. \vphantom{\frac{\ln \frac{X_T}{V_A^T} - \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) T}{\sigma_A \sqrt{T}}} \right\} \begin{array}{l} \text{Im Englischen wird die Schranke als auch als „Distance to} \\ \text{Default“ bezeichnet. Sie ist als der, in Standardabweichungen} \\ \text{des Assetwertes gemessene Abstand des Firmenwertes, bis zum} \\ \text{Ausfallzeitpunkt, zu verstehen.} \end{array}$$

Aus der Kenntnis, dass es sich im Black/Scholes-Modell bei ε um eine Zufallsvariable handelt, die Standardnormalverteilt ist, $\varepsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$, können wir die Ausfallwahrscheinlichkeit auch angeben als:

$$p_T = N \left[\frac{\ln \frac{X_T}{V_A^T} - \left(\mu - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) T}{\sigma_A \sqrt{T}} \right]$$

Dabei bezeichnet p_T die kumulative Ausfallwahrscheinlichkeit für das Zeitintervall $[0,T]$ und wir können in der Folge den Cut-off-Wert durch Anwendung der Inversen der Standardnormalverteilungsfunktion berechnen als:

$$c_T = N^{-1}[p_T]$$

Quellen: Black, F. / Scholes, M. (1973); Merton, R. (1974); Bluhm, C. / Overbeck, L. / Wagner, C. (2003), S. 123 – 149; Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), S. 146 – 150 und S. 200 – 203; Bohn, J. / Crosbie, P. (2003), S. 16 – 18.

Anhang 7: Varianz im Grenzfall unendlich feiner Granularität

Bei einer Realisierung y des systematischen Risikofaktors Y sind die bedingten Vermögenswertänderungen $Z_i|_{Y=y}$ für Gewichte $\sqrt{\varrho_i} < 1$ normalverteilt

$$Z_i|_{Y=y} = \sqrt{\varrho_i}y + \sqrt{1 - \varrho_i}\varepsilon_i \sim N(\sqrt{\varrho_i}y, 1 - \varrho_i)$$

mit Erwartungswert $\sqrt{\varrho_i}y$ und Varianz $1 - \varrho_i$. Die bedingte Ausfallwahrscheinlichkeit $p_i|_{Y=y}$ beträgt:

$$p_i|_{Y=y} = \mathbb{P}(1_{D_i}|_{Y=y} = 1) = \mathbb{P}(Z_i|_{Y=y} < c_i) = N\left(\frac{c_i - \sqrt{\varrho_i}y}{\sqrt{1 - \varrho_i}}\right), \text{ mit } c_i = N^{-1}(p_i)$$

Für den unter $Y = y$ bedingten Portfolioverlust $L|_{Y=y}$

$$L|_{Y=y} = \sum_{i=1}^n EAD_i * LGD_i * 1_{D_i}|_{Y=y}$$

berechnet man den Erwartungswert

$$\mathbb{E}(L|_{Y=y}) = \sum_{i=1}^n EAD_i * LGD_i * p_i|_{Y=y}$$

und die Varianz

$$\mathbb{V}(L|_{Y=y}) = \sum_{i=1}^n (EAD_i * LGD_i)^2 * p_i|_{Y=y} * (1 - p_i|_{Y=y})$$

Da diese Varianz im Grenzfall unendlich feiner Granularität beliebig klein wird, kann wie folgt skizziert werden: Unterstellt man, dass E eine obere Schranke für die Summe aller ausstehenden Forderungen $\sum EAD_i$ darstellt, und außerdem mit $EAD_i < k \frac{E}{n}$ beliebig, aber fest gewähltem k gilt, erhält man

$$\mathbb{V}(L|_{Y=y}) \leq n * \left(k \frac{E}{n}\right)^2 * \frac{1}{4} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{V}(L|_{Y=y}) = 0$$

was die folgende Interpretation zulässt: Besitzt kein Einzelexposure einen bestimmenden Anteil am Gesamtrisiko, kann die durch die idiosynkratischen Risikofaktoren induzierte unsystematische Streuung der bedingten Portfolioverluste um ihren Erwartungswert bei hinreichender Portfoliogröße vernachlässigt werden. Unter diesen Annahmen setzt man den Portfolioverlust daher als Funktion $L(y)$ der Realisierung y des systematischen Risikofaktors an:

$$L(y) = \mathbb{E}(L|_{Y=y}) = \sum_{i=1}^n EAD_i * LGD_i * N\left(\frac{N^{-1}(p) - \sqrt{\varrho}y}{\sqrt{1 - \varrho}}\right)$$

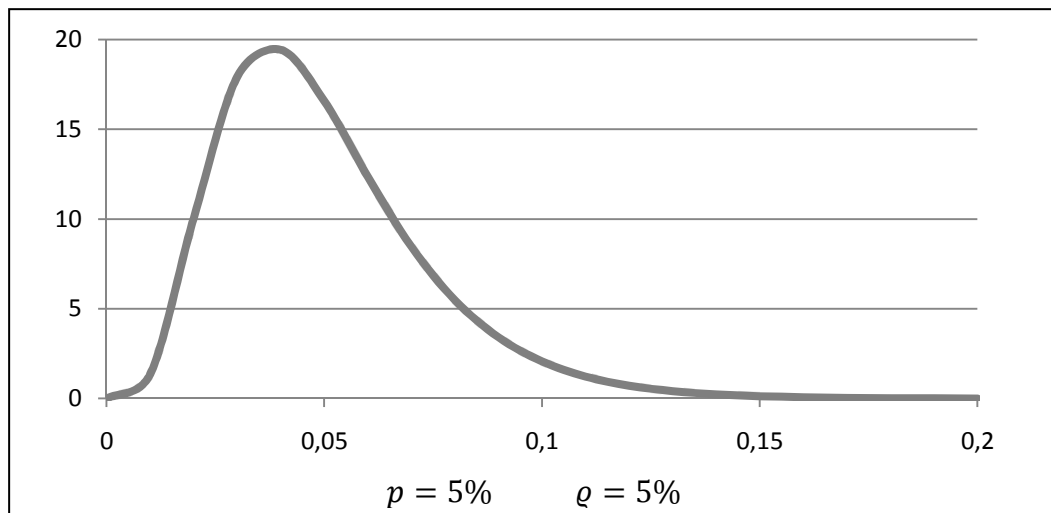
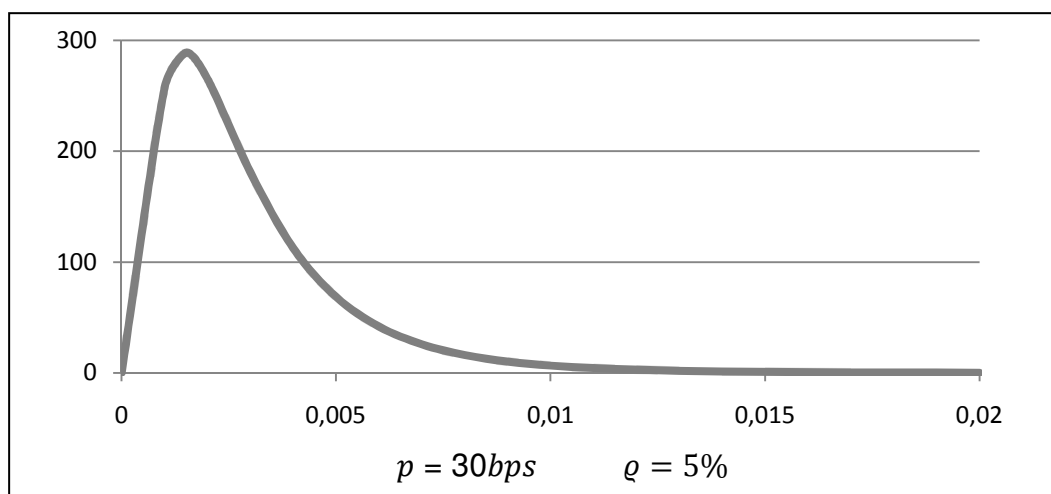
Quelle: Dhamotharan, S. / Görg, A. (2003), S. 6 – 8.

Anhang 8: Dichtefunktion der Grenzverteilung des uniformen Portfolios im Ein-Faktor-Modell für verschiedene Werte der Ausfallwahrscheinlichkeit p und der Assetkorrelation ϱ

Nachfolgende vier Abbildungen wurden über die Dichtefunktion

$$f_{p,\varrho}(x) = \sqrt{\frac{1-\varrho}{\varrho}} \exp\left(\frac{(N^{-1}(x))^2}{2} - \frac{(N^{-1}(p) - N^{-1}(x)\sqrt{1-\varrho})^2}{2\varrho}\right)$$

berechnet. Der deterministische LGD des Portfolios wurde mit 1 festgelegt.
(Anmerkung: die Abszissen der einzelnen Dichten sind unterschiedlich skaliert.)

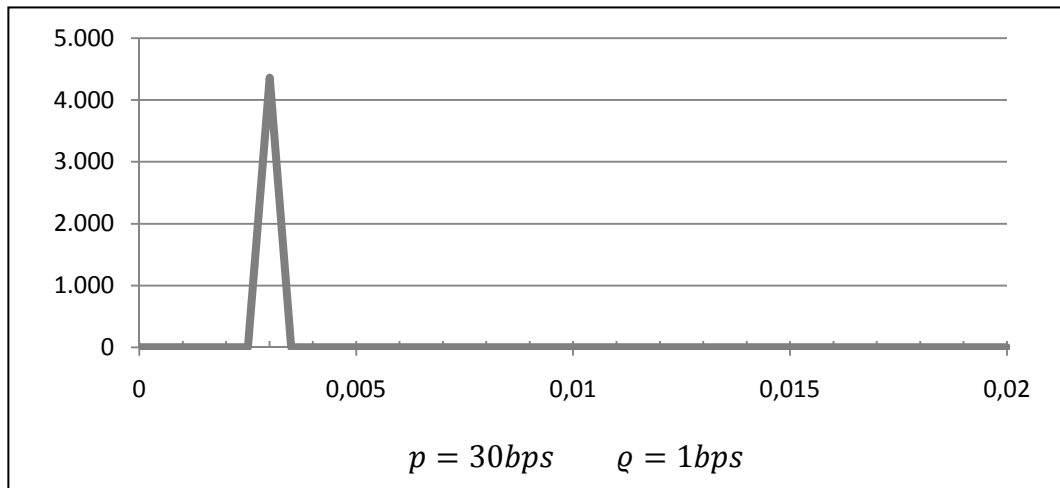


Die Dichte $f_{p,\varrho}$ lässt über die Parameter p und ϱ vier extreme Ausprägungen zu:

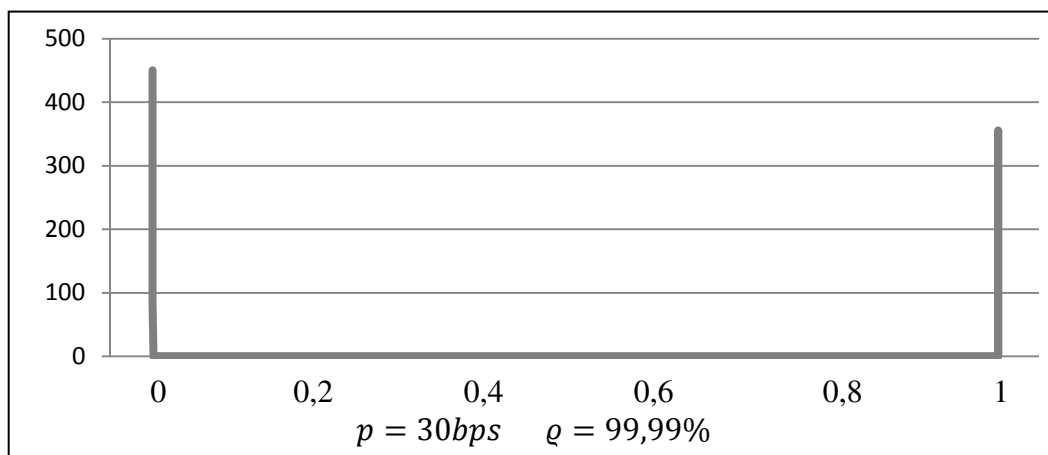
$p = 0$: Es wird mit ziemlicher Sicherheit keine Ausfälle geben, $P(1_D = 0) = 1$.

$p = 1$: Mit ziemlicher Sicherheit werden alle Kredite ausfallen, $P(1_D = 1) = 1$.

$\rho = 0$: Für den unkorrelierten Fall der Indikatorenvariablen $1_{D_i} = 1_{\{Z_i = \varepsilon_i < N^{-1}(p_i)\}} \sim B(1, p)$ ist der Portfolioverlust $\sum_{i=1}^n 1_{D_i}$ Binomialverteilt $\sim B(n, p)$ und die Verlustquote des Portfolios konvergiert fast sicher, d. h. mit einer Wahrscheinlichkeit von 1, für $n \rightarrow \infty$ gegen p . Die Dichte $f_{p,0}$ ist in p konzentriert, was sich in nachfolgender Grafik durch die verschwindend geringe Korrelation von $\rho = 1bps$ im Peak für $p = 30bps$ widerspiegelt.

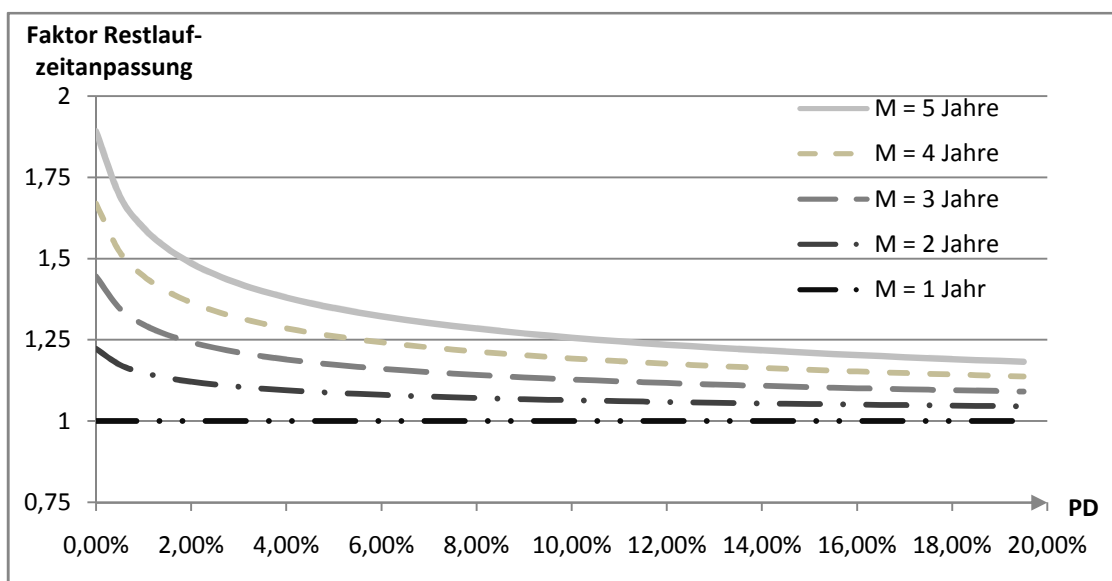


$\rho = 1$: Bei vollständiger Korrelation ist die Verlustquote des Portfolios nicht länger abhängig von der Portfoliogröße n , denn die Grenzverteilung für $n \rightarrow \infty$ ist, wie die einzelnen Schuldner Bernoulli verteilt $B(1, p)$, mit $P(1_D = 1) = p$ und $P(1_D = 0) = 1 - p$. Dies gibt nachfolgende Abbildung mit einer Korrelation von $\rho = 99,99\%$ wieder. Sie zeigt eine Konzentration der Verteilung in zwei Punkten, was bei einem LGD von 1 gleichzusetzen ist mit einem Verlust i. H. v. „Alles oder Nichts“.

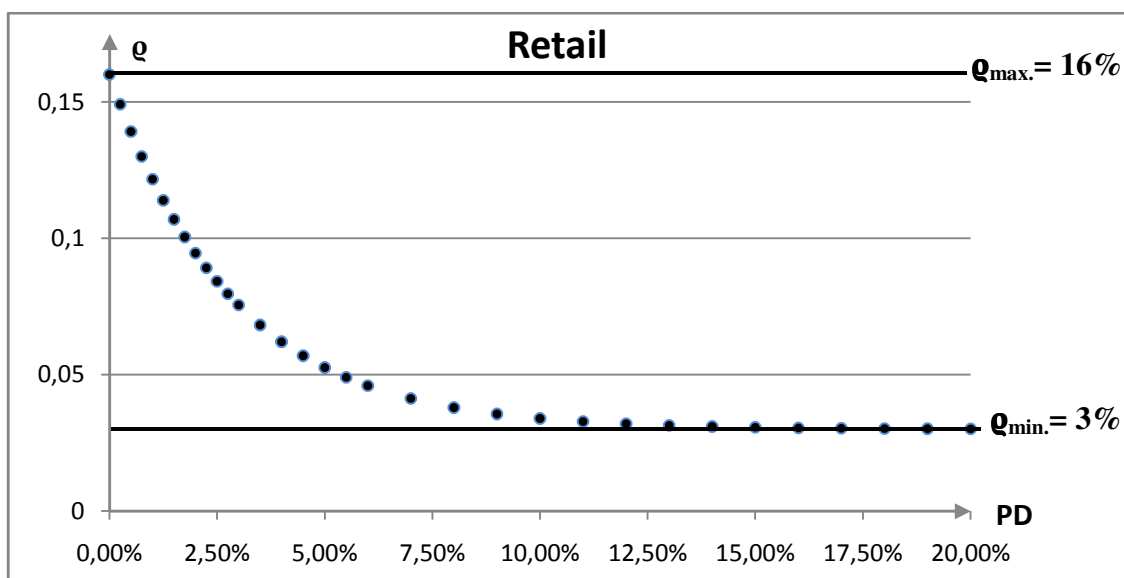


Quelle: Bluhm, C. / Overbeck, L. / Wagner, C. (2002), S. 90 – 93.

Anhang 9a: Restlaufzeitanpassung in Abhängigkeit der Ausfallwahrscheinlichkeit im IRB-Ansatz



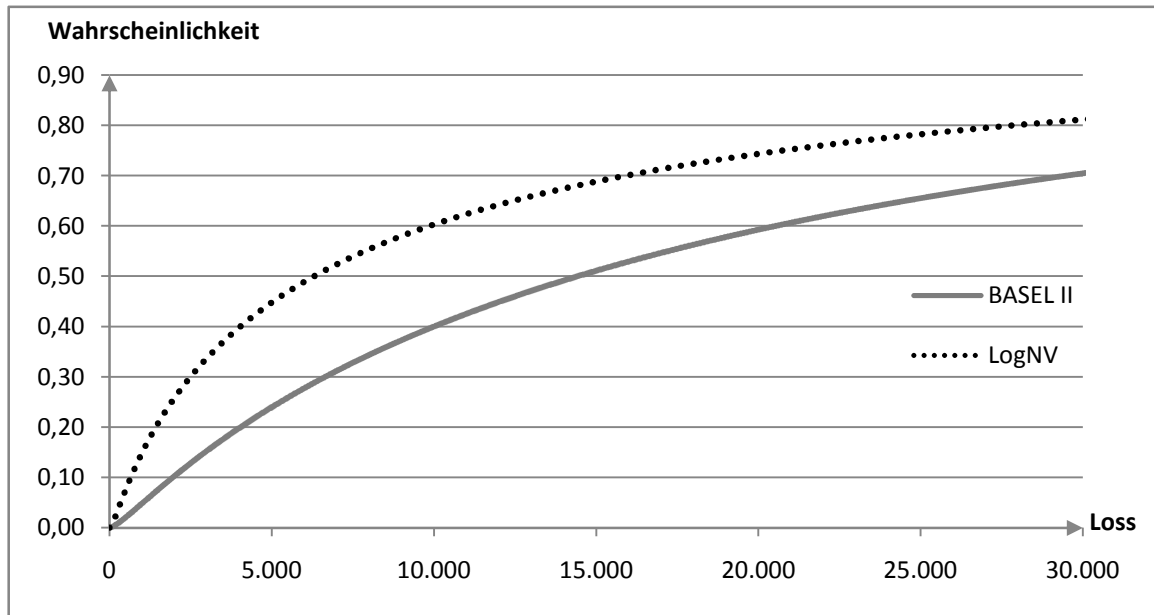
Anhang 9b: Zusammenhang zwischen Assetkorrelation und PD im Segment Forderungen an Privatkunden



Anhang 10: CVaR – Berechnung im uniformen 5 Kreditnehmerportfolio

5 KN Portfolio					CHANGE	
uniform PD		1,00%				
uniform EAD		1.000.000				
uniform LGD		0,6				
n	EAD	PD	LGD			
1	1.000.000	1,00%	0,6			
2	1.000.000	1,00%	0,6			
3	1.000.000	1,00%	0,6			
4	1.000.000	1,00%	0,6			
5	1.000.000	1,00%	0,6			
Portfolio				5.000.000		
* Die Werte unterhalb der Diagonalen wurden bereits mit 2 multipliziert, wodurch ein Ausweis der Werte überhalb der Diagonalen entfällt.						

Anhang 11: Verteilungsfunktion im uniformen 5 Kreditnehmerportfolios bis zum Expected Loss



Die lognormale Verlustverteilung wurde über die Funktion „LOGNORMVERT“ in Excel ermittelt, die Verlustverteilung der IRB-Formel wurde über Formel (41) berechnet.

**Anhang 12: Dichte- und Verteilungswerte beider Modelle im uniformen
5 Kreditnehmerportfolio im Bereich eines Portfolioverlustes
zwischen EUR 30.000 und EUR 1,2 Mio.**

Portfolio-		LogNV		Basel II	
Loss in EUR	CVaR in EUR	f(Loss)	F(Loss)	f(Loss)	F(Loss)
30.000	0	0,0000050996	81,13674%	0,0000088340	70,47234%
60.000	30.000	0,0000016693	89,89278%	0,0000030830	86,34260%
90.000	60.000	0,0000008087	93,38476%	0,0000013982	92,64362%
105.485	75.485	0,0000006003	94,46417%	0,0000009833	94,46418%
150.000	120.000	0,0000003011	96,36212%	0,0000004077	97,33539%
180.000	150.000	0,0000002074	97,11252%	0,0000002430	98,28647%
210.000	180.000	0,0000001500	97,64215%	0,0000001512	98,86513%
240.000	210.000	0,0000001127	98,03248%	0,0000000972	99,23078%
270.000	240.000	0,0000000871	98,32984%	0,0000000641	99,46877%
300.000	270.000	0,0000000689	98,56239%	0,0000000432	99,62742%
330.000	300.000	0,0000000556	98,74818%	0,0000000296	99,73527%
360.000	330.000	0,0000000456	98,89926%	0,0000000207	99,80982%
390.000	360.000	0,0000000379	99,02398%	0,0000000146	99,86208%
420.000	390.000	0,0000000319	99,12826%	0,0000000104	99,89915%
450.000	420.000	0,0000000271	99,21642%	0,0000000075	99,92573%
480.000	450.000	0,0000000232	99,29170%	0,0000000054	99,94496%
510.000	480.000	0,0000000201	99,35652%	0,0000000040	99,95899%
540.000	510.000	0,0000000175	99,41276%	0,0000000029	99,96929%
570.000	540.000	0,0000000153	99,46191%	0,0000000022	99,97691%
600.000	570.000	0,0000000135	99,50512%	0,0000000016	99,98257%
630.000	600.000	0,0000000120	99,54332%	0,0000000012	99,98680%
660.000	630.000	0,0000000107	99,57728%	0,0000000009	99,98997%
690.000	660.000	0,0000000096	99,60759%	0,0000000007	99,99236%
720.000	690.000	0,0000000086	99,63477%	0,0000000005	99,99417%
750.000	720.000	0,0000000077	99,65925%	0,0000000004	99,99554%
780.000	750.000	0,0000000070	99,68136%	0,0000000003	99,99658%
810.000	780.000	0,0000000064	99,70142%	0,0000000002	99,99738%
840.000	810.000	0,0000000058	99,71966%	0,0000000002	99,99798%
870.000	840.000	0,0000000053	99,73630%	0,0000000001	99,99845%
900.000	870.000	0,0000000049	99,75152%	0,0000000001	99,99881%
930.000	900.000	0,0000000045	99,76548%	0,0000000001	99,99908%
960.000	930.000	0,0000000041	99,77832%	0,0000000001	99,99929%
990.000	960.000	0,0000000038	99,79015%	0,0000000000	99,99945%
1.020.000	990.000	0,0000000035	99,80108%	0,0000000000	99,99958%
1.050.000	1.020.000	0,0000000032	99,81120%	0,0000000000	99,99968%
1.080.000	1.050.000	0,0000000030	99,82058%	0,0000000000	99,99975%
1.110.000	1.080.000	0,0000000028	99,82929%	0,0000000000	99,99981%
1.140.000	1.110.000	0,0000000026	99,83740%	0,0000000000	99,99985%
1.170.000	1.140.000	0,0000000024	99,84496%	0,0000000000	99,99989%
1.200.000	1.170.000	0,0000000023	99,85202%	0,0000000000	99,99991%

**Anhang 13: Dichte- und Verteilungswerte beider Modelle im uniformen
granularen Portfolio im Bereich eines Portfolioverlust
zwischen EUR 60.000 und EUR 10,02 Mio.**

Portfolio-		LogNV		Basel II	
Loss in EUR	CVaR in EUR	f(Loss)	F(Loss)	f(Loss)	F(Loss)
60.000	-	0,0000017791	5,81409%	0,0000023894	15,26655%
180.000	-	0,0000017388	28,72309%	0,0000014109	37,28456%
300.000	-	0,0000012162	46,32312%	0,0000009406	51,09822%
420.000	-	0,0000008522	58,58003%	0,0000006732	60,64768%
540.000	-	0,0000006139	67,27749%	0,0000005041	67,64079%
660.000	60.000	0,0000004547	73,62757%	0,0000003897	72,96182%
780.000	180.000	0,0000003451	78,38745%	0,0000003084	77,12406%
900.000	300.000	0,0000002674	82,03722%	0,0000002487	80,44923%
1.020.000	420.000	0,0000002110	84,89048%	0,0000002035	83,15047%
1.140.000	540.000	0,0000001690	87,15836%	0,0000001687	85,37501%
1.260.000	660.000	0,0000001372	88,98698%	0,0000001412	87,22799%
1.380.000	780.000	0,0000001127	90,47996%	0,0000001193	88,78650%
1.500.000	900.000	0,0000000935	91,71236%	0,0000001016	90,10834%
1.620.000	1.020.000	0,0000000783	92,73962%	0,0000000871	91,23767%
1.740.000	1.140.000	0,0000000661	93,60337%	0,0000000751	92,20876%
1.860.000	1.260.000	0,0000000562	94,33532%	0,0000000651	93,04858%
1.980.000	1.380.000	0,0000000481	94,95999%	0,0000000568	93,77862%
2.100.000	1.500.000	0,0000000415	95,49653%	0,0000000497	94,41619%
2.220.000	1.620.000	0,0000000359	95,96009%	0,0000000437	94,97536%
2.340.000	1.740.000	0,0000000313	96,36275%	0,0000000385	95,46765%
2.460.000	1.860.000	0,0000000274	96,71424%	0,0000000341	95,90260%
2.580.000	1.980.000	0,0000000241	97,02248%	0,0000000303	96,28814%
2.700.000	2.100.000	0,0000000212	97,29394%	0,0000000269	96,63092%
2.820.000	2.220.000	0,0000000188	97,53395%	0,0000000241	96,93652%
2.940.000	2.340.000	0,0000000167	97,74694%	0,0000000215	97,20968%
3.060.000	2.460.000	0,0000000149	97,93661%	0,0000000193	97,45445%
3.180.000	2.580.000	0,0000000134	98,10604%	0,0000000174	97,67428%
3.300.000	2.700.000	0,0000000120	98,25787%	0,0000000156	97,87212%
3.420.000	2.820.000	0,0000000108	98,39430%	0,0000000141	98,05052%
3.540.000	2.940.000	0,0000000097	98,51724%	0,0000000128	98,21172%
3.660.000	3.060.000	0,0000000088	98,62830%	0,0000000116	98,35761%
3.780.000	3.180.000	0,0000000080	98,72886%	0,0000000105	98,48989%
3.900.000	3.300.000	0,0000000072	98,82013%	0,0000000095	98,61000%
4.020.000	3.420.000	0,0000000066	98,90315%	0,0000000087	98,71924%
4.140.000	3.540.000	0,0000000060	98,97882%	0,0000000079	98,81873%
4.260.000	3.660.000	0,0000000055	99,04793%	0,0000000072	98,90946%
4.380.000	3.780.000	0,0000000050	99,11116%	0,0000000066	98,99232%
4.500.000	3.900.000	0,0000000046	99,16912%	0,0000000060	99,06809%
4.620.000	4.020.000	0,0000000043	99,22234%	0,0000000055	99,13744%
4.740.000	4.140.000	0,0000000039	99,27128%	0,0000000051	99,20100%
4.860.000	4.260.000	0,0000000036	99,31637%	0,0000000047	99,25931%
4.980.000	4.380.000	0,0000000033	99,35796%	0,0000000043	99,31287%
5.100.000	4.500.000	0,0000000031	99,39639%	0,0000000039	99,36211%

Das IRB-Modell des Kreditrisikos im Vergleich zum Modell einer
logarithmisch normalverteilten Verlustfunktion

Portfolio-		LogNV		Basel II	
Loss in EUR	CVaR in EUR	f(Loss)	F(Loss)	f(Loss)	F(Loss)
5.220.000	4.620.000	0,0000000029	99,43194%	0,0000000036	99,40741%
5.340.000	4.740.000	0,0000000026	99,46487%	0,0000000033	99,44914%
5.460.000	4.860.000	0,0000000025	99,49542%	0,0000000031	99,48762%
5.520.000	4.920.000	0,0000000024	99,50987%	0,0000000030	99,50572%
5.580.000	4.980.000	0,0000000023	99,52379%	0,0000000028	99,52311%
5.592.120	4.992.120	0,0000000023	99,52654%	0,0000000028	99,52654%
5.640.000	5.040.000	0,0000000022	99,53722%	0,0000000027	99,53983%
5.700.000	5.100.000	0,0000000021	99,55017%	0,0000000026	99,55589%
5.820.000	5.220.000	0,0000000020	99,57473%	0,0000000024	99,58618%
5.940.000	5.340.000	0,0000000018	99,59762%	0,0000000022	99,61420%
6.060.000	5.460.000	0,0000000017	99,61898%	0,0000000021	99,64013%
6.180.000	5.580.000	0,0000000016	99,63892%	0,0000000019	99,66415%
6.300.000	5.700.000	0,0000000015	99,65757%	0,0000000018	99,68641%
6.420.000	5.820.000	0,0000000014	99,67501%	0,0000000017	99,70705%
6.540.000	5.940.000	0,0000000013	99,69136%	0,0000000015	99,72621%
6.660.000	6.060.000	0,0000000012	99,70668%	0,0000000014	99,74401%
6.780.000	6.180.000	0,0000000012	99,72106%	0,0000000013	99,76054%
6.900.000	6.300.000	0,0000000011	99,73456%	0,0000000012	99,77591%
7.020.000	6.420.000	0,0000000010	99,74725%	0,0000000011	99,79021%
7.140.000	6.540.000	0,0000000010	99,75919%	0,0000000011	99,80352%
7.260.000	6.660.000	0,0000000009	99,77043%	0,0000000010	99,81591%
7.380.000	6.780.000	0,0000000009	99,78102%	0,0000000009	99,82746%
7.500.000	6.900.000	0,0000000008	99,79101%	0,0000000009	99,83822%
7.620.000	7.020.000	0,0000000008	99,80043%	0,0000000008	99,84826%
7.740.000	7.140.000	0,0000000007	99,80932%	0,0000000008	99,85763%
7.860.000	7.260.000	0,0000000007	99,81773%	0,0000000007	99,86638%
7.980.000	7.380.000	0,0000000006	99,82568%	0,0000000007	99,87455%
8.100.000	7.500.000	0,0000000006	99,83320%	0,0000000006	99,88218%
8.220.000	7.620.000	0,0000000006	99,84032%	0,0000000006	99,88931%
8.340.000	7.740.000	0,0000000005	99,84706%	0,0000000005	99,89598%
8.460.000	7.860.000	0,0000000005	99,85345%	0,0000000005	99,90222%
8.580.000	7.980.000	0,0000000005	99,85951%	0,0000000005	99,90806%
8.700.000	8.100.000	0,0000000005	99,86527%	0,0000000004	99,91353%
8.820.000	8.220.000	0,0000000004	99,87073%	0,0000000004	99,91865%
8.940.000	8.340.000	0,0000000004	99,87592%	0,0000000004	99,92345%
9.060.000	8.460.000	0,0000000004	99,88085%	0,0000000004	99,92794%
9.180.000	8.580.000	0,0000000004	99,88554%	0,0000000003	99,93216%
9.300.000	8.700.000	0,0000000004	99,89001%	0,0000000003	99,93611%
9.420.000	8.820.000	0,0000000003	99,89426%	0,0000000003	99,93982%
9.540.000	8.940.000	0,0000000003	99,89831%	0,0000000003	99,94330%
9.660.000	9.060.000	0,0000000003	99,90216%	0,0000000003	99,94657%
9.780.000	9.180.000	0,0000000003	99,90584%	0,0000000002	99,94964%
9.900.000	9.300.000	0,0000000003	99,90935%	0,0000000002	99,95252%
10.020.000	9.420.000	0,0000000003	99,91270%	0,0000000002	99,95523%

Anhang 14: Bestimmung eines identischen CVaR im granularen Portfolio

Kreditnehmergranularität					CHANGE																															
Defaultkorrelation		0,011209	<=>		0,01120904																															
#	10.000	EAD	10.000	PD	0,184775%	LGD	60%																													
Gesamtexposure:		100.000.000		EL PF	110.865	UL PF	Unerwarteter Portfolioverlust: 274.008																													
n-Anteil:		0,0100%																																		
Kovarianz zweier Kredite (i ≠ k) 744,24																																				
74.416.224.399 Summe Kovarianzen aller Kredite (i ≠ k) 663.961.203 Summe Kovarianzen aller Kredite (i = k)																																				
<table><tr><th colspan="4">BASEL II</th></tr><tr><th>Assetkorrelation</th><th>Gewicht</th><th>Ki</th><th>CVaR</th></tr><tr><td>0,229410209</td><td>0,0525138</td><td>0,0303996</td><td>3.039.960,84</td></tr></table>								BASEL II				Assetkorrelation	Gewicht	Ki	CVaR	0,229410209	0,0525138	0,0303996	3.039.960,84																	
BASEL II																																				
Assetkorrelation	Gewicht	Ki	CVaR																																	
0,229410209	0,0525138	0,0303996	3.039.960,84																																	
<table><tr><td>LogNV</td><td colspan="3">Konfidenzniveau: 0,999</td></tr><tr><td>EL PF</td><td>110.865</td><td colspan="3">N(1-q): 3,090232306</td></tr><tr><td>UL PF</td><td>274.008</td><td colspan="3">CVaR-Verhältnis: 1,0000 100,00%</td></tr><tr><td>μ</td><td>10,6354</td><td colspan="3">CVaR: 3.039.960,84</td></tr><tr><td>Sigma^2</td><td>1,9613</td><td colspan="3">CVaR-Differenz: 0,00</td></tr><tr><td>Sigma</td><td>1,4005</td><td colspan="3"></td></tr></table>								LogNV	Konfidenzniveau: 0,999			EL PF	110.865	N(1-q): 3,090232306			UL PF	274.008	CVaR-Verhältnis: 1,0000 100,00%			μ	10,6354	CVaR: 3.039.960,84			Sigma^2	1,9613	CVaR-Differenz: 0,00			Sigma	1,4005			
LogNV	Konfidenzniveau: 0,999																																			
EL PF	110.865	N(1-q): 3,090232306																																		
UL PF	274.008	CVaR-Verhältnis: 1,0000 100,00%																																		
μ	10,6354	CVaR: 3.039.960,84																																		
Sigma^2	1,9613	CVaR-Differenz: 0,00																																		
Sigma	1,4005																																			

Anhang 15: CVaR – Bestimmung für $p = 0,05\%$ im granularen Portfolio

Kreditnehmergranularität					CHANGE	
Defaultkorrelation		0,005458	<=>		0,00545753	
#	10.000	EAD	10.000	PD	LGD	
				0,05%		60%
Gesamtexposure:		100.000.000		EL PF	30.000	
n-Anteil:		0,0100%		UL PF	Unerwarteter Portfolioverlust: 99.988	
LogNV						
EL PF	30.000	Konfidenzniveau: 0,999				
UL PF	99.988	N(1-q): 3,090232306				
		CVarf: 1.104.979,05				
μ	9,0620	CVar-Verhältnis: 0,9235				
Sigma^2	2,4939	108,28%				
Sigma	1,5792	CVar-Differenz: 911.545,57				

BASEL II			
Assetkorrelation	Gewicht	Kf	CVaR
0,237037189	0,0204421	0,0119652	1.196.524,62

Kovarianz zweier Kredite (i ≠ k)	
98,19	
9.817.655.803 Summe Kovarianzen aller Kredite (i ≠ k)	
179.913.000 Summe Kovarianzen aller Kredite (i = k)	

Anhang 16: Matrizen zum heterogenen Gesamtbankportfolio

Jedes uniforme Subportfolio verfügt über eine Kreditnehmeranzahl n i. H. v. 10.000, so dass sich beispielsweise für das Portfolio 1 (Retail I) eine paarweise identische Defaultkorrelation $\rho_{ik} = 0,01012$ ($i \neq k$) innerhalb des Portfolios ergibt.

Die paarweise identischen Defaultkorrelationen innerhalb der Subportfolios werden auf der gekennzeichneten Diagonalen nachfolgender Matrix ausgewiesen.

Defaultkorrelations- matrix	1	2	3	4	5
1	0,01012	0,01038	0,00511	0,00594	0,00672
2	0,01038	0,01096	0,00529	0,00666	0,00783
3	0,00511	0,00529	0,00259	0,00310	0,00355
4	0,00594	0,00666	0,00310	0,00461	0,00593
5	0,00672	0,00783	0,00355	0,00593	0,00808

Der Korrelationskoeffizient eines Kreditnehmers mit sich selbst ist selbstverständlich mit einem Wert von 1 determiniert. Dies ist bei der Ermittlung der Kovarianzmatrix entsprechend zu berücksichtigen.

Kovarianz- matrix	1	2	3	4	5
1	4.970.978.543.883	10.436.708.609.436	4.379.499.139.250	1.268.305.056.865	1.755.266.142.491
2	10.436.708.609.436	22.969.905.261.530	9.370.581.314.243	2.936.176.028.905	4.231.341.679.144
3	4.379.499.139.250	9.370.581.314.243	4.058.154.713.680	1.162.720.546.054	1.633.935.440.545
4	1.268.305.056.865	2.936.176.028.905	1.162.720.546.054	441.095.295.114	680.271.766.159
5	1.755.266.142.491	4.231.341.679.144	1.633.935.440.545	680.271.766.159	1.149.006.375.446

Literaturverzeichnis

- Basel Committee on Banking Supervision (Hrsg.) (1999a), A new Capital Adequacy Framework, Basel, o. Verl., [<http://www.bis.org/publ/bcbs50.pdf?noframes=1>, abgefragt am 07.01.2008].
- Basel Committee on Banking Supervision (Hrsg.) (1999b), Credit Risk Modelling: Current Practices and Applications, Basel, o. Verl., [<http://www.bis.org/publ/bcbs49.pdf>, abgefragt am 08.01.2008].
- Basel Committee on Banking Supervision (Hrsg.) (2001), The Internal Ratings-Based Approach – Consultative document – Supporting document to the New Basel Capital Accord, Basel, o. Verl., [<http://www.bis.org/publ/bcbsca05.pdf>, abgefragt am 23.10.2005].
- Basel Committee on Banking Supervision (Hrsg.) (2003), Significant progress on major issues, Basel, o. Verl., [<http://www.bis.org/press/p031011.htm>, abgefragt am 23.02.2008].
- Basel Committee on Banking Supervision (Hrsg.) (2004), International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards, Basel, o. Verl., [<http://www.bis.org/publ/bcbs107.pdf?noframes=1>, abgefragt am 07.01.2008].
- Basel Committee on Banking Supervision (Hrsg.) (2006), Basel Committee maintains calibration of Basel II Framework, Basel, o. Verl., [<http://www.bis.org/press/p060524.htm>, abgefragt am 13.01.2008].
- Black, F. / Scholes, M. (1973), The Pricing of Options and Corporate Liabilities, in: Journal of Political Economy, Vol. 81, Ausgabe Nr. 3/1973, S. 637 - 654.
- Bluhm, C. / Fahrmeir, L. / Henking, A. (2006), Kreditrisikomessung, Statistische Grundlagen, Methoden und Modellierung, 1. Auflage, Berlin et al., Springer-Verlag.
- Bluhm, C. / Overbeck, L. / Wagner, C. (2002), An Introduction to Credit Risk Modeling, 1. Auflage, Boca Raton et al., Chapman & Hall/CRC.
- Böcker, K. / Spielberg, H. (2005), Risikoaggregation mit Kopulas, Basel II und Ökonomisches Kapital, in: die bank, Ausgabe Nr. 08/2005, S. 56-59.
- Boegelein, L. / Hamerle, A. / Rauhmeier R. / Scheule, H. (2002), Parametrisierung von CreditRisk+ im Konjunkturzyklus: Dynamische Ausfallquoten und Sektoranalyse, [<http://db.riskwaters.com/global/risk/foreign/deutsches/December2002/page37-42.pdf>, abgefragt am 09.03.08]
- Bohn, J. / Crosbie, P. (2003), Modeling Default Risk, Moody's KMV Company (Hrsg.): Modeling Methodology, o. O., o. Verl.
- Buchmann, P. (2003), Fit für das Rating – Basel II – Ein Leitfaden für den Mittelstand und die Freien Berufe, in: Merkblatt Betriebswirtschaft NF 262, Stuttgart, o. Verl.
- Cech, C. (2004), Die IRB Formel, Zur Berechnung der Mindesteigenmittel für Kreditrisiko, Fachhochschule des bfi Wien Gesellschaft m.b.H. (Hrsg.): Working Paper Series by the University of Applied Sciences of bfi Vienna, Number 1/2004, Version 1.01, Wien, o. Verl.

- Crouhy, M. / Galai, D. / Mark, R. (2000), A Comparative Analysis of Current Credit Risk Models, in: Journal of Banking & Finance, Ausgabe Nr. 24/2000, S. 59 - 117.
- Deutsche Bank (Hrsg.) (2007), Finanzbericht 2006, Frankfurt am Main, o. Verl., [http://geschaeftsbericht.deutsche-bank.de/2006/gb/servicesseiten/downloads/files/dbfy2006_risikobericht.pdf, abgefragt am 11.01.2008].
- Deutsche Bundesbank (Hrsg.) (2003), Monatsbericht Januar 2003, 55. Jahrgang, Nr. 1, Frankfurt am Main, o. Verl.
- Deutsche Bundesbank (Hrsg.) (2004), Monatsbericht September 2004, 56. Jahrgang, Nr. 9, Frankfurt am Main, o. Verl.
- Deutsche Bundesbank (Hrsg.) (2006), Ergebnisse deutscher Banken im Rahmen der fünften Auswirkungsstudie (QIS 5) zu Basel II, Frankfurt am Main, o. Verl., [<http://www.bundesbank.de/download/presse/presse-notizen/2006/20060524.qis.pdf>, abgefragt am 26.01.2008].
- Dhamotharan, S. / Görg, A. (Hrsg.) (2003), Das Kreditrisikomodell im IRB-Ansatz von Basel II, o. O., o. Verl.
- Duffie, D. / Singleton, K. (2003), Credit Risk: Pricing, Measurement, and Management, 1. Auflage, Princeton, New Jersey, Princeton University Press.
- Fahrmeir, L. / Künstler R. / Pigeot, I. / Tutz, G. (2004), Statistik – Der Weg zur Datenanalyse, 5. Auflage, Berlin et al., Springer-Verlag.
- Fischer, T. (2001), Organisation der Risikoüberwachung im Deutsche Bank Konzern, in: Schierenbeck, H. / Rolfes, B. / Schüller, S. (Hrsg.): Handbuch Bankcontrolling, 2. Auflage, Wiesbaden, Gabler Verlag, S. 53 - 67.
- Garz, H. / Günther, S. / Morabadi, C. (2002), Portfolio-Management, Theorie und Anwendung, Bankakademie e.V. (Hrsg.): Kompendium bankbetrieblicher Anwendungsfelder, 1. Auflage, Frankfurt am Main, Bankakademie-Verlag GmbH.
- Gordy, M. (2003), A Risk-Factor Model Foundation for Ratings-Based Bank Capital Rules, in: Journal of Financial Intermediation, Vol. 12, Ausgabe Nr. 3/2003, S. 199 - 232.
- Gordy, M. / Lütkebohmert, E. (2007), Granularity adjustment for Basel II, Deutsche Bundesbank (Hrsg.): Discussion Paper, Series 2: Banking and Financial Studies, Nr. 01/2007, Frankfurt am Main, o. Verl.
- Gundlach, M. / Lehrbass, F. (2004), CreditRisk+ in the Banking industry, 1. Auflage, Berlin et al., Springer-Verlag.
- Huschens, S. (2000), Von der Markt- zur Kreditrisikomessung, Working Paper, Dresden, o. Verl.
- Kleeberg, M. / Schlenger, C. (2000), Value-at-Risk im Asset Management, in: Johanning, L. / Rudolph, B. (Hrsg.): Handbuch Risikomanagement, Band 2: Risikomanagement in Banken, Asset-Management-Gesellschaften, Versicherungs- und Industrieunternehmen, Bad Soden, Uhlenbruch Verlag, S. 973 - 1014.

- Kirmße, S. / Schweizer, S. (2001), VR-CreditPortfolioManager – Portfolioorientierte Kreditrisikosteuerung für den genossenschaftlichen Verbund, in: Bankinformation, Ausgabe Nr. 3/2001, S. 20 - 26.
- Klement, J. (2007), Kreditrisikohandel, Basel II und interne Märkte in Banken, 1. Auflage, Wiesbaden, Deutscher Universitäts-Verlag.
- Kruschwitz, L. (2007), Investitionsrechnung, 11. Auflage, o. O., Oldenbourg Wissenschaftsverlag.
- Lesko, M. / Schlottmann, F. / Vorgrimler, S. (2001), Fortschritte bei der Schätzung von Risikofaktorgewichten für CreditRisk+™, in: die bank, Ausgabe Nr. 06/2001, S. 436 - 441.
- Meier, C. (2004), Risikotreiber in einem Kreditportfolio, in: Der Schweizer Treuhänder, Ausgabe Nr. 04/2004, S. 255 - 260.
- Merton, R. (1974), On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates, in: The Journal of Finance, Vol. 29, Ausgabe Nr. 2/1974, S. 449 - 470.
- Moody's Investors Service (Hrsg.) (2000), The Lognormal Method Applied to ABS Analysis, Special Report, New York, o. Verl.
- Munsch, M. / Weiß, B. (2000), Rating - Finanzdienstleistung und Entscheidungshilfe, Deutscher Industrie- und Handelstag (Hrsg.): SR 438, Berlin, o. Verl.
- o. V. (2007), Mathematical Code - Calculates a bivariate normal distribution [<http://www.vbnumericalmethods.com/math/> download am 09.12.2007].
- Paul, S. (2001), Der Basler Akkord im Überblick, in: Gerhard Hofmann (Hrsg.): Auf dem Weg zu Basel II: Konzepte, Modelle, Meinungen, Frankfurt am Main, Bankakademie Verlag.
- Schierenbeck, H. (Hrsg.) (1997), Ertragsorientiertes Bankmanagement: Band 2: Risiko-Controlling und Bilanzstruktur-Management, 5. Auflage, Wiesbaden, Gabler Verlag.
- Schierenbeck, H.: (Hrsg.) (2001), Ertragsorientiertes Bankmanagement, Band 2: Risiko-Controlling und integrierte Rendite-/Risikosteuerung, 7. Auflage, Wiesbaden, Gabler Verlag.
- Schmidt, A. (2001), Interner Rating-Ansatz aus Sicht einer Geschäftsbank, in: Gerhard Hofmann (Hrsg.): Auf dem Weg zu Basel II: Konzepte, Modelle, Meinungen, Frankfurt am Main, Bankakademie Verlag.
- Schulte, M. / Horsch, A. (2002), Wertorientierte Banksteuerung II: Risikomanagement, Bankakademie e.V. (Hrsg.): Kompendium bankbetrieblicher Anwendungsfelder, 1. Auflage, Frankfurt am Main, Bankakademie-Verlag GmbH.
- Standard & Poor's (Hrsg.) (2008a), Default, Transition, and Recovery: 2007 Annual Global Corporate Default Study and Rating Transitions, New York, o. Verl.
- Standard & Poor's (Hrsg.) (2008b), Standard & Poor's Ratings Definitions, [<http://www2.standardandpoors.com/portal/site/sp/en/eu/page.article/2,1,3,0,1148451187257.html> abgefragt am 24.02.2008].

- Theiler, U. (2002), Optimierungsverfahren zur Risk-/Return-Steuerung der Gesamtbank, 1. Auflage, Wiesbaden, Deutscher Universitäts-Verlag.
- Vasicek, O. (1991), Limiting Loan Loss Probability Distribution, KMV Corporation (Hrsg.), [http://www.moodyskmv.com/research/whitepaper/Limiting_Loan_Loss_Probability_Distribution.pdf abgefragt am 23.02.2008].

FRANKFURT SCHOOL / HfB – WORKING PAPER SERIES

No.	Author/Title	Year
102.	Cremers, Heinz / Vetter, Michael Das IRB-Modell des Kreditrisikos im Vergleich zum Modell einer logarithmisch normalverteilten Verlustfunktion	2008
101.	Heidorn, Thomas / Pleißner, Mathias Determinanten Europäischer CMBS Spreads. Ein empirisches Modell zur Bestimmung der Risikoaufschläge von Commercial Mortgage-Backed Securities (CMBS)	2008
100.	Schalast, Christoph / Schanz, Kay-Michael (Hrsg.) Schaeffler KG/Continental AG im Lichte der CSX Corp.-Entscheidung des US District Court for the Southern District of New York	2008
99.	Hölscher, Luise / Haug, Michael / Schweinberger, Andreas Analyse von Steueramnestiedaten	2008
98.	Heimer, Thomas / Arend, Sebastian The Genesis of the Black-Scholes Option Pricing Formula	2008
97.	Heimer, Thomas / Hölscher, Luise / Werner, Matthias Ralf Access to Finance and Venture Capital for Industrial SMEs	2008
96.	Böttger, Marc / Guthoff, Anja / Heidorn, Thomas Loss Given Default Modelle zur Schätzung von Recovery Rates	2008
95.	Almer, Thomas / Heidorn, Thomas / Schmaltz, Christian The Dynamics of Short- and Long-Term CDS-spreads of Banks	2008
94.	Barthel, Erich / Wollersheim, Jutta Kulturunterschiede bei Mergers & Acquisitions: Entwicklung eines Konzeptes zur Durchführung einer Cultural Due Diligence	2008
93.	Heidorn, Thomas / Kunze, Wolfgang / Schmaltz, Christian Liquiditätsmodellierung von Kreditzusagen (Term Facilities and Revolver)	2008
92.	Burger, Andreas Produktivität und Effizienz in Banken – Terminologie, Methoden und Status quo	2008
91.	Löchel, Horst / Pecher, Florian The Strategic Value of Investments in Chinese Banks by Foreign Financial Institutions	2008
90.	Schalast, Christoph / Morgenschweis, Bernd / Sprengel, Hans Otto / Ockens, Klaas / Stachuletz, Rainer / Safran, Robert Der deutsche NPL Markt 2007: Aktuelle Entwicklungen, Verkauf und Bewertung – Berichte und Referate des NPL Forums 2007	2008
89.	Schalast, Christoph / Stralkowski, Ingo 10 Jahre deutsche Buyouts	2008
88.	Bannier, Christina / Hirsch, Christian The Economics of Rating Watchlists: Evidence from Rating Changes	2007
87.	Demidova-Menzel, Nadeshda / Heidorn, Thomas Gold in the Investment Portfolio	2007
86.	Hölscher, Luise / Rosenthal, Johannes Leistungsmessung der Internen Revision	2007
85.	Bannier, Christina / Hänsel, Dennis Determinants of banks' engagement in loan securitization	2007
84.	Bannier, Christina "Smoothing" versus "Timeliness" - Wann sind stabile Ratings optimal und welche Anforderungen sind an optimale Berichtsregeln zu stellen?	2007
83.	Bannier, Christina Heterogeneous Multiple Bank Financing: Does it Reduce Inefficient Credit-Renegotiation Incidences?	2007
82.	Cremers, Heinz / Löhr, Andreas Deskription und Bewertung strukturierter Produkte unter besonderer Berücksichtigung verschiedener Marktszenarien	2007
81.	Demidova-Menzel, Nadeshda / Heidorn, Thomas Commodities in Asset Management	2007
80.	Cremers, Heinz / Walzner, Jens Risikosteuerung mit Kreditderivaten unter besonderer Berücksichtigung von Credit Default Swaps	2007

79.	Cremers, Heinz / Traughber, Patrick Handlungsalternativen einer Genossenschaftsbank im Investmentprozess unter Berücksichtigung der Risikotragfähigkeit	2007
78.	Gerdemeier, Dieter / Roffia, Barbara Monetary Analysis: A VAR Perspective	2007
77.	Heidorn, Thomas / Kaiser, Dieter G. / Muschiol, Andrea Portfoliooptimierung mit Hedgefonds unter Berücksichtigung höherer Momente der Verteilung	2007
76.	Jobe, Clemens J. / Ockens, Klaas / Safran, Robert / Schalast, Christoph Work-Out und Servicing von notleidenden Krediten – Berichte und Referate des HfB-NPL Servicing Forums 2006	2006
75.	Abrar, Kamyar Fusionskontrolle in dynamischen Netzsektoren am Beispiel des Breitbandkabelsektors	2006
74.	Schalast, Christoph / Schanz, Kai-Michael Wertpapierprospekte: Markteinführungspublizität nach EU-Prospektverordnung und Wertpapierprospektgesetz 2005	– 2006
73.	Dickler, Robert A. / Schalast, Christoph Distressed Debt in Germany: What's Next? Possible Innovative Exit Strategies	2006
72.	Belke, Ansgar / Polleit, Thorsten How the ECB and the US Fed set interest rates	2006
71.	Heidorn, Thomas / Hoppe, Christian / Kaiser, Dieter G. Heterogenität von Hedgefondsindizes	2006
70.	Baumann, Stefan / Löchel, Horst The Endogeneity Approach of the Theory of Optimum Currency Areas - What does it mean for ASEAN + 3?	2006
69.	Heidorn, Thomas / Trautmann, Alexandra Niederschlagsderivate	2005
68.	Heidorn, Thomas / Hoppe, Christian / Kaiser, Dieter G. Möglichkeiten der Strukturierung von Hedgefondsportfolios	2005
67.	Belke, Ansgar / Polleit, Thorsten (How) Do Stock Market Returns React to Monetary Policy ? An ARDL Cointegration Analysis for Germany	2005
66.	Daynes, Christian / Schalast, Christoph Aktuelle Rechtsfragen des Bank- und Kapitalmarktsrechts II: Distressed Debt - Investing in Deutschland	2005
65.	Gerdemeier, Dieter / Polleit, Thorsten Measures of excess liquidity	2005
64.	Becker, Gernot M. / Harding, Perham / Hölscher, Luise Financing the Embedded Value of Life Insurance Portfolios	2005
63..	Schalast, Christoph Modernisierung der Wasserwirtschaft im Spannungsfeld von Umweltschutz und Wettbewerb – Braucht Deutschland eine Rechtsgrundlage für die Vergabe von Wasserversorgungskonzessionen? –	2005
62.	Bayer, Marcus / Cremers, Heinz / Kluß, Norbert Wertsicherungsstrategien für das Asset Management	2005
61.	Löchel, Horst / Polleit, Thorsten A case for money in the ECB monetary policy strategy	2005
60.	Richard, Jörg / Schalast, Christoph / Schanz, Kay-Michael Unternehmen im Prime Standard - „Staying Public“ oder „Going Private“? - Nutzenanalyse der Börsennotiz -	2004
59.	Heun, Michael / Schlink, Torsten Early Warning Systems of Financial Crises - Implementation of a currency crisis model for Uganda	2004
58.	Heimer, Thomas / Köhler, Thomas Auswirkungen des Basel II Akkords auf österreichische KMU	2004
57.	Heidorn, Thomas / Meyer, Bernd / Pietrowiak, Alexander Performanceeffekte nach Directors' Dealings in Deutschland, Italien und den Niederlanden	2004
56.	Gerdemeier, Dieter / Roffia, Barbara The Relevance of real-time data in estimating reaction functions for the euro area	2004
55.	Barthel, Erich / Gierig, Rauno / Kühn, Ilmhart-Wolfram Unterschiedliche Ansätze zur Messung des Humankapitals	2004
54.	Anders, Dietmar / Binder, Andreas / Hesdahl, Ralf / Schalast, Christoph / Thöne, Thomas Aktuelle Rechtsfragen des Bank- und Kapitalmarktsrechts I : Non-Performing-Loans / Faule Kredite - Handel, Work-Out, Outsourcing und Securitisation	2004

53.	Polleit, Thorsten The Slowdown in German Bank Lending – Revisited	2004
52.	Heidorn, Thomas / Siragusano, Tindaro Die Anwendbarkeit der Behavioral Finance im Devisenmarkt	2004
51.	Schütze, Daniel / Schalast, Christoph (Hrsg.) Wider die Verschleuderung von Unternehmen durch Pfandversteigerung	2004
50.	Gerhold, Mirko / Heidorn, Thomas Investitionen und Emissionen von Convertible Bonds (Wandelanleihen)	2004
49.	Chevalier, Pierre / Heidorn, Thomas / Krieger, Christian Temperaturderivate zur strategischen Absicherung von Beschaffungs- und Absatzrisiken	2003
48.	Becker, Gernot M. / Seeger, Norbert Internationale Cash Flow-Rechnungen aus Eigner- und Gläubigersicht	2003
47.	Boenkost, Wolfram / Schmidt, Wolfgang M. Notes on convexity and quanto adjustments for interest rates and related options	2003
46.	Hess, Dieter Determinants of the relative price impact of unanticipated Information in U.S. macroeconomic releases	2003
45.	Cremers, Heinz / Kluß, Norbert / König, Markus Incentive Fees. Erfolgsabhängige Vergütungsmodelle deutscher Publikumsfonds	2003
44.	Heidorn, Thomas / König, Lars Investitionen in Collateralized Debt Obligations	2003
43.	Kahlert, Holger / Seeger, Norbert Bilanzierung von Unternehmenszusammenschlüssen nach US-GAAP	2003
42.	Beiträge von Studierenden des Studiengangs BBA 012 unter Begleitung von Prof. Dr. Norbert Seeger Rechnungslegung im Umbruch - HGB-Bilanzierung im Wettbewerb mit den internationalen Standards nach IAS und US-GAAP	2003
41.	Overbeck, Ludger / Schmidt, Wolfgang Modeling Default Dependence with Threshold Models	2003
40.	Balthasar, Daniel / Cremers, Heinz / Schmidt, Michael Portfoliooptimierung mit Hedge Fonds unter besonderer Berücksichtigung der Risikokomponente	2002
39.	Heidorn, Thomas / Kantwill, Jens Eine empirische Analyse der Spreadunterschiede von Festsatzanleihen zu Floatern im Euroraum und deren Zusammenhang zum Preis eines Credit Default Swaps	2002
38.	Böttcher, Henner / Seeger, Norbert Bilanzierung von Finanzderivaten nach HGB, EstG, IAS und US-GAAP	2003
37.	Moormann, Jürgen Terminologie und Glossar der Bankinformatik	2002
36.	Heidorn, Thomas Bewertung von Kreditprodukten und Credit Default Swaps	2001
35.	Heidorn, Thomas / Weier, Sven Einführung in die fundamentale Aktienanalyse	2001
34.	Seeger, Norbert International Accounting Standards (IAS)	2001
33.	Moormann, Jürgen / Stehling, Frank Strategic Positioning of E-Commerce Business Models in the Portfolio of Corporate Banking	2001
32.	Sokolovsky, Zbynek / Strohhecker, Jürgen Fit für den Euro, Simulationsbasierte Euro-Maßnahmenplanung für Dresdner-Bank-Geschäftsstellen	2001
31.	Roßbach, Peter Behavioral Finance - Eine Alternative zur vorherrschenden Kapitalmarkttheorie?	2001
30.	Heidorn, Thomas / Jaster, Oliver / Willeitner, Ulrich Event Risk Covenants	2001
29.	Biswas, Rita / Löchel, Horst Recent Trends in U.S. and German Banking: Convergence or Divergence?	2001
28.	Eberle, Günter Georg / Löchel, Horst Die Auswirkungen des Übergangs zum Kapitaldeckungsverfahren in der Rentenversicherung auf die Kapitalmärkte	2001
27.	Heidorn, Thomas / Klein, Hans-Dieter / Siebrecht, Frank Economic Value Added zur Prognose der Performance europäischer Aktien	2000

26.	Cremers, Heinz Konvergenz der binomialen Optionspreismodelle gegen das Modell von Black/Scholes/Merton	2000
25.	Löchel, Horst Die ökonomischen Dimensionen der ‚New Economy‘	2000
24.	Frank, Axel / Moormann, Jürgen Grenzen des Outsourcing: Eine Exploration am Beispiel von Direktbanken	2000
23.	Heidorn, Thomas / Schmidt, Peter / Seiler, Stefan Neue Möglichkeiten durch die Namensaktie	2000
22.	Böger, Andreas / Heidorn, Thomas / Graf Waldstein, Philipp Hybrides Kernkapital für Kreditinstitute	2000
21.	Heidorn, Thomas Entscheidungsorientierte Mindestmargenkalkulation	2000
20.	Wolf, Birgit Die Eigenmittelkonzeption des § 10 KWG	2000
19.	Cremers, Heinz / Robé, Sophie / Thiele, Dirk Beta als Risikomaß - Eine Untersuchung am europäischen Aktienmarkt	2000
18.	Cremers, Heinz Optionspreisbestimmung	1999
17.	Cremers, Heinz Value at Risk-Konzepte für Marktrisiken	1999
16.	Chevalier, Pierre / Heidorn, Thomas / Rütze, Merle Gründung einer deutschen Strombörse für Elektrizitätsderivate	1999
15.	Deister, Daniel / Ehrlicher, Sven / Heidorn, Thomas CatBonds	1999
14.	Jochum, Eduard Hoshin Kanri / Management by Policy (MbP)	1999
13.	Heidorn, Thomas Kreditderivate	1999
12.	Heidorn, Thomas Kreditrisiko (CreditMetrics)	1999
11.	Moormann, Jürgen Terminologie und Glossar der Bankinformatik	1999
10.	Löchel, Horst The EMU and the Theory of Optimum Currency Areas	1998
09.	Löchel, Horst Die Geldpolitik im Währungsraum des Euro	1998
08.	Heidorn, Thomas / Hund, Jürgen Die Umstellung auf die Stückaktie für deutsche Aktiengesellschaften	1998
07.	Moormann, Jürgen Stand und Perspektiven der Informationsverarbeitung in Banken	1998
06.	Heidorn, Thomas / Schmidt, Wolfgang LIBOR in Arrears	1998
05.	Jahresbericht 1997	1998
04.	Ecker, Thomas / Moormann, Jürgen Die Bank als Betreiberin einer elektronischen Shopping-Mall	1997
03.	Jahresbericht 1996	1997
02.	Cremers, Heinz / Schwarz, Willi Interpolation of Discount Factors	1996
01.	Moormann, Jürgen Lean Reporting und Führungsinformationssysteme bei deutschen Finanzdienstleistern	1995

FRANKFURT SCHOOL / HFB – WORKING PAPER SERIES
CENTRE FOR PRACTICAL QUANTITATIVE FINANCE

No.	Author/Title	Year
15.	Packham, Natalie / Schmidt, Wolfgang Latin hypercube sampling with dependence and applications in finance	2008
14.	Hakala, Jürgen / Wystup, Uwe FX Basket Options	2008
13.	Weber, Andreas / Wystup, Uwe Vergleich von Anlagestrategien bei Riesterrenten ohne Berücksichtigung von Gebühren. Eine Simulationsstudie zur Verteilung der Renditen	2008
12.	Weber, Andreas / Wystup, Uwe Riesterrente im Vergleich. Eine Simulationsstudie zur Verteilung der Renditen	2008
11.	Wystup, Uwe Vanna-Volga Pricing	2008
10.	Wystup, Uwe Foreign Exchange Quanto Options	2008
09.	Wystup, Uwe Foreign Exchange Symmetries	2008
08.	Becker, Christoph / Wystup, Uwe Was kostet eine Garantie? Ein statistischer Vergleich der Rendite von langfristigen Anlagen	2008
07.	Schmidt, Wolfgang Default Swaps and Hedging Credit Baskets	2007
06.	Kilin, Fiodor Accelerating the Calibration of Stochastic Volatility Models	2007
05.	Griebisch, Susanne/ Kühn, Christoph / Wystup, Uwe Instalment Options: A Closed-Form Solution and the Limiting Case	2007
04.	Boenkost, Wolfram / Schmidt, Wolfgang M. Interest Rate Convexity and the Volatility Smile	2006
03.	Becker, Christoph/ Wystup, Uwe On the Cost of Delayed Currency Fixing	2005
02.	Boenkost, Wolfram / Schmidt, Wolfgang M. Cross currency swap valuation	2004
01.	Wallner, Christian / Wystup, Uwe Efficient Computation of Option Price Sensitivities for Options of American Style	2004

HFB – SONDERARBEITSBERICHTE DER HFB - BUSINESS SCHOOL OF FINANCE & MANAGEMENT

No.	Author/Title	Year
01.	Nicole Kahmer / Jürgen Moormann Studie zur Ausrichtung von Banken an Kundenprozessen am Beispiel des Internet (Preis: € 120,--)	2003

Printed edition: € 25.00 + € 2.50 shipping

Download:

Working Paper: http://www.frankfurt-school.de/content/de/research/Publications/list_of_publication0.html

CPQF: http://www.frankfurt-school.de/content/de/research/quantitative_Finance/research_publications.html

Order address / contact

Frankfurt School of Finance & Management

Sonnemannstr. 9–11 ■ D–60314 Frankfurt/M. ■ Germany

Phone: +49 (0) 69 154 008–734 ■ Fax: +49 (0) 69 154 008–728

eMail: m.biemer@frankfurt-school.de

Further information about Frankfurt School of Finance & Management
may be obtained at: <http://www.frankfurt-school.de>