Grundlagen der Elektrotechnik

Der elektrische Strom

Dipl. Ing. Dr. Peter Fröhling
Nöstach 152
A-2571 Altenmarkt / Triesting

1 Einleitung

In „Grundlagen der Elektrotechnik“ wird jenes Grundwissen vermittelt, welches als Basis in den einzelnen Fachgegenständen für die Elektronikausbildung unbedingt notwendig ist. Das in diesem Unterrichtsfach zu erarbeitende Wissen ist grundlegend, sodass ohne diese Grundlagenkenntnisse die Inhalte der Fachgegenstände in höheren Klassen nicht verstanden werden kann.

2 Grundlegende Begriffe

2.1 Teile und Vielfache von Einheiten

In der Elektronik und Nachrichtentechnik ist es üblich, die folgenden Teile und Vielfache von Einheiten zu verwenden:

Abkürzung	**Bedeutung**	**In Worten**	**Exponentialdarstellung**	
a	atto		10^{-18}	
f	femto		10^{-15}	
p	**pico**		$\mathbf{10^{-12}}$	
n	**nano**	**milliardenstel**	$\mathbf{10^{-9}}$	
µ	**mikro**	**millionstel**	$\mathbf{10^{-6}}$	u
m	**milli**	**tausendstel**	$\mathbf{10^{-3}}$	
k	**kilo**	**tausend**	$\mathbf{10^{3}}$	
M	**mega**	**millionen**	$\mathbf{10^{6}}$	Meg
G	**giga**	**milliarden**	$\mathbf{10^{9}}$	
T	terra		10^{12}	
P	penta		10^{15}	
E	exa		10^{18}	

Tabelle 1: Bezeichnung von Teilen und Vielfachen

Anmerkung: Es ist zu beachten, dass im angelsächsischen Raum „billion“ und im deutschsprachigen Raum „Milliarde“ das 10^9-fache bedeutet.

Anmerkung: µ ist ein griechischer Buchstabe und wird „mü“ ausgesprochen.

Beispiel 1:

a) 240000 m = km
b) 0.0254 m = mm
c) 360000 V = kV
d) 95900000 Hz = MHz

Beispiel 2: Wandle in sinnvolle technische Größen

a) 35826 nA =
b) 0.00642 µV =
c) 0.0508 MΩ =
d) 30000 GHz =

2.2 Schreibweise von Gleichungen

Wir unterscheiden zwischen

- Größengleichungen
- Einheitengleichungen und
- Zahlenwertgleichungen

Beispiel: Ein Körper mit einer Masse von 56 kg erfährt eine Beschleunigung von 9.81 m/s^2. Welche Kraft ist dazu notwendig?

Masse:

$$m = 56\ \mathrm{kg}$$

Größe Zahlenwert Einheit

Beschleunigung:

$$a = 9.81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}$$

Größe Zahlenwert Einheit

Aus der Physik wissen wir, dass

Kraft = Masse * Beschleunigung

gilt.

- Größengleichung: $F = m * a$
- Einheitengleichung: $[F] = [m] * [a] = kg * \dfrac{m}{s^2} = N$ (Newton)
- Zahlenwertgleichung: $56 * 9.81 = 549.36$

Es ist eine Kraft von 549.36 N notwendig.

Anmerkung: Überprüfen Sie bei längeren Rechnungen mit Größengleichungen durch das Einsetzen der Einheiten, ob die Einheiten stimmen. Addieren Sie niemals „Äpfel“ und „Birnen“.

Anmerkung: Statt „Einheit“ wird auch der Begriff „Dimension“ verwendet.

2.3 Das internationale Einheitensystem

Alle Einheiten des Einheitensystems „Système International d'Unités" heißen SI-Einheiten. Sämtliche physikalischen Berechnungen, Größen und Erscheinungen können in diesen SI-Einheiten ausgedrückt werden. Dazu sind Basiseinheiten notwendig, die wie folgt festgelegt werden:

Name der Basiseinheit	**Einheit**	**Kurzzeichen**
Länge	Meter	m
Zeit	Sekunden	s
Masse	Kilogramm	kg
Temperatur	Kelvin	K
Stromstärke	Ampere	A
Lichtstärke	Candela	Cd
Stoffmenge	Mol	mol

Tabelle 2: Die Basiseinheiten im SI-System

Wie das vorige Beispiel ur Berechnung der Kraft zeigt, wird die Kraft in den Basiseinheiten Kilogramm (kg), Meter (m) und Sekunden (s) ausgedrückt.

Um viele Berechnungen und Ergebnisse in der Technik übersichtlicher zu gestalten, werden auch andere Einheiten verwendet. Diese lassen sich jedoch wieder aus den Basiseinheiten ausdrücken. Daher nennt man sie auch (aus den Basiseinheiten) zusammengesetzte Einheiten.

Anmerkung: Als Einheit der Informationsmenge wird in der Nachrichten- und Systemtechnik das Bit (bit) verwendet.

3 Der elektrische Strom

Schließt man ein elektrisches Gerät (Verbraucher) über metallische Leitungen an eine Stromquelle, dann werden die Elektronen in der Leitung vom Minuspol der Quelle abgestoßen, durch den Verbraucher getrieben und vom Pluspol der Quelle angesaugt.

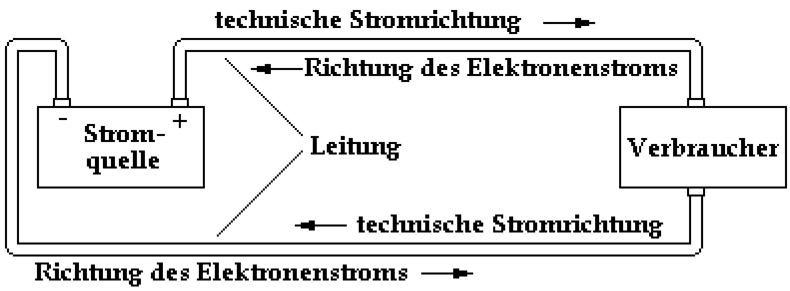


Bild 1: Strom in elektrischen Leitern

Die physikalische Stromrichtung gibt die Bewegungsrichtung der Elektronen an. Sie verläuft vom Minuspol der Quelle durch den Verbraucher zum Pluspol der Quelle. Die technische Stromrichtung verläuft vom Pluspol der Quelle durch den Verbraucher zum Minuspol der Quelle. Wenn man von der Stromrichtung spricht, so wird stets stillschweigend von der technischen Stromrichtung gesprochen.

Gleichstrom liegt dann vor, wenn sich die Stromstärke im Laufe der Zeit nicht ändert. Man spricht von Wechselstrom, wenn sich der Strom im Laufe der Zeit periodisch ändert. Es kann auch Gleich- und Wechselstrom überlagert werden. Dann spricht man von Mischstrom.

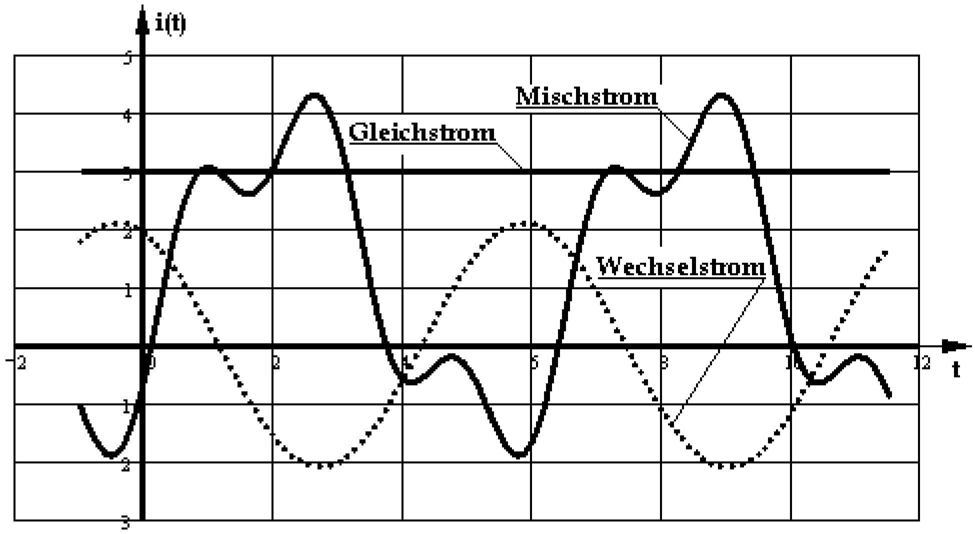


Bild 2: Gleichstrom, sinusförmiger Wechselstrom und Mischstrom, der sich aus Gleichstrom und zwei sinusförmigen Wechselströmen zusammensetzt

Die Ladungsmenge, die pro Zeiteinheit aus der Quelle herausfließt (die Anzahl der Ladungsträger pro Sekunde), entspricht dem elektrischen Strom I. Er wird in Ampere gemessen.

Der Druck, mit welchem die Ladungsträger durch die Leitung gepresst werden, entspricht der elektrischen Spannung U. Sie wird in Volt gemessen.

3.1 Der elektrische Stromkreis

Der einfachste elektrische Stromkeis besteht aus:

Stromquelle oder Stromerzeuger: Die Stromquelle verursacht die elektrische Strömung in den elektrischen Leitungen. Beispiele für Stromquellen sind: Batterien, Akkumulatoren (Akkus), Solarzellen für Gleichstrom und Generatoren für Wechselstrom.

Stromverbraucher: In ihnen wird die Energie der elektrischen Strömung in die gewünschte Wirkung (z.B. Licht, Wärme, Bewegung, Schall usw.) umgewandelt.

Leitungen: Sie verbinden Stromerzeuger und Stromverbraucher. Sie dienen zum Transport der elektrischen Strömung (z.B. Kabel, Freileitungen, Hausinstallation, Leiterbahnen auf Printplatten, usw.). Im den Leitungszügen können auch Schalter eingebaut sein, um die gewünschte Wirkung der elektrischen Strömung zu einem bestimmten Zeitpunkt beginnen und aufhören zu lassen.

Beispiel: Als Beispiel zu einem elektrischen Stromkreis diene die elektrische Taschenlampe.

Stromquelle	...	Batterie oder Akkumulator
Verbraucher	...	Lampe
Leitungen	...	Metallstreifen, metallisches Gehäuse
Schalter	...	Schiebeknopf

Zur übersichtlichen Darstellung der Anordnung der einzelnen Teile eines Stromkreises verwendet man Schaltbilder mit genormten Schaltzeichen (Symbolen).

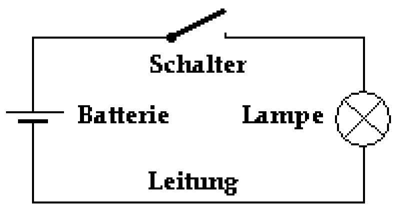


Bild 3: Schaltbild einer Taschenlampe

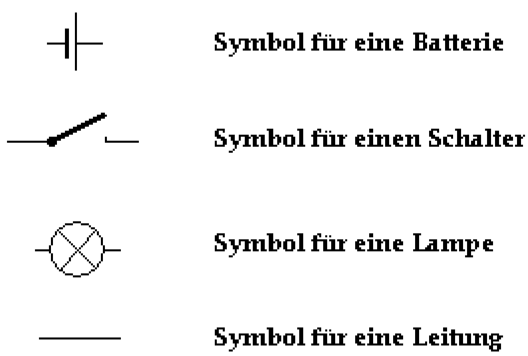
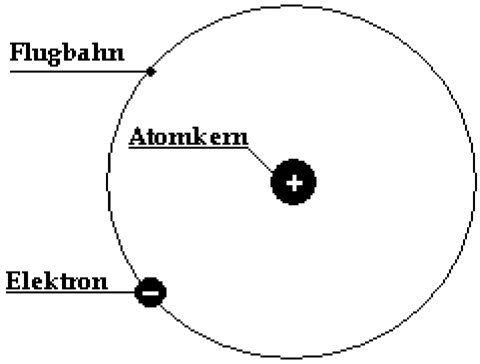


Bild 4:Verschiedene elektrische Symbole

3.2 Atome, Atomkerne und Elektronen

Die gesamte Materie besteht aus unzählbar vielen Atomen. Die Atome bestehen wiederum aus einem Atomkern und aus einen oder mehreren Elektronen, die den Atomkern umkreisen. Die Atomkerne bestehen aus genau so vielen Protonen, wie Elektronen den Kern umkreisen. Im Atomkern können sich auch Neutronen befinden.

Das einfachste Atom ist das Wasserstoffatom.



Der Atomkern besteht aus einem Proton und ist positiv geladen. Der Durchmesser des Protons ist etwa $1.5*10^{-15}$ m und hat eine Masse von $1.7*10^{-27}$ kg. Das Elektron ist negativ geladen. Es hat einen Durchmesser von etwa ...... und etwa $\frac{1}{2000}$ der Protonenmasse. Der Durchmesser der Flugbahn beträgt etwa $2*10^{-10}$ m.

Bild 5: Bohrsches Atommodell des Wasserstoffatoms

Nach außen hin ist das Wasserstoffatom elektrisch neutral. Weit entfernt vom Atomkern (einige nm) heben sich die positive Kernladung und die negative Elektronenladung auf. Die Elektronen sind die kleinsten Ladungsträger. Sie haben eine elektrische Ladung von $-1.602*10^{-19}$ C. Das Proton hat die Betragsmäßig gleiche Ladung wie das Elektron, nur mit positiven Vorzeichen. Mit

$$\boxed{e = 1.602 * 10^{-19}\ C = 1.602 * 10^{-19}\ As}$$

bezeichnet man die Elementarladung. Der genaue Wert ist $1.6021917 * 10^{-19}$ As.

$\boxed{\text{Coulomb ist die Einheit der elektrischen Ladung.}}$

Ein Elektron trägt also die Ladungsmenge –e, ein Proton trägt die Ladung +e. Die Ladung 1 C (= 1 Coulomb = 1 As = 1 Amperesekunde) entspricht einer solchen Ladungsmenge („Elektronenanzahl"), die ein Strom von 1A, der 1 Sekunde lang fließt, hervorruft.

Komplizierte Atome bestehen aus mehreren Protonen und Elektronen. In einem neutralen Atom ist die Anzahl der Protonen und Elektronen immer gleich groß. Das bedeutet, dass die Atome der verschiedenen Elemente nach außen hin immer elektrisch neutral sind. Zusätzlich zu den Protonen können sich auch noch elektrisch ungeladene Neutronen im Kern befinden.

Die Anzahl der Elementarteilchen im Atom bestimmt die physikalischen Eigenschaften der Elemente.

Im Wasserstoffatom ist das Elektron fest an den Kern gebunden, es kann nur schwer losgelöst werden. Bei bestimmten Stoffen, nämlich Metallen können ein (oder mehrere) Elektron(en) ganz leicht vom Atomrumpf gelöst werden. Ein solches Elektron kann dann den Platz eines benachbarten Elektrons einnehmen, diese wiederum den Platz eines weiteren Nachbars, usw. . Solche Elektronen, die vor allem in Metallen vorkommen, nennt man Leitungselektronen oder auch freie Elektronen.

Kupfer (Cu) ist das wichtigste Leitermaterial in der Elektrotechnik. Es bildet kubisch flächenzentrierte Kristalle. Das bedeutet, dass außer den Atomen in den Eckpunkten der Einheitszelle zusätzlich in jedem Flächenmittelpunkt ein Kupferatom sitzt.

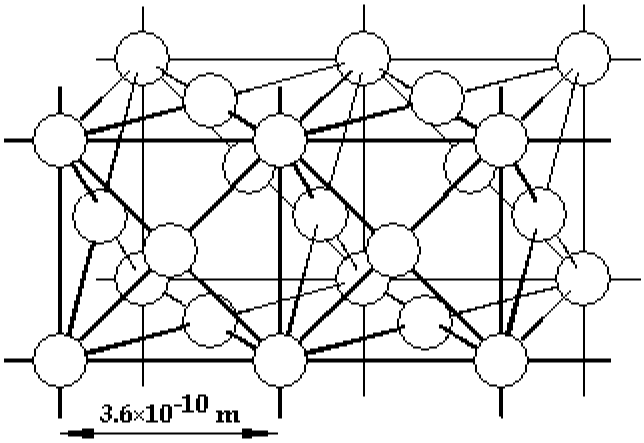
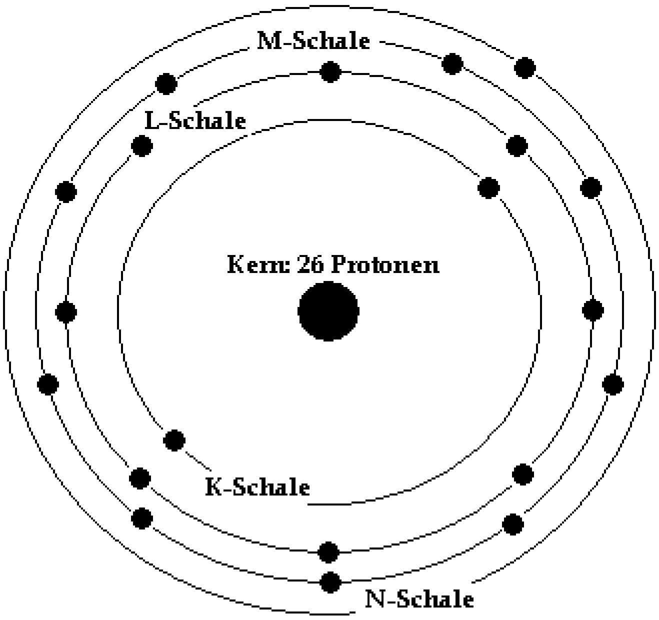


Bild 6: Zwei Einheitszellen eines Kupferkristalls

Kupfer hat 29 Protonen im Kern und 29 Elektronen in einzelnen Schalen.



In der K-Schale sind 2,
in der L-Schale sind 8,
in der M-Schale sind 18 und
in der N-Schale befindet sich 1
Elektron.

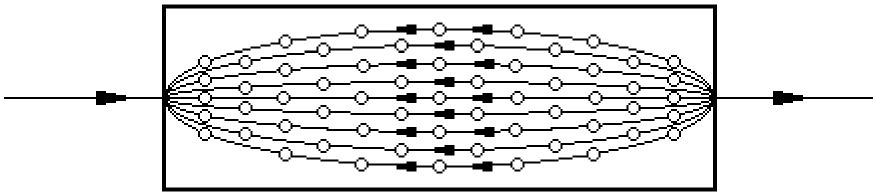
Bild 7:Bohrsches Atommodell von Kupfer

In der äußersten Schale befindet sich nur ein Elektron, welches relativ weit vom Kern entfernt ist und daher nur schwach an das gesamte Atom gebunden ist. Es kann leicht vom Atomkern gelöst werden und im Raumgitter des Kristalls verschoben werden.

3.3 Stromleitung

3.3.1 Stromleitung in Metallen

Die Elektrizitätsleitung in Metallen erfolgt ausschließlich durch die Bewegung von freien Elektronen, deren Wanderung das Kristallgitter dese Metalls nicht verändert. Die Atomrümpfe sind fest an ihre Gitterplätze gebunden.



Die Pfeile in den Zuleitungen stellen die technische Stromrichtung dar, im Inneren sind die Bahnen der Elektronen skizziert.

Bild 8: Stromfluss im Metall

Die Geschwindigkeit, mit der sich die Elektronen im Metall bewegen, ist von der Stromstärke und vom Leiterquerschnitt abhängig. Sie legt in der Größenordnung von wenigen $\frac{\mu m}{s}$ bis zu einigen wenigen $\frac{mm}{s}$.

Die Geschwindigkeit, mit der sich die Information „hier ist ein Elektron zu viel" ausbreitet, ist die Lichtgeschwindigkeit

$$\boxed{c_0 = 299792500\frac{m}{s} \approx 3*10^8\frac{m}{s} = 3*10^5\frac{km}{s} = 3*10^{10}\frac{cm}{s}}.$$

3.3.2 Stromleitung in Flüssigkeiten

In wässrigen Lösungen von Säuren, Laugen (Basen) oder Salzen werden die Ladungsträger zum Ladungstransport durch eine (elektrolytische) Zerlegung der chemischen Verbindungen gebildet. Aus den anfangs ladungsneutralen Molekülen bilden sich positiv und negativ geladene Ionen. Metalle und Wasserstoff bilden positive geladene Ionen, die zum negativen Pol, zur Kathode wandern, Sie werden Kathionen genannt. Die Säure- bzw. Laugenteile bilden negativ geladene Ionen, sie wandern zur Anode. Deshalb werden sie als Anionen bezeichnet.

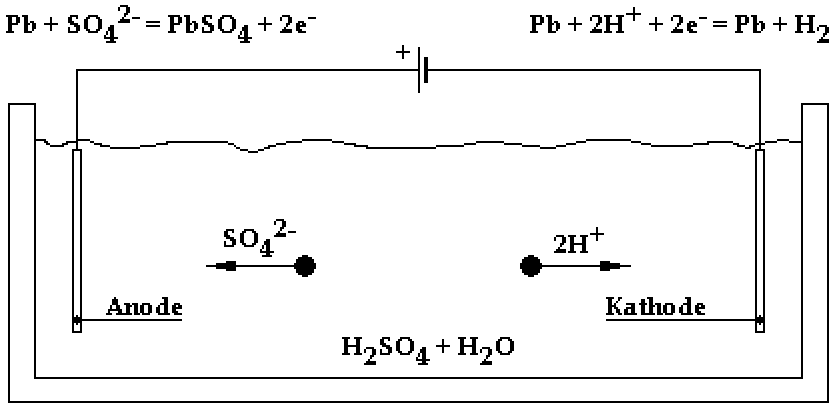


Bild 9: Stromleitung in einer H_2SO_4-Elektrolyt-Lösung

Stromleitende Flüssigkeiten erleiden beim Stromfluss chemische Veränderungen, die man Elektrolyse nennt. Der Ladungstransport erfolgt durch die Bewegung positiv und negativ geladener Ionen.

3.3.3 Stromleitung in Gasen

Bei hohem Druck (darunter versteht man auch den normalen Luftdruck) ist ein Gas ein sehr schlechter Leiter, ein Isolator. Luft ist bei normalem Luftdruck ein sehr guter Isolator, weil praktisch keine freien Elektronen oder Ionen vorhanden sind. Durch starkes Licht, extreme Hitze, ultraviolette Strahlung, Röntgenstrahlung oder kosmische Strahlung können einzelne Elektronen aus der äußersten Elektronenschale abgeschlagen werden – das Gas wird ionisiert. Für kurze Zeit stehen also freie Elektronen (negativ geladen) und positiv geladene Ionen zum Ladungstransport zur Verfügung. Weil für diese Art des Stromflusses äußere Einflüsse notwendig sind, nennt man das Gas unselbstständig leitend.

Beispiel: Beim Eintauchen eines Raumschiffs in die Erdatmosphäre wird enorme Hitze erzeugt, sodass die Luftschicht um das Raumfahrzeug blau-violett zu leuchten beginnt und die Funkverbindung unterbrochen wird. Die leitende Gasschicht schirmt jede Funkverbindung zum bzw. vom Raumschiff ab.

Bei niedrigen Drücken kann es auch zu einer selbstständigen Stromleitung im Gas kommen. Durch eine hohe Spannung kann ein Elektron vom Atomrumpf getrennt werden. Da der Gasdruck sehr gering ist, kann das losgelöste Elektron lange ungestört fliegen. Dabei wird es durch die hohe Spannung stark beschleunigt, also sehr schnell. Trifft es auf ein (neutrales) Atom, kann es wegen seiner hohen Geschwindigkeit, seiner hohen kinetischen Energie nicht nur ein, sondern mehrere Elektronen losschlagen, die wieder stark beschleunigen. Diese Kettenreaktion nennt man Stoßionisation. Man nennt das Gas selbstständig leitend, weil keine äußeren Einflüsse notwendig sind.

Beispiel: Eine Leuchtstoffröhre kann auch ohne Erhitzen des Gases in der Röhre gezündet werden. Es erfordert bloß eine höhere Zündspannung.

3.3.4 Stromleitung in Halbleitern

Halbleiter sind kristalline Festkörper aus Silizium (Si), Germanium (Ge) oder Mischkristalle aus Galliumarsenid (GaAs), Galliumaluminiumphosphid (GaAlP), Induimantimonid (InSb) usw. Halbleiter aus Silizium oder Germanium haben vier Elektronen in der Außenschale. Diese vier Valenzelektronen umkreisen nicht nur den eigenen Atomkern sondern auch den Kern eines Nachbaratoms. Dadurch kommt es zu einer Kristallstruktur, bei welcher in der Einheitszelle vier Atome in jenen Ecken der Zelle sitzen, die durch eine Flächendiagonale verbunden werden können. Ein weiteres Atom sitzt im Raummittelpunkt der Zelle.

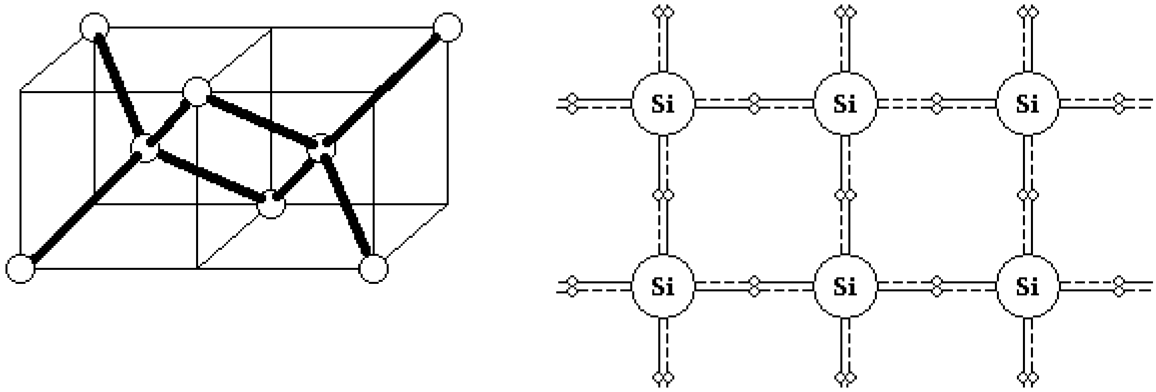


Bild 10: Das Atomgitter und seine schematische Struktur

Die relativ starke Atombindung über die vier Valenzelektronen ermöglicht kaum eine Elektrizitätsleitung, da keine freien Elektronen zur Verfügung stehen. Die wenigen freien Elektronen, die auf Grund von Gitterstörungen vorhanden sind, können Ladungen transportieren. Dazu ist zu beachten, dass (bei Raumtemperatur) Kupfer (Cu) etwa um $26*10^6$ besser leitet als Ge. Diese Art der Stromleitung nennt man Eigenleitung.
Ersetzt man im Kristall einige wenige Atome durch fünfwertige Atome wie z.B. Antimon (Sb) oder Arsen (As), so findet das fünfte Elektron keine Verbindung zu einem der Nachbarn. Es steht als freies Elektron zum Ladungstransport zur Verfügung. Man spricht von einem n-dotierten Halbleiter und von Elektronenleitung.
Ersetzt man im Kristall einige wenige Atome durch dreiwertige Atome wie z.B. Indium (In) oder Aluminium (Al), so können nur drei Elektronen an die Nachbaratome „hergeliehen" werden, um die Atombindung einzugehen. Ein Nachbarelektron des Halbleiters findet keine Verbindung zu dreiwertigen Atom, es entsteht ein „Loch" im Kristall. Dieses Elektron steht als freies Elektron zum Ladungstransport zur Verfügung. Man spricht von einem p-dotierten Halbleiter und von Löcherleitung.

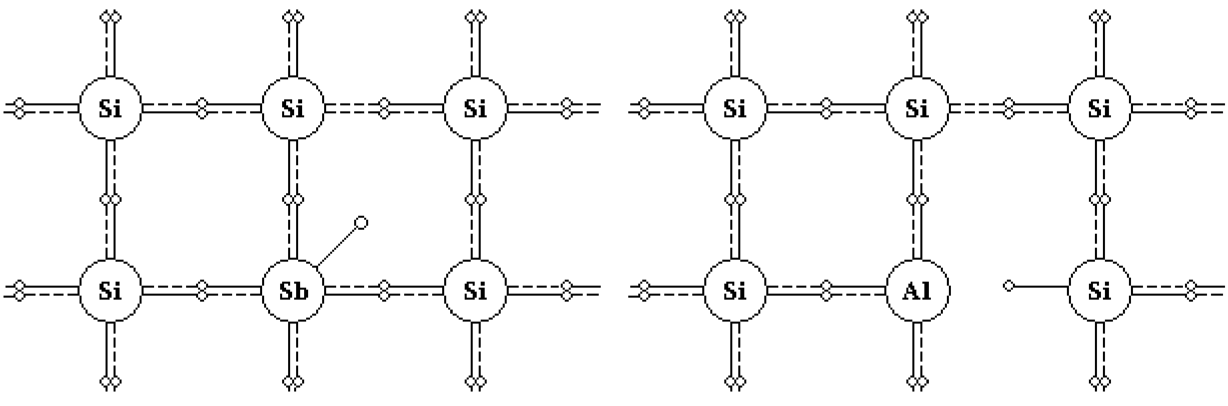


Bild 11: Schematische Kristallgitter eines n- und eines p-dotierten Halbleiters

3.3.5 Zusammenfassung zur Stromleitung

In Metallen erfolgt der Ladungstransport durch freie Elektronen.

In undotierten Halbleitern erfolgt der Ladungstransport durch Elektronen, die auf Grund von Störstellen im Kristallgitter nicht an Nachbaratome gebunden sind. In dotierten Halbleitern wird der Ladungstransport durch Elektronenleitung in n-dotierten und durch Löcherleitung im p-dotierten Halbleiter ermöglicht.

In wässrigen Lösungen (Elektrolyten) treten paarweise positiv und negativ geladene Ionen auf, welche die elektrische Ladung transportieren.

Der Stromfluss in Gasen ist nur durch Ionisation möglich.

3.4 Der elektrische Strom

Unter elektrischen Strom versteht man ganz allgemein die Bewegung elektrisch geladener Teilchen. Diese Teilchen tragen die elektrische Ladung. Die zeitliche Änderung der Ladung ist der elektrische Strom.

Elektrisch geladene Teilchen können sein:

- Elektronen (negativ geladen): Sie ermöglichen den Ladungstransport in Metallen, Halbleitern und in Kohle (C).
- Ionen (positiv oder negativ geladen): Das sind elektrisch geladene Atome oder Atomgruppen, die in Flüssigkeiten oder Gasen vorkommen und dort zur Leitung des elektrischen Stromes führen.

Je nach dem, ob ein Stoff viele oder wenige freie elektrische Ladungsträger (Elektronen oder Ionen) enthält, erfolgt der Stromtransport mit wenig oder mit viel Kraftaufwand, also mit geringem oder mit hohem Widerstand. Dabei ist zu beachten, dass der Widerstand nicht alleine von der Anzahl der freien Ladungsträger abhängig ist, sondern auch davon, wie oft ein Ladungsträger mit den fest verankerten Atomen des Kristalls zusammenstößt. Man kann daher die Stoffe in verschiedene Gruppen einteilen:

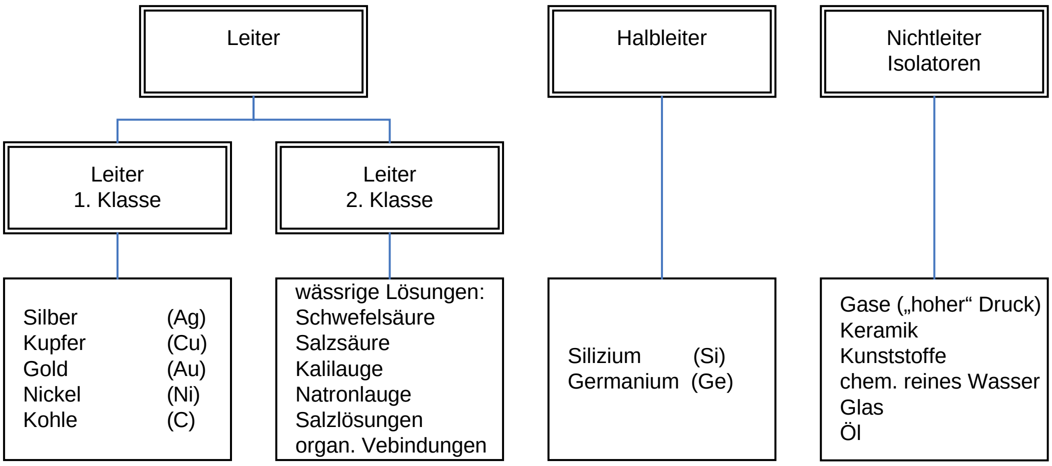


Tabelle 3: Stoffeinteilung vom elektrischen Standpunkt

Leiter sind jene Stoffe, die in festen, flüssigen oder gasförmigen Zustand den elektrischen Strom gut leiten. Dies Gruppe wird noch unterteilt in
Leiter 1. Klasse: Das sind all jene Stoffe, die beim Stromtransport keine chemische Veränderung erfahren und den Strom gut leiten.
Leiter 2. Klasse: Das sind jene Stoffe, die den Strom gut leiten und beim Stromdurchgang eine chemische Veränderung erfahren.
Halbleiter sind Stoffe, die besondere elektrische Eigenschaften aufweisen. Sie können nicht zu den Leitern gezählt werden, da sie etwa um den Faktor 10^7 schlechter leiten als Kupfer. Sie können aber auch nicht zu den Isolatoren gezählt werden, da sie den elektrischen Strom leiten.
Isolatoren oder Nichtleiter sind Stoffe, die praktisch keine freien Ladungsträger besitzen und dem Stromfluss einen sehr hohen Widerstand entgegensetzen.

In der Tabelle 4 werden die freien Elektronen pro Atom angegeben, die zum Ladungstransport zur Verfügung stehen. Natürlich kann bei einem einzelnen Atom nur eine ganzzahlige Anzahl von Elektronen zur Verfügung stehen. Die untenstehenden Werte sind Mittelwerte über sehr viele Atome.

Stoff:	Kupfer	Silber	Gold	Zinn	Quecksilber	Aluminium
	Cu	Ag	Au	Sn	Hg	Al
N/N_0	1.00	0.68	0.60	1.10	0.13	0.37

Tabelle 4: Freie Elektronen pro Atom für einige Metalle

3.4.1 Gleichstrom

Unter Gleichstrom (direct current, DC) versteht man einen elektrischen Strom der kontinuierlich, immer in der gleichen Stärke, in die selbe Richtung fließt.

Typische Gleichstromquellen sind:
Batterie, Akkumulator, Solarzelle, (elektronisch geregelte) Netzgeräte

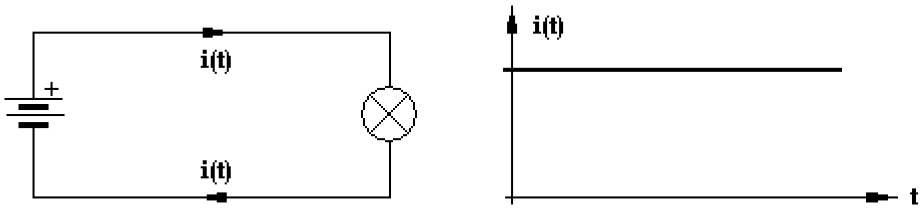


Bild 12: Die technische Stromrichtung und der zeitliche Verlauf von Gleichstrom

Die technische Stromrichtung ist die Richtung des elektrischen Stromes und verläuft vom positiven Pol der Quelle durch den Verbraucher zum negativen Pol der Quelle (siehe Pfeile in Bild 12).

Anmerkung: Die technische Stromrichtung ist daraus entstanden, dass man früher angenommen hat, dass in Metallen positive Ladungsträger den Ladungstransport bewerkstelligen. Erst später wurden die negativ geladenen Elektronen, die in Wirklichkeit den Stromfluss ermöglichen, entdeckt.

Der (technische) Strom fließt vom positiven (+) Pol der Quelle durch den Verbraucher zum negativen (-) Pol der Quelle.
Der (technische) Strom fließt vom negativen (-) Pol der Quelle durch den Erzeuger zum positiven (+) Pol der Quelle.

In der elektrotechnischen und elektronischen Praxis wird praktisch immer mit der technischen Stromrichtung gearbeitet.

Die physikalische Stromrichtung ist die Richtung, in welche sich die Elektronen im Leiter bewegen. Sie ist entgegengesetzt zur technischen Stromrichtung und erfolgt vom negativen (elektronenreichen) Pol der Quelle durch den Verbraucher zum positiven (elektronenarmen) Pol der Quelle.

Der physikalische Strom fließt vom negativen (-) Pol der Quelle durch den Verbraucher zum positiven (+) Pol der Quelle.
Der physikalische Strom fließt vom positiven (+) Pol der Quelle durch den Erzeuger zum negativen (-) Pol der Quelle.

3.4.2 Wechselstrom

Unter Wechselstrom (alternating current, AC) versteht man einen Strom, der immer wieder seine Richtung ändert. Besonderes Augenmerk wird auf sinus- bzw. kosinusförmigen Wechselstrom gelegt. Aus diesen zeitlichen Verläufen können praktisch alle anderen periodischen Signale zusammengesetzt werden.

Wechselstrom wird im zweiten Jahr der Ausbildung aus Grundlagen der Elektrotechnik der wesentliche Ausbildungsschwerpunkt sein.

Typische Wechselstromquellen sind:

Generatoren zur Erzeugung der Netz-Stromversorgung, Signalgeneratoren usw.

4 Spannung, Strom und Widerstand

In der klassischen Elektrotechnik und Elektronik gibt es drei wesentliche Größen, die miteinander verknüpft sind.

Die elektrische Spannung (voltage)
Der elektrische Strom (current)
Der elektrische Widerstand (resistance)

Wenn man Gleichstrom betrachtet, kann das folgende Wasserleitungsmodell zur Erläuterung des Stromkreises und der elektrischen Größen herangezogen werden.

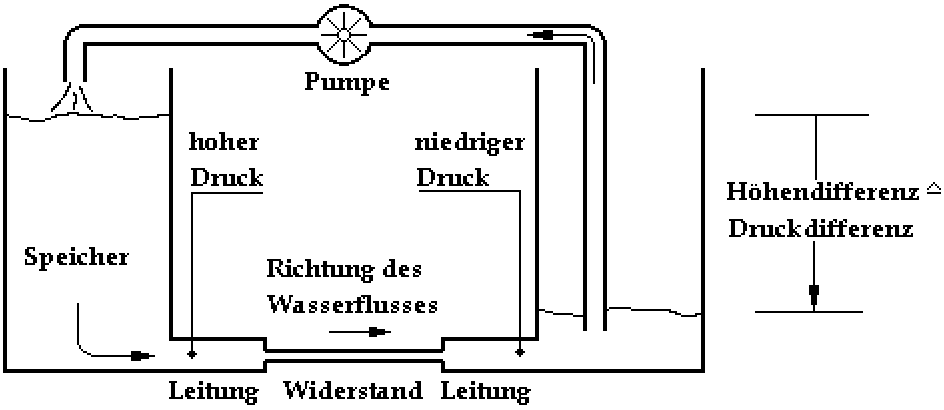


Bild 13: Wasserkreislauf

Der Druckunterschied zwischen den beiden Gefäßen bewirkt einen Wasserfluss durch das dünne Rohr zwischen den beiden Behältern.

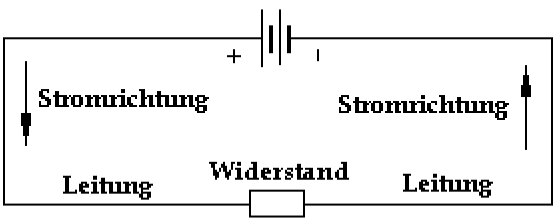


Bild 14: Stromkreis

Die Potentialdifferenz (Spannung) zwischen den beiden Polen der Quelle bewirkt einen elektrischen Strom durch den Widerstand.

Der Druckdifferenz beim Wasserkreislauf entspricht die elektrische Potentialdifferenz oder elektrische Spannung.

Der Wassermenge, die pro Zeiteinheit von einem Gefäß in das andere Gefäß fließt, entspricht die elektrische Ladungsmenge, die pro Zeiteinheit vom Pluspol zum Minuspol der Quelle fließt. Die Wassermenge pro Zeiteinheit durch die Wasserleitung rinnt, wird als (Wasser-) Strom bezeichnet; die elektrische Ladungsmenge die pro Zeiteinheit durch die Leitung fließt, ist der elektrische Strom.

Dem Widerstand, der das dünne Rohr dem Wasserfluss entgegensetzt, entspricht der elektrische Widerstand.
Ebenso, wie man den Druckunterschied zwischen den beiden Gefäßen messen kann„ kann auch der „elektrische Druckunterschied", die elektrische Spannung gemessen werden.

Die elektrische Spannung wird in Volt gemessen.

Für die elektrische Spannung wird das Symbol U, für die Maßeinheit wird das Volt mit der Abkürzung V verwendet.

U	Symbol für die Spannung
V	für die Maßeinheit Volt

So, wie man die Wassermenge, die pro Zeiteinheit (Sekunde), durch die Leitung fließt (also den Wasserstrom), messen kann, kann man auch die elektrische Ladungsmenge, die pro Zeiteinheit (Sekunde) durch die Leitung fließt (also den elektrischen Strom) messen.

Der elektrische Strom wird in Ampere gemessen.

Für den elektrischen Strom wird das Symbol I, für die Maßeinheit das Ampere mit der Abkürzung A verwendet.

I	Symbol für den Strom
A	für die Maßeinheit Ampere

Das Ampere ist im internationalen Einheitensystem (Si-System) eine Basiseinheit und ist wie folgt definiert:

Ein Ampere ist jene Stärke des elektrischen Stromes, der durch zwei geradlinige, unendlich lange, unendlich dünne Leiter, welche im Abstand von 1m parallel zueinander im leeren Raum angeordnet sind, unveränderlich fließend bewirkt, dass die beiden Leiter eine Kraft von $2*10^{-7}$ N/m (Newton pro Meter) Länge aufeinander ausüben.

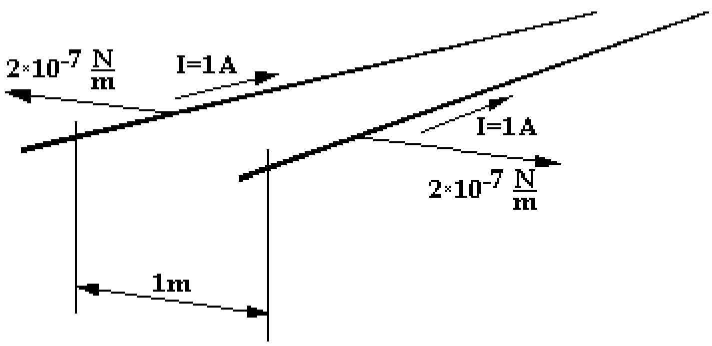


Bild 15: Zur Definition der Stromstärke

Fließt der Strom in den beiden Leitungen in die gleiche Richtung, stoßen sich die Drähte ab.
Fließen jedoch die einzelnen Ströme in entgegengesetzte Richtung, ziehen sich die Leiter an.

So wie man den Widerstand, den ein dünnes Rohr dem Wasserfluss entgegensetzt, bestimmen kann, kann auch der elektrische Widerstand angegeben werden, der dem Strom entgegengesetzt wird.

Die Größe des elektrischen Widerstands wird in Ohm gemessen.

Für die Größe des elektrischen Widerstands wird das Symbol R, für die Maßeinheit das Ohm mit der Abkürzung Ω verwendet.

R	Symbol für den Widerstand
Ω	für die Maßeinheit Ohm

4.1 Der Zusammenhang zwischen Spannung, Strom und Widerstand

Der Zusammenhang zwischen Spannung (voltage), Strom (current) und Widerstand (resistance) wird durch das Ohmsche Gesetz (Ohm's law) beschrieben:

$$\boxed{U = I * R \qquad \text{oder} \qquad I = \frac{U}{R} \qquad \text{oder} \qquad R = \frac{U}{I}}$$

die entsprechenden Maßeinheiten sind

$$[V] = [A] * [\Omega] \qquad \text{oder} \qquad [A] = \frac{[V]}{[\Omega]} \qquad \text{oder} \qquad [\Omega] = \frac{[V]}{[A]}$$

In Worten kann das Ohmsche Gesetz folgendermaßen formuliert werden:

- Je höher der Strom bei gleichbleibenden Widerstand, desto höher wird der Spannungsabfall am Widerstand.
- Je höher der Widerstand bei gleichbleibenden Strom, desto höher wird die Spannung.
- Je höher die Spannung bei gleichbleibenden Widerstand, desto höher wird der Strom durch den Widerstand.
- Je höher der Widerstand, desto kleiner wird der Strom bei gleichbleibender Spannung.
- Je höher die Spannung bei gleichbleibenden Strom, desto höher muss der Wider5stand sein.
- Je höher der Strom durch den Widerstand bei gleichbleibender Spannung, desto kleiner muss der Widerstand werden.

Der Vergleich des elektrischen Stromes mit dem Wasserleitungsmodell zeigt deutlich, dass der Wasserdruck der Spannung und die Wassermenge pro Zeiteinheit dem Strom entspricht.

Beispiel 3: Berechne die fehlende Größe mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes

a) U = 10V, R = 4Ω, I =
b) U = 30V, I = 2A, R =
c) I = 1A, R = 20Ω, U =

Beispiel 4: Welcher Strom fließt durch einen Widerstand von 80Ω, wenn am Widerstand eine Spannung von 230V anliegt?

Beispiel 5: An einem Widerstand werden 1.42V gemessen. Wie groß ist der Widerstand, wenn durch ihn ein Strom von 0.454 A fließt?

Beispiel 6: Welchen Spannungsabfall bewirkt ein Widerstand von 47 kΩ, wenn durch ihn ein Strom von 25.6 µA fließt?

Beispiel 7: Welchen Widerstand hat der Heizdraht einer TV-Bildröhre im Betrieb, wenn durch ihn ein Strom von 800mA fließt und ein Spannungsabfall von 6.3V gemessen wird?

Beispiel 8: Ein unter Umständen schon lebensgefährlicher Strom von 30mA fließt durch den menschlichen Körper und überwindet dabei einen Widerstand von 1800 Ω. Wie groß ist die Spannung, die am Körper anliegt?

4.2 Die Elektrizitätsmenge (Ladung) Q

Die Anzahl der Leitungselektronen, die an einer bestimmten Stelle durch den Leiterquerschnitt strömen, bestimmt die Wirkung des elektrischen Stromes. Je größer die Anzahl der Ladungsträger ist, desto größer wird die Wirkung sein. Die Ladung (charge) wird in Coulomb gemessen. Ein Coulomb ist jene Ladungsmenge, die bei einer Stromstärke von 1 Ampere innerhalb von einer Sekunde durch den Leiterquerschnitt strömt.
Wenn sich der Strom während der Messzeit nicht ändert, gilt

$$Q = I * t$$

Allgemein gilt

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} i(t)dt$$

Die Einheit der Ladung ist

$$[Q] = [I]*[t] = A*s = As$$

Beispiel 9: Ein Kondensator beinhaltet eine elektrischen Ladung von 6.25 C. Auf welche Dauer kann aus ihm ein Strom von 25 mA entnommen werden?

Beispiel 10: Ein Kondensator wird innerhalb einer Zeit von 4 µs mit 12.5 nA geladen. Wie groß ist die Ladung im Kondensator? Wie viele Elektronen sind in den Kondensator hineingeflossen?

Beispiel 11: Eine Autobatterie mit einer Kapazität von 36 Ah steht zum Starten des Autos zur Verfügung. Wie lange kann der Starter benützt werden, wenn er einen Strom von 240 A benötigt?

Beispiel 12: Ein elektronischer Durchgangszähler benötigt einen Strom von 37 mA. Welche Kapazität muss ein Akkumulator haben, sodass das Gerät 3 Tage lang ununterbrochen in Betrieb sein kann?

Beispiel 13: Ein ferngesteuertes Modellauto kann mit einem 3000 mAh-Akku 9 Minuten lang gesteuert werden. Wie lang kann es mit einem 3300 mAh-Akku unter gleichen Bedingungen betrieben werden?

Beispiel 14: Durch den Querschnitt eines Siliziumplättchens fließen $25*10^9$ positive und $1*10^9$ negative Ladungsträger, die jeweils eine Elementarladung tragen. Wie viel Ladung wird in einer Stunde durch das Plättchen transportiert? Wie groß ist der Strom durch das Siliziumplättchen?

4.3 Die Stromdichte S

Die auf die Querschnittsfläche bezogene Stromstärke bezeichnet man als Stromdichte (current density), für die das Symbol S verwendet wird. Ist die Stromdichte über dem Leiterquerschnitt konstant, gilt

$$S = \frac{I}{A}$$

Allgemein gilt

$$S = \frac{dI(x,y)}{dA}$$

Die Einheit der Stromdichte ist Ampere pro Quadratmeter:

$$[S] = \frac{[I]}{[A]} = \frac{A}{m^2}$$

S	Symbol für die Stromdichte
$\frac{A}{m^2}$	Einheit der Stromdichte

Die Stromdichte ist eine wichtige Größe in der Installationstechnik. Sie bestimmt im Wesentlichen die Eigenerwärmung von Elektroleitungen. Eine Überschreitung des maximal Zugelassenen Wertes um den Faktor zwei (2) bewirkt eine Vervierfachung der Verluste in der Leitung und damit eine vierfach höhere Temperatur als die maximal zugelassene Temperatur der Leitungen. Dadurch kommt es im Allgemeinen zum Schmelzen der Kunststoffisolation und damit zur Zerstörung der Elektroleitungen.

Beispiel 15: Durch einen Kupferdraht mit 1.5 mm^2 Querschnittsfläche fließen 12 A. Wie groß ist die Stromdichte in A/mm^2, wie groß ist die Stromdichte in A/m^2?

Beispiel 16: Die zulässige Stromdichte in einem Leiter ist 4.5 A/mm^2. Es sind 6.2 A zu übertragen. Wie groß muss der mindeste Leiterquerschnitt sein?

Beispiel 17: Bei einem kreisförmigen Leiter mit 1.5 mm Durchmesser sind 9.2 A zu übertragen. Wie groß ist die Stromdichte? Wie viele Elektronen fließen pro Sekunde durch den Leiterquerschnitt?

Beispiel 18: Bei einer maximal zulässigen Stromdichte von 12 A/mm^2 sind 35A zu übertragen. Wie groß muss der mindeste Leiterquerschnitt sein? Wie groß muss der mindeste Leiterdurchmesser sein?

Beispiel 19: Wie groß muss der Leiterdurchmesser aus dem vorigen Beispiel gewählt werden, wenn nur 80% der maximalen Stromdichte ausgenützt werden darf?

Beispiel 20: Ein Netztrafo soll auf der Sekundärwicklung einen Strom von 2.5A liefern. Die maximale Stromdichte beträgt 4A/mm^2. Wie groß ist der mindeste Durchmesser der Sekundärwicklung?

Der elektrische Leitwert G

Unter der elektrischen Leitfähigkeit (conductivity) versteht man die Fähigkeit eines Stoffes, den elektrischen Strom zu transportieren. Ein hoher Leitwert (conductance) bedeutet einen geringen elektrischen Widerstand, ein geringer Leitwert bedeutet einen hohen elektrischen Widerstand.

Der elektrische Leitwert ist der Kehrwert des elektrischen Widerstandes.

$$G = \frac{1}{R}$$

dann gilt für die Maßeinheit

$$[G] = \frac{1}{[R]} = \frac{1}{\frac{V}{A}} = \frac{A}{V} = S$$

Die Größe des elektrischen Leitwerts wird in Siemens gemessen.

Es wird das Symbol G für die Größe des elektrischen Leitwerts verwendet, für die Maßeinheit Siemens wird das S eingesetzt.

G	für den elektrischen Leitwert
S	für die Maßeinheit Siemens

In der englischen und amerikanischen Literatur wird oft statt der Bezeichnung Siemens das Wort mho verwendet. Es stellt „Ohm" verkehrt geschrieben dar. Auch das griechische Zeichen Ω, um die horizontale Mittellinie gespiegelt (also nach oben hin offen) wird als Symbol für die Maßeinheit Siemens oft verwendet.

Das Ohmsche Gesetz lautet mit Leitwerten angeschrieben:

$$U = \frac{I}{G} \qquad \text{oder} \qquad I = U * G \qquad \text{oder} \qquad G = \frac{I}{U}$$

das entspricht:

$$U = I * R \qquad \text{oder} \qquad I = \frac{U}{R} \qquad \text{oder} \qquad R = \frac{U}{I}$$

4.4 Der elektrische Widerstand R

In er Elektrotechnik tritt der Widerstand nicht nur als physikalisches Phänomen (resistance) auf, es werden auch noch Bauelemente (resistor) für bestimmte Zwecke, die einen bestimmten Widerstandswert aufweisen, eingesetzt.

- Widerstände für Heizzwecke
- Widerstände zur Strombegrenzung
- Präzisionswiderstände in der Messtechnik
- Einstellbare Widerstände

Es gibt Widerstände, die sich selbstständig ändern, abhängig von der Temperatur, der angelegten Spannung, von ihrer Beleuchtung, usw.

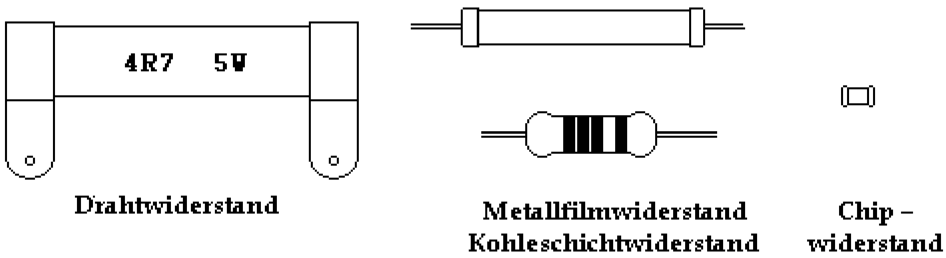


Bild 16: Ausführungsformen von Widerständen

4.4.1 Der elektrische Widerstand eines Leiters

Dazu wird ein Stück elektrischer Leiter mit einer Querschnittsfläche A und der Länge l betrachtet.

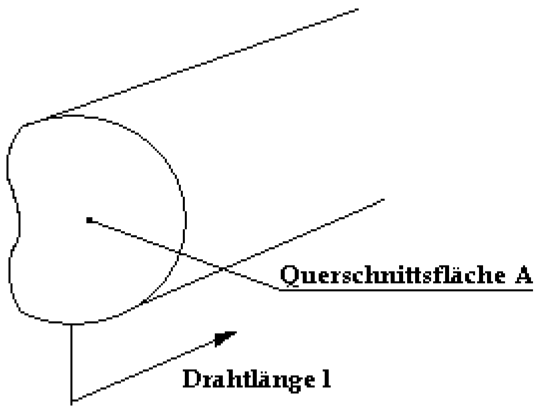


Bild 17: ein Stück eines elektrischen Leiters

Der elektrische Strom findet in einem Leiterstück einen umso größeren Widerstand vor, je größer die Länge l des Leiters und je kleiner die Querschnittsfläche A ist. Wird der Leiter aus einem gering leitfähigen Material gefertigt, wird der Widerstand größer sein als bei der Fertigung aus einem gut leitenden Material.

Die Leitfähigkeit des Materials ist für jedes Material eine spezifische Größe und wird daher spezifische Leitfähigkeit genannt. Sie ist weitgehend für jedes Material eine konstante Größe, wenn auch die Umgebung (vor allem die Temperatur) konstant ist.

Die Größe der spezifischen Leitfähigkeit wird in $\frac{[G]*[l]}{[A]} = \frac{S*m}{m^2} = \frac{S}{m}$ gemessen.

Es wird für die spezifische Leitfähigkeit das Symbol κ (Kappa) und für die Maßeinheit entweder $\frac{S}{m}$ oder $\frac{S*m}{mm^2}$ verwendet.

κ	für die spezifische elektrische Leitfähigkeit
$\frac{S}{m}$ oder $\frac{S*m}{mm^2}$	für die Maßeinheit

Als weitere Materialkenngröße gibt es auch noch den spezifischen Widerstand mit dem Symbol ρ (Rho). Der spezifische Widerstand ist der Kehrwert des spezifischen Leitwertes und es gilt für die Größengleichung

$$\rho = \frac{1}{\kappa}$$

und für die Einheiten

$$[\rho] = \frac{1}{[\kappa]} = \Omega * m \qquad \text{oder} \qquad \frac{\Omega * mm^2}{m}$$

Wird die Länge in m und der Querschnitt in m^2 angegeben, so ist es sinnvoll, mit der Einheit $\Omega * m$ zu rechnen. Liegen die Angaben über die Länge in m und über den Querschnitt in mm^2 vor, ist es sinnvoll die Material Einheit $\frac{\Omega * mm^2}{m}$ zu verwenden.

Material		**κ** in $\frac{S * m}{mm^2}$	**ρ** in $\frac{\Omega * mm^2}{m}$
Silber	Ag	60 ... 62	0.0167 ... 0.0161
Kupfer	Cu	57	0.0175
Gold	Au	45	0.0222
Aluminium	Al	36	0.0278
Konstantan	54% Cu, 45% Ni, 1% Mn	2	0.5

Tabelle 5: spezifischer Leitwert und spezifischer Widerstand einiger wichtiger Materialien

Ein spezifischer Widerstand von 0.0175 $\frac{\Omega * mm^2}{m}$ bedeutet, dass ein Draht mit einer Länge von 1m und einem Querschnitt von 1mm^2 einen Widerstand von 0.0175 Ω aufweist.

Aus der Überlegung, dass der Widerstand steigt, wenn der spezifische Widerstand steigt, dass der Widerstand steigt, wenn die Drahtlänge zunimmt und dass der Widerstand sinkt, wenn die Querschnittsfläche steigt, erhält man

$$R = \frac{\rho * l}{A} \qquad \text{oder} \qquad R = \frac{l}{\kappa * A}$$

Einheit	**einsetzen in**	
$[\rho] = \frac{\Omega * mm^2}{m}$	[A] = mm^2	[l] = m
$[\kappa] = \frac{S * m}{mm^2}$	[A] = mm^2	[l] = m
$[\rho] = \Omega * m$	[A] = m^2	[l] = m
$[\kappa] = \frac{S}{m}$	[A] = m^2	[l] = m

Tabelle 6: Regeln zum Einsetzen der Einheiten bei der Berechnung des elektrischen Widerstandes oder des Leitwertes

Beispiel 21: Welchen Gleichstromwiderstand hat eine Datenüberragungsleitung aus Kupfer mit einem Drahtdurchmesser von 0.4 mm und einer Länge von 250 m? Welche Spannung ist notwendig, dass ein Strom von 20mA fließt? Anmerkung: es wird eine Hin- und eine Rückleitung von je 250 m benötigt!

Beispiel 22: Welche Drahtlänge ist für einen Vorschaltwiderstand von 560 Ω aus Konstantandraht bei einem Drahtdurchmesser von 0.3 mm notwendig?

Beispiel 23: Welchen Durchmesser hat eine Freileitung aus Aluminium, deren Widerstand 1.35 Ω bei einer Länge von 800 m beträgt?

Beispiel 24: Zu einem Motor führ eine 200 m lange Doppelleitung aus Kupfer mit 1.5 mm^2 Querschnittsfläche. Wie groß ist der Widerstand dieser Leitung? Wie groß ist der Spannungsabfall entlang dieser Leitung, wenn ein Strom von 8.5 A fließt?

Beispiel 25: Eine Freileitung aus Aluminium besteht aus 19 verdrillten Einzeldrähten und hat 0.194 Ω Widerstand pro 1000 m Länge. Wie groß ist der Durchmesser eines einzelnen Drahtes (Ader)? Wie groß ist der Gesamtdurchmesser der Leitung?

4.4.2 Die Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstandes

Der elektrische Widerstand ist von der Temperatur abhängig. Im metallischen Leiter hängt der Widerstand davon ab, wie oft ein freies Leitungselektron mit einem anderen Leitungselektron oder mit einem Atomkern des Kristallgitters zusammenstößt. Je mehr Zusammenstöße passieren, umso größer wird der elektrische Widerstand.

Im metallischen Leiter steigt der Widerstand im Allgemeinen bei steigender Temperatur,

weil die Leitungselektronen bei höherer Temperatur mehr „herumschwirren“ als bei tiefen Temperaturen. Beim absoluten Nullpunkt, also bei 0K oder –273.16°C haben metallische Leiter keinen Widerstand, sie sind Supraleiter.

Der elektrische Widerstand im Halbleiter hängt davon ab, wie viele freie Elektronen bzw. wie viele Löcher zum Ladungstransport zur Verfügung stehen. Da die gleichmäßige (homogene) Kristallstruktur mit steigender Temperatur allmählich aufbricht, werden bei steigender Temperatur mehr freie Ladungsträger zur Stromleitung zur Verfügung stehen als bei niedrigen Temperaturen.

Der Widerstand eines Halbleiters sinkt im Allgemeinen bei steigender Temperatur.

Beim absoluten Nullpunkt ist ein Halbleiter ein idealer Isolator.

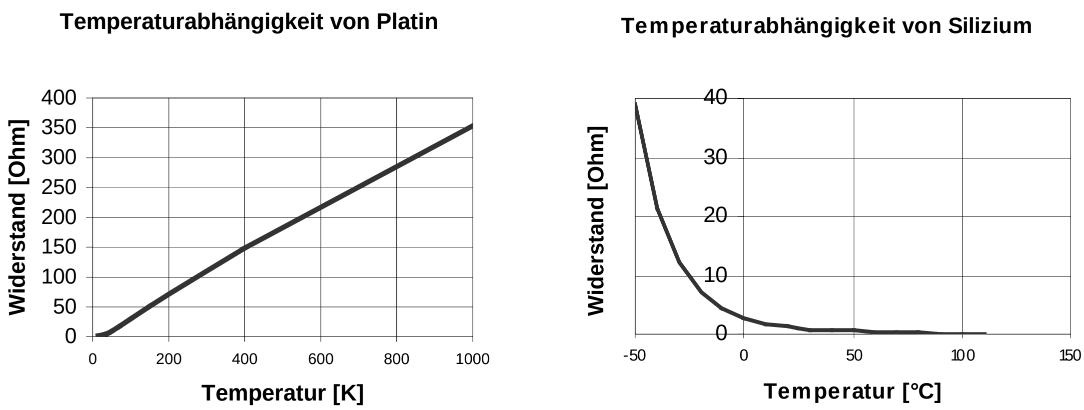
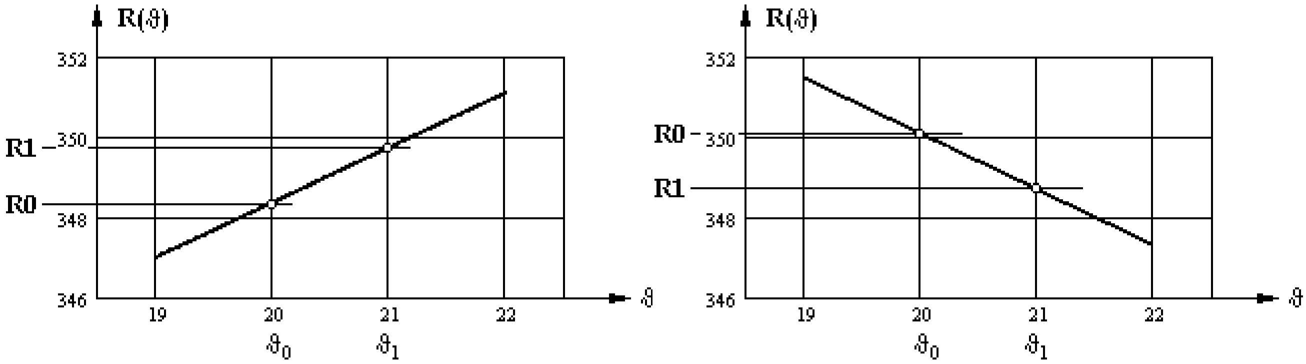


Bild 18: Der Widerstandsverlauf bei metallischen Leitern und bei Halbleitern

Beim Ladungstransport in Flüssigkeiten oder in Gasen kann keine allgemein gültige Aussage über den Temperaturverlauf des elektrischen Widerstandesgetroffen werden, da bei diesen Medien der Stromtransport sehr kompliziert ist.

Die Abhängigkeit des elektrischen Widerstandes eines Stoffes von der Temperatur wird (in beschränkten Temperaturbereichen) mit Hilfe des (linearen) Temperaturkoeffizienten α angegeben.

Der Temperaturkoeffizient α des elektrischen Widerstandes ist jene Größe die angibt, um wie viel Teile vom Ganzen sich der Widerstand bei einer Temperaturerhöhung um ein Grad (Celsius oder Kelvin) erhöht.



positiver Temperaturkoeffizient negativer Temperaturkoeffizient

Bild 19: Zur Erklärung des Temperaturkoeffizienten

Dann gilt für den Temperaturkoeffizienten

$$\alpha = \frac{1}{R_0} * \frac{R_1 - R_0}{\vartheta_1 - \vartheta_0} \qquad \text{mit den Einheiten} \qquad [\alpha] = \frac{1}{[R]} * \frac{[R]}{[\vartheta]} = \frac{1}{[\vartheta]} = \frac{1}{K}$$

Durch umstellen dieser Formel erhält man

$$R_1 = R_0 * (1 + \alpha * (\vartheta_1 - \vartheta_0))$$

wobei

R_0 ... Widerstand bei der Temperatur ϑ_0

R_1 ... Widerstand bei der Temperatur ϑ_1

ist.

Für die Ausgangstemperatur ϑ_0 wird sehr oft die Temperatur 20°C verwendet. Dann erhält man eine Zahlenwertgleichung, in welche die Temperatur in °C einzusetzen ist:

$$R_1 = R_0 * (1 + \alpha * (\vartheta_1 - 20°C))$$

Die Gleichungen, die nur eine lineare Temperaturabhängigkeit des Widerstandes beschreiben, gelten für metallische Widerstände im Bereich von etwa –30°C bis zirka + 70°C. Für einen größeren Temperaturbereich muss auch eine quadratische Temperaturabhängigkeit berücksichtigt werden und es gilt

$$R_1 = R_0 * (1 + \alpha * (\vartheta_1 - \vartheta_0) + \beta * (\vartheta_1 - \vartheta_0)^2)$$

wobei β der quadratische Temperaturkoeffizient mit der Einheit $[\beta] = \frac{1}{K^2}$.

Material		Temperaturkoeffizient α in K^{-1}
Kupfer	Cu	$3.93*10^{-3}$
Aluminium	Al	$4.07*10^{-3}$
Eisen	Fe	$4.0*10^{-3}$ ... $6.0*10^{-3}$
Konstantan		$35*10^{-6}$
Kohlenstoff	C	$0.4*10^{-3}$
Nickel	Ni	$4.0*10^{-3}$ ... $6.0*10^{-3}$
Wismut	Bi	$4.2*10^{-3}$
Wolfram	W	$4.8*10^{-3}$

Tabelle 7: Linearer Temperaturkoeffizient α einiger wichtiger Materialien

Unter Kaltleiter versteht man Bauelemente, die im kalten Zustand besser leiten als im warmen Zustand. Im kalten Zustand ist der Widerstand geringer als im warmen Zustand. Sie haben einen positiven Temperaturkoeffizienten α.
Unter Heißleiter versteht man Bauelemente, die im heißen Zustand besser leiten als im kalten Zustand. Im heißen Zustand ist der Widerstand geringer als im kalten Zustand. Sie haben einen negativen Temperaturkoeffizienten α.

Beispiel 26: Die Feldwicklung aus Kupfer eines Elektromotors hat bei 20°C einen Widerstand von 500 Ω. Welchen Widerstand hat sie beim Betrieb bei 62°C?

Beispiel 27: Ein Kohleschichtwiderstand hat einen Nennwiderstand von 1200 Ω bei 20°C und wird im Betrieb um 23° erwärmt. Wie groß ist sein Widerstand im Betrieb, wenn die Umgebungstemperatur 40°C beträgt?

Beispiel 28: Der Widerstand der Feldwicklung aus Kupfer eines Elektromotors wird bei 25°C mit 512 Ω gemessen. Wie groß ist der Nennwiderstand bei 20°C? Unmittelbar nach dem Betrieb des Motors wird ein Widerstand von 617 Ω gemessen. Wie hoch ist die durchschnittliche Temperatur der Wicklung?

Beispiel 29: Berechne den Widerstand einer Glühlampe, deren Glühfaden aus Wolfram besteht. Der Durchmesser des Fadens beträgt 24 µm und ist 300 mm lang. Wie groß ist der Widerstand bei 20°C (ohne Temperaturerhöhung), wie hoch ist der Widerstand bei 2300°C, wenn auch der quadratische Temperaturkoeffizient $\beta=1*10^{-6}$ berücksichtigt wird? Wie hoch ist der Stromstoß beim Einschalten der Glühlampe (bei einer Spannung von 230V)? Wie hoch ist der Strom, der im Betrieb (bei 2300°C) fließt?

Beispiel 30: Ein Widerstand aus Wismut hat bei 80°C einen Widerstand von 530 Ω. Wie groß ist sein Widersand bei 20°C?

4.5 Schaltung von Widerständen
4.5.1 Die Serienschaltung von Widerständen

Sind in einem Stromkreis mehrere Widerstände (Verbraucher) hintereinandergeschaltet, so dass durch alle Widerstände der selbe Strom fließt, so bezeichnet man das als Reihen- oder Serienschaltung.

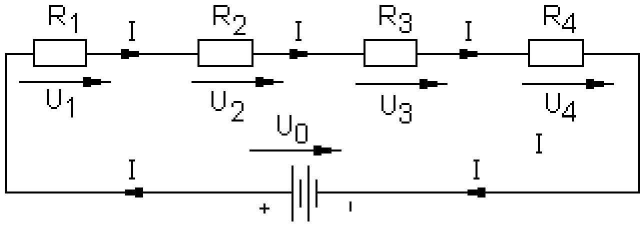


Bild 20: Serienschaltung von Widerständen

Bei der Serienschaltung (series connection) ist der Strom durch alle Widerstände gleich groß. Der Spannungsabfall an den einzelnen Widerständen kann mit dem ohmschen Gesetz berechnet werden und es gilt:

$$U_1 = I * R_1 \qquad U_2 = I * R_2 \qquad U_3 = I * R_3 \qquad U_4 = I * R_4$$

Für die gesamte Spannung U_0 erhält man einerseits:

$$U_{ges} = U_0 = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 = I * R_1 + I * R_2 + I * R_3 + I * R_4 = I * (R_1 + R_2 + R_3 + R_4)$$

Andererseits gilt aber auch das ohmsche Gesetz für die gesamte Schaltung:

$$U_{ges} = I * R_{ges}$$

Setzt man die beiden letzten Ausdrücke für die Gesamtspannung gleich, kann man durch den Strom I dividieren (kürzen) und man erhält schließlich

$$R_{ges} = R_1 + R_2 + R_3 + R_4$$

Allgemein gilt bei der Serienschaltung von Widerständen, dass sich der Gesamtwiderstand aus der Summe der einzelnen Teilwiderstände ergibt.

$$R_{ges} = \sum_{i=1}^{n} R_i$$

Für den Gesamtleitwert der Serienschaltung gilt:

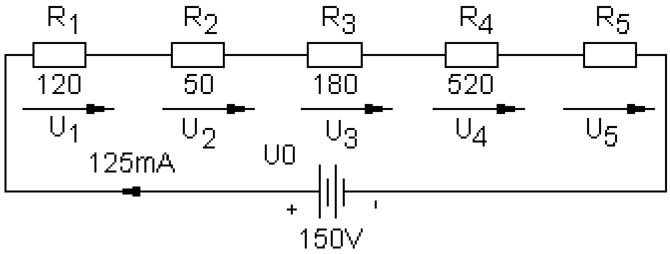
$$G_{ges} = \frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1 + R_2 + R_3 + \ldots} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} R_i}$$

Bei der Serienschaltung ist der Gesamtwiderstand stets größer als der größte Einzelwiderstand.

Je größer der Einzelwiderstand ist, desto größer ist der Spannungsabfall (voltage drop) an ihm.

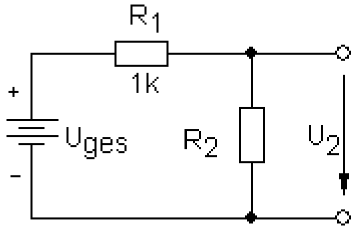
Alle Spannungsabfälle an den Einzelwiderständen addiert ergeben die Gesamtspannung (total voltage) an der Serienschaltung.

Beispiel 31:



Alle Widerstandswerte sind in der Einheit Ω angegeben. Wie groß ist die Spannung U_5? Wie groß sind die Werte von R_5, U_1, U_2, U_3, U_4 und R_{ges}?

Beispiel 32:

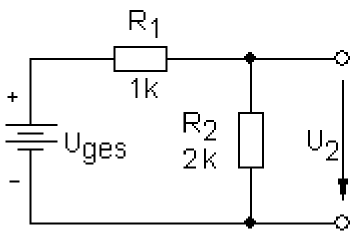


Das Verhältnis $\frac{R_2}{R_1} = 4$. Wie groß ist R_2? Wie groß ist der Spannungsabfall am Widerstand R_1 und am Widerstand R_2 wenn die Spannung $U_{ges} = 20V$ ist? Wie groß ist das Verhältnis $\frac{U_2}{U_1}$?

Für die Aufteilung der Spannungsabfälle U_1 und U_2 an den beiden Widerständen R_1 und R_2 gilt

$$\frac{R_2}{R_1} = \frac{U_2}{U_1}$$

Beispiel 33:

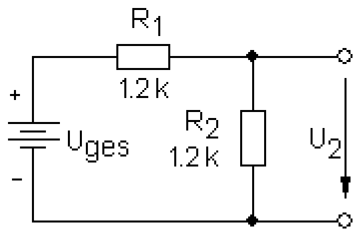


Die Gesamtspannung U_{ges} beträgt 15V. Wie groß ist der Gesamtwiderstand R_{ges} der beiden Widerstände? Wie groß ist der Strom I durch die Quelle? Wie groß ist die Spannung U_2? Wie groß ist das Verhältnis $\frac{U_2}{U_{ges}}$ und wie groß ist das Verhältnis $\frac{R_2}{R_{ges}}$?

Am Spannungsteiler gilt für die Widerstands- und Spannungsverhältnisse:

$$\frac{Teilspannung}{Gesamtspannung} = \frac{Teilwiders\tan d}{Gesamtwiders\tan d}$$

Beispiel 34: Ein Spannungsteiler (voltage divider) besteht aus zwei Widerstanden zu je 1.2kΩ mit einer Toleranz von ±5%. Die Gesamtspannung beträgt 5V. Wie groß ist die Spannung am Widerstand R_2 mindestens, wie groß ist die Spannung am Widerstand R_2 maximal? Wie groß ist die maximale und minimale Abweichung vom Nominalwert (R1 = R2 = 1200Ω) in Prozent?



R1/Ω	R2/Ω	U2/V
1260	1260	
1200	1260	
1140	1260	
1260	1200	
1200	1200	
1140	1200	
1260	1140	
1200	1140	
1140	1140	

4.5.2 Die Parallelschaltung von Widerständen

Sind in einem Stromkreis mehrere Widerstände so zusammengeschaltet, dass alle Widerstände an der selben Spannung liegen, so wird das als Parallelschaltung bezeichnet.

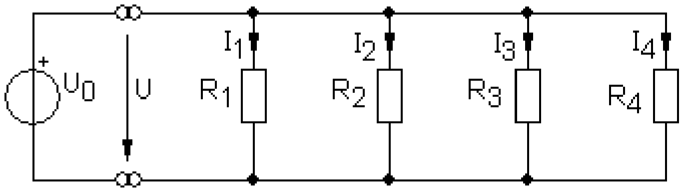


Bild 21: Parallelschaltung von Widerständen

Bei der Parallelschaltung (parallel connection) von Widerständen ist die Spannung U an allen Widerständen gleich groß. Der Strom durch die einzelnen Widerstände ist im Allgemeinen unterschiedlich und kann mit Hilfe des ohmschen Gesetzes berechnet werden. Für die im Bild 21 dargestellte Schaltung gilt:

$$I_1 = \frac{U}{R_1} \qquad I_2 = \frac{U}{R_2} \qquad I_3 = \frac{U}{R_3} \qquad I_4 = \frac{U}{R_4}$$

$$I_{ges} = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{U}{R_1} + \frac{U}{R_2} + \frac{U}{R_3} + \frac{U}{R_4} = U * \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right)$$

vergleicht man diesen Ausdruck mit

$$I_{ges} = \frac{U}{R_{ges}} = U * \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} \right)$$

kann man aus den letzten beiden Termen U kürzen und man erhält schließlich

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4}$$

Wird nun noch der Kehrwert des Widerstandes mit Hilfe des Leitwertes ausgedrückt, liefert das

$$G_{ges} = G_1 + G_2 + G_3 + G_4$$

Allgemein gilt bei der Parallelschaltung von Widerständen, dass sich der Gesamtleitwert aus der Summe der einzelnen Teilleitwerte ergibt.

$$G_{ges} = \sum_{i=1}^{n} G_i$$

Für den Gesamtwiderstand der Parallelschaltung gilt:

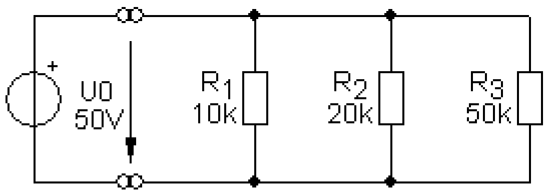
$$R_{ges} = \frac{1}{G_{ges}} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \ldots} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{R_i}}$$

Bei der Parallelschaltung ist der Gesamtleitwert stets größer als der größte Einzelleitwert.
Bei der Parallelschaltung ist der Gesamtwiderstand stets kleiner als der kleinste Einzelwiderstand.

Je größer der Einzelleitwert ist, desto größer ist der Strom durch ihn.
Je kleiner der Einzelwiderstand ist, desto größer ist der Strom durch ihn.

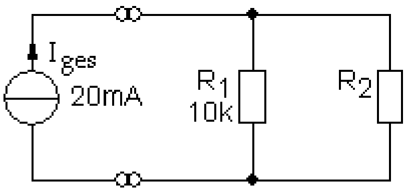
Alle Ströme durch die Einzelwiderstände addiert ergeben den Gesamtstrom durch die Parallelschaltung.

Beispiel 35:



Gesucht sind die Teilströme, der Gesamtstrom, der Gesamtwiderstand und der Gesamtleitwert.

Beispiel 36:



Das Verhältnis zwischen den Widerständen $\frac{R_2}{R_1} = \frac{1}{5}$.

Berechne R_2 und R_{ges}. Berechne die Spannung, die an den beiden Widerständen anliegt. Berechne I_1 der durch R_1 fließt und I_2 der durch R_2 fließt. Wie groß ist das Verhältnis von $\frac{I_2}{I_1}$? Wie groß ist $\frac{I_2}{I_{ges}}$ und $\frac{R_2}{R_{ges}}$?

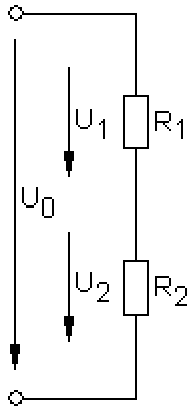
Beispiel 37: Zwei Glühlampen, die eine mit einem Warmwiderstand von R1 = 1936Ω, die mit einem Warmwiderstand von R2 = 434Ω liegen parallel geschaltet an einer Spannung von 220V. Wie groß sind die einzelnen Ströme, wie groß ist der Gesamtwiderstand, wie groß ist der Gesamtstrom? Wie groß sind die Werte bei einer Spannung von 230V?

Beispiel 38: Zu einem Widerstand von 680Ω ist ein Widerstand parallel zu schalten, dass der Gesamtstrom 200µA fließt. Wie groß ist der Gesamtwiderstand, wie groß ist der parallel zu schaltende Widerstand, wie groß sind die Teilströme durch diese beiden Widerstände?

4.5.3 Serien- und Parallelschaltung zweier Widerstände

Einen wichtigen Anwendungsfall der Zusammenschaltung zweier Widerstände tritt bei der Messbereichserweiterung (range extension) von Spannungs- oder Strommessgeräten auf.

4.5.3.1 Widerstand und Leitwert zweier in Serie geschalteter Widerstände



$$\frac{1}{G_{ges}} = \frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}$$

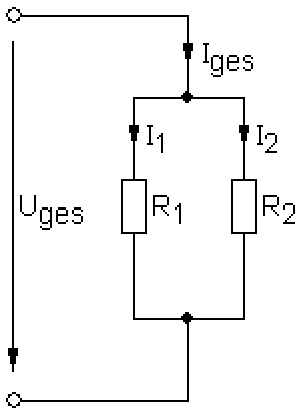
$$G_{ges} = \frac{1}{\frac{1}{G_1} + \frac{1}{G_2}} = \frac{G_1 * G_2}{G_1 + G_2}$$

$$\boxed{R_{ges} = R_1 + R_2}$$

$$\boxed{G_{ges} = \frac{G_1 * G_2}{G_1 + G_2}}$$

Bild 22: Serienschaltung zweier Widerstände

4.5.3.2 Widerstand und Leitwert zweier parallel geschalteter Widerstände



$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$R_{ges} = \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2}$$

$$\boxed{G_{ges} = G_1 + G_2}$$

$$\boxed{R_{ges} = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2}}$$

Bild 23: Parallelschaltung zweier Widerstände

R_1 in Ω	R_2 in Ω	$R_1 + R_2$ in Ω	$R_1 // R_2$ in Ω
1k	1	1.001k ~ 1k	0.999 ~ 1
1k	10	1.01k	9.91
1k	100	1.10k	90.9
1k	1k	2.0k	500
1k	10k	11k	909
1k	100k	101k	991
1k	1Meg	1.001Meg ~ 1Meg	999 ~ 1k

Tabelle 8: Werte bei Serien- und Parallelschaltung zweier Widerstände

Folgerungen aus der Tabelle 8:

Ist bei der Serienschaltung ein Widerstand wesentlich größer als der zweite, so wird der Gesamtwiderstand praktisch nur vom größeren Widersand bestimmt.

Bei der Serienschaltung ist der Gesamtwiderstand stets größer als der größte Widerstand.

Ist bei der Parallelschaltung ein Widerstand wesentlich kleiner als der zweite, so wird der Gesamtwiderstand praktisch nur vom kleineren Widerstand bestimmt.

Bei der Parallelschaltung ist der Gesamtwiderstand stets kleiner als der kleinste Widerstand.

4.5.3.3 Die Serienschaltung von n gleichen Widerständen

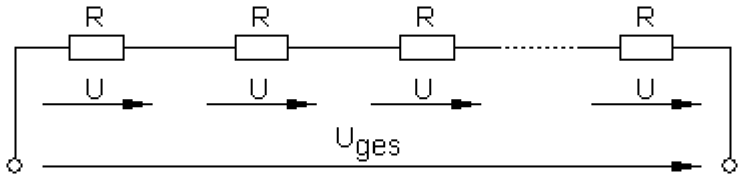


Bild 24: Serienschaltung von n gleichen Widerständen

$$R_{ges} = R + R + R + ... + R = n * R \qquad \boxed{R_{ges} = n * R}$$

$$G_{ges} = \frac{1}{R + R + R + ... + R} = \frac{1}{n * R} = \frac{1}{n} * \frac{1}{R} = \frac{1}{n} * G \qquad \boxed{G_{ges} = \frac{1}{n} * G}$$

Der Strom durch die einzelnen Widerstände ist gleich dem Gesamtstrom:

$$\boxed{I_{ges} = I}$$

Die Gesamtspannung setzt sich aus den einzelnen gleich großen Teilspannungen zusammen:

$$\boxed{U_{ges} = n * U}$$

4.5.3.4 Die Parallelschaltung von n gleichen Widerständen

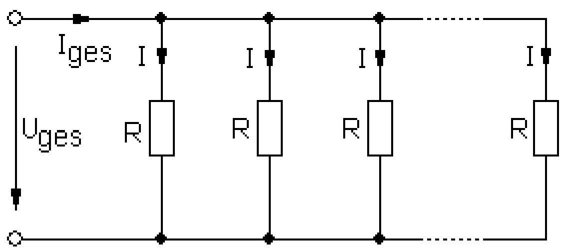


Bild 25: Parallelschaltung von n gleichen Widerständen

$$G_{ges} = G + G + G + ... + G = n * G \qquad \boxed{G_{ges} = n * G}$$

$$R_{ges} = \frac{1}{G_{ges}} = \frac{1}{n * G} = \frac{1}{n} * \frac{1}{G} = \frac{1}{n} * R \qquad \boxed{R_{ges} = \frac{1}{n} * R}$$

Der Gesamtstrom setzt sich aus den einzelnen, gleich großen Teilströmen zusammen:

$$\boxed{I_{ges} = n * I}$$

Die Spannung ist an allen Widerständen gleich groß: $\boxed{U_{ges} = U}$

Beispiel 39: Es werden 16 Stück 47Ω Widerstände parallel geschaltet und an eine Spannung von 235V gelegt. Wie groß sind die Teilströme, der Gesamtstrom und der Gesamtwiderstand?

Beispiel 40: Welche Gesamtwiderstände erhält man, wenn man sechs Widerstände mit je 1.2kΩ schrittweise zueinander parallel schaltet?

Beispiel 41: Aus wie viel Widerständen besteht die Parallelschaltung aus lauter 8kΩ Widerständen, wenn bei einer Spannung von 12V ein Strom von 6mA fließt?

Beispiel 42: An einer Spannung von 230V liegen 20 Lampen in Serie geschaltet. Es fließt ein Strom von 250mA. Wie groß ist der Widerstand einer einzelnen Lampe?

Beispiel 43: Wie viel gleiche Widerstände mit 180Ω müssen in Serie geschaltet werden, dass bei einer Gesamtspannung von 110V ein Strom von höchstens 75mA fließt.

4.6 Gemischte Schaltungen von Widerständen

Unter gemischten Schaltungen von Widerständen versteht man solche Widerstandsanordnungen, die auf Serien- oder Parallelschaltungen zurückgeführt werden können. Diese lassen sich schrittweise (einfach) berechnen.

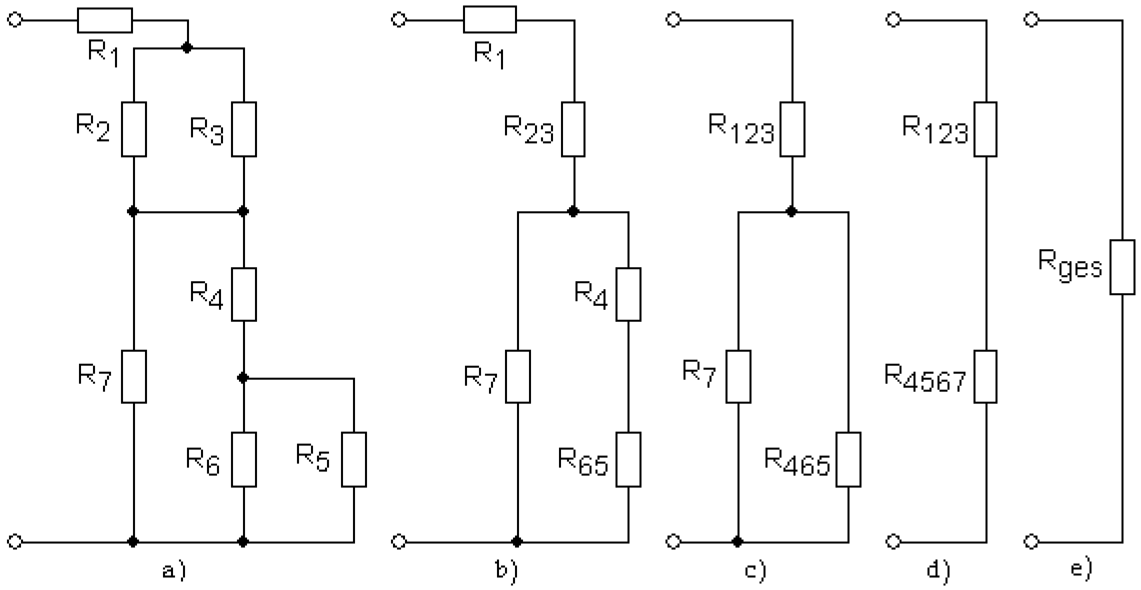
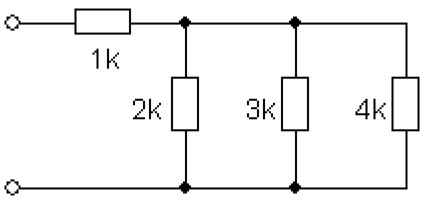


Bild 26: Die schrittweise Vereinfachung der Schaltung

In jedem Berechnungsschritt werden einfache Serien- oder Parallelschaltungen von mehreren Widerständen durch ihren entsprechenden Wert ersetzt, bis endlich der Gesamtwiderstand übrig bleibt.

Im Bild 26 a werden die parallel geschalteten Widerstände R_2 und R_3 durch R_{23} sowie die Parallelschaltung von R_5 und R_6 durch R_{56} zusammengefasst. Daraus entsteht die Schaltung im Bild 26 b. In dieser Schaltung werden die in Serie geschalteten Widerstände R_1 und R_{23} durch den Widerstand R_{123} sowie die Serienwiderstände R_4 und R_{56} durch R_{456} ersetzt; das Ergebnis ist im Bild 26 c dargestellt. Nun werden die parallel liegenden Widerstände R_7 und R_{456} durch R_{4567} ersetzt. Daraus erhält man die Schaltung, wie sie in Bild 26 d gezeichnet ist. Endlich werden die beiden Widerstände R_{123} und R_{4567} zum Gesamtwiderstand Rges zusammengefasst.

Beispiel 44:

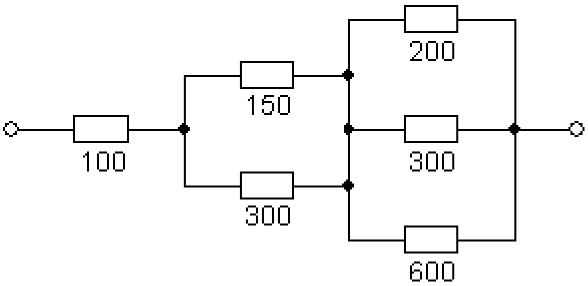


Berechne den Gesamtwiderstand dieser Widerstandsanordnung.

Beispiel 45: Berechne den Gesamtwiderstand der Schaltung aus Bild 26, wenn alle Widerstände den Wert 10kΩ haben.

Beispiel 46: Berechne den Gesamtwiderstand der Schaltung aus Bild 26, wenn der Widerstandswert der Widerstandsnummer in kΩ entspricht (R_1=1k, R_2=2k, R_3=3k, ...).

Beispiel 47:

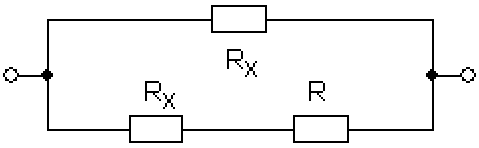


Berechne den Gesamtwiderstand der nebenstehenden Schaltung.

Beispiel 48: Berechne den Gesamtwiderstand der Schaltung aus **Beispiel 47**, wenn alle Widerstände den Wert 100Ω haben.

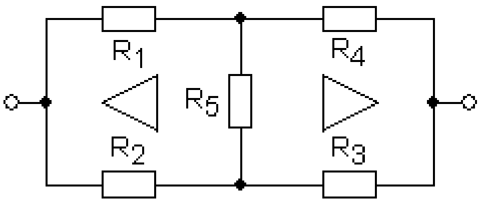
Beispiel 49: Wie groß muss ein einzelner Widerstand aus der Schaltung aus **Beispiel 47** sein, so dass der Gesamtwiderstand 7.5kΩ wird (alle Einzelwiderstände gleich groß)?

Beispiel 50: Zum Widerstand R wird ein Widerstand R_x in Serie geschaltet. Zu der Serienschaltung wird ein weiterer Widerstand mit demselben Wert R_x parallel geschaltet. Wie groß muss R_x sein, sodass der Gesamtwiderstand den Wert R beibehält? Wie groß ist R_x, wenn R = 1kΩ ist?



4.7 Die Stern-Dreieck-Transformation

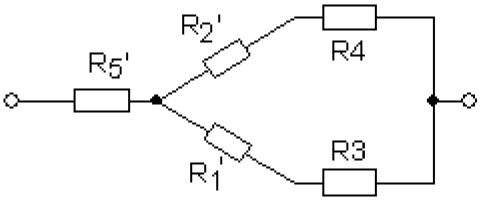
Mit der Methode, die Widerstandsschaltung durch Zusammenfassen von in Serie oder parallel geschalteter Widerstände den Gesamtwiderstand zu bestimmen, kann nur ein kleiner Teil der möglichen Schaltungen berechnet werden. Ein wesentliches Hilfsmittel zur Berechnung einer Gruppe von Schaltungen ist die Stern-Dreieck-Transformation. Diese Methode hat ihren Namen vom grafischen Bild der Widerstände, wie sie zusammengeschaltet sind. Sie wird in der Nachrichtentechnik und Hochfrequenztechnik als Π-T-Transformation bezeichnet. An Hand des folgenden Beispiels wird die Methode erläutert.



Diese Schaltung kann mit der Methode der Zusammenfassung von parallel oder in Serie liegenden Widerständen nicht gelöst werden.
Die in der Schaltung eingezeichneten Dreiecke sollen die „Dreieckschaltung“ der Widerstände R_1, R_2 und R_5, bzw. R_3, R_4 und R_5 symbolisieren.

Bild 27: Eine Brückenschaltung von Widerständen

Die Lösung der Aufgabe besteht darin, dass eines der beiden Dreiecke in eine entsprechende Sternschaltung umzuwandeln.



Wenn es also gelingt, drei Widerstände in Sternschaltung so zu dimensionieren, dass sie zwischen den einzelnen Klemmen denselben Widerstand haben, wie die Dreieckschaltung, dann ist das Problem gelöst.

Bild 28: Die Brückenschaltung, in der ein Dreieck in einen Stern umgewandelt wurde

Es muss also die Sternschaltung, die auch T-Schaltung genannt wird, die gleichen Eigenschaften wie die Dreieckschaltung, welche auch Π-Schaltung genannt wird, aufweisen.

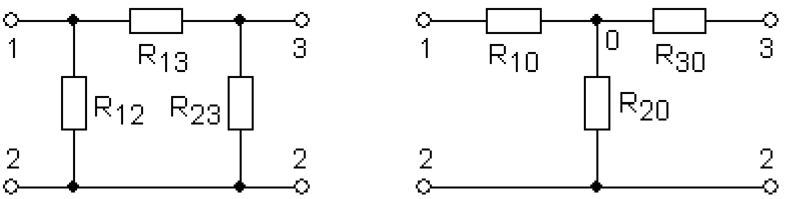


Bild 29: Die Π- oder Dreieck-Schaltung und ihre äquivalente T- oder Stern-Schaltung

Es muss also zwischen den Klemmen 1 und 2 gelten: $$R_{10} + R_{20} = \frac{R_{12} * (R_{13} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

Zwischen den Klemmen 1 und 3 gilt: $$R_{10} + R_{30} = \frac{R_{13} * (R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

Und zwischen den Klemmen 2 und 3 gilt: $$R_{20} + R_{30} = \frac{R_{23} * (R_{12} + R_{13})}{R_{12} + R_{13} + R_{23}}$$

Das sind drei Gleichungen für die drei unbekannten Widerstände R_{10}, R_{20} und R_{30}.

Subtrahiert man die zweite Gleichung von der ersten, erhält man

$$R_{10}+R_{20}-\left(R_{10}+R_{30}\right)=\frac{R_{12}*\left(R_{13}+R_{23}\right)}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}-\frac{R_{13}*\left(R_{12}+R_{23}\right)}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}$$ und nach Vereinfachung

$R_{20}-R_{30}=\dfrac{R_{23}*\left(R_{12}-R_{13}\right)}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}$. Addiert man diese Gleichung mit der Dritten, liefert dies

$R_{20}+R_{30}+R_{20}-R_{30}=\dfrac{R_{23}*\left(R_{12}+R_{13}\right)}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}+\dfrac{R_{23}*\left(R_{12}-R_{13}\right)}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}$, oder nach der Vereinfachung

$R_{20}=\dfrac{R_{23}*R_{12}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}$.

Es gilt also:

Der Sternwiderstand an einem Knoten ist das Produkt aus den beiden anliegenden Dreieckswiderständen, gebrochen durch die Summe der Dreieckwiderstände.

$R_{10}=\dfrac{R_{12}*R_{13}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}$	$R_{20}=\dfrac{R_{12}*R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}$	$R_{30}=\dfrac{R_{13}*R_{23}}{R_{12}+R_{13}+R_{23}}$

Tabelle 9: Transformationsgleichungen von Π- (Dreieck-) auf T- (Stern-) Schaltung

Ebenso können die ersten drei Gleichungen herangezogen werden, um die Widerstände der Dreieck- oder T-Schaltung aus den Widerständen der Stern- oder Π-Schaltung zu berechnen.

$$R_{12}=R_{10}+R_{20}+\frac{R_{10}*R_{20}}{R_{30}},\quad R_{13}=R_{10}+R_{30}+\frac{R_{10}*R_{30}}{R_{20}},\quad R_{23}=R_{20}+R_{30}+\frac{R_{20}*R_{30}}{R_{10}}$$

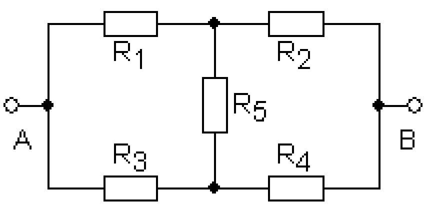
Bringt man jede der Gleichungen auf gemeinsamen Nenner, liefert dies:

Der Π-Widerstand zwischen zwei Knoten wird aus der Summe der möglichen Produkte aus den T-Widerständen, geteilt durch den Wert des Widerstandes der am jeweils dritten Knoten verbunden ist, berechnet.

$R_{12}=\dfrac{R_{10}*R_{20}+R_{10}*R_{30}+R_{20}*R_{30}}{R_{30}}$,	$R_{13}=\dfrac{R_{10}*R_{20}+R_{10}*R_{30}+R_{20}*R_{30}}{R_{20}}$
$R_{23}=\dfrac{R_{10}*R_{20}+R_{10}*R_{30}+R_{20}*R_{30}}{R_{10}}$	

Tabelle 10: Transformationsgleichungen von T- (Stern-) auf Π- (Dreieck-) Schaltung

Beispiel 51:



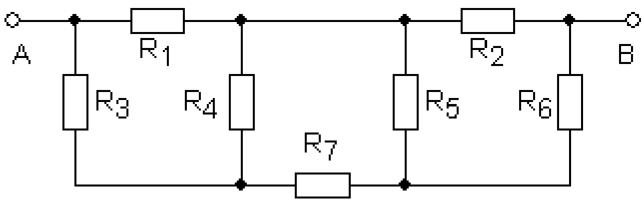
Berechne den Widerstand zwischen den Punkten A und B, wenn $R_1=R_4=1k\Omega$, $R_2=R_3=2k\Omega$ und $R_5=500\Omega$.

Beispiel 52: Berechne den Widerstand zwischen den Klemmen A und B aus Beispiel 51, wenn $R_1=R_2=1k\Omega$, $R_3=R_4=2k\Omega$ und $R_5=500\Omega$.

Beispiel 53: Berechne den Widerstand zwischen den Klemmen A und B aus Beispiel 51, wenn $R_1=R_2=1k\Omega$, $R_3=R_4=2k\Omega$ und $R_5=3k\Omega$.

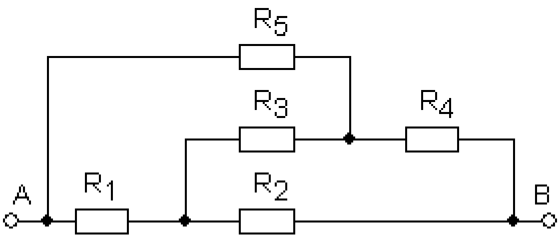
Beispiel 54: Eine Spannung von 6V wird an den Punkten 1 und 2 der Schaltung aus Bild 29 gelegt. Dann fließt ein Strom von 24mA durch die Quelle. Legt man dieselbe Spannung an die Klemmen 2 und 3, fließt ein Strom von $\frac{40}{3}$ mA. Liegt dieselbe Spannung an den Klemmen 1 und 3, fließt ein Strom von 15mA. Wie groß sind die Widerstände der dazugehörigen T-Schaltung, wie groß sind die Widerstände der dazugehörigen Π-Schaltung?

Beispiel 55:



Berechne den Widerstand zwischen den Klemmen A und B, wenn alle Widerstände den Wert 1Ω haben.

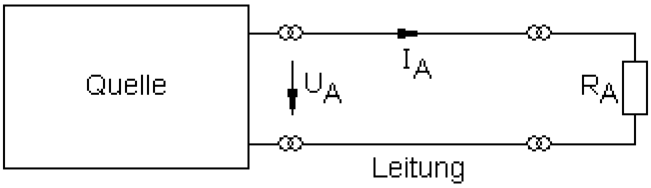
Beispiel 56:



Berechne den Widerstand zwischen den Klemmen A und B, wenn alle Widerstände den Wert 1Ω haben.

5 Elektrische Quellen

Der einfachste Stromkreis besteht aus einer elektrischen Quelle (source), aus Leitungen, welche in den folgenden Betrachtungen verlustlos sind und einem Verbraucher, in welchem die von der Quelle gelieferte Energie umgesetzt wird.



R_A äußerer Widerstand, Lastwiderstand, Verbraucher

U_A Ausgangsspannung der Quelle

I_A Ausgangsstrom aus der Quelle

Bild 30: Einfacher Stromkreis

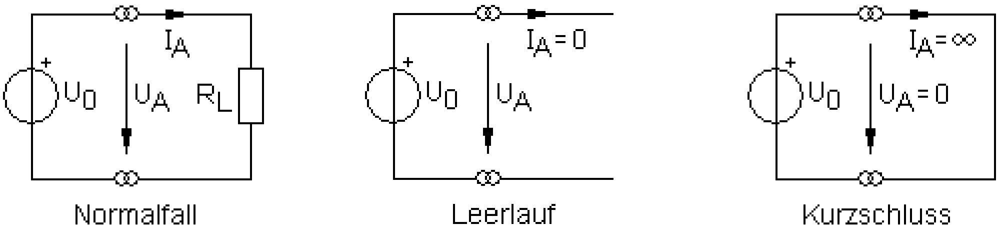
Der Zusammenhang zwischen U_A, I_A und R_A wird durch das Ohmsche Gesetz $U_A = I_A * R_A$ beschrieben.

Quellen bestehen in ihrem Inneren zum Teil aus Metallen, Elektrolyten u. ä., die dem elektrischen Strom einen Widerstand entgegensetzen. Dieser Widerstand wird innerer Widerstand, Innenwiderstand oder Generatorwiderstand genannt und befindet sich im Inneren der Quelle. Er beeinflusst die Eigenschaften der Quelle ganz wesentlich.

5.1 Die Spannungsquelle

5.1.1 Die ideale Spannungsquelle

Kennzeichnend für die ideale Spannungsquelle (ideal voltage source) ist, dass sie unabhängig von ihrer Belastung immer eine gleichbleibende Ausgangsspannung liefert. Die Ausgangsspannung ist unabhängig von der Belastung, also unabhängig vom Strom, der aus der Quelle entnommen wird.



$$U_0 = U_A = I_A * R_L$$

$$U_0 = U_A \qquad I_A = 0$$

$$U_A = 0 \qquad \underbrace{I_A = \infty}_{nur \quad theoretisch}$$

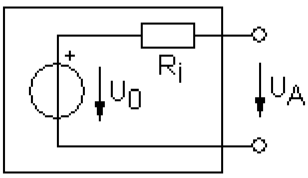
Bild 31: Normalfall, Leerlauf und Kurzschluss einer idealen Spannungsquelle

Die ideale Spannungsquelle existiert in der Realität nicht. Sie wird nur bei der Berechnung von Stromkreisen eingesetzt. Ihr Innenwiderstand ist Null (0Ω).

Anmerkung: In alten Lehrbüchern wird die elektromotorische Kraft (electro motive force, EMK, emf) zur Beschreibung der idealen Spannungsquelle herangezogen. Sie entspricht der negativen Leerlaufspannung in der heute üblichen Bezeichnungsweise.

5.1.2 Die reale Spannungsquelle

In der Praxis hat jede Spannungsquelle einen Innenwiderstand $R_i > 0$. Das ist darin begründet, dass man für die Bewegung von Ladungsträgern, als für den Stromfluss, Energie braucht, um die „Reibungsverluste“ auszugleichen. Die „Reibungsverluste“ im Inneren der Quelle sind im Innenwiderstand R_i zusammengefasst.

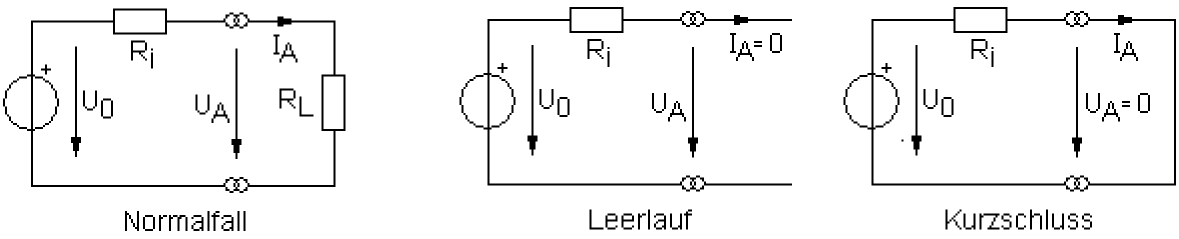


U_0	…	Leerlaufspannung
R_i	…	Innenwiderstand
U_A	…	Ausgangsspannung

Bild 32: Aufbau der realen Spannungsquelle

Die reale Spannungsquelle wird aus einer idealen Spannungsquelle mit der Leerlaufspannung U_0 und einem ohmschen Widerstand R_i zusammengesetzt.

Damit ergeben sich die folgenden Belastungsfälle:



$$U_A = U_0 \frac{R_L}{R_i + R_L} \qquad I_A = \frac{U_0}{R_i + R_L}$$

$$U_A = U_0 \qquad I_A = 0$$

$$U_A = 0 \qquad I_A = \frac{U_0}{R_i}$$

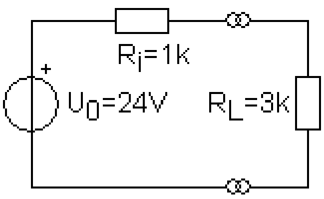
Bild 33: Normalfall, Leerlauf und Kurzschluss einer realen Spannungsquelle

Im Leerlauf (unloaded) fließt kein Strom durch den Innenwiderstand R_i. Damit tritt auch kein Spannungsabfall am Innenwiderstand auf und die Ausgangsspannung U_A ist genau so groß wie die Leerlaufspannung U_0.

Im Normalfall fließt ein Strom durch den Lastwiderstand R_L und damit auch durch den in Serie liegenden Innenwiderstand R_i. Die Spannung U_0 der Quelle teilt sich auf die beiden Widerstände entsprechend der Spannungsteilerregel auf; die Ausgangsspannung U_A ist kleiner als die Leerlaufspannung U_0.

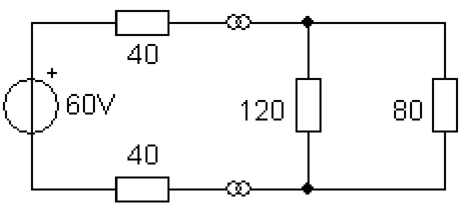
Im Kurzschlussfall (short circuit) ist der äußere Widerstand Null. Damit kann kein Spannungsabfall U_A entstehen, die Ausgangsspannung U_A ist Null. Die gesamte Spannung U_0 fällt am Innenwiderstand R_i ab. Der Strom, der im Kurzschlussfall fließt, wird Kurzschlussstrom I_K der Quelle genannt.

Beispiel 57:



Wie groß ist die Leerlaufspannung, der Kurzschlussstrom, der Strom durch den Lastwiderstand R_L und die Ausgangsspannung? (alle Widerstände in Ω)

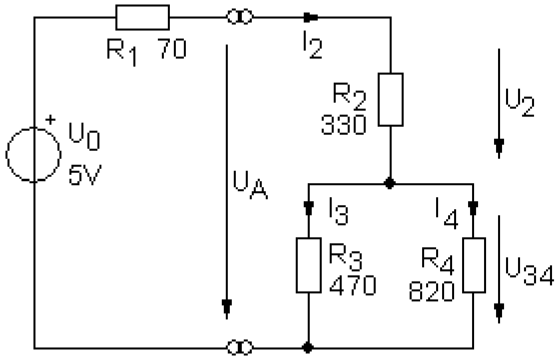
Beispiel 58:



Wie groß ist die Leerlaufspannung, der Kurzschlussstrom, die Teilströme durch die einzelnen Widerstände, der gesamte Ausgangsstrom der Quelle und die Ausgangsspannung? (alle Widerstände in Ω)

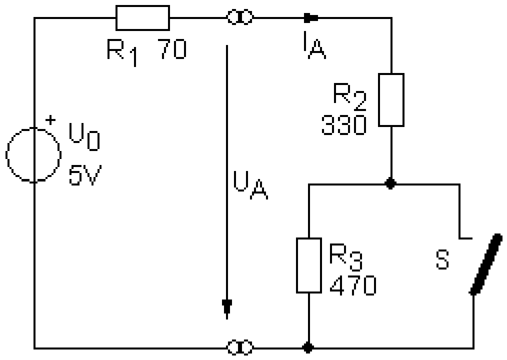
Beispiel 59: Wie groß ist der Innenwiderstand einer Alkali-Mangan-Batterie mit einer Leerlaufspannung von 4.5V, wenn bei einer Belastung mit R_L=12Ω ein Strom von 350 mA fließt?

Beispiel 60:



Berechne die Spannungen U_A, U_2 und U_{34} sowie die Ströme I_2, I_3, I_4 und den Kurzschlussstrom I_K (alle Widerstände in Ω).

Beispiel 61:



Berechne die Spannung U_A und den Strom I_A wenn der Schalter S geschlossen ist. Führe die Berechnungen für den Fall des geöffneten Schalters durch.

Beispiel 62: Welchen Strom liefert ein Bleiakkumulator („Autobatterie") mit einer Leerlaufspannung von 13.5V und einem Innenwiderstand von 12mΩ maximal?

Beispiel 63: Welche Spannung liegt an einem Startermotor an, wenn der Bleiakku eine Leerlaufspannung von 13.5V liefert, sein Innenwiderstand 9mΩ beträgt und der Starter 400A benötigt? Wie groß ist der Widerstand des Starters? Wie groß ist der Starterstrom, wenn die Batterie wegen sehr niedriger Temperaturen einen Innenwiderstand von 18mΩ hat?

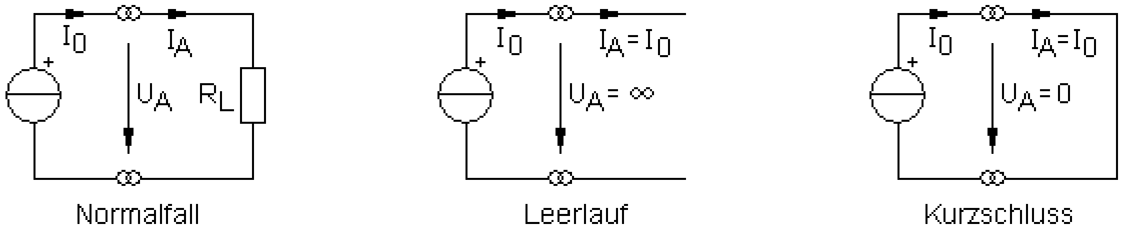
Beispiel 64: Die Spannung an der Steckdose wird im unbelasteten Fall gemessen und beträgt 230V. Wird das Bügeleisen ans Netz angeschlossen fließt, ein Strom von 8.7 A und die Spannung sinkt auf 225V ab. Wie groß ist der Widerstand des Bügeleisens, wie groß ist der Innenwiderstand des Stromnetzes (bitte NICHT ausprobieren!)?

Beispiel 65: Ein Generator mit einem Innenwiderstand von 1.8Ω speist zwei Heizwiderstände mit 14Ω und 18Ω, die in Serie geschalten sind. Zum Anschluss dient eine Kupferleitung mit 17.5m Einzellänge und einer Querschnittsfläche von 1.5 mm^2. Dabei wird eine Spannung von 225V an den Widerständen gemessen. Wie groß ist der Strom, den die Quelle liefern muss, wie groß ist der Spannungsabfall entlang der Leitung, wie groß ist die Leerlaufspannung? Wie groß ist die Spannung an den beiden Widerständen, wenn sie parallel geschaltet werden?

Beispiel 66: Ein NiMh-Akku-Pack aus besteht aus 7 Zellen und liefert eine Leerlaufspannung von 8.25V. Jede Zelle hat einen Innenwiderstand von 5mΩ. Durch den Verbraucher (Elektromotor) fließen 12A. Wie groß ist die Spannung am Verbraucher, wenn die Zuleitungen je 5mΩ und der Schaltregler 12mΩ aufweisen?

5.2 Die Stromquelle
5.2.1 Die ideale Stromquelle

Kennzeichnend für die ideale Stromquelle (ideal current source) ist, dass sie, unabhängig von der Belastung stets einen konstanten Ausgangsstrom I_0 liefert.



$$U_A = I_A * R_L = I_0 * R_L \qquad I_A = I_0$$

$$U_A = \infty \qquad \underbrace{I_A = I_0}_{nur \quad theoretisch}$$

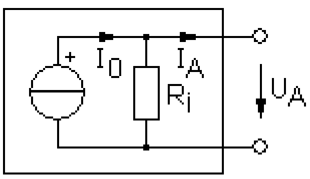
$$U_A = 0 \qquad I_A = I_0$$

Bild 34: Normalfall, Leerlauf und Kurzschluss einer idealen Stromquelle

Die ideale Stromquelle existiert in der Realität nicht. Sie wird nur bei der Berechnung von Stromkreisen eingesetzt. Ihr Innenwiderstand ist unendlich hoch.

5.2.2 Die reale Stromquelle

In der Praxis hat jede Stromquelle einen endlichen Innenwiderstand. Sie kann keine unendlich hohe Spannung liefern.

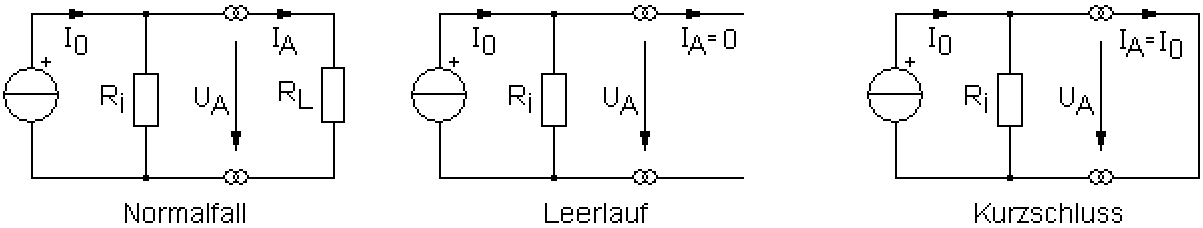


I_0	…	Kurzschlussstrom
R_i	…	Innenwiderstand
I_A	…	Ausgangsstrom
U_A	…	Ausgangsspannung

Bild 35: Aufbau der realen Stromquelle

Die reale Stromquelle wird aus einer idealen Stromquelle mit dem Kurzschlussstrom I_0 und einem ohmschen Widerstand R_i zusammengesetzt.

Damit ergeben sich die folgenden Belastungsfälle:



$$U_A = I_0 * \frac{R_i * R_A}{R_i + R_A}$$

$$I_A = I_0 * \frac{R_i}{R_i + R_A}$$

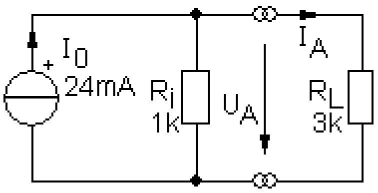
$$U_A = I_0 * R_i \qquad I_A = 0$$

$$U_A = 0 \qquad I_A = I_0 = I_k$$

Bild 36: Die reale Stromquelle bei verschiedenen Belastungsfällen

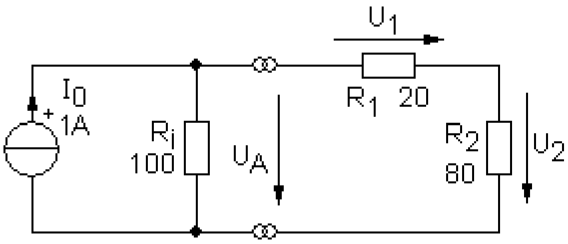
Im Leerlauf, fließt kein äußerer Strom I_A. Der gesamte Strom I_0, der von der Quelle geliefert wird, fließt durch den Innenwiderstand R_i und verursacht die Leerlaufspannung $U_0 = I_0 * R_i$.
Im Normalfall teilt sich der Strom entsprechend der Stromteilerregel zwischen dem Innenwiderstand R_i und dem Lastwiderstand R_L auf. Hat der Lastwiderstand einen wesentlich geringeren Wert als der Innenwiderstand, fließt praktisch der gesamte von der Quelle kommende Strom durch ihn; der Strom durch den Innenwiderstand kann vernachlässigt werden.
Auch im Kurzschlussfall teilt sich der Strom I_0 entsprechend der Stromteilerregel auf, es fließt kein Strom durch den Innenwiderstand R_i der Quelle, der gesamte Strom fließt durch den Kurzschluss (short circuit). Daher wird der Strom I_0 auch Kurzschlussstrom I_k genannt.

Beispiel 67:



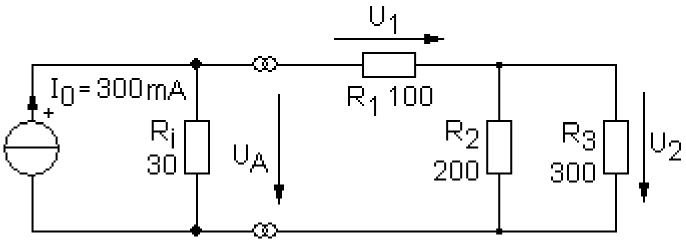
Berechne U_0, I_A und U_A.

Beispiel 68:



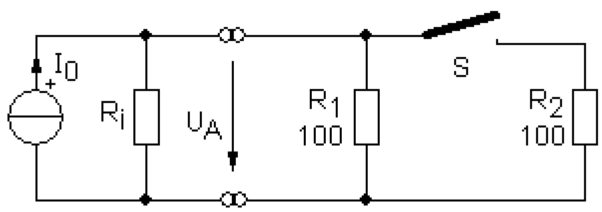
Es sind die Leerlaufspannung, der Kurzschlussstrom, die Ausgangsspannung U_A, die Spannungen U_1 und U_2 sowie der Strom I_A durch die Widerstände R_1 und R_2 zu bestimmen.

Beispiel 69:



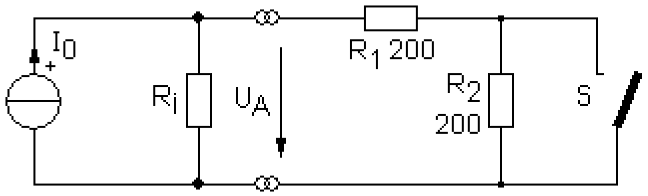
Es sind die Leerlaufspannung, der Kurzschlussstrom, die Ausgangsspannung U_A, die Spannungen U_1 und U_2 sowie die Ströme I_1, I_2 und I_3 durch die Widerstände R_1, R_2 und R_3 zu bestimmen.

Beispiel 70:



Ist der Schalter S offen (kein Stromfluss durch den Schalter), misst man eine Spannung U_A = 12V. Wird der Schalter S geschlossen (Stromfluss durch den Schalter) sinkt die Spannung auf U_A = 10V. Wie groß ist I_0 und R_i der Quelle?

Beispiel 71:



Ist der Schalter S offen, misst man eine Spannung $U_A = 4.8V$. Wird der Schalter S geschlossen, sinkt die Spannung auf $U_A = 4.0V$. Wie groß ist I_0 und R_i der Quelle?

Beispiel 72: Wenn einer Stromquelle einen Strom von 30mA entnimmt, liefert sie eine Ausgangsspannung von 3.6V. Entnimmt man einen Strom von 20mA, steigt die Ausgangsspannung auf 4.5V an. Wie groß ist der Innenwiderstand R_i und der Kurzschlussstrom I_k?

Beispiel 73: Um wie viel Prozent ändert sich der Strom durch den Lastwiderstand, der von einer Stromquelle mit einem Innenwiderstand Ri = 1MΩ gespeist wird, wenn er seinen Wert von 10kΩ auf 1kΩ verringert?

Beispiel 74: Wie groß ist der Innenwiderstand einer Stromquelle, wenn ihr Kurzschlussstrom 100µA beträgt und eine Leerlaufspannung von 25V gemessen wird?

Beispiel 75: Wie groß ist der Innenwiderstand einer Spannungsquelle, wenn ihr Kurzschlussstrom 100µA beträgt und eine Leerlaufspannung von 25V gemessen wird?

5.3 Gegenüberstellung von Spannungs- und Stromquellen

Von einer elektrischen Quelle kann man durch Messung die Leerlaufspannung und den Kurzschlussstrom bestimmen. Daraus kann der Innenwiderstand der Quelle berechnet werden.

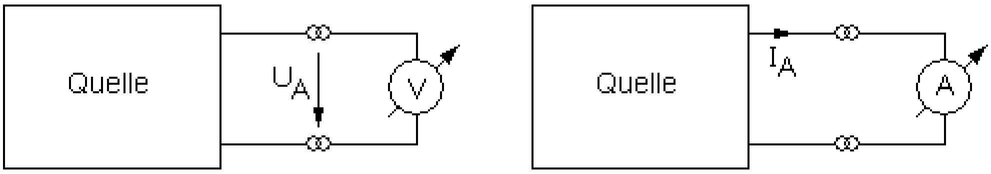


Bild 37: Messung der Leerlaufspannung und des Kurzschlussstroms einer elektrischen Quelle

Anmerkung: Die Leerlaufspannung und der Kurzschlussstrom kann bei vielen Quellen nicht direkt gemessen werden. Bei der Netzspannung kann der Kurzschlussstrom nicht direkt gemessen werden (die direkte Messung bitte nicht ausprobieren!)

Die Messung der Leerlaufspannung und des Kurzschlussstroms gibt keine Auskunft darüber, ob es sich bei der Quelle um eine ideale Spannungsquelle mit einem in Serie liegenden Innenwiderstand, oder um eine ideale Stromquelle mit einem parallel liegenden Innenwiderstand handelt.

$$I_k = \frac{U_0}{R_i} \qquad U_0 = I_k * R_i$$

Bild 38: Spannungs- und Stromquelle mit den gleichen Kennwerten

Wenn eine Ersatzspannungsquelle und eine Ersatzstromquelle nach außen hin äquivalent sein sollen, dann muss auch im Belastungsfall mit dem äußeren Widerstand R_A die selbe Ausgangsspannung U_A auftreten und der selbe Strom I_A durch den Lastwiderstand fließen.

$$U_A = U_0 * \frac{R_L}{R_L + R_i} = I_0 * \frac{R_L * R_i}{R_L + R_i}$$
$$I_A = U_0 * \frac{1}{R_L + R_i} = I_0 * \frac{R_i}{R_L + R_i}$$

$$U_A = I_0 * \frac{R_L * R_i}{R_L + R_i} = U_0 * \frac{R_L}{R_L + R_i}$$
$$I_A = I_0 * \frac{R_i}{R_L + R_i} = U_0 * \frac{1}{R_L + R_i}$$

Bild 39: Äquivalente Spannungs- und Stromquelle

Beide Ersatzschaltungen der realen Quellen sind nach außen hin gleichwertig. Sie werden je nach Problemstellung angewendet: Reale Quellen, die einer idealen Spannungsquelle nahe kommen wie z.B. der Akkumulator oder Batterien, werden meistens durch eine ideale Spannungsquelle mit einem Innenwiderstand rechnerische ersetzt. Hochohmige Quellen, wie z.B. ein Bipolartransistor oder Feldeffekttransistor im Ausgangskennlinienfeld werden meistens durch eine (gesteuerte) Stromquelle mit Innenwiderstand bei der Berechnung ersetzt.

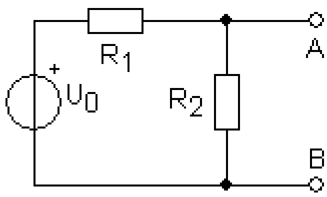
Beispiel 76: Von einer elektrischen Quelle ist die Leerlaufspannung U_0 = 10V und der Innenwiderstand R_i = 2Ω bekannt. Wie groß sind die Kennwerte einer realen Stromquelle, welche diese Eigenschaften aufweist?

Beispiel 77: Eine reale Stromquelle liefert einen Kurzschlussstrom von 12mA und hat einen Innenwiderstand von 150kΩWie groß sind die Kennwerte einer realen Spannungsquelle, welche dieselben Eigenschaften aufweist?

Beispiel 78: An zwei Klemmen einer Schaltung wird ein Kurzschlussstrom von 100µA und eine Leerlaufspannung von 15V gemessen. Wie groß sind die Kennwerte der entsprechenden realen Spannungsquelle, wie groß sind die Kennwerte der entsprechenden realen Stromquelle?

Beispiel 79: Wenn einer elektrischen Quelle einen Strom von 3mA entnimmt, liefert sie eine Ausgangsspannung von 3.6V. Entnimmt man einen Strom von 2mA, steigt die Ausgangsspannung auf 4.5V an. Wie groß sind die Kennwerte der entsprechenden realen Spannungsquelle, wie groß sind die Kennwerte der entsprechenden realen Stromquelle?

Beispiel 80:



Berechne die Leerlaufspannung U_{AB} zwischen den Klemmen A und B, wenn U_0 = 15V und $R_1 = R_2$ = 1800Ω ist. Wie groß ist der Kurzschlussstrom I_K, der zwischen den Klemmen a und B fließen kann? Da nun die Daten über die Leerlaufspannung U_{AB} und den Kurzschlussstrom I_K vorliegen, kann die Schaltung durch eine reale Spannungsquelle ersetzt werden. Wie groß sind die Kennwerte dieser realen Spannungsquelle? Aus der Leerlaufspannung U_{AB} und dem Kurzschlussstrom I_K können auch die Kennwerte der äquivalenten (gleichwertigen) Stromquelle berechnet werden. Wie groß sind die Kennwerte der entsprechenden realen Stromquelle?

Beispiel 81: Berechne die Kennwerte aus Beispiel 80 nicht für spezielle Werte der Bauelemente sondern allgemein, so dass je eine Formel für U_0 = …, I_K = … und R_i = … entsteht. Auf der rechten Seite der Formeln dürfen nur R_1, R_2 und U_0 enthalten.

5.4 Die grafische Berechnung einfacher Stromkreise

Es wird gezeigt, wie die Klemmenspannung einer realen Quelle bei Belastung mit einem ohmschen Widerstand bestimmt werden kann. Dazu ist es notwendig, die Kennlinie eines ohmschen Widerstandes zu kennen. Dazu wird die folgende Tabelle aufgestellt:

	50	**100**	**200**
	R / Ohm	R / Ohm	R / Ohm
U V	I mA	I mA	I mA
0	0,00	0,00	0,00
1	20,00	10,00	5,00
2	40,00	20,00	10,00
3	60,00	30,00	15,00
4	80,00	40,00	20,00
5	100,00	50,00	25,00
6	120,00	60,00	30,00
7	140,00	70,00	35,00
8	160,00	80,00	40,00
9	180,00	90,00	45,00
10	200,00	100,00	50,00

Tabelle 11: Der Zusammenhang zwischen Spannung an einem Widerstand und Strom durch den Widerstand

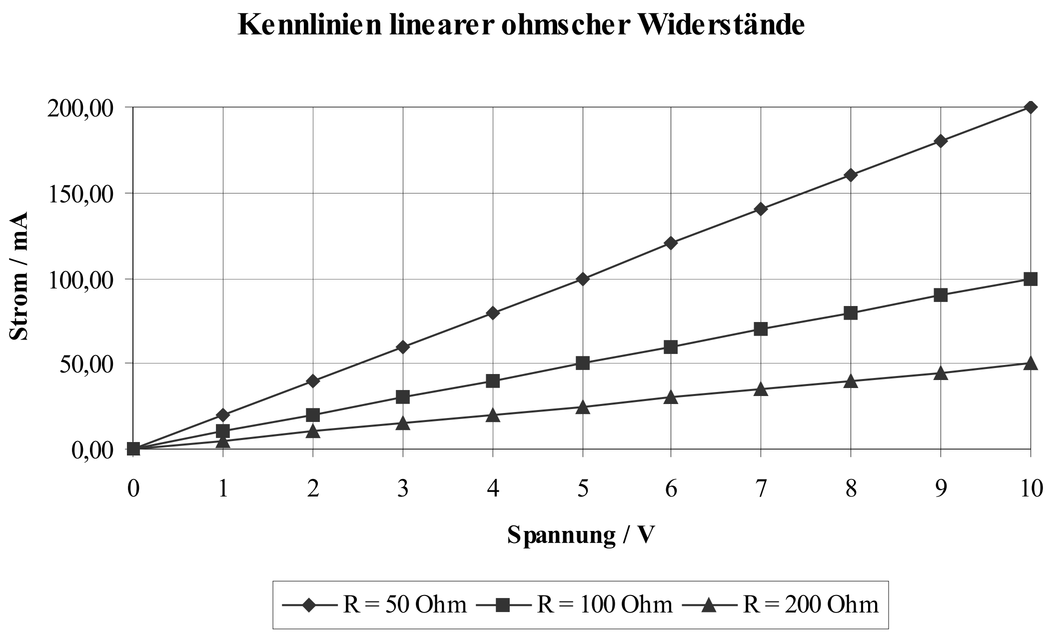


Bild 40: Die grafische Darstellung der in Tabelle 11 berechneten Werte. Es kann z.B. abgelesen werden, dass bei einer Spannung von 7V ein Strom von 35mA durch den 200Ω-Widerstand fließt. Ein Strom von 150mA bewirkt einen Spannungsabfall von 7.5V am 50Ω-Widerstand.

Die Kennlinie eines linearen ohmschen Widerstandes ist eine Gerade durch den Ursprung. Je größer der Widerstandswert, desto flacher verläuft seine Kennlinie im obigen Diagramm.

Ein ohmscher Widerstand wird nichtlinear genannt, wenn seine Strom- Spannungs- Kennlinie durch den Ursprung verläuft und sein Wert von der angelegten Spannung bzw. vom Strom, der durch ihn fließt, abhängig ist.

U / V	I / A	Rstat / Ohm
-10,00	-0,01471	679,75
-9,00	-0,01460	616,38
-8,00	-0,01446	553,08
-7,00	-0,01429	489,89
-6,00	-0,01406	426,85
-5,00	-0,01373	364,06
-4,00	-0,01326	301,70
-3,00	-0,01249	240,18
-2,00	-0,01107	180,64
-1,00	-0,00785	127,32
0,00	0,00000	100,00
1,00	0,00785	127,32
2,00	0,01107	180,64
3,00	0,01249	240,18
4,00	0,01326	301,70
5,00	0,01373	364,06
6,00	0,01406	426,85
7,00	0,01429	489,89
8,00	0,01446	553,08
9,00	0,01460	616,38
10,00	0,01471	679,75

In der nebenstehenden Tabelle 12 sind die Zahlenwerte der gemessenen Ströme bei verschiedenen Spannungen dargestellt. Daraus kann der Widerstand berechnet werden und es ist deutlich zu erkennen, dass der Widerstand von der angelegten Spannung abhängig ist. Ebenso stimmt die Aussage, dass der Widerstand vom Strom, der durch ihn fließt, abhängig ist. Je nach angelegter Spannung bzw. je nach durchfließendem Strom erhält man einen nicht konstanten Widerstandswert. Der Widerstandswert ist vom Arbeitspunkt abhängig.

Tabelle 12: Spannungs- und Strom- Messwerte und der daraus berechnete statische Widerstand eines nichtlinearen Bauelements

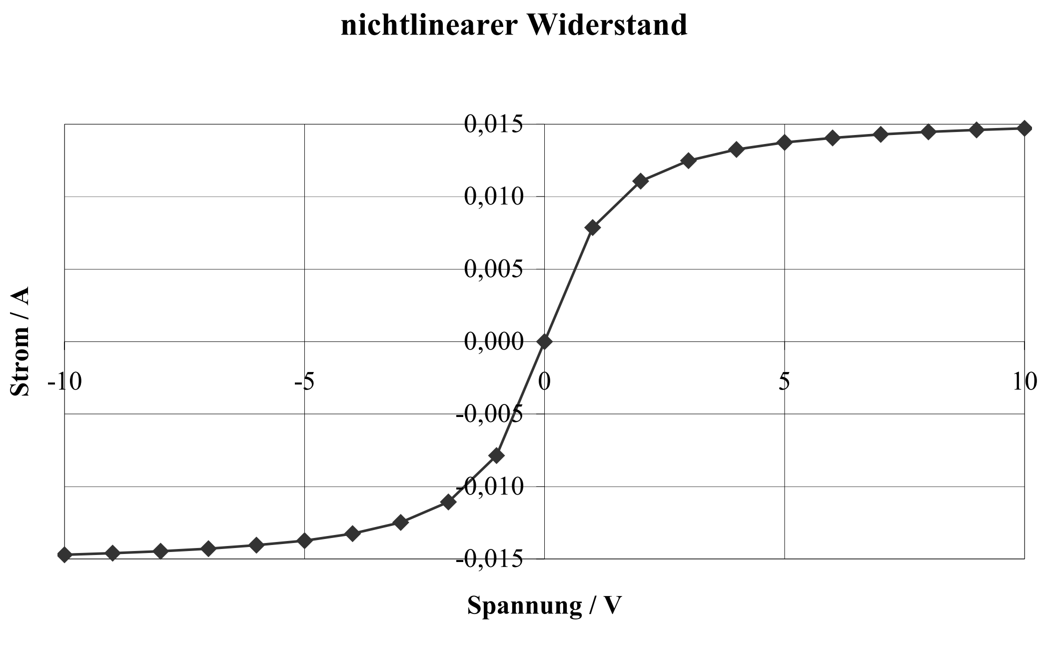


Bild 41: Spannungs- Strom- Kennlinie eines nichtlinearen Widerstands wie er in Tabelle 12 beschrieben ist.

Die Strom- Spannungs- Kennlinie eines nichtlinearen ohmschen Widerstandes ist eine gekrümmte Kurve durch den Ursprung.

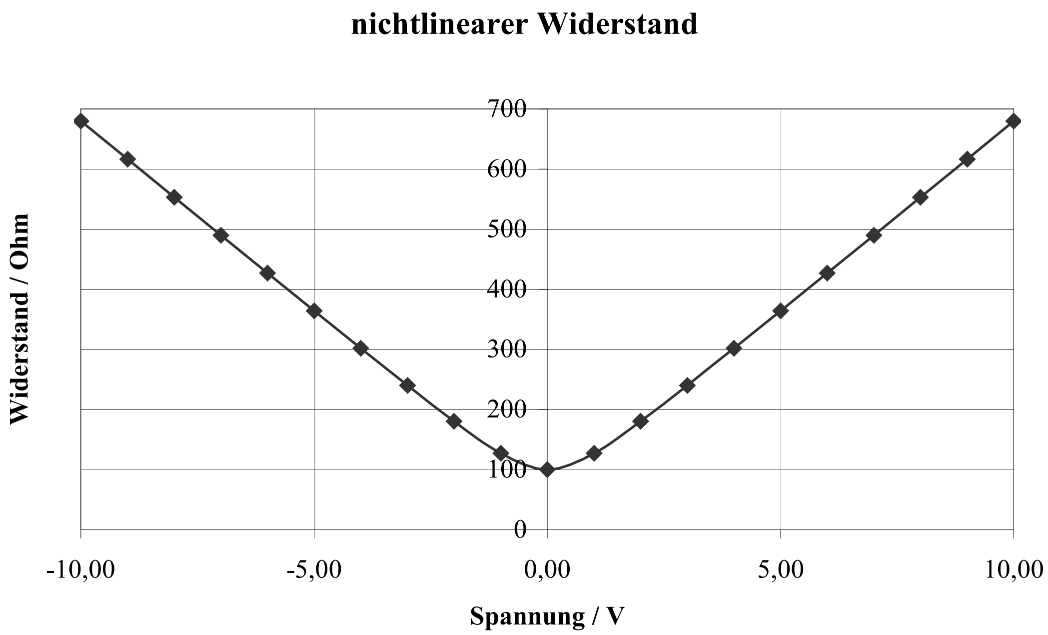


Bild 42: Bei diesem Bauelement mit den Werten aus der

Tabelle 12 steigt der ohmsche Widerstand wenn die angelegte Spannung am Widerstand steigt, egal, wie das Bauelement gepolt wird.

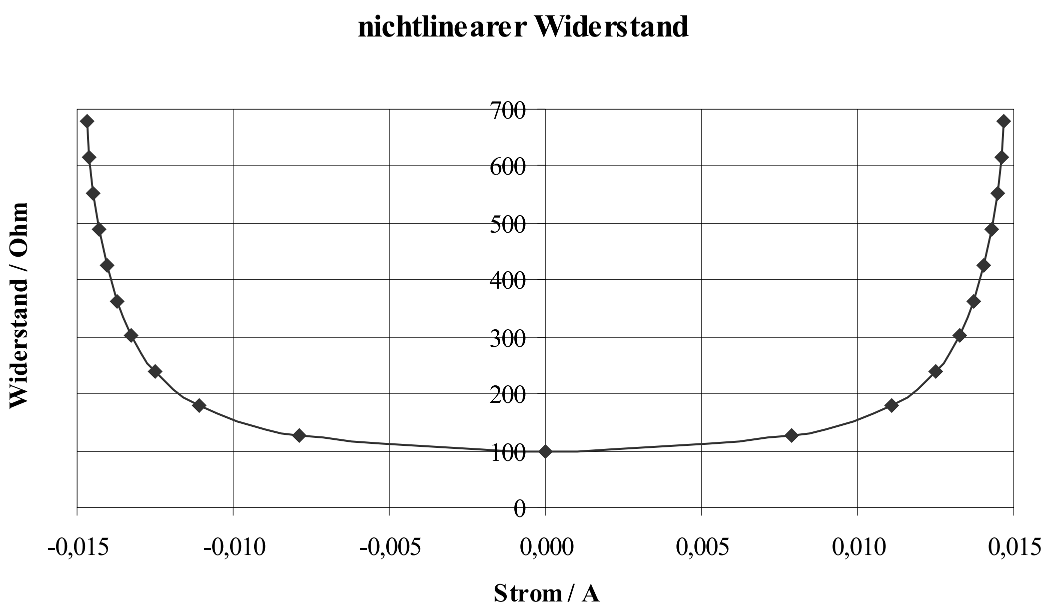


Bild 43: Obwohl in dieser Kennlinie dasselbe Bauelement wie in

Bild 42 beschrieben wird, sieht das Bild ganz anders aus. In diesem Bild ist der Widerstand in Abhängigkeit des Stromes, der durch das Bauelement fließt, aufgetragen.

Nichtlineare Widerstände sind z.B. Glühlampen. Je höher die angelegte Spannung, desto heißer wird der metallische Glühfaden. Da der Widerstand eines Metalls im Allgemeinen mit steigender Temperatur steigt, wird der Widerstand vom Arbeitspunkt abhängig sein und bei höher werdender Spannung größer werden.

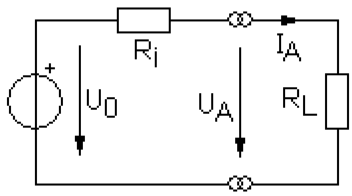
Jede Diode ist ein nichtlinearer Widerstand. Der Strom durch die Diode steigt exponentiell mit steigender Spannung an der Diode. Der Widerstand ist vom Arbeitspunkt abhängig und wird mit steigender Spannung kleiner.

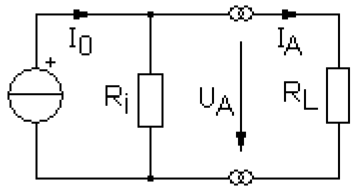
5.5 Kennlinien von Quellen

Eine Quellenkennlinie zeigt grafisch den Zusammenhang zwischen der Klemmenspannung einer Quelle und dem Strom, welcher der Quelle entnommen wird.

5.5.1 Kennlinie von linearen Quellen

Lineare Quellen sind solche, bei welchen ein linearer Zusammenhang zwischen Klemmenspannung an der Quelle und dem Strom, welcher der Quelle entnommen wird, besteht. Der Zusammenhang wird durch eine Geradengleichung ($y = k * x + d$) beschrieben.





$$U_A = U_0 - I_A * R_i$$

$$I_A = \frac{U_0 - U_A}{R_i} = I_0 - \frac{U_A}{R_i}$$

$$I_A = I_0 - \frac{U_A}{R_i}$$

$$U_A = (I_0 - I_A) * R_i = U_0 - I_A * R_i$$

Bild 44:lineare Spannungsquelle und lineare Stromquelle

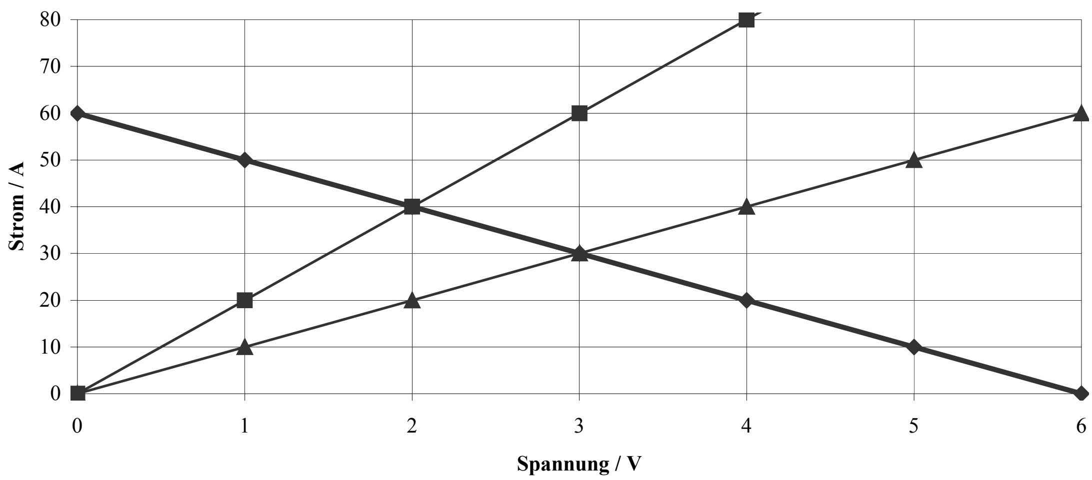


Bild 45: Kennlinie einer linearen Quelle (breit) und Widerstandskennlinien eines 50Ω- und eines 100Ω-Widerstandes

Die Quellenkennlinie entstammt einer elektrischen Quelle mit einer Leerlaufspannung U_0 = 6V und einem Kurzschlussstrom $I_k = I_0$ = 60mA. Bei einer Belastung mit einem 100Ω-Widerstand kann aus dem Schnittpunkt der Quellenkennlinie und der Widerstandsgeraden eine Ausgangsspannung von U_A = 3V abgelesen werden. Wird der Lastwiderstand auf 50Ω verringert, stellt sich eine Ausgangsspannung U_A = 2V ein.

Die Kennlinie einer linearen Quelle ist eine Gerade durch die Punkte $\langle U = 0V, \quad I = I_0 \rangle$ und $\langle U = U_0, \quad I = 0A \rangle$.

Jener Punkt, der sich als Schnittpunkt aus der Quellenkennlinie und der Kennlinie des Belastungswiderstandes ergibt, wird als Arbeitspunkt (der Quelle) bezeichnet.

Je kleiner der Innenwiderstand einer elektrischen Quelle ist, umso steiler verläuft die Quellenkennlinie nach unten.
Je größer der Kurzschlussstrom der Quelle ist, umso steiler verläuft die Quellenkennlinie nach unten.
Je geringer der Strom, der aus der Quelle entnommen wird, umso geringer ist der Spannungsabfall am Innenwiderstand der Quelle und um so näher liegt die Ausgangsspannung an der Leerlaufspannung.
Je größer der Wert des Belastungswiderstandes ist, um so geringer ist der Strom, welcher der Quelle entnommen wird, um so geringer ist der Spannungsabfall am Innenwiderstand der Quelle und um so näher liegt die Ausgangsspannung an der Leerlaufspannung.

Beispiel 82: Eine lineare Spannungsquelle mit einer Leerlaufspannung von 12V hat einen Innenwiderstand von 20Ω. Bestimme grafisch den Arbeitspunkt für die Lastwiderstände von R_L = 10Ω, R_L = 20Ω, R_L = 30Ω und R_L = 40Ω.

Beispiel 83: Eine lineare Stromquelle mit einem Kurzschlussstrom von 60mA hat einen Innenwiderstand von 300Ω. Bestimme grafisch den Arbeitspunkt für die Lastwiderstände von R_L = 100Ω, R_L = 200Ω, R_L = 300Ω und R_L = 400Ω.

Beispiel 84: Eine Quelle hat eine Leerlaufspannung von 6V und liefert einen maximalen Strom von 100mA. Wie groß ist der Innenwiderstand der Quelle? Bestimmen Sie grafisch die Ausgangsspannung der Quelle bei den Belastungen mit 25Ω, 50Ω und 100Ω(10mm ... 10mA, 10mm ... 1V).

Beispiel 85: Eine Quelle hat eine Leerlaufspannung von 12V und einen Innenwiderstand von 0.5Ω. Konstruieren Sie den Arbeitspunkt für eine Belastung von 2.5Ω und zeichnen Sie je die Schaltung mit einer realen Ersatzspannungsquelle und einer realen Ersatzstromquelle (10mm ... 4A, 10mm ... 2V).

Beispiel 86: Von einer Quelle ist bekannt, dass sie im Leerlauf eine Spannung von 24V liefert. Bei einer Belastung mit 5Ω geht die Klemmenspannung auf die Hälfte der Leerlaufspannung zurück. Wie groß sind der Kurzschlussstrom Ik und der Innenwiderstand der Quelle? Wie groß ist der Strom, der durch den Lastwiderstand fließt? Wo liegt der Arbeitspunkt?

Beispiel 87: An einer Quelle wird unter Belastung mit einem Widerstand von 1kΩ eine Spannung von 2.5V gemessen. Wird der Lastwiderstand auf 250Ω verringert, sinkt die Klemmenspannung auf 1.25V. Mit einem unbekannten Widerstand wird ein Arbeitspunkt von 3.5V und 2mA gemessen. Können diese Werte von einer linearen Quelle stammen? Wenn ja, wie groß ist die Leerlaufspannung, der Kurzschlussstrom und der Innenwiderstand der Quelle? Wenn nicht, dann ist der unbekannte Widerstand gar kein Widerstand. Dann ist die Leerlaufspannung, Kurzschlussstrom und Innenwiderstand aus den ersten beiden Belastungsfällen zu bestimmen.

Beispiel 88: Eine Leuchtdiode (LED) wird mit einer 9V-Batterie und einen in Serie geschalteten Widerstand von 1.2kΩ versorgt. Der Diodenstrom ist in der folgenden Tabelle 13 zusammengestellt. Wie groß ist die Spannung an der Diode und wie groß ist der Diodenstrom? Welche Werte stellen sich ein, wenn die Spannung der Batterie auf 5V absinkt? Wie groß sind die Werte, wenn die Versorgungsspannung auf 12V angehoben wird?

U_d / V	0.00	1.50	1.60	1.65	1.70	1.75	1.80	1.85	1.90
I_d / mA	0.00	0.10	0.50	1.20	2.40	4.10	6.30	9.10	12.20

Tabelle 13: Spannungs- und Stromwerte einer grünleuchtenden LED

Beispiel 89: Eine Spannungsquelle liefert im Leerlauf 12V und hat einen Innenwiderstand von 470Ω. Daran wird eine Zenerdiode mit eine Durchbruchspannung von 9V angeschlossen, welche in der folgenden Tabelle 14 zusammengestellt sind.

U_z / V	0.00	4.00	6.00	8.00	9.00	9.20	9.30	9.40	9.50
I_z /mA	0.00	0.10	0.30	1.0	2.0	4.0	8.0	16.0	32.0

Tabelle 14: Spannungs- und Stromwerte einer 9V-Zenerdiode

Welche Spannung stellt sich an der Zenerdiode ein und welcher Strom fließt durch die Diode? Wie groß werden die Werte, wenn die Spannung der Quelle15V beträgt? Wie groß sind diese Werte bei einer Quellenspannung von 18V?

5.5.2 Kennlinien von nichtlinearen Quellen

Die Kennlinie einer linearen Quelle ist eine Gerade durch die Punkte $\langle U = 0V, \quad I = I_0 \rangle$ und $\langle U = U_0, \quad I = 0A \rangle$. Die dazwischen liegende Verbindungslinie ist eine gekrümmte Kurve. Die Bestimmung des Arbeitspunktes erfolgt grafisch genau so, wie bei der linearen Quelle.

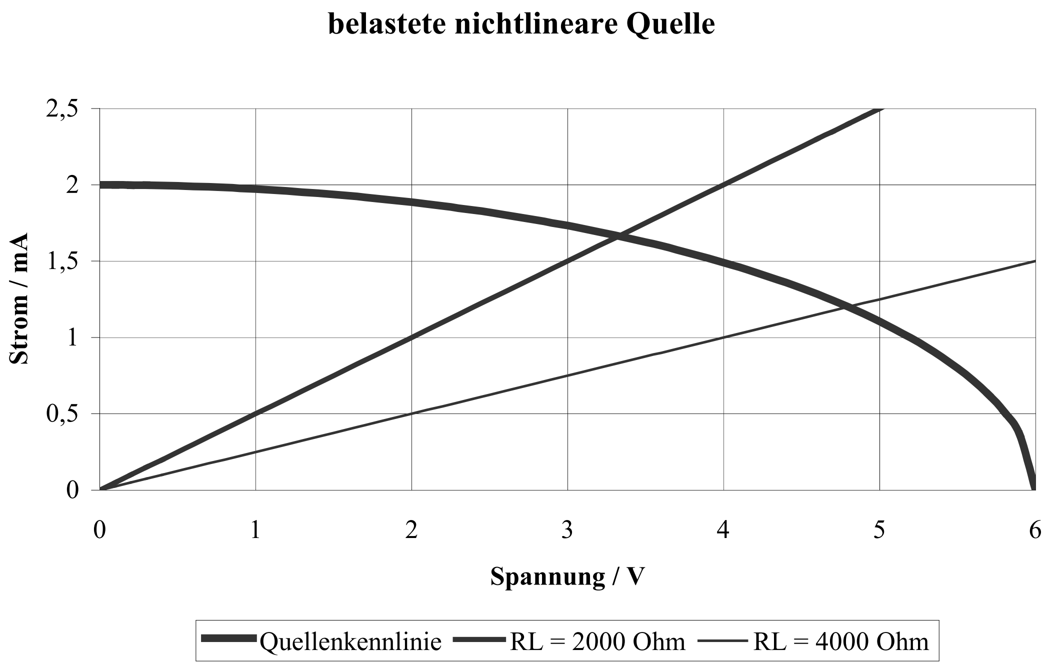


Bild 46: nichtlineare Quelle unter verschiedenen Belastungen

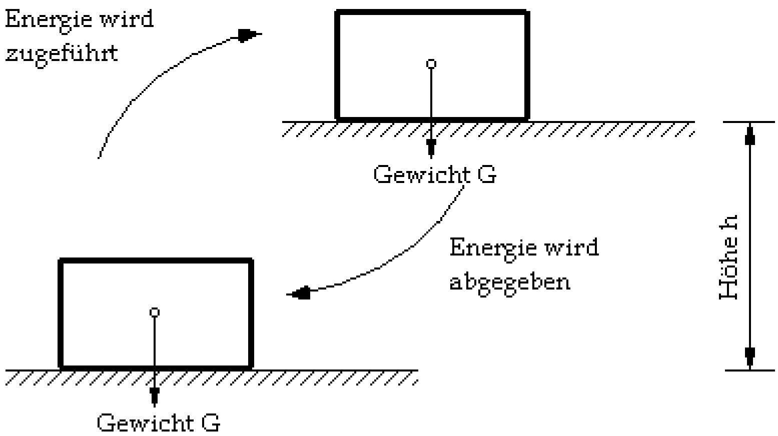
Beispiel 90: Eine elektronisch geregelte Quelle liefert bei Belastungen von 0A bis 3A eine konstante Ausgangsspannung von 12V. Wird die Belastung höher, bleibt der Strom konstant 3A und die Spannung sinkt auf den entsprechenden Wert. Zeichne die Kennlinie einer solchen Quelle und gib den Arbeitspunkt für eine Belastung von $R_L = 1\Omega$, $R_L = 2\Omega$, $R_L = 3\Omega$ und $R_L = 6\Omega$ an.

6 Arbeit, Leistung und Wirkungsgrad

Wird ein Gewicht auf die Höhe h hochgehoben, so wird eine Arbeit W (work), also eine Energie (energy)

$$W = G * h \qquad [W] = [G] * [h] = N * m = W * s = J$$

dem Körper zugeführt.



N	...	Newton
m	...	Meter
W	...	Watt
s	...	Sekunden
J	...	Joule

Bild 47: Zur Definition der mechanischen Arbeit und Leistung

Die zugeführte Arbeit erhöht die Energie des Körpers um W, ganz egal, wie lang man dazu braucht, den Körper auf die Höhe zu heben. Wird der Körper um die Höhe h abgesenkt, gibt er die Energie W wieder ab; ebenfalls unabhängig von der Dauer des Absenkens.
Für die Bestimmung der Leistung P (power) ist auch noch die Zeit, in welcher die Arbeit W verrichtet wird. Je weniger Zeit für die Verrichtung der Arbeit benötigt wird, desto höher ist die Leistung und es gilt:

$$P = \frac{W}{t} \qquad [P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{N * m}{s} = W = \frac{J}{s}$$

Um das Gewicht aufzuheben, muss man nicht nur das Gewicht aufheben, auch die Hände, Arme usw. müssen mit gehoben werden. Auch dazu benötigt man Energie. Man muss also mehr Arbeit verrichten, als für das Heben des Gewichts alleine notwendig ist (auch die Verluste durch Reibung in den Gelenken müssen ausgeglichen werden). Man muss also mehr Energie aufwenden (zuführen), um den Körper zu heben, als der Körper beim Absenken wieder abgeben kann.

$$W_{zu} > W_{ab}$$

Das Verhältnis zwischen abgegebener Energie W_{ab} und der zugeführten Energie W_{zu} ist der dimensionslose Wirkungsgrad (efficiency) η (eta):

$$\eta = \frac{W_{ab}}{W_{zu}} = \left(\frac{P_{ab} * t}{P_{zu} * t} \right) = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}$$

6.1 Arbeit, Energie und Wärmemenge

In der Mechanik spricht man von der Verrichtung einer Arbeit W, wenn unter dem Einfluss einer Kraft F ein Weg s zurückgelegt wird.

Arbeit = Kraft * Weg $W = F * s$

In der Elektrotechnik spricht man von der Verrichtung einer Arbeit W, wenn unter dem Einfluss einer elektrischen Spannung U eine Ladung Q verschoben wird.

Arbeit = Ladung * Spannung $W = Q * U$

Da für die elektrische Ladung $Q = I * t$ gilt, kann man auch für die elektrische Arbeit

$$\boxed{W = U * I * t = P * t}$$

schreiben. Daraus erkennt man, dass elektrische Leistung = Spannung * Strom $P = U * I$ ist.

Unter Energie versteht man die Fähigkeit, Arbeit zu verrichten.

Mechanik:
Durch das Aufheben des Körpers mit dem Gewicht G auf die Höhe h erfährt der Körper die Möglichkeit, beim Hinunterlegen auf die Ausgangshöhe einen anderen Körper zu bewegen. Durch das Aufheben wurde dem Körper Energie zugeführt, beim Hinunterlegen gibt der Körper seine Energie wieder ab.

Elektrotechnik:
Wird ein Akkumulator aufgeladen, so wird ihm eine elektrische Ladung Q unter dem Einfluss der elektrischen Spannung U zugeführt. Er speichert elektrische Energie. Wird ein elektrischer Verbraucher an den Akkumulator angeschlossen, so fließt eine gewisse Zeit t ein elektrischer Strom I und am Widerstand fällt eine Spannung U ab. Die durch Aufladung dem Akkumulator zugeführte Energie wird im Verbraucher in Wärme umgesetzt.
In einem Widerstand wird die zugeführte Energie vollständig in Wärme umgewandelt. Wärme ist eine Form von Energie. Für die thermische Energie oder Wärme gilt:

$$W = c * m * (T_1 - T_0)$$

W ist jene Energie, die erforderlich ist, um einen Körper mit der Masse m (kg) und der spezifischen Wärmekapazität c $\left(\frac{W * s}{kg * K}\right)$ von der Temperatur T_0 auf die Temperatur T_1 (K, °C) zu erwärmen. Die spezifische Wärmekapazität ist eine Materialkenngröße und gibt an, wie viel Energie notwendig ist, um 1 kg dieses Stoffes um 1K oder 1°C zu erwärmen (keine Phasenübergänge, unter konstantem Druck oder konstanten Volumen).

Material	**Spez. Wärmekapazität W * s / (kg * K)**	**Dichte kg / m3**
Wasser	4186.8	1000
Wasserdampf (100°C)	2010	0.8
Wasserstoff H_2	14300	0.09
Wolfram W	142	19100
Zink Zn	394	7140
Zinn Sn	226	7280
Beton	883	1800 .. 2450
Luft	1010	1.3

Tabelle 15: spezifische Wärmekapazität und Dichte einiger Stoffe

potentielle Energie	$W = m * g * h$
kinetische Energie	$W = \frac{m * v^2}{2}$
elektrische Energie	$W = Q * U = P * t$
Wärme	$W = c * m * (T_1 - T_0)$
Energie eines Strahlungsquants	$W = h * f \qquad h = 4.16 * 10^{-15}\, eV * s$

Tabelle 16: einige Energieformen

6.2 Leistung

Unter der Leistung (power) versteht man die verrichtete Arbeit pro Zeit.

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F * s}{t} = F * v \qquad P = \frac{W}{t} = \frac{Q * U}{t} = \frac{I * t * U}{t} = U * I$$

für die Einheit der Leistung gilt

$$[P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{[F]*[s]}{[t]} = \frac{N * m}{s} = W \qquad [P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{[Q]*[U]}{[t]} = [U]*[I] = V * A = W$$

Unter der elektrischen Leistung versteht man die elektrische Arbeit, die einem elektrischen Verbraucher (Widerstand, z.B. Motor) zugeführt wird.
Tritt an einen elektrischen Widerstand ein Spannungsabfall U wegen des Stromflusses I durch den Widerstand auf, so wird die elektrische Leistung aus

$$\boxed{P = U * I}$$

berechnet.

Die Maßeinheit der Leistung ist das Watt (W).

Anmerkung: 1 PS = 736 W

Die Leistungsberechnung aus Spannung und Strom kann mit Hilfe des ohmschen Gesetzes auch aus Spannung und Widerstand bzw. aus Strom und Widerstand erfolgen:

$$P = U * I = U * \frac{U}{R} \qquad P = U * I = I * R * I$$

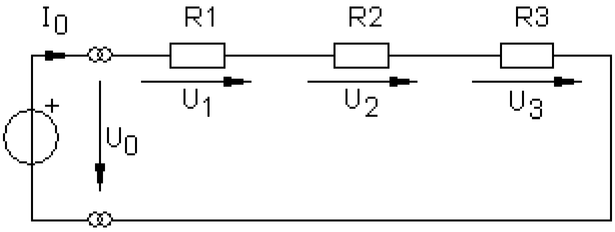
$$\boxed{P = \frac{U^2}{R}} \qquad \boxed{P = I^2 * R}$$

An Hand dieser Formeln kann leicht erkannt werden, dass der Zusammenhang zwischen Spannung und Leistung bzw. zwischen Strom und Leistung nicht linear, sondern quadratisch ist.
Wird die Spannung an einem Widerstand verdoppelt, vervierfacht sich die Leistung, die im Widerstand in Wärme umgewandelt wird.
Wird der Strom durch einen Widerstand verdoppelt, vervierfacht sich die Leistung, die im Widerstand in Wärme umgewandelt wird.

Sind mehrere Widerstände in Serie geschaltet, so gilt

$$P_{ges} = P_1 + P_2 + P_3 + \ldots = \sum_{k=1}^{n} P_k$$

Die gesamte in der Serienschaltung umgesetzte Leistung ist die Summe der einzelnen Leistungen, die in den einzelnen Widerständen in Wärme umgesetzt wird.



$$P_{ges} = U_0 * I_0 = (U_1 + U_2 + U_3) * I_0 =$$
$$P_{ges} = U_1 * I_0 + U_2 * I + U_3 * I_0 =$$
$$P_{ges} = P_1 + P_2 + P_3$$

Bild 48: Leistung bei Serienschaltung von Widerständen

Sind mehrere Widerstände parallel geschaltet, so gilt

$$P_{ges} = P_1 + P_2 + P_3 + ... = \sum_{k=1}^{n} P_k$$

Die gesamte in der Parallelschaltung umgesetzte Leistung ist die Summe der einzelnen Leistungen, die in den einzelnen Widerständen in Wärme umgesetzt wird.

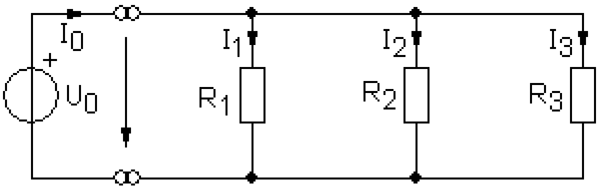


Bild 49: Leistung bei Parallelschaltung von Widerständen

$$P_{ges} = U_0 * I_0 = U_0 * (I_1 + I_2 + I_3)$$
$$P_{ges} = U_0 * \left(\frac{U_0}{R_1} + \frac{U_0}{R_2} + \frac{U_0}{R_3} \right) = U_0^{\ 2} * \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} \right)$$
$$P_{ges} = \frac{U_0^{\ 2}}{R_1} + \frac{U_0^{\ 2}}{R_2} + \frac{U_0^{\ 2}}{R_3} = \frac{U_0^{\ 2}}{R_{ges}} = P_1 + P_2 + P_3$$

$$\boxed{P_{ges} = U_0 * I_0 = I_0^{\ 2} * R_{ges} = \frac{U_0^{\ 2}}{R_{ges}}}$$

Beispiel 91: Berechne die Leistung von Glühlampen, die an einer Spannung U = 230 V von einem Strom I = 435 mA, I = 261 mA und I = 174 mA durchflossen wird.

Beispiel 92: Wie groß sind die Widerstände beim Betrieb von Lampen, wenn sie bei einer Spannung von 230V eine Leistung von 75W bzw. von 25W aufnehmen?

Beispiel 93: Ein elektrisches Bügeleisen hat im Betrieb einen ohmschen Widerstand von 24 Ω und wird an 230V betrieben. Wie groß ist die Heizleistung des Bügeleisens?

Beispiel 94: Ein Kühlschrank verbraucht eine Leistung von 100W bei einer Spannung von 220V. Die Spannung wurde vom Netzbetreiber auf 230V erhöht. Wie groß ist die Leistungsaufnahme des Kühlschranks bei der „neuen" Netzspannung? Die Toleranzen lassen eine Netzspannung, die um 10% über dem Nominalwert liegt, zu. Wie groß ist dann die Leistungsaufnahme?

Beispiel 95: Wenn sich die Betriebsspannung um 10% erhöht wird, erhöht sich auch die Leistung in der Last. Um wie viel Prozent steigt die Leistung?

Beispiel 96: Wie groß ist die Leistung, die in einer 100m langen Doppelleitung aus Kupfer in Wärme umgesetzt wird, wenn der Leitungsquerschnitt 1.5 mm^2 beträgt?

Beispiel 97: Welche Querschnittsfläche und welchen Durchmesser muss die Leitung aus Beispiel 96 haben, wenn das Leitermaterial Aluminium ist? Wie groß sind diese Abmessungen, wenn das Leitermaterial Eisen ist?

Beispiel 98: Die Leistung in einem Heizgerät soll verdoppelt werden. Um welchen Faktor muss die angelegte Spannung erhöht werden? (Bitte nicht ausprobieren, Brandgefahr!)

Beispiel 99: Die Leistung in einem Heizgerät soll halbiert werden. Mit welchen Faktor muss die angelegte Spannung multipliziert werden?

Beispiel 100: Welche Leistung kann maximal aus dem 230V-Netz entnommen werden, wenn die Leitung mit 10A, 16A bzw. mit 25A abgesichert ist?

Beispiel 101: Berechne den maximalen Strom und die maximale Spannung an den folgenden Widerständen, deren Widerstandswert und Belastbarkeit angegeben ist:

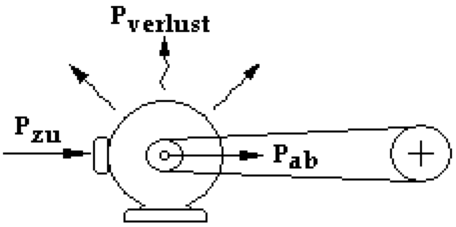
R / Ω	1	22	470	12k	390k	1M
P_{max} / W	¼	½	1	1	½	¼
U_{max} / V						
I_{max} / A						

Beispiel 102: In einer elektrischen Kochplatte (für 230V) befinden sich zwei Heizwiderstände mit je 115Ω Widerstand. Sie können einzeln, in Serie geschaltet und parallel geschaltet werden. Wie groß sind die möglichen Leistungen in jeden einzelnen Widerstand, wie groß sind die möglichen Gesamtleistungen?

6.3 Wirkungsgrad η

Unter dem Wirkungsgrad η (efficiency) eines Gerätes oder einer Anlage versteht man im Allgemeinen das Verhältnis zwischen der abgegebenen Leistung und der zugeführten Leistung.

$$\boxed{\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}}$$



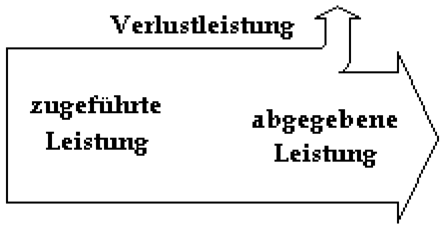


Bild 50: Leistungsbilanz eines Elektromotors und einer elektrischen Anlage

Die zugeführte elektrische Leistung (P_{zu}) wird in thermische Leistung zufolge ohmscher Verluste, in thermische Leistung zufolge Reibungsverluste in den Lagern, auf den Schleifringen (bewegliche elektrische Kontakte) in akustische Leistung (Lärm) und in die gewünschte mechanische Leistung (P_{ab}), die vom Motor bzw. von der Anlage abgegeben wird, umgewandelt.

Der Wirkungsgrad ist eine Verhältniszahl, für die

$$\boxed{0 \le \eta < 1}$$

gilt. Ein System mit einem Wirkungsgrad $\eta \ge 1$ gibt es nicht, da die abgegebene Leistung wegen der Verluste stets kleiner als die zugeführte Leistung ist (wäre ein Widerspruch zum 1. Hauptsatz der Thermodynamik).
Elektromotoren mit Leistungen im Bereich von 1kW bis 10kW haben einen Wirkungsgrad im Bereich von 75% bis etwa 95%, Verbrennungskraftmaschinen (Kolbenmotoren) haben einen Wirkungsgrad im Bereich von etwa 30%.
Werden mehrere Geräte hintereinander (in Kette) geschaltet, ergibt sich folgendes Bild:

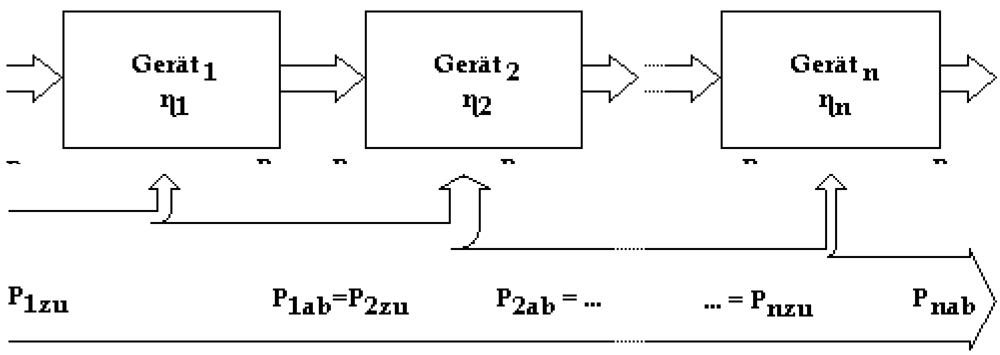


Bild 51: Leistungsbilanz von n gekoppelten Geräten

Damit erhält man

$$\eta_{ges} = \frac{P_{n,ab}}{P_{1,zu}} = \frac{P_{n,ab}}{P_{n,zu}} * \ldots * \frac{P_{3,ab}}{P_{3,zu}} * \frac{P_{2,ab}}{P_{2,zu}} * \frac{P_{1,ab}}{P_{1,zu}} = \eta_n * \ldots * \eta_3 * \eta_2 * \eta_1 = \prod_{k=1}^{n} \eta_k$$

Der Gesamtwirkungsgrad von n in Kette geschalteten Geräten ist das Produkt der einzelnen Teilwirkungsgrade.
Betrachtet man das öffentliche Stromnetz, so ist der Wirkungsgrad bestimmt aus dem Wirkungsgrad der Turbine, des Generators, der Leitungen, Transformatoren usw. Jedes einzelne Gerät produziert Verlustleistung, die im Endeffekt eine Erwärmung der Umgebung bewirkt. Der Wirkungsgrad kann auch aus dem Verhältnis der abgegebenen Energie zur zugeführten Energie bestimmt werden und es gilt

$$\boxed{\eta = \frac{W_{ab}}{W_{zu}}}$$

bzw.

$$\eta_{ges} = \frac{W_{n,ab}}{W_{1,zu}} = \frac{W_{n,ab}}{W_{n,zu}} * \dots * \frac{W_{3,ab}}{W_{3,zu}} * \frac{W_{2,ab}}{W_{2,zu}} * \frac{W_{1,ab}}{W_{1,zu}} = \eta_n * \dots * \eta_3 * \eta_2 * \eta_1 = \prod_{k=1}^{n} \eta_k$$

Beispiel 103: Ein Warmwasserboiler soll 50l Wasser von 12°C auf 85°C erwärmen. Der Wirkungsgrad des Boilers ist 95%. Wie lange muss das Gerät eingeschaltet werden, wenn die Leistungsaufnahme 2kW beträgt?

Beispiel 104: Ein Gleichstrommotor gibt 850W bei einer Betriebsspannung von 48V ab. Er hat einen Wirkungsgrad von 83%. Wie groß ist die zugeführte Leistung, die Verlustleistung und der Strom, der durch den Motor fließt?

Beispiel 105: Ein Elektromotor mit einem Wirkungsgrad von 80% ist an einem Generator mit einem Wirkungsgrad von 75% angeschlossen. Das Getriebe dazwischen hat einen Wirkungsgrad von 92%. Wie groß ist der Gesamtwirkungsgrad, wie groß ist die Leistung, die in den Generator geliefert werden muss, wenn die abgegebene Leistung des Motors 3300W sein soll?

Beispiel 106: Wie groß ist die Energie, die einem Auto mit einer Masse von 1200kg zugeführt werden muss, um es von 0 km/h auf 130 km/h zu beschleunigen (ohne Berücksichtigung des Luftwiderstandes), wenn der Wirkungsgrad (Elektromotor, Getriebe, Reifen, Fahrbahn) 65% beträgt. Wie groß sind die Stromkosten für einen solchen Vorgang, wenn eine kWh € 0.20 kostet?

Beispiel 107: Um wie viel Prozent wird bei der Nassrasur(mit 1l Wasser, welches von 12°C auf 45°C erhitzt werden muss) mehr Energie verbraucht ans bei der Trockenrasur (15W-Rasierer, Dauer 5 min)?

Beispiel 108: Wie groß ist der aufgenommene Strom einer Kaffeemaschine, welche 1l Wasser von 12°C auf 80°C in 10 min erhitzt und einen Wirkungsgrad von 85% hat und am 230V-Netz angeschlossen ist?

7 Aktive und passive Zweipole (Eintore), Energiesatz

Um feststellen zu können, ob ein Zweipol (Eintor, oneport) aktiv oder passiv ist, geht man von der folgenden Schaltung aus:

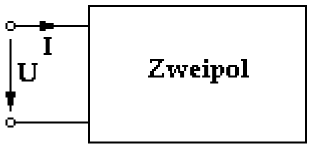
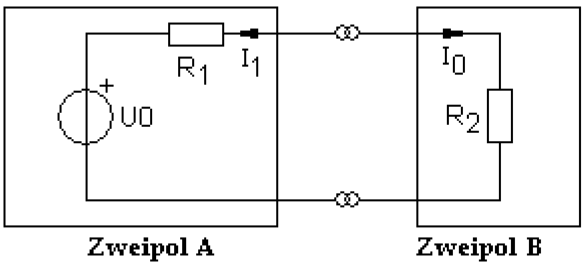


Bild 52: Spannungs- und Strompfeile im Verbraucher-Zählpfeilsystem

Im Verbraucher-Zählpfeilsystem gilt:
Ist $P = U * I > 0$, dann fließt die Leistung in den Zweipol hinein, die Leistung wird im Zweipol verbraucht. Der Zweipol ist passiv.
Ist $P = U * I < 0$ dann fließt die Leistung aus dem Zweipol hinaus, die Leistung wird im Zweipol erzeugt. Der Zweipol ist aktiv.
Weiters gilt noch der Energiesatz:
In einem abgeschlossenen System gelten für die Energien in den einzelnen n Systemteilen:

$$\sum_{k=1}^{n} W_k = konst. \qquad \sum_{k=1}^{n} P_k = \sum_{k=1}^{n} U_k * I_k = 0$$

Die Summe aller (erzeugter und verbrauchter) Leistungen sind in einem abgeschlossenen System $\equiv 0$, die Energie bleibt konstant.



Die Stromrichtungen wurden so gewählt, dass die angenommene Stromrichtung in den Zweipol hinein zeigt. Fließt de Strom in diese Richtung, liefert die Rechnung ein positives Vorzeichen zum Strom, fließt der Strom in entgegengesetzte Richtung, liefert die Rechnung ein negatives Vorzeichen.

Bild 53: Eine Quelle (Zweipol A) und eine Senke (Zweipol B)

Die Leistung, die in den Zweipol B fließt, ist

$$P_B = U_2 * I_0 = U_0 * \frac{R_2}{R_1 + R_2} * \frac{U_0}{R_1 + R_2} = U_0{}^2 * \frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2}$$

und ergibt einen positiven Wert im Verbraucherzählpfeilsystem. Er verbraucht die Leistung.
Die Leistung, die in den Zweipol A hinein fließt, ist

$$P_A = U_2 * I_1 = U_2 * (-I_0) = U_0 * \frac{R_2}{R_1 + R_2} * \frac{-U_0}{R_1 + R_2} = -U_0{}^2 * \frac{R_2}{(R_1 + R_2)^2}$$

Die Rechnung liefert einen negativen Wert (die tatsächliche Stromrichtung ist entgegengesetzt der Richtung von I_1, weil der Strom aus dem Zweipol herausfließt. Dieser Zweipol ist aktiv, er liefert Leistung. Die Summe der beiden Leistungen ist Null, wie es der Energiesatz aussagt.

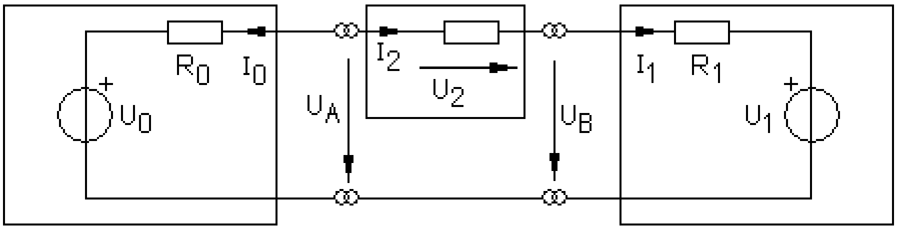


Bild 54: Aktive und passive Zweipole

$U_0 = 12V$ $\quad R_0 = 6\Omega$
$U_1 = 6V$ $\quad R_1 = 1.5\Omega$
$R_2 = 10.5\Omega$

Damit erhält man für die Spannung (den Druckunterschied) an den Widerständen

$$U_R = U_0 - U_1 = 12V - 6V = 6V$$

und einen Strom durch die Widerstände von

$$I_R = \frac{U_R}{R_{ges}} = \frac{U_R}{R_0 + R_1 + R_2} = \frac{6V}{18\Omega} = \frac{1}{3}A$$

Die Spannungen sind

$$U_A = U_0 - I_R * R_0 = 12V - \frac{6}{3}V = 10V$$

$$U_B = U_0 - I_R * (R_0 + R_2) = 12V - \frac{16.5}{3}V = 6.5V$$

Für den Zweipol A gilt $I_0 = -I_R$ und damit

$$P_A = U_A * I_0 = -U_A * I_R = -10V * \frac{1}{3}A = -\frac{10}{3}W. \quad \text{aktiv, liefert Leistung}$$

Für den Zweipol B gilt

$$P_B = U_B * I_1 = U_B * I_R = 6.5V * \frac{1}{3}A = \frac{13}{6}W. \quad \text{passiv, konsumiert Leistung}$$

und für den Zweipol C gilt

$$P_C = U_2 * I_2 = (U_A - U_B) * I_R = 3.5V * \frac{1}{3}A = \frac{7}{6}W. \quad \text{passiv, konsumiert Leistung}$$

und für die gesamte Schaltung gilt

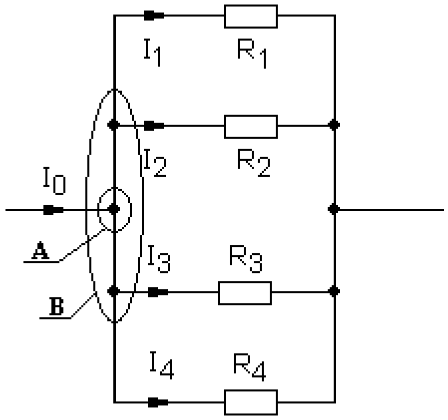
$$P_A + P_B + P_C = -\frac{10}{3}W + \frac{13}{6}W + \frac{7}{6}W \equiv 0W.$$

Anmerkung: Obwohl der Zweipol B eine Quelle enthält, liefert er keine Leistung in den Rest der Schaltung, er ist passiv. Wäre im Zweipol B ein Akkumulator, so würde dieser Akkumulator aufgeladen werden.

8 Netzwerke

8.1 Die erste Kirchhoffsche Regel oder Knotenregel

Bei der Parallelschaltung von Zweipolen wird der Gesamtstrom in Teilströme aufgeteilt.



Den Ort der Stromverzweigung nennt man Knoten (node).
Der Strom I_0 teilt sich im Knoten A in zwei Teilströme I_1+I_2 und I_3+I_4 auf. Im Knoten B teilt er sich in die vier Teilströme I_1, I_2, I_3 und I_4 auf.
Jeder der vier Widerstände stellt einen Zweig der Schaltung dar.

Bild 55: Stromverzweigungsknoten

Da der Strom im Knoten nicht verschwinden kann, gilt in jedem Knoten, dass die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme ist.
Werden alle in den Knoten hineinfließenden Ströme mit positivem Vorzeichen und alle aus dem Knoten hinaus fließenden Ströme mit negativen Vorzeichen gewählt, dann lautet die Knotenregel:
Die Summe aller Ströme in einem Knoten ist Null.

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + ... = 0$$

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0$$

Für die Schaltung im Bild 55 gilt im Knoten A:

$$I_0 - (I_1 + I_2) - (I_3 + I_4) = 0$$

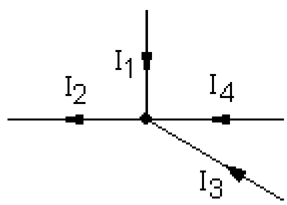
weil der zufließende Strom I_0 in die abfließenden Teilströme (I_1+I_2) sowie (I_3+I_4) aufgeteilt wird. Im Knoten B gilt:

$$I_0 - I_1 - I_2 - I_3 - I_4 = 0$$

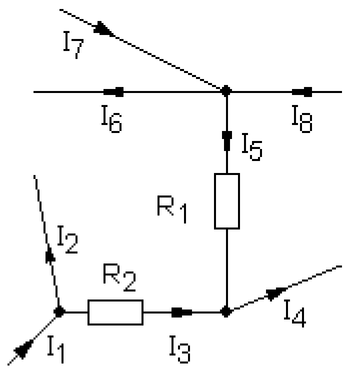
weil der zufließende Strom I_0 in die abfließenden Ströme I_1, I_2, I_3 und I_4 aufgeteilt wird.

Beispiel 109:

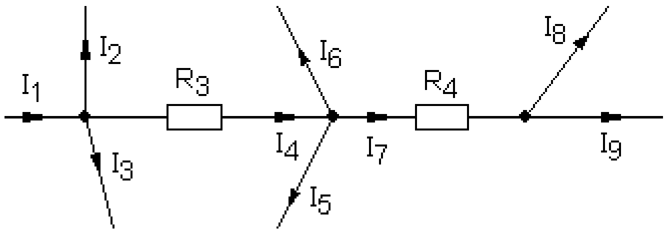
Berechne den Strom I_4 in der nebenstehenden Schaltung. Dabei sei I_1 = -2A, I_2 = 3A und I_3 = 6A.



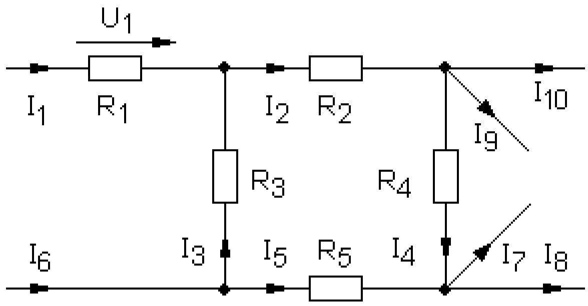
Beispiel 110: Berechne die Ströme I_3, I_5 und I_8 in der nebenstehenden Schaltung, wenn die Ströme I1 = 2mA, I_2 = -1mA, I_4 = -2mA, I_6 = -1mA und I_7 = -3mA, R_1 = 4.7kΩ und R_2 = 12kΩ beträgt.



Beispiel 111: Berechne die fehlenden Ströme I_4, I_7, I_8 und I_9 in der folgenden Schaltung, wenn die Ströme I_1 = 3mA, I_2 = -5mA, I_3 = (10 - n)mA, I_5 = -1mA und I_6 = -2mA gegeben sind, wobei n = KatNr. mod 10 (Rest der Ganzzahldivision) ist.



Beispiel 112: Berechne die Ströme I_1, I_2, I_3, I_4, I_5 und I_{10}, wenn die Spannung U_1 = 20mV am Widerstand R_1 = 10kΩ, der Strom I_6 = (10 + n) µA, I_8 = -2µA, I_7 = 5µA und I_9 = 5µA ist, wobei n = KatNr. mod 10 (Rest der Ganzzahldivision) ist (alle anderen Widerstände: 27kΩ). Zeichne die Spannungspfeile bei jedem Widerstand ein und berechne die Spannungen U_2, U_3, U_4 und U_5 an den einzelnen Widerständen, sowie die Leistungen, P_1, P_2, P_3, P_4 und P_5, die in den Widerständen in Wärme umgesetzt werden.



8.2 Die zweite Kirchhoffsche Regel oder die Maschenregel

Bei der Serienschaltung von Zweipolen wird die Gesamtspannung in Teilspannungen aufgeteilt.

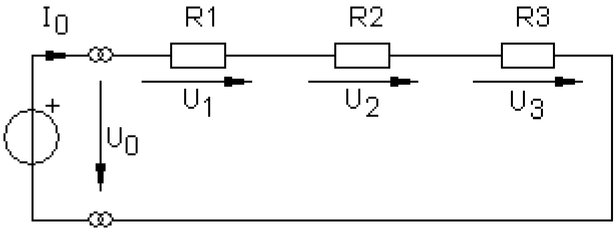


Bild 56: Spannungsaufteilung bei der Serienschaltung von Zweipolen

Bei der Serienschaltung gilt, dass die Gesamtspannung U_0 gleich der Summe der Teilspannungen ist.
In einer beliebigen, aus Zweipolen gebildeten Schaltung lassen sich geschlossenen Umläufe finden, die als Maschen bezeichnet werden.

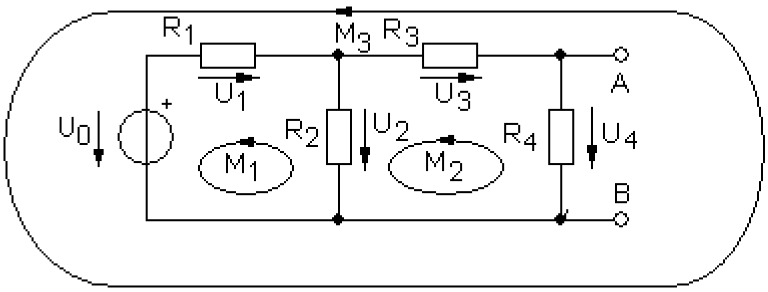


Bild 57: Ein Netzwerk aus mehreren Maschen

Masche M_1 besteht aus den Bauelementen U_0, R_2 und R_1, Masche M_2 besteht aus den Bauelementen R_2, R_4 und R_3, Masche M_3 besteht aus den Bauelementen U_0, R_4, R_3 und R_1.
Werden in jeder Masche die Teilspannungen entsprechend dem Umlaufsinn in der Masche addiert, so gilt in jeder Masche, dass die Summe der Teilspannungen Null ist

$$\sum_{k\in M} U_k = 0$$

Dann gilt für die Schaltung in
Bild 57**:**

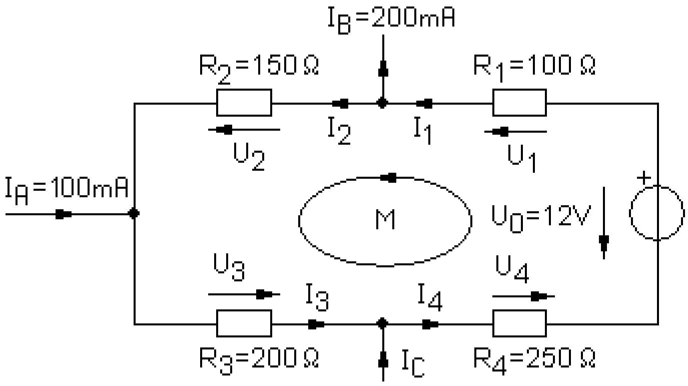
Masche 1: $U_0 - U_2 - U_1 = 0$

Masche 2: $U_2 - U_4 - U_3 = 0$

Masche 3: $U_0 - U_4 - U_3 - U_1 = 0$

Anmerkung: Gibt es mehrere Maschen in einem Netzwerk, so kann eine Maschengleichung aus den verbleibenden Maschengleichungen ausgedrückt werden: Im obigen Beispiel kann M_3 aus der Addition von M_1 und M_2 erhalten werden.

Beispiel 113:



In der nebenstehenden Schaltung sind zu berechnen: I_C, I_1, I_2, I_3, I_4, U_1, U_2, U_3, U_4, P_0, P_1, P_2, P_3 und P_4. Gibt die Spannungsquelle Energie ab (wird sie entladen) oder nimmt sie Energie auf (wird sie geladen)?

Bild 58: Die zu berechnende Schaltung

Lösung: legt man über die gesamte Schaltung einen Knoten, so dass alle Widerstände und die Spannungsquelle innerhalb liegen, hat man nur die Ströme I_A, I_B und I_C, die in den Knoten bzw. aus den Knoten fließen. Es gilt:

K_1: $I_A + I_C - I_B = 0$ $\qquad I_C = I_B - I_A$ $\qquad I_C = 100mA$

nimmt man die Masche her, so gilt:

M: $U_1 + U_2 + U_3 + U_4 - U_0 = 0$

mit Hilfe des ohmschen Gesetzes erhält man

M: $I_1 * R_1 + I_2 * R_2 + I_3 * R_3 + I_4 * R_4 - U_0 = 0$

$$I_1 * 100 + I_2 * 150 + I_3 * 200 + I_4 * 250 = 12$$

K_2: $I_1 - I_2 - I_B = 0$ $\qquad I_1 - I_2 = 0.2$

K_3: $I_2 + I_A - I_3 = 0$ $\qquad I_3 - I_2 = 0.1$

K_4: $I_3 + I_C - I_4 = 0$ $\qquad I_4 - I_3 = 0.1$

Nun sind die vier Gleichungen (M, K_1, K_2 und K_4) für die vier unbekannten Ströme (I_1, I_2, I_3 und I_4) aufgestellt, die zu lösen sind. Aus K_4 kann I_4 ausgedrückt werden und in die restlichen drei Gleichungen eingesetzt werden:

M: $I_1 * 100 + I_2 * 150 + I_3 * 200 + (I_3 + 0.1) * 250 = 12$

$$I_1 * 100 + I_2 * 150 + I_3 * 200 + I_3 * 250 = -13$$

$$I_1 * 100 + I_2 * 150 + I_3 * 450 = -13$$

Die Gleichungen K_2 und K_3 bleiben unverändert (weil in ihnen kein I_4 vorkommt).Aus K_3 kann I_3 ausgedrückt werden und in die restlichen zwei Gleichungen eingesetzt werden:

M: $I_1 * 100 + I_2 * 150 + (I_2 + 0.1) * 450 = -13$ $\qquad I_1 * 100 + I_2 * 150 + I_2 * 450 = -58$

$$I_1 * 100 + I_2 * 600 = -58$$

Aus K_2 kann I_1 ausgedrückt werden und in die obige Gleichung eingesetzt werden:

M: $(I_2 + 0.2) * 100 + I_2 * 600 = -58$ $\qquad I_2 * 100 + I_2 * 600 = -108$

$I_2 * 700 = -108$ $\qquad I_2 = -\frac{108}{700} = -154.3 * 10^{-3} A = -154.3mA$

Das negative Vorzeichen bedeutet, dass der Strom I_2 nicht in die Richtung fließt, wie sie durch den Strompfeil vorgegeben ist; er fließt in die entgegengesetzte Richtung! Nun kann I_1 berechnet werden:

$$I_1 * 100 + I_2 * 600 = -58 \quad \Rightarrow \quad I_1 = \frac{-58 - I_2 * 600}{100} \quad \Rightarrow \quad I_1 = 345.7mA$$

$$I_3 - I_2 = 0.1 \quad \Rightarrow \quad I_3 = 0.1 + I_2 \quad \Rightarrow I_3 = -54.29mA$$

$$I_4 - I_3 = 0.1 \quad \Rightarrow \quad I_4 = I_3 + 0.1 \quad \Rightarrow \quad I_4 = 45.71mA$$

Nun können die Spannungen an den Widerständen und die entsprechenden Leistungen leicht berechnet werden:

$U_1 = I_1 * R_1 = 34.57\text{V}$ $\qquad$ $P_1 = U_1 * I_1 = 11.95W$

$U_2 = I_2 * R_2 = \text{-}23.15\text{V}$ $\qquad$ $P_2 = U_2 * I_2 = 3.57W$

$U_3 = I_3 * R_3 = -10.86V$ $\qquad$ $P_3 = U_3 * I_3 = 0.590W$

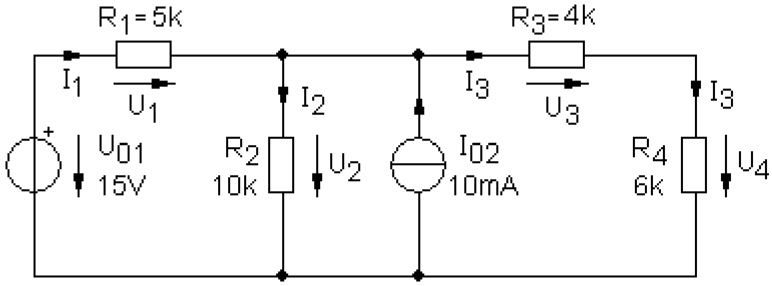
$U_4 = I_4 * R_4 = 11.43V$ $\qquad$ $P_4 = U_4 * I_4 = 0.522W$

□

8.3 Netzwerkberechnungen mit den Kirchhoffschen Gleichungen

Mit Hilfe der Knoten- und Maschenregel können in jeden elektrischen Netzwerk sämtliche Spannungen an den Bauelementen und alle Ströme durch die Bauelemente berechnet werden, egal ob es sich um lineare oder nicht lineare Netzwerke, ebene oder räumliche Netzwerke handelt.

Beispiel 114:

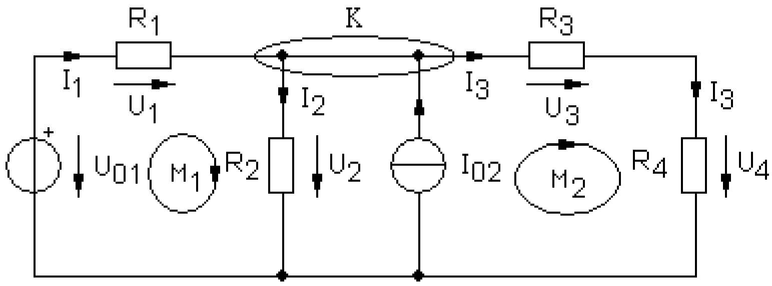


Es sind alle Spannungen an den Widerständen und alle Ströme durch die Widerstände zu berechnen.

Bild 59: Die zu berechnende Schaltung mit Spannungs- und Stromquelle

Sind nur die Stromrichtungspfeile (Spannungsrichtungspfeile) gegeben, so ist es sinnvoll, die dazugehörigen Spannungsrichtungspfeile (Stromrichtungspfeile) in die selbe Richtung zu wählen. Ist keine der Richtungen vorgegeben, ist es günstig, entsprechende Spannungs- und Stromrichtungspfeile in die gleiche Richtung zu wählen. Es gilt allgemein:

Spannungs- und Stromrichtung	Zusammenhang zwischen Spannung und Strom
in die selbe Richtung	U = I * R
in entgegengesetzte Richtung	U = **-** I * R



Anschließend sind die Knoten und Maschen festzulegen:

Nun können die Knotengleichung und die beiden Maschengleichungen aufgestellt werden:

Bild 60: Schaltung mit gewählten Knoten und Maschen

K: $I_1 - I_2 + I_{02} - I_3 = 0$ $\qquad I_1 - I_2 - I_3 = -I_{02}$

M$_1$: $-U_{01} + U_1 + U_2 = 0$ $\qquad U_1 + U_2 = U_{01}$

M$_2$: $-U_2 + U_3 + U_4 = 0$ $\qquad -U_2 + U_3 + U_4 = 0$

Im nächsten Berechnungsschritt sind die Spannungen durch die Ströme (Ohmsches Gesetz) auszudrücken.

$U_1 = I_1 * R_1$ $\qquad U_2 = I_2 * R_2$ $\qquad U_3 = I_3 * R_3$ $\qquad U_4 = I_3 * R_4$

Es stehen also für die sieben Unbekannten Größen (I_1, I_2, I_3, U_1, U_2, U_3, U_4) sieben Gleichungen zur Lösung zur Verfügung.
Setzt man die letzten vier Gleichungen in die Knoten- und Maschengleichungen ein, erhält man drei Gleichungen mit den drei unbekannten Strömen I_1, I_2 und I_3.

K: $I_1 - I_2 - I_3 = -I_{02}$

M_1: $I_1 * R_1 + I_2 * R_2 = U_{01}$ oder in Matrizenschreibweise

M_2: $-I_2 * R_2 + I_3 * R_3 + I_3 * R_4 = 0$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & -R_2 & R_3 + R_4 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{02} \\ U_{01} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Multiplikation der ersten Zeile mit $-R_1$ und Addition mit der zweiten Zeile liefert

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & R_1 + R_2 & R_1 \\ 0 & -R_2 & R_3 + R_4 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{02} \\ U_{01} + I_{02} * R_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Multiplikation der zweiten Zeile mit R_2, Multiplikation der dritten Zeile mit ($R_1 + R_2$) und Addition führt auf

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & R_1 + R_2 & R_1 \\ 0 & 0 & (R_1 + R_2)*(R_3 + R_4) + R_1 * R_2 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{02} \\ U_{01} + I_{02} * R_1 \\ (U_{01} + I_{02} * R_1) * R_2 \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Das Gleichungssystem wurde auf „obere Dreiecksform“ gebracht. In „normaler“ Schreibweise bedeutet das

$$I_1 - I_2 - I_3 = -I_{02}$$
$$I_2 * (R_1 + R_2) + I_3 * R_1 = U_{01} + I_{02} * R_1$$
$$I_3 * (R_1 + R_2) * (R_3 + R_4) + R_1 * R_2 = (U_{01} + I_{02} * R_1) * R_2$$

Nun kann das Gleichungssystem einfach gelöst werden. Aus der dritten Zeile kann I_3 berechnet werden:

$$I_3 = \frac{(U_{01} + I_{02} * R_1) * R_2}{(R_1 + R_2) * (R_3 + R_4) + R_1 * R_2}$$

Mit diesem Ergebnis und der zweiten Zeile folgt I_2:

$$I_2 = \frac{U_{01} + I_{02} * R_1 - I_3 * R_1}{R_1 + R_2}$$

und aus der ersten Zeile erhält man mit den bereits vorhandenen Resultaten:

$$I_1 = I_2 + I_3 - I_{02}$$

Die Ergebnisse aus der Berechnung der einzelnen Ströme werden endlich in die vier Gleichungen zur Berechnung der Spannungen an den jeweiligen Widerständen herangezogen. Damit ist das Beispiel (allgemein) gelöst. Setzt man die angegebenen Bauteil- Spannungs- und Stromwerte in kΩ, mA und V ein, liefert das:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 5 & 10 & 0 \\ 0 & -10 & 4+6 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 15 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 15 & 5 \\ 0 & -10 & 10 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 65 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 15 & 5 \\ 0 & 0 & 200 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 65 \\ 650 \end{pmatrix}$$

aus der dritten Gleichung erhält man

$$I_3 = \frac{650}{200} mA = 1.35mA$$

die zweite Gleichung liefert

$$I_2 = \frac{65 - 5 * \frac{65}{20}}{15} mA = \frac{1300 - 325}{300} mA = \frac{975}{300} mA = 3.25mA$$

und aus der ersten Gleichung folgt

$$I_1 = (-10 + 1.35 - 3.25) mA = -11.9mA$$

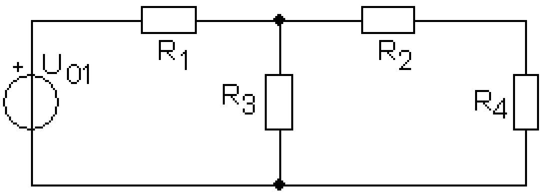
Das bedeutet, dass die Spannungsquelle keine Energie liefert, sondern Energie aufnimmt. Ist diese Quelle z.B. ein Akkumulator, so wird dieser aufgeladen. Für die Spannungen erhält man

$$U_1 = I_1 * R_1 = -59.5V \qquad U_2 = I_2 * R_2 = 32.5V$$
$$U_3 = I_3 * R_3 = 5.4V \qquad U_4 = I_3 * R_4 = 8.1V$$

□

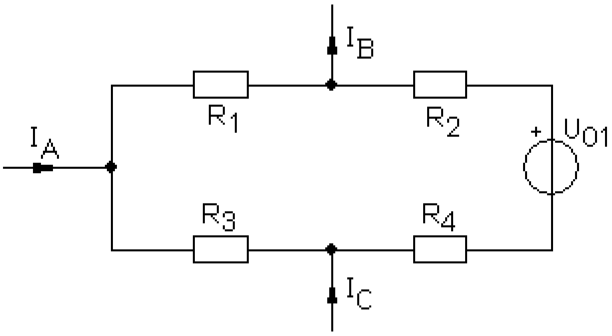
Hat ein Netzwerk k Knoten, so können k – 1 voneinander linear unabhängige Knotengleichungen aufgestellt werden. Hat ein Netzwerk k Knoten und z Zweige, so können z – k + 1 linear unabhängige Maschengleichungen aufgestellt werden.

Beispiel 115:



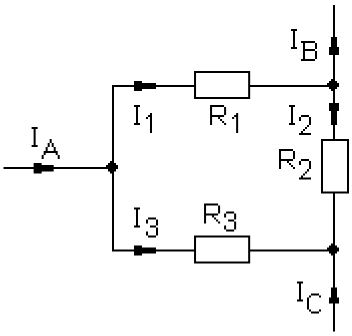
Wählen Sie die Stromflussrichtungen durch die einzelnen Widerstände und Maschenrichtungen selbst und berechnen sie alle Ströme durch die Widerstände und alle Spannungsabfälle an den einzelnen Widerständen, wenn alle Widerstände 2.7kΩ sind und die Spannung U_{01}=15V beträgt.

Beispiel 116:



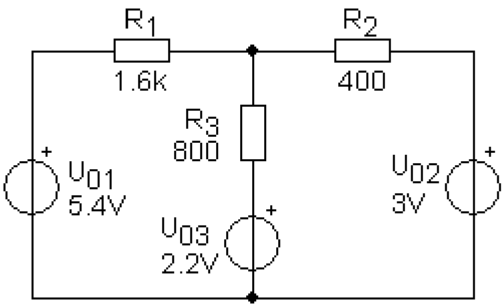
Wählen Sie die Stromflussrichtungen durch die einzelnen Widerstände und Maschenrichtungen selbst und berechnen sie alle Ströme und alle Spannungsabfälle an den einzelnen Widerständen, wenn für die Widerstände R_n = n kΩ und für die Spannung U_{01}=12V, die Ströme I_A=10mA und I_B=12mA gilt.

Beispiel 117:



Wählen Sie die Maschenrichtung selbst und berechnen sie alle Ströme und alle Spannungsabfälle an den einzelnen Widerständen, wenn für die Widerstände R_n = n Ω und für die Ströme I_1=1A und I_2=2A gilt.

Beispiel 118:



Wählen Sie die Maschenrichtungen selbst und berechnen sie alle Ströme und alle Spannungsabfälle an den einzelnen Widerständen. Wie groß sind die Leistungen, die in den einzelnen Bauteilen auftreten? Welche der Bauteile sind aktiv, welche passiv?

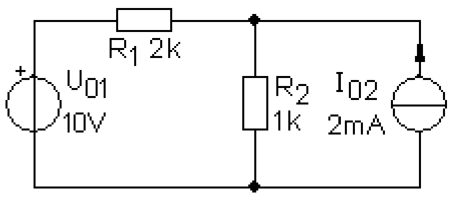
8.4 Netzwerkberechnungen mit Hilfe des Helmholtzschen Überlagerungsprinzips

Mit Hilfe des Helmholtzschen Überlagerungsprinzips (Superpositionsprinzip) können lineare Netzwerke (Netzwerke mit linearen Bauelementen) einfach berechnet werden. Es ist zu beachten dass das Verfahren nur für lineare Netzwerke einsetzbar ist!

Jede einzelne Quelle verursacht eine Einzelwirkung (Spannungen an Widerständen, Ströme durch Widerstände) welche berechnet werden kann, in dem jeweils nur diese eine Quelle Energie liefert und alle anderen Quellen durch ihren Innenwiderstand ersetzt werden (Spannungsquelle: $R_i = 0$, Stromquelle: $R_i = \infty$).
Die Gesamtwirkung aller Quellen (Gesamtstrom, Gesamtspannung) ergibt sich aus der Überlagerung (Addition) aller Einzelwirkungen.

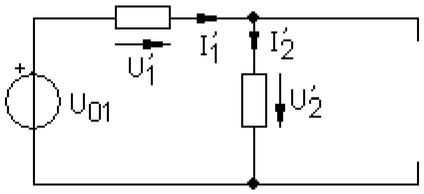
Anmerkung: Die Leistungen in den einzelnen Bauelementen kann nur aus der jeweiligen Gesamtspannung bzw. aus dem jeweiligen Gesamtstrom berechnet werden, weil die Leistung keine lineare, sondern eine quadratische Funktion der angelegten Spannung bzw. des durchfließenden Stromes ist ($P = \frac{U^2}{R}$ *bzw.* $P = I^2 * R$).

Beispiel 119:



Im ersten Schritt wird die Stromquelle durch ihren Innenwiderstand ersetzt. Anschließend werden die Wirkungen der Spannungsquelle, also der Strom I_1' und I_2', der nur durch die Quelle U_{01} verursacht wird, berechnet. Dann können auch die beiden Teilspannungen U_1' und U_2' bestimmt werden.

Bild 61: Schaltung mit mehreren Quellen

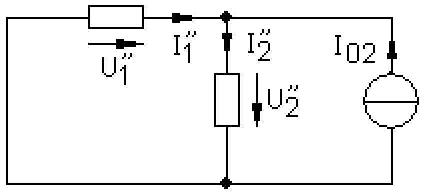


$$I_1' = \frac{U_{01}}{R_1 + R_2} = \frac{10}{3} mA \qquad I_2' = I_1' = \frac{10}{3} mA$$

$$U_1' = I_1' R_1 = \frac{20}{3} V \qquad U_2' = I_1' R_2' = \frac{10}{3} V$$

Bild 62: Schaltung mit nur einer (Spannungs-)Quelle

Im nächsten Berechnungsschritt wird die Spannungsquelle durch ihren Innenwiderstand ersetzt und es werden nur die Wirkungen U_1'', U_2'', I_1'' und I_2'' der Stromquelle berechnet.



$$U_2'' = I_{02} \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2} = \frac{4}{3} V \qquad U_1'' = -U_2'' = -\frac{4}{3} V$$

$$I_1'' = -I_{02} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = -\frac{2}{3} mA \quad I_2'' = I_{02} \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{4}{3} mA$$

Bild 63: Schaltung mit nur einer (Strom-)quelle

Nun können die Wirkungen der beiden Quellen addiert werden und man erhält für Spannung und Strom beim Widerstand R_1:

$$I_1 = I_1' + I_1'' = \frac{10}{3} mA + \frac{-2}{3} mA = \frac{8}{3} mA \qquad U_1 = U_1' + U_1'' = \frac{20}{3} V + \frac{-4}{3} V = \frac{16}{3} V$$

und für die Leistung, die im Widerstand R_1 in Wärme umgesetzt wird:

$$P_1 = U_1 * I_1 = (U_1' + U_1'') * (I_1' + I_1'') = U_1' * I_1' + U_1' * I_1'' + U_1'' * I_1' + U_1'' * I_1''$$

$$P_1 = \frac{16}{3} V * \frac{8}{3} mA = \frac{128}{9} mW =$$

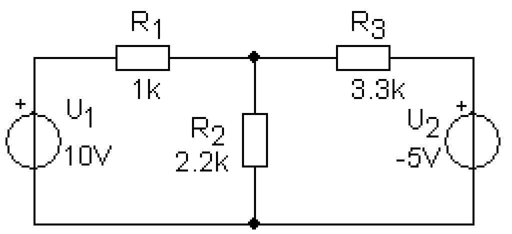
$$P_1 = \left(\frac{20}{3} - \frac{4}{3}\right) V * \left(\frac{10}{3} - \frac{2}{3}\right) mA = \frac{20}{3} * \frac{10}{3} mW - \frac{4}{3} * \frac{10}{3} mW - \frac{20}{3} * \frac{2}{3} mW + \frac{4}{3} * \frac{2}{3} mW = \frac{128}{9} mW$$

In dieser Darstellungsform kann man leicht erkennen, dass nicht nur die beiden Einzelleistungen $P_1' = U_1' * I_1'$ und $P_1'' = U_1'' * I_1''$ auftreten, sondern auch der Strom der Quelle ('') bewirkt mit der Spannung der Quelle (') eine Leistung, genauso wie auch der Strom der Quelle(') mit der Spannung der Quelle ('') eine Leistung hervorruft.
Analog gilt am Widerstand R_2:

$$I_2 = I_2' + I_2'' = \frac{10}{3} mA + \frac{4}{3} mA = \frac{14}{3} mA \qquad U_2 = U_2' + U_2'' = \frac{10}{3} V + \frac{4}{3} V = \frac{14}{3} V$$

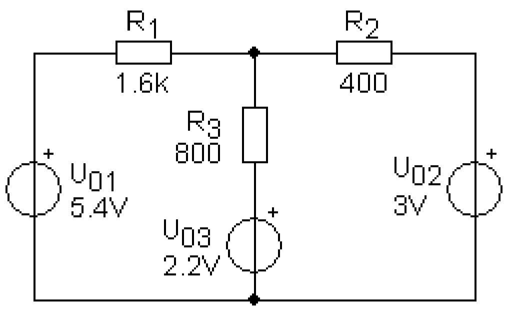
$$P_2 = U_2 * I_2 = \frac{14}{3} V * \frac{14}{3} mA = \frac{196}{9} mW$$

Beispiel 120:



Berechne alle Spannungen, Ströme und Leistungen in den Widerständen und in den Quellen.

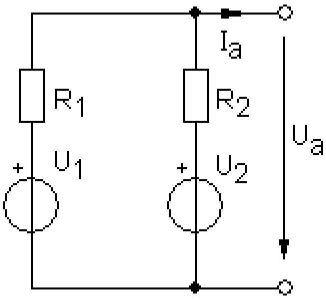
Beispiel 121:



Berechne alle Spannungen, Ströme und Leistungen in den Widerständen und in den Quellen (und vergleiche die Ergebnisse mit Beispiel 118).

8.5 Die Bestimmung von Ersatzquellen

Werden mehrere lineare Quellen zusammengeschaltet, so kann diese Zusammenschaltung als eine einzelne Quelle aufgefasst werden. Man spricht von einer Ersatzquelle. Diese Ersatzquelle muss dieselben Eigenschaften wie die Zusammenschaltung haben. Das erfordert die Berechnung der Gesamteigenschaften, wofür sich die Helmholtzsche Überlagerungsmethode hervorragend eignet.



Wie groß ist die Ausgangsspannung U_a dieser zusammengeschalteten Quellen und wie groß ist der Innenwiderstand R_i?

Bild 64: Zusammenschaltung zweier linearer Quellen

Wird die Quelle 2 durch ihren Innenwiderstand ersetzt, stellt die Schaltung einen Spannungsteiler dar und es gilt $U_{a1} = U_1 * \frac{R_2}{R_1 + R_2}$.

Wird die Quelle 1 durch ihren Innenwiderstand ersetzt, erhält man $U_{a2} = U_2 * \frac{R_1}{R_1 + R_2}$

Dann gilt für die Zusammenschaltung $U_a = U_{a1} + U_{a2} = U_2 * \frac{R_1}{R_1 + R_2} + U_2 * \frac{R_1}{R_1 + R_2}$ oder

$$U_a = \frac{U_1 * R_1 + U_2 * R_2}{R_1 + R_2}.$$

Um den Widerstand zwischen den beiden Klemmen zu bestimmen, werden alle Quellen durch ihren Innenwiderstand ersetzt und dann wird der Widerstand berechnet. Dann erhält man für die Schaltung im Bild 64 die Parallelschaltung der beiden Widerstände:

$$R_i = \frac{R_1 * R_2}{R_2 + R_2}.$$

Dann kann auch der Kurzschlussstrom I_{ak} berechnet werden und das Ohmsche Gesetz liefert

$$I_{ak} = \frac{U_a}{R_i} = \frac{\frac{U_1 * R_1 + U_2 * R_2}{R_1 + R_2}}{\frac{R_1 * R_2}{R_2 + R_2}} = \frac{U_1 * R_1 + U_2 * R_2}{R_1 * R_2}$$

Damit sind nun die Eigenschaften der Zusammenschaltung berechnet. Solche Eigenschaften nach außen hin hat auch eine Quelle mit der Leerlaufspannung U_a, dem Innenwiderstand R_i und dem Kurzschlussstrom I_{ak}.

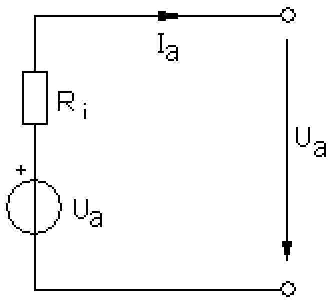


Bild 65: Spannungsquellen-Ersatzschaltung

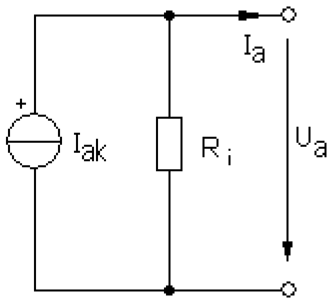
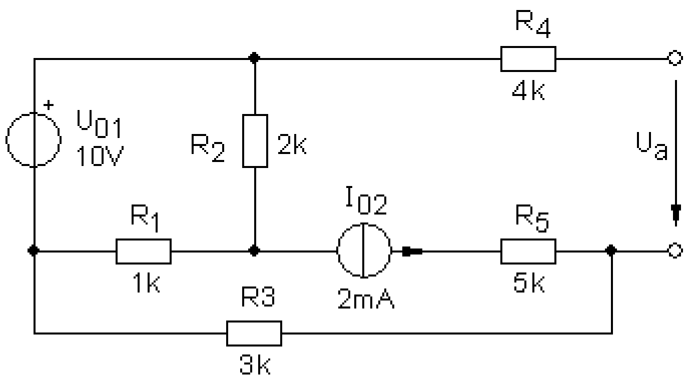


Bild 66: Stromquellen-Ersatzschaltung

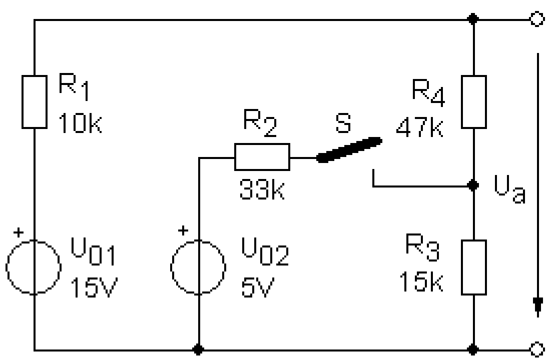
Beide Ersatzschaltungen haben nach außen hin die selben Eigenschaften wie die Schaltung im Bild 64.

Beispiel 122:



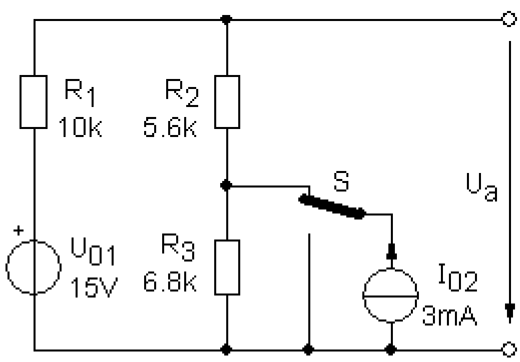
Berechne die Ersatzquelle mit
a: einer Spannungsquelle und dem entsprechenden Innenwiderstand,
b: einer Stromquelle und dem entsprechenden Innenwiderstand.

Beispiel 123:



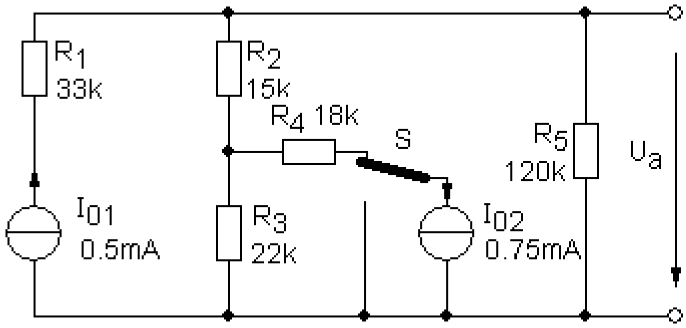
Berechne die Ersatzquellen wie im Beispiel 122, wenn der Schalter S offen ist und wenn der Schalter S geschlossen ist.

Beispiel 124:



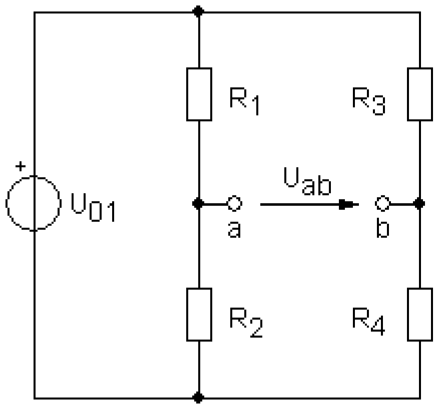
Berechne die Ersatzquellen wie im Beispiel 122, wenn der Schalter S offen ist und wenn der Schalter S geschlossen ist.

Beispiel 125:



Berechne die Ersatzquellen wie im Beispiel 122, wenn der Schalter S offen ist und wenn der Schalter S geschlossen ist. Wieso ist das Ergebnis von R_1 und von R_4 unabhängig?

Beispiel 126:



Berechne die Ersatzquellen wie im Beispiel 122.

Die Spannung am Widerstand R_2 beträgt

$$U_a = U_{01} * \frac{R_2}{R_1 + R_2}.$$

Die Spannung am Widerstand R_4 beträgt

$$U_b = U_{01} * \frac{R_4}{R_3 + R_4}.$$

Dann gilt für die Ausgangsspannung zwischen den Klemmen. a und b

$$U_{ab} = U_a - U_b = U_{01} * \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_4}{R_3 + R_4} \right) \text{ oder}$$

$$U_{ab} = U_{01} * \frac{R_2 * R_3 - R_1 * R_4}{(R_1 + R_2) * (R_3 + R_4)}$$

Ersetzt man die Quelle durch ihren Innenwiderstand, misst man zwischen den Klemmen a und b jenen Widerstand der aus der Serienschaltung aus R_1 parallelgeschaltet zu R_2 und R_3 parallelgeschaltet zu R_4 entsteht, also

$$R_i = \frac{R_1 * R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 * R_4}{R_3 + R_4} = \frac{R_1 * R_2 * (R_3 + R_4) + R_3 * R_4 * (R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2) * (R_3 + R_4)}$$

und für den Kurzschlussstrom I_k:

$$I_k = \frac{U_{ab}}{R_i} = U_{01} * \frac{\frac{R_2 * R_3 - R_1 * R_4}{(R_1 + R_2) * (R_3 + R_4)}}{\frac{R_1 * R_2 * (R_3 + R_4) + R_3 * R_4 * (R_1 + R_2)}{(R_1 + R_2) * (R_3 + R_4)}} = \frac{R_2 * R_3 - R_1 * R_4}{R_1 * R_2 * (R_3 + R_4) + R_3 * R_4 * (R_1 + R_2)}$$

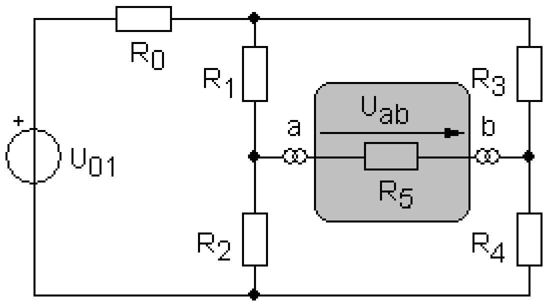
Wenn also $R_2 * R_3 - R_1 * R_4 = 0$ gilt, ist die Ausgangsspannung 0V und der Ausgangsstrom 0A; man spricht von einer abgeglichenen Brückenschaltung und die Bedingung

$$\boxed{R_2 * R_3 = R_1 * R_4}$$

nennt man **Abgleichbedingung**.

8.6 Netzwerkberechnungen mit Hilfe der Zweipolmethode

Die Idee, welche hinter dieser Methode steckt ist, das Netzwerk so in zwei Teile zu trennen, dass die gesuchte(n) Größe(n) an der Schnittstelle des aktiven und passiven Teils liegt.



Es soll die Spannung U_{ab} am Widerstand R_5 berechnet werden.

Bild 67: Die Aufteilung in aktive und passive Teile. Der grau hinterlegte Teil der Schaltung ist in diesem Beispiel der passive Teil, die restliche Schaltung ist der aktive Teil.

Vorgangsweise:

- Das Netzwerk wird an jener Stelle in einen aktiven und in einen passiven Teilzweipol zerlegt, an der die gesuchte Größe auftritt.
- Der passive Teilzweipol wird aus der Schaltung herausgelöst.
- Der verbleibende aktive Teilzweipol wird durch eine einzelne Quelle mit ihrem entsprechenden Innenwiderstand dargestellt.
- Für den passiven Teilzweipol wird der Ersatzwiderstand berechnet.
- Der neu berechnete aktive Teilzweipol wird mit dem neu berechneten passiven Teilzweipol zusammengeschaltet und die gesuchte Größe wird mit Hilfe der Spannungs- oder Stromteilerregel bestimmt.

Sollen die Spannungen an den einzelnen Widerständen oder die Ströme durch die einzelnen Widerstände mit Hilfe der Kirchhoffschen Gleichungen berechnet werden, so ist für die Schaltung aus Bild 67 ein Gleichungssystem aus sechs Gleichungen mit sechs Unbekannten (Ströme) zu lösen. Mit der Zweipolmethode ist die Berechnung einfacher:

Wird der Widerstand R_5, der passive Teil der Schaltung, herausgelöst, kann der Strom durch die Quelle leicht berechnet werden und es gilt:

$$I_{01} = \frac{U_{01}}{R_0 + \frac{(R_1+R_2)*(R_3+R_4)}{R_1+R_2+R_3+R_4}} = U_{01} * \frac{R_1+R_2+R_3+R_4}{R_0*(R_1+R_2+R_3+R_4)+(R_1+R_2)*(R_3+R_4)}.$$

Dann ist die Spannung U_{01}' am Knotenpunkt, an dem die Widerstände R_0, R_1 und R_3 verzweigen:

$$U_{01}' = I_{01} * \frac{(R_1+R_2)*(R_3+R_4)}{R_1+R_2+R_3+R_4} = U_{01} * \frac{(R_1+R_2)*(R_3+R_4)}{R_0*(R_1+R_2+R_3+R_4)+(R_1+R_2)*(R_3+R_4)}$$

mit Hilfe der Spannungsteilerregel gilt

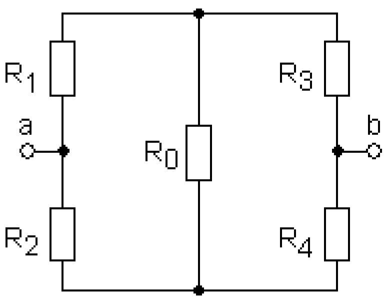
$$U_a = U_{01}'*\frac{R_2}{(R_1+R_2)} = U_{01}*\frac{(R_3+R_4)*R_2}{R_0*(R_1+R_2+R_3+R_4)+(R_1+R_2)*(R_3+R_4)}$$

$$U_b = U_{01}'*\frac{R_4}{(R_3+R_4)} = U_{01}*\frac{(R_1+R_2)*R_4}{R_0*(R_1+R_2+R_3+R_4)+(R_1+R_2)*(R_3+R_4)}$$

und für die Spannung an den Klemmen a und b erhält man

$$U_{ab} = U_a - U_b = U_{01}*\frac{(R_3+R_4)*R_2-(R_1+R_2)*R_4}{R_0*(R_1+R_2+R_3+R_4)+(R_1+R_2)*(R_3+R_4)}.$$

Für die Berechnung des Widerstandes des aktiven Teils zwischen den Klemmen a und b benötigt man die π-T-Transformation. Stellt man die Schaltung, nachdem die Quelle durch ihren Innenwiderstand ersetzt wurde, grafisch anders dar, liefert das



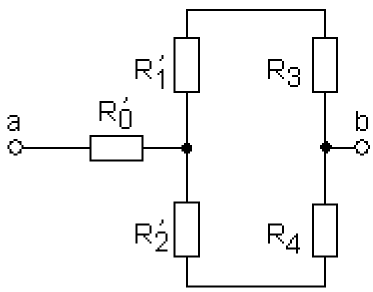


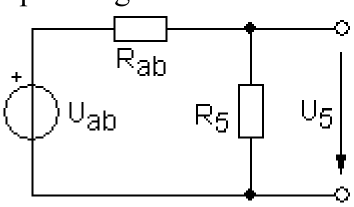
Bild 68: Schaltung zur Widerstandsberechnung vor und nach der π-T-Transformation

$$R_0' = \frac{R_1*R_2}{R_0+R_1+R_2} \qquad R_1' = \frac{R_0*R_1}{R_0+R_1+R_2} \qquad R_2' = \frac{R_0*R_2}{R_0+R_1+R_2}$$

$$R_{ab} = R_0' + \frac{(R_1'+R_3)*(R_2'+R_4)}{R_1'+R_2'+R_3+R_4} = \frac{R_1*R_2}{R_0+R_1+R_2} + \frac{\left(\frac{R_0*R_1}{R_0+R_1+R_2}+R_3\right)*\left(\frac{R_0*R_2}{R_0+R_1+R_2}+R_4\right)}{\frac{R_0*R_1}{R_0+R_1+R_2}+\frac{R_0*R_2}{R_0+R_1+R_2}+R_3+R_4}$$

$$R_{ab} = \frac{1}{R_0+R_1+R_2}\left(R_1*R_2+\frac{(R_0*(R_1+R_3)+R_3*(R_1+R_2))*(R_0*(R_2+R_4)+R_4*(R_1+R_2))}{R_0*R_1+R_0*R_2+(R_3+R_4)*(R_0+R_1+R_2)}\right)$$

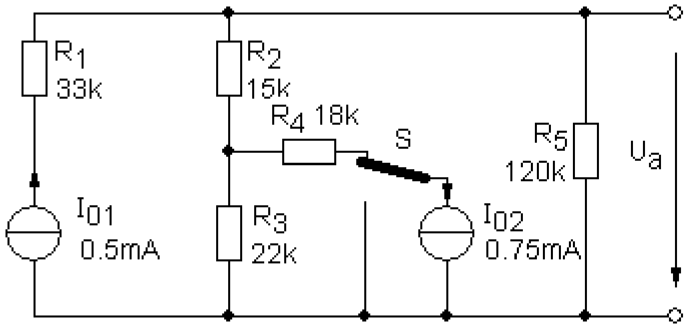
Schließlich erhält man für die Ersatzschaltung ein Spannungsquelle mit einem Spannungsteiler:



$$U_5 = U_{ab}*\frac{R_5}{R_{ab}+R_5}$$

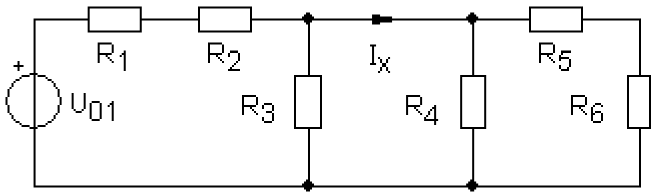
Bild 69: Die Ersatzschaltung zur Schaltung aus Bild 67.

Beispiel 127:



Berechne die Spannung U_a mit Hilfe der Zweipolmethode für die beiden Fälle der möglichen Schalterstellungen

Beispiel 128:



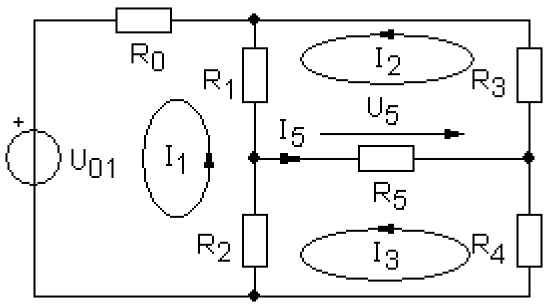
Berechne den Strom I_x, wenn die Spannungsquelle U_{01} eine Spannung von 12V liefert und alle Widerstände den Wert 2.2kΩ haben.

Beispiel 129:

Wie groß ist der Strom I_x in der Schaltung aus Beispiel 128, wenn für die Widerstandswerte R_1 = 1kΩ, R_2 = 2kΩ, R_3 = 3kΩ, R_4 = 4.5kΩ, R_5 = 4.5kΩ und R_6 = 4.5kΩ gilt?

8.7 Netzwerkberechnungen mit Hilfe der Maschenstrommethode

Die Maschenstrommethode wurde von James Clerk Maxwell entwickelt und wird daher auch Maxwellsche Maschenstrommethode oder auch Zyklenmethode nach Maxwell genannt. Sie kann nur angewendet werden, wenn in dem Netzwerk keine eingeprägten Ströme, also keine idealen Stromquellen vorhanden sind. Sind aber ideale Stromquellen vorhanden, müssen diese erst in entsprechende Spannungsquellen umgewandelt werden.



$U_{01} = 10$ V

R0 = 0.5kΩ R1 = 1kΩ R2 = 1kΩ
R3 = 1kΩ R4 = 0.5kΩ R5 = 0.2kΩ

Bild 70: Netzwerk mit eingezeichneten Maschenströmen

In jeder Masche wird ein Strom ein Strom angenommen und eingezeichnet. Dann gilt im Bild 70, dass der Widerstand R_0 nur von I_1 durchflossen wird, der Widerstand R_1 wird von I_1 und I_2 in entgegengesetzter Richtung durchflossen. Durch R_2 fließt I_1 und I_3 in entgegengesetzter Richtung, durch R_3 strömt nur I_2, der Spannungsabfall an R_4 wird nur durch I_3 verursacht und die Spannung an R_5 wird durch die Ströme I_2 und I_3 verursacht. Also gilt in der Masche 1 die Maschengleichung $U_{01} + U_{R0} + U_{R1} + U_{R2} = 0$.

$$U_{01} + I_1 * R_0 + (I_1 - I_2) * R_1 + (I_1 - I_3) * R_2 = 0$$ oder nach Auflösen der Klammern

$$I_1 * R_0 + I_1 * R_1 - I_2 * R_1 + I_1 * R_2 - I_3 * R_2 = -U_{01}$$ und nach Zusammenfassen der Ströme

M$_1$: $$I_1 * (R_0 + R_1 + R_2) - I_2 * R_1 - I_3 * R_2 = -U_{01}.$$

Für die zweite Masche gilt $U_{R1} + U_{R5} + U_{R3} = 0$:

$$(I_2 - I_1) * R_1 + (I_3 - I_2) * R_5 + I_2 * R_3 = 0$$ oder nach Umformen

M$_2$: $$-I_1 * R_1 - I_2 * (R_1 + R_3 + R_5) - I_3 * R_5 = 0$$

Und für die dritte Masche gilt

M$_3$: $$-I_1 * R_2 - I_2 * R_5 + I_3 * (R_2 + R_4 + R_5) = 0$$

Es ist also das Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} R_0 + R_1 + R_2 & -R_1 & -R_2 \\ -R_1 & R_1 + R_3 + R_5 & -R_5 \\ -R_2 & -R_5 & R_2 + R_4 + R_5 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_{01} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

zu lösen. Dann kennt man die einzelnen Maschenströme. Der Strom, der tatsächlich durch den Widerstand fließt, erhält man aus der vorzeichenrichtigen Addition (Subtraktion) der betreffenden Maschenströme. Der gesuchte Strom I_5 ergibt sich aus

$I_{R5} = I_2 - I_3$ und die Spannung am Widerstand R_5: $U_{R5} = (I_2 - I_3) * R_5$.

Setzt man in die Gleichung in kΩ, mA und in V ein, gilt:

$$\begin{bmatrix} 2.5 & -1 & -1 \\ -1 & 2.2 & -0.2 \\ -1 & -0.2 & 1.7 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und man erhält die Lösung } \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7.475 \\ -3.838 \\ -4.848 \end{pmatrix} mA$$

$$I_{R5} = -3.858 - (-4.848) = 0.950 mA = 950 \mu A$$

$$U_{R5} = I_{R5} * R_5 = 950 * 10^{-6} * 0.2 * 10^3 = 190 * 10^{-3} = 190 mV$$

□

Anmerkung:
Werden alle Maschenströme mit der gleichen Drehrichtung angenommen, so sind die Elemente der entstehenden Gleichungen in der Hauptdiagonale immer positiv und es sind alle anderen Elemente negativ.

Anmerkung:
Sind nur passive Bauelemente und keine gesteuerten Spannungsquellen im Netzwerk, so ist das entstehende Gleichungssystem bezüglich der Hauptdiagonale symmetrisch.

Anmerkung:
Ist eine ideale Stromquelle in der Schaltung, kann das Maschenstromverfahren nicht direkt angewendet werden. Zuerst muss die Stromquelle in eine Ersatzschaltung mit einer Spannungsquelle umgewandelt werden:

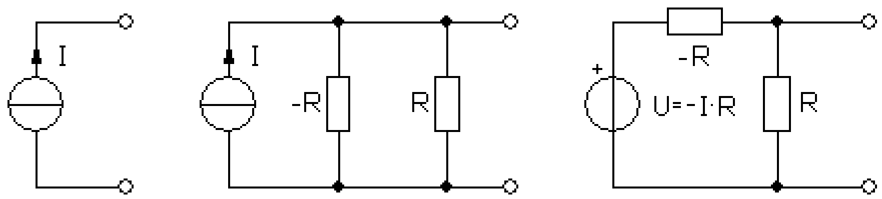
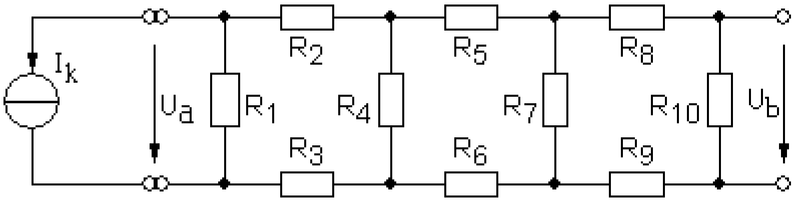


Bild 71: Umwandlung der idealen Stromquelle

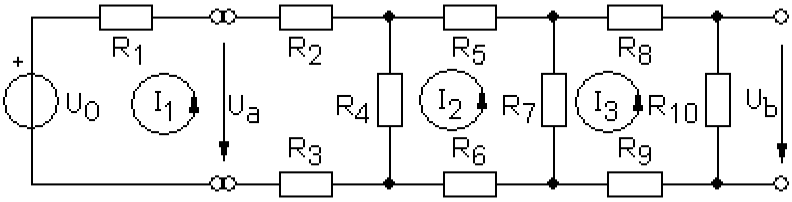
Schaltet man zu einer Stromquelle einen Widerstand parallel und einen zweiten, mit einem gleich großen, aber negativen Wert parallel, so hat man immer noch eine ideale Stromquelle, weil der gesamte parallel liegende Leitwert ist $G_{ges} = G_1 + G_2 = \frac{1}{R} + \frac{1}{-R} = \frac{1}{R} - \frac{1}{R} = 0$. Es fließt also in Summe kein Strom durch die beiden Widerstände. Aber man kann nun mit der idealen Stromquelle und dem negativen Widerstand eine Ersatzquelle bauen, die den Innenwiderstand –R und die Leerlaufspannung $U = -I * R$ liefert. Aus der Stromquelle wurde eine beschaltete Spannungsquelle, welche nach außen hin die selben Eigenschaften wie die ideale Stromquelle hat. Allerdings hat man nun eine Maschengleichung mehr, da die Ersatzschaltung eine Masche enthält.
Diese Methode ist nur rechnerisch durchführbar, da der negative Widerstand in der Praxis nur durch aktive Bauelemente nachgebildet werden kann.

Beispiel 130:



Berechne die Spannung U_a und U_b mit der Maschenstrommethode, wenn der Kurzschlussstrom der Quelle 1mA beträgt.

Da die Maschenstrommethode nur bei Spannungsquellen eingesetzt werden kann, muss die Stromquelle in eine entsprechende Spannungsquelle umgeformt werden. Dazu wird die Stromquelle mit dem Widerstand R_1 als reale Stromquelle aufgefasst und in eine reale Spannungsquelle transformiert. Dann erhält man



mit
$$U_0 = I_k * R_1 = -1V$$

In den einzelnen Maschen gilt:

$$I_1 * (R_1 + R_2 + R_3 + R_4) - I_2 * R_4 + U_0 = 0 \qquad U_a = U_0 + I_1 * R_1$$
$$-I_1 * R_4 + I_2 * (R_4 + R_5 + R_6 + R_7) - I_3 * R_7 = 0 \qquad \text{und}$$
$$-I_2 * R_7 + I_3 * (R_7 + R_8 + R_9 + R_{10}) = 0 \qquad U_b = -I_3 * R_{10}$$

in der Matrizenschreibweise gilt also mit gleichen Widerständen (in k**Ω**, mA und V)

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.} \qquad \begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 15 & -4 \\ 0 & 0 & 56 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = -\frac{1}{56} mA$$

und man erhält für die Maschenströme
$$I_2 = \frac{-1 + 4 * I_3}{15} mA = -\frac{\frac{60}{56}}{15} mA = -\frac{4}{56} mA$$

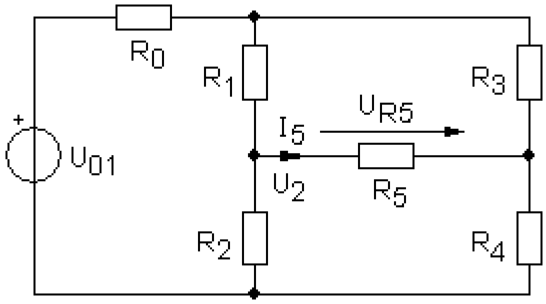
$$I_1 = \frac{-1 + I_2}{4} mA = -\frac{\frac{60}{56}}{4} mA = -\frac{15}{56} mA$$

und für die Spannungen
$$U_a = 1 + \left(-\frac{15}{56}\right) * 1 = \frac{41}{56} V$$
$$U_b = -\left(-\frac{1}{56}\right) * 1 = \frac{1}{56} V$$

□

8.8 Die Knotenpotentialanalyse

Diese Methode ist zur Maschenstrommethode dual. Sie kann nur angewendet werden, wenn keine Spannungsquellen in der Schaltung vorhanden sind. Sind aber ideale Spannungsquellen vorhanden, müssen diese erst in entsprechende Stromquellen umgewandelt werden. Dazu wird die Schaltung aus Bild 70 herangezogen.

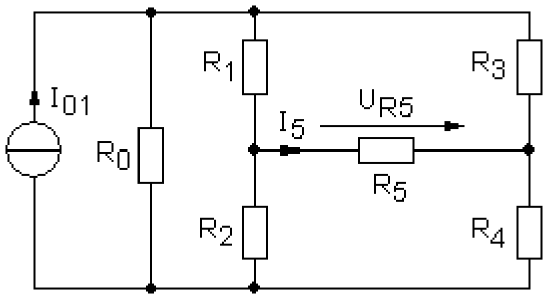


$U_{01} = 10$ V

$R_0 = 0.5\text{k}\Omega$	$R_1 = 1\text{k}\Omega$	$R_2 = 1\text{k}\Omega$
$R_3 = 1\text{k}\Omega$	$R_4 = 0.5\text{k}\Omega$	$R_5 = 0.2\text{k}\Omega$

Bild 72: In dieser Schaltung soll die Spannung U_{R5} am Widerstand R_5, sowie der Strom I_5 berechnet werden.

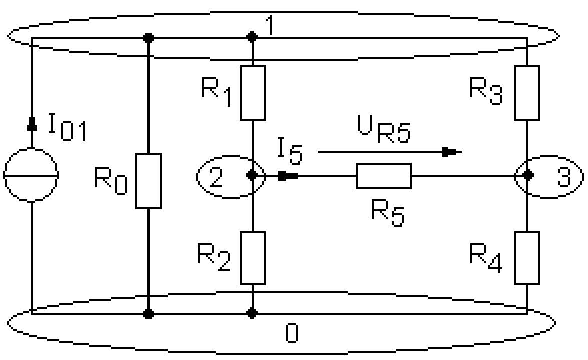
Dazu muss die Spannungsquelle U_{01} mit ihrem Innenwiderstand R_0 in eine entsprechende Stromquelle umgewandelt werden und man erhält:



mit $$I_{01} = \frac{U_{01}}{R_0}$$

Bild 73: Netzwerk mit Stromquelle

Nun können die Knoten nummeriert werden. Jener Knoten, auf welchen sich alle Spannungen beziehen (Bezugsknoten) bekommt die Knotennummer Null, er liegt auf dem Bezugspotential 0V; das bedeutet, dass die Spannung im Konten 0V ist:



Aus dem Knoten 1 fließt de Strom durch R_0 hinaus, der durch R_1 und der durch R_3 fließt ebenfalls hinaus, der Strom I_{01} fließt in den Knoten hinein. Die Ströme können aus den Spannungen ausgedrückt werden und damit gilt im Knoten 1:

$$I_{01} - \frac{U_1 - U_0}{R_0} - \frac{U_1 - U_2}{R_1} - \frac{U_1 - U_3}{R_3} = 0$$

Bild 74: Netzwerk mit Stromquelle und Knotennummerierung

Die Brüche werden aufgelöst und die Spannungen werden herausgehoben. Dann erhält man:

$$U_1 * \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_3} \right) - U_2 * \frac{1}{R_1} - U_3 * \frac{1}{R_3} = I_{01}$$

oder, wenn mit Leitwerten gerechnet wird:

K1: $U_1 * (G_0 + G_1 + G_3) - U_2 * G_1 - U_3 * G_3 = I_{01}$

In den Knoten 2 fließen die Ströme $\frac{U_1 - U_2}{R_1}$ und $\frac{U_0 - U_2}{R_2}$ hinein, der Strom $\frac{U_2 - U_3}{R_5} (= I_5)$ fließt hinaus (die Spannung $U_0 = 0V$). Damit gilt die Knotengleichung

$\frac{U_1 - U_2}{R_1} + \frac{-U_2}{R_2} - \frac{U_2 - U_3}{R_5} = 0$ oder nach Herausheben der Spannungen

$-U_1 * \frac{1}{R_1} + U_2 * \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_5} \right) - U_3 * \frac{1}{R_5} = 0$ und Verwendung von Leitwerten

K2: $-U_1 * G_1 + U_2 * (G_1 + G_2 + G_5) - U_3 * G_5 = 0$

In den Knoten 3 fließen die Ströme $\frac{U_1 - U_3}{R_3}$ und $\frac{U_2 - U_3}{R_5} (= I_5)$ hinein, der Strom $\frac{U_3 - U_0}{R_4}$ fließt hinaus (die Spannung $U_0 = 0V$). Damit gilt die Knotengleichung

$\frac{U_1 - U_3}{R_3} + \frac{U_2 - U_3}{R_5} - \frac{U_3 - U_0}{R_4} = 0$ oder nach Herausheben der Spannungen

$-U_1 * \frac{1}{R_3} - U_2 * \frac{1}{R_5} + U_3 * \left(\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_5} \right) = 0$ und Verwendung von Leitwerten

K3: $-U_1 * G_3 - U_2 * G_5 + U_3 * (G_3 + G_4 + G_5) = 0$

Mit diesen drei Knotengleichungen kann das zu lösende Gleichungssystem wieder in Matrizenschreibweise dargestellt werden.

$$\begin{bmatrix} G_0 + G_1 + G_3 & -G_1 & -G_3 \\ -G_1 & G_1 + G_2 + G_5 & -G_5 \\ -G_3 & -G_5 & G_3 + G_4 + G_5 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{01} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

oder mit Zahlenwerten (in V, mA und kΩ)

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{0.5} + 1 + 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 + 1 + \frac{1}{0.2} & -\frac{1}{0.2} \\ -1 & -\frac{1}{0.2} & 1 + \frac{1}{0.5} + \frac{1}{0.2} \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{bzw.}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 7 & -5 \\ -1 & -5 & 8 \end{bmatrix} * \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

mit den Lösungen $$\begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6.263 \\ 2.626 \\ 2.424 \end{pmatrix} \text{V.}$$

Nun kann auch die Spannung $U_{R5} = U_2 - U_3 = 2.626V - 2.424V = 0.606V$

und der Strom $I_5 = \dfrac{U_{R5}}{R_5} = 3.03mA$

bestimmt werden. □

8.8.1 Knotenpotentialmethode bei idealen Spannungsquellen

9 Anpassung

Eine Quelle und ein Verbraucher sind ideal aneinander angepasst, wenn im Verbraucher so viel Leistung wie es nur möglich ist, verbraucht wird. Daher gilt es die Frage zu klären, unter welchen Voraussetzungen die Quelle und der Verbraucher aneinander angepasst sind.

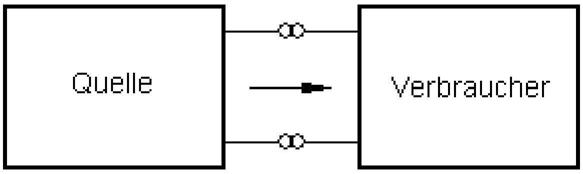


Bild 75: Quelle und Verbraucher

Es sei die Quelle mit ihrer Leerlaufspannung U_0 und ihrem Innenwiderstand R_i gegeben. Wie groß muss dann der Lastwiderstand R_L sein, dass die Leistung in der Last ein Maximum wird?

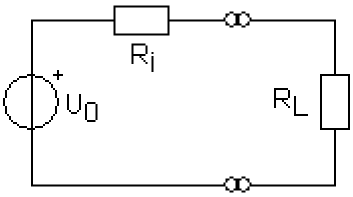


Bild 76: Quelle und Verbraucher

Die Spannung am Lastwiderstand ist $U_L = U_0 \dfrac{R_L}{R_i + R_L}$ und der Strom durch die Last ist $I_L = \dfrac{U_0}{R_i + R_L}$. Damit erhält man für die Leistung, die in R_L in Wärme umgesetzt wird:

$$P_L = U_L I_L = U_0 \frac{R_L}{R_i + R_L} \frac{U_0}{R_i + R_L} = U_0^{\,2} \frac{R_L}{(R_i + R_L)^2} = \frac{U_0^{\,2}}{R_i} \frac{\dfrac{R_L}{R_i}}{\left(1 + \dfrac{R_L}{R_i}\right)^2}.$$

Substituiert man für $\dfrac{R_L}{R_i} = x$, hat man das Maximum der Funktion $\dfrac{x}{(1+x)^2}$ zu finden.

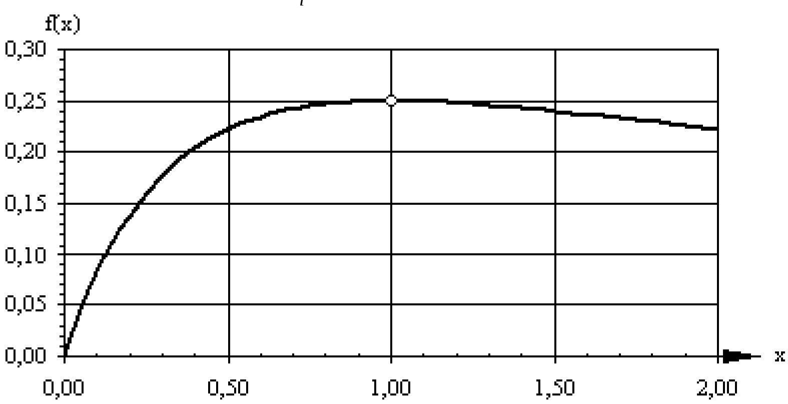


Bild 77: Der Verlauf der Leistung im Lastwiderstand

Ohne differenzieren kann durch die Darstellung des Funktionsverlaufs erkannt werden, dass das Maximum für $x = 1$, also für $R_L = R_i$ auftritt. Die maximale Leistung $P_{L,max}$ wird an den Verbraucher abgegeben, wenn der Lastwiderstand genau so groß ist wie der Innenwiderstand der Quelle. Unter der Voraussetzung $R_i = R_L$ gilt

$$P_{L,\max} = \frac{U_0^{\;2}}{R_i} \frac{1}{(1+1)^2} = \frac{1}{4} \frac{U_0^{\;2}}{R_i}$$

Mit der maximalen Leistung $P_{\max} = \frac{U_0^{\;2}}{R_i}$, die von der Quelle abgegeben werden kann, erhält man die maximale Leistung, die in die Last abgegeben werden kann:

$$P_{L,\max} = \frac{P_{\max}}{4}$$

Eine plausible Erklärung liegt in der Tatsache, dass unter der Voraussetzung $R_i = R_L$ $U_L = \frac{U_0}{2}$ und $I_L = \frac{I_K}{2} = \frac{U_0}{2R_i}$ gilt. Damit erhält man für die Leistung $P_{L,\max} = U_L I_L = \frac{U_0^{\;2}}{4R_i}$.

10 Einfache Messschaltungen
10.1 Spannungsmessung
10.2 Der belastete Spannungsteiler
10.3 Strommessung
10.4 Messbereichserweiterung

10.5 Widerstandsmessung bei Gleichstrom
10.5.1 Widerstandsbestimmung mit dem Ohmmeter

10.5.2 Widerstandbestimmung durch Spannungs- und Strommessung

Eine einfache Methode, den Widerstand zu messen ist eine Spannungs- und Strommessung durchzuführen und aus den Messwerten en Widerstand zu berechnen. Dabei gibt es aber zwei Möglichkeiten, Spannung und Strom zu messen.

10.5.2.1 Die spannungsrichtige Messmethode

Bei der spannungsrichtigen Messmethode wird die Spannung U_x direkt am Widerstand R_x gemessen. Das Amperemeter mit seinem Innenwiderstand R_A wird in Serie zur Parallelschaltung aus Widerstand und Voltmeter mit dem Innenwiderstand R_V geschalten. Es misst den Strom I_m durch den Widerstand und das Voltmeter.

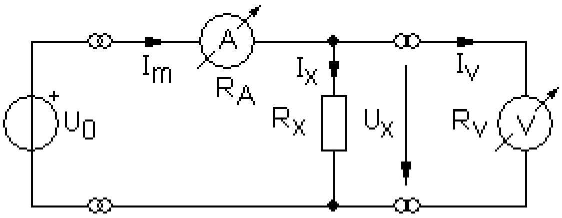


Bild 78: Schaltung zur spannungsrichtigen Messung

Dann gilt $$I_m = I_x + I_v = \frac{U_x}{R_x} + \frac{U_x}{R_v} = U_x\left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_v}\right) = U_x\left(G_x + G_v\right)$$

$$\frac{I_m}{U_x} - \frac{1}{R_v} = \frac{1}{R_x}$$

$$\boxed{R_x = \frac{1}{\frac{I_m}{U_x} - \frac{1}{R_v}}} \qquad \boxed{G_x = \frac{I_m}{U_x} - G_v}$$

Die spannungsrichtige Messung ist günstigerweise bei der Bestimmung von Widerständen einzusetzen, bei welchen $R_x \leq R_v$ einzusetzen.

10.5.2.2 Die stromsrichtige Messmethode

Bei der stromrichtigen Messmethode wird der Strom I_x durch den Widerstand R_x gemessen. Das Amperemeter mit seinem Innenwiderstand R_A wird in Serie zum Widerstand R_x geschalten. Das Voltmeter misst die Spannung U_V, die am Amperemeter und an R_x abfällt.

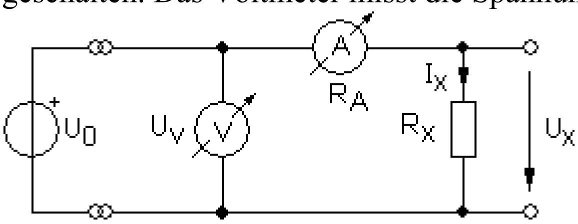


Bild 79: Schaltung zur stromrichtigen Messung

Dann gilt $$U_v = U_A + U_x = I_x\left(R_A + R_x\right)$$

$$\boxed{R_x = \frac{U_v}{I_x} - R_A} \qquad \boxed{G_x = \frac{1}{\frac{U_v}{I_x} - R_A}}$$

Die stromrichtige Messung ist günstigerweise bei der Bestimmung von Widerständen einzusetzen, bei welchen $R_x \geq R_v$ einzusetzen.

10.5.3 Die Wheatstone-Brücke

Die Methode von Wheatstone beruht auf der Stromaufteilung des Stromes aus der Quelle und auf der Wirkungsweise des Spannungsteilers.

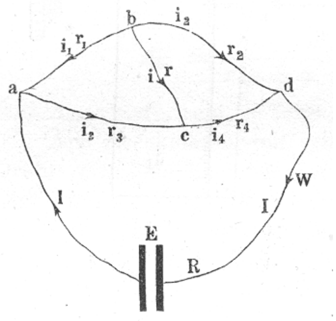


Bild 80: Die Schaltung der Wheatstone-Brücke aus dem Jahre 1882 (E symbolisiert die Quelle)

„Schaltet man zwei Widerstände vom bekannten Verhältnis 1 : n in die beiden Zweige *ac* und *cd* (**Fehler! Verweisquelle konnte nicht gefunden werden.**) ein, den zu untersuchenden Widerstand in den Zweig *ab* und einen Rheostaten in *bd*, fügt in den Brückendraht *bc* ein Galvanometer ein, und ändert die Rheostatenlänge ab, bis die Nadel des Galvanometers keinen Ausschlag mehr giebt, also in der Brücke kein Strom fliesst, so muss die Rheostatenlänge ebenfalls die n-fache des Widerstandes des zu untersuchenden Körpers betragen, wenn die sonstigen Widerstände in den Zweigen *ac*, *cd*, *ab*, *bd* verschwindend klein sind“ .
Das ist die Erläuterung der Funktion der Wheatstoneschen Brückenschaltung, wie sie im Kapitel **„Bestimmung des Widerstandes unzersetzbarer Körper – „Wheatstone'sche Drahtcombination“** von Gustav Wiedemann: ***„Die Lehre von der Electrizität“***, Band I, Vieweg-Verlag, 1882, gegeben wird. Dabei ist die Ausdrucksform und die damals gültige Rechtschreibung bemerkenswert. In Ermangelung einheitlicher Schaltsymbole war es damals schwierig, Schaltbilder wiederzugeben.

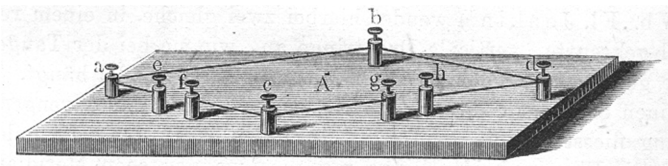


Bild 81: Der Aufbau der Wheatstone-Brücke (1882)

Mit den heute üblichen Symbolen ist die Wheatstone-Brücke leicht darzustellen:

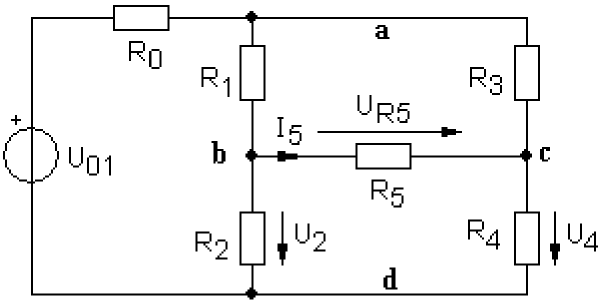


Bild 82: Die Schaltung der Wheatstone-Brücke mit heutigen Symbolen

R_5 stellt das Galvanometer dar, durch welches im abgeglichenen Zustand kein Strom fließen soll. Daher muss der Spannungsabfall an R_2 genauso groß sein, wie der Spannungsabfall an R_4. Die Berechnung des Stromes durch R_5 ist im Beispiel 126 im Detail ausgeführt. In einer Gleichung bedeutet das $U_2 = U_{ad} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = U_{ad} \frac{R_4}{R_3 + R_4} = U_4$. Stellt man die mittleren Gleichungen um, erhält man nach dem Kürzen von U_{ad} die Abgleichbedingung $R_2 * R_3 = R_1 * R_4$ oder

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}}$$

Ist der Widerstand R_1 unbekannt und ist die Abgleichbedingung erfüllt, kann der Wert von R_1 leicht bestimmt werden:

$$R_1 = R_2 * \frac{R_3}{R_4}.$$

In einer Wheatstone-Brücke zur Bestimmung des Widerstandes ist der Spannungsteiler aus R_3 und R_4 in Dekaden umschaltbar (z.B. $\frac{R_3}{R_4} = 100, 10, 1, \frac{1}{10}, \frac{1}{100}$). R_2 ist durch einen verstellbaren Präzisionswiderstand (z.B. Zehngang-Potentiometer) realisiert. Dann ist der umschaltbare Spannungsteiler und der Präzisionswiderstand so lange zu verstellen, bis der Strom im Galvanometer, also im Widerstand R_5 Null ist. Der gesuchte Widerstandswert für R_1 ist dann durch ablesen auf der Skala und multiplizieren mit dem Dekadenfaktor gegeben.
Der abgelesene Widerstandswert ist von der Leerlaufspannung U_{01} und vom Innenwiderstand R_0 der Quelle unabhängig. Auch der Widerstand des Galvanometers beeinflusst den Nullabgleich und damit den abgelesenen Widerstandswert nicht. Da die Dekadenwiderstände R_3 und R_4 üblicherweise aus dem selben Widerstandsmaterial gefertigt werden, spielt die Messtemperatur nur eine untergeordnete Rolle weil die prozentuelle Widerstandsänderung in Abhängigkeit der Temperatur gleich ist und so aus der Abgleichbedingung gekürzt werden kann.
Die Wheatstone-Brücke ist eine sehr einfache und robuste Methode zur Widerstandsbestimmung weil der gesuchte Wert nicht von einem Spannungs- oder Stromwert abhängig ist, sondern nur von dem richtigen Abgleich der Brücke, also nur von einem Spannungs- oder Stromwert, der möglichst genau Null sein soll.

10.6 Leistungsmessung bei Gleichstrom

10.7 Kompensation