

Mathematik für Elektrotechnik I - III

Prof. Dr. Volker Michel
AG Geomathematik
Fachbereich Mathematik
Universität Siegen

28. Februar 2010

Inhaltsverzeichnis

I	9
1 Reelle Zahlen	11
1.1 Mengen und Aussagen	11
1.2 Abbildungen	16
1.3 Die reellen Zahlen	20
1.4 Vollständige Induktion	32
1.5 Komplexe Zahlen I	37
2 Lineare Algebra und Analytische Geometrie	45
2.1 Vektorräume	45
2.2 Skalarprodukt, Vektorprodukt und Co.	58
2.3 Geraden und Ebenen	74
2.3.1 Definitionen und Parameterdarstellung	74
2.3.2 alternative Darstellungen	75
2.3.3 Schnitte	76
2.4 Matrizen und lineare Gleichungssysteme	82
2.5 Determinanten	95
2.6 Eigenvektoren und Eigenwerte	105
2.7 Spezielle Matrizen	113
2.8 Die Normalgleichung	121
3 Folgen und Reihen	125
3.1 Konvergenz und Divergenz von Folgen	125
3.2 Reihen	134
3.3 Komplexe Zahlen II	149
4 Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit	155
4.1 Grenzwerte von Funktionen	155
4.2 Stetigkeit	159

5	Differentialrechnung	163
5.1	Die Ableitung	163
5.2	Ableitungsregeln	167
5.3	Zentrale Sätze der Differentialrechnung	172
5.4	Extremwerte	179
5.5	Die Regel von De L'Hospital	184
6	Integralrechnung	187
6.1	Das Riemann-Integral	187
6.2	Zentrale Sätze der Integralrechnung	194
6.3	Integration rationaler Funktionen	207
6.4	Uneigentliche Integrale	211
6.5	Integration komplexwertiger Funktionen	216
6.6	Ein kurzer Einblick in gewöhnliche Differentialgleichungen	216
II		221
7	Differentialrechnung für mehrere Veränderliche	223
7.1	Skalar- und Vektorfelder	223
7.2	Konvergenz und Stetigkeit	230
7.3	Partielle und totale Ableitung	235
7.4	Tangential-(hyper-)ebenen	248
7.5	Der Satz von Taylor für Skalarfelder	251
7.6	Extrema ohne Nebenbedingungen	253
7.7	Der Satz über implizite Funktionen	258
7.8	Extrema mit Nebenbedingungen	262
7.9	div, grad, rot & Co KG	267
7.10	Fehlerfortpflanzung	274
8	Kurven- und Wegintegrale	279
8.1	Kurven und Wege	279
8.2	Kurvenintegrale	280
8.3	Wegintegrale	283
9	Flächenintegrale	289
9.1	Integrale über ebene Flächen	289
9.2	Integrale über Flächen im Raum	303
9.3	Die Substitutionsregel für Flächenintegrale	310
9.4	Oberflächenintegrale von Vektorfeldern	313

9.5	Ein Integral aus Statistik und Stochastik	315
10	Volumenintegrale	317
10.1	Definition und Eigenschaften	317
10.2	Der Satz von Gauß und die Green'schen Formeln	324
III		327
11	Grundlagen der Fouriertheorie	329
11.1	Ein bisschen Funktionalanalysis	329
11.2	Diskrete Fouriertransformation	333
11.3	Die (kontinuierliche) Fourier-Transformation	335
12	Gewöhnliche Differentialgleichungen	343
12.1	Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung	343
12.2	Exakte Differentialgleichungen	346
12.3	Lin. Dgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten	349
12.4	Die Laplace-Transformation	356
12.5	Lin. Dgl.-systeme 1. Ordnung und lin. Dgl. höherer Ordnung	360
12.5.1	Vorbemerkungen	360
12.5.2	homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten	361
12.5.3	inhomogene Systeme mit konstanten Koeffizienten	366
13	Partielle Differentialgleichungen	367
13.1	Vorbemerkungen und Klassifikation	367
13.1.1	Allgemeines und Notation	367
13.1.2	Randbedingungen	367
13.1.3	Ordnung	368
13.1.4	Quasilineare Differentialgleichungen 2. Ordnung	368
13.2	Die Wellengleichung	369
13.3	Laplace-Gleichung	378
13.4	Einschub: Distributionen und noch mal Funktionalanalysis	386
13.5	Die Poisson-Gleichung	389
14	Funktionentheorie	393
14.1	Die komplexe Ableitung	393
14.2	Integration	395
14.3	Hauptsatz und Cauchy'scher Integralsatz	396
14.4	Taylor- und Laurent-Reihe	398
14.5	Der Residuensatz	403

Literaturverzeichnis	411
Liste der Symbole	415

Warnhinweis

Der unsachgemäße Gebrauch eines Vorlesungsskripts kann zu schwerwiegenden Folgen, wie Unverständnis des Stoffs und Durchfallen bei Prüfungen, führen. Es ist auf keinen Fall als Ersatz für die Vorlesung, sondern bestenfalls als Ergänzung derselben geeignet. Besuchen Sie daher stets die Vorlesung und arbeiten Sie dort mit, z.B. indem Sie mitschreiben, mitdenken und zuhören. Alle drei Aktionen gleichzeitig durchzuführen überfordert zunächst Studierende in den ersten Semestern. Versuchen Sie trotzdem, alles unter einen Hut zu bringen. Sie werden merken, dass dies mit der Zeit immer besser geht. Das Skript hilft Ihnen bei der häuslichen Nachbereitung des Stoffes, die unerlässlich ist. Gehen Sie noch einmal Stück für Stück bis ins letzte Detail Ihre Mitschrift durch. Geben Sie keine Ruhe, bis Sie jeden einzelnen Schritt verstanden haben. Im Skript finden Sie eventuell ergänzende Erläuterungen. Außerdem sind ein paar Verständnisfragen eingebaut, deren Beantwortung Sie als Fußnote finden. Denken Sie über die Frage nach, und lassen Sie sich Zeit dafür! Wenn Sie nicht gleich auf die Antwort kommen, lesen Sie weiter oder legen Sie das Skript beiseite und beschäftigen Sie sich später noch einmal damit. Schauen Sie sich erst die Fußnote an, wenn Sie entweder sicher sind, eine Antwort gefunden zu haben, oder Sie mindestens eine Woche (mit Unterbrechungen) ergebnislos darüber nachgedacht haben. Jedoch sollten Sie bedenken, dass dieses Skript auch von mir verfasst wurde, d.h. ich erkläre manches wahrscheinlich so, wie ich es in der Vorlesung getan habe bzw. tun werde. Schauen Sie deshalb auch noch in Bücher, wenn Sie etwas nicht verstehen. Dort werden Sie alternative Erläuterungen finden, die bei Ihnen den Aha-Effekt auslösen können. Die Bücherliste am Ende des Skripts ist nur eine sehr kleine Auswahl. Durchstöbern Sie selbst die Bibliothek nach einem Werk, das Ihnen persönlich liegt. Es ist sehr individuell, wie man mathematischen Stoff begreift.

Volker Michel

P.S.: Es gibt vermutlich kein Skript auf diesem Planeten, das völlig fehlerfrei ist. Genießen Sie also dieses Skript mit Vorsicht. Falls Sie etwas finden, lassen Sie es mich bitte wissen.

Teil I

Kapitel 1

Reelle Zahlen

1.1 Mengen und Aussagen

Wir brauchen zunächst einen Grundwortschatz, um damit andere Begriffe definieren zu können. Fangen wir mit dem Begriff “Menge” an. Die folgende Beschreibung geht auf Cantor, Ende des 19. Jahrhunderts, zurück:

“Unter einer **Menge** verstehen wir jede Zusammenfassung M von bestimmten, wohlunterschiedenen Objekten m unserer Anschauung oder unseres Denkens (welche die **Elemente** von M genannt werden) zu einem Ganzen.”

Wir schreiben: $m \in M$.

Die leere Menge wird mit \emptyset (oder $\{\}$) bezeichnet.

Beispiel 1.1.1 Man kann konkrete Mengen auf viele verschiedene Arten definieren. Eine Möglichkeit ist, alle Elemente einzeln aufzuzählen, z.B.

$$M := \{\text{Hund, Katze, Maus}\}.$$

Man nennt dies eine **explizite Darstellung**. Es gilt hier:

$$\text{Hund} \in M, \quad \text{Tiger} \notin M.$$

Dies macht nur dann Sinn, wenn die Anzahl der Elemente nicht allzu groß ist. Alternativ kann man eine Menge definieren, indem man Eigenschaften für ihre Elemente fordert, z.B.

$$N := \{\text{Tiere} \mid \text{Tier ist Säugetier}\}.$$

Dies wird eine **implizite Darstellung** genannt. Der senkrechte Strich “ \mid ” wird als “mit folgender Eigenschaft” oder “so dass gilt” gelesen.

Beachten Sie, dass nach dem Cantor’schen Mengenbegriff

$$\{\text{Apfel, Birne, Apfel}\}$$

keine Menge ist. Warum?¹ ◇

Ein Wort, das wir in unserem Grundwortschatz auch benötigen, ist “Aussage”. Wie gehen davon aus, dass klar ist, was darunter zu verstehen ist. Dann können wir festlegen, wie man Aussagen verknüpft.

Definition 1.1.2 Seien A und B Aussagen, die wahr (w) oder falsch (f) sind. Folgende Verknüpfungen werden eingeführt:

“ A und B ” (kurz: $A \wedge B$)

“ A oder B ” (kurz: $A \vee B$)

“nicht A ” (kurz: $\neg A$)

“entweder A oder B ”

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	entweder A oder B
w	w	w	w	f
w	f	f	w	w
f	w	f	w	w
f	f	f	f	f

A	$\neg A$
w	f
f	w

Satz 1.1.3 Sind A und B Aussagen, so gilt:

$$\begin{aligned}\neg(A \wedge B) &= (\neg A) \vee (\neg B), \\ \neg(A \vee B) &= (\neg A) \wedge (\neg B), \\ A \vee (B \wedge C) &= (A \vee B) \wedge (A \vee C), \\ A \wedge (B \vee C) &= (A \wedge B) \vee (A \wedge C).\end{aligned}$$

Das ist keine Hexerei. Bis auf den Unterschied zwischen “oder” und “entweder ... oder ” entspricht dies dem allgemeinen Sprachgebrauch. Sie können sich also vorstellen, was passiert, wenn ein Kellner einem Mathematiker erklärt, dass “im Menüpreis ein Dessert oder eine Tasse Kaffee enthalten” ist. Sein Gast wird antworten: “Oh, danke! Ich nehme beides!” ;-)

Beispiel 1.1.4 Stellen wir uns eine imaginäre Katze namens Minka vor. Die Aussage

$A :=$ “Minka ist tot oder Minka lebt.”

ist immer wahr, vor und nach dem Ableben des Tiers. Entsprechend ist

$B :=$ “Entweder Minka ist tot oder Minka lebt.”

stets wahr und

$C :=$ “Minka ist tot und Minka lebt.”

¹ Die Objekte sind nicht wohlunterschieden, weil “Apfel” zweimal vorkommt.

stets falsch — zumindest wenn man von Schrödingers Katze aus der Quantenmechanik absieht. Diese ist theoretisch zeitweise tot und lebendig. In diesen Augenblicken wären A und C wahr und B falsch. Na, alle Klarheiten beseitigt? \diamond

Bezeichnung 1.1.5 Seien A und B Aussagen.

a) $A \Rightarrow B$ bedeutet “aus A folgt B ”, “wenn A , dann B ”, “ A impliziert B ”, “ A ist hinreichend für B ”, “ B ist notwendig für A ”.

$A \Leftrightarrow B$ bedeutet “ A **genau** dann, wenn B ”, “ A ist äquivalent zu B ”, “ A dann und nur dann, wenn B ”, “ A ist notwendig und hinreichend für B ” und im Englischen “ A if and only if B ” (kurz: “ A iff B ”).

b) Wir verwenden die folgenden Quantoren:

\exists : “Es existiert **ein**” = “Es existiert **mindestens ein**”

$\exists!$: “Es existiert **genau ein**”

\nexists : “Es existiert **kein**”

\forall : “Für alle”

Die Aussage “Es existiert eine ungerade Primzahl” ist somit wahr, obwohl es unendlich viele gibt. Die klare Unterscheidung von Existenz und Eindeutigkeit ist in der Wissenschaft sehr wichtig, weil es zwei Paar Schuhe sind, ob man herausgefunden hat, ob es eine Lösung für ein Problem gibt oder ob es nicht mehr als eine Lösung geben kann.

Beispiel 1.1.6 a) Das Standardbeispiel für Implikationen ist folgendes:

Es regnet. \Rightarrow Die Straße ist nass.

Es regnet. \nLeftarrow Die Straße ist nass.

b) Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch?

A := “ \exists Mensch auf der Erde.”

B := “ $\exists!$ Mensch auf der Erde.”

C := “ $\exists!$ Fußballverein aus Siegen in der 1. Liga.”

D := “ \exists Mensch auf der Erde.” \vee “ \exists intelligentes Leben außerhalb unseres Sonnensystems.”

E = “Siegen liegt in Hessen.” \wedge “ \exists intelligentes Leben außerhalb unseres Sonnensystems.”

Finden Sie es selbst heraus!² \diamond

Achtung! Aus generell falschen Aussagen kann alles gefolgert werden, insbesondere auch wahre Aussagen! So kann aus $2=3$ durch Multiplikation mit 0 die wahre Gleichung $0=0$ gemacht werden. Trotzdem ist damit natürlich nicht bewiesen, dass $2=3$ gilt. Deshalb muss ein Beweis immer folgendem Gesetz folgen:

² Wahr sind A und D . Die anderen sind falsch.

bekannte wahre Aussage \Rightarrow zu beweisende Aussage

niemals umgekehrt!

Satz 1.1.7 *Sind A und B Aussagen. So gilt:*

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

Dies ist das Prinzip eines indirekten Beweises. Wir wissen, dass A gilt und wollen B als wahr nachweisen (also $A \Rightarrow B$). Unter Umständen ist dieser direkte Weg schwierig. Es kann hilfreich sein, folgendes zu zeigen: Wenn B nicht gelten würde, dann wäre A auch falsch (also $\neg B \Rightarrow \neg A$). Dies ist ein indirekter Beweis. Er ist äquivalent zum direkten Weg. Denn wir können nach Vollendung des indirekten Beweises wie folgt argumentieren: Wir haben gezeigt: Wenn B nicht gelten würde, dann wäre A auch falsch. Aber wir wissen ja, dass A wahr ist. Also muss die Annahme, dass B falsch ist, fehlerhaft sein. Somit ist B wahr, weil A wahr ist.

Und umgekehrt gilt: Wenn wir den direkten Beweis $A \Rightarrow B$ vollendet haben, wissen wir: Wäre B nicht wahr, dann kann auch A nicht gelten, denn wir haben ja herausgefunden, dass aus der Gültigkeit von A stets folgt, dass B wahr ist. Somit kann A nicht wahr sein, wenn B nicht wahr ist.

Schauen wir uns noch mal das Regenbeispiel an:

Beispiel 1.1.8 Angenommen, es regnet. Dann muss die Straße nass sein. Soweit waren wir schon weiter oben. Der Umkehrschluss ist nicht erlaubt: Wenn die Straße nass ist, dann muss es nicht zwangsläufig regnen. Es könnte auch andere Gründe wie z.B. das Auspumpen eines Kellers geben. Auch das hatten wir schon. Nach Satz 1.1.7 gilt jedoch folgende Folgerung: Wenn die Straße nicht nass ist, dann kann es auch nicht regnen. Das ist sicherlich richtig. Eine trockene Straße bei Regen wäre eine Sensation. \diamond

Genug Logeleien, wenden wir uns noch mal den Mengen zu. Es gibt eine simple Beziehung zwischen Mengenverknüpfungen und Aussagenverknüpfungen.

Definition 1.1.9 *Seien A und B beliebige Mengen.*

a) $A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$ heißt **Vereinigungsmenge** (engl.: union) von A und B . Man liest die Definition wie folgt: "A vereinigt B wird definiert als die Menge aller x , für die gilt: x ist Element von A **oder** x ist Element von B ."

b) $A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$ heißt **Schnittmenge** (engl.: intersection) von A und B . Man liest: "A geschnitten B wird definiert als die Menge aller x , für die gilt: x ist Element von A **und** x ist Element von B "

c) Zwei Mengen, deren Schnitt leer ist, nennt man **disjunkt** (engl.: disjoint). Vereinigt man zwei disjunkte Mengen A und B , so kann man $A \cup B$ für die Vereinigungsmenge schreiben, wenn man Wert auf die Eigenschaft des leeren Schnitts legt.

d) $A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$ heißt “A ohne B”.

e) Man sagt, dass A eine **Teilmenge** von B ist (kurz: $A \subset B$), wenn gilt: $x \in A \Rightarrow x \in B$, also wenn aus “ $x \in A$ ” stets “ $x \in B$ ” folgt.

Achtung: Die Bezeichnungen $A \subset B$ und $A \subseteq B$ sind gleichwertig, d.h. $A \subset B$ schließt Gleichheit nicht aus. Soll Gleichheit nicht zugelassen werden, so muss die Bezeichnung $A \subsetneq B$ oder alternativ $A \subsetneqq B$ gewählt werden.

Satz 1.1.10 Seien A, B und C beliebige Mengen. Dann gilt:

- a) $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$, $A \cap B = B \cap A$,
- b) $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$, $A \cup B = B \cup A$,
- c) $A \subset B \Rightarrow A \cap B = A$ und $A \cup B = B$,
- d) $A \subset B$ und $B \subset A \Leftrightarrow A = B$,
- e) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
- f) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$, $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$.

Definition 1.1.11 Seien M und N nicht-leere Mengen. Das (**kartesische**) **Produkt** von M und N wird definiert durch

$$M \times N := \{(x, y) \mid x \in M \wedge y \in N\}.$$

Man liest “M Kreuz N”.

Dies kann man sozusagen iterativ weiterführen: Sind M, N und P nicht-leere Mengen, so kann man folgendes einführen:

$$M \times N \times P := (M \times N) \times P.$$

Die Elemente werden als **Tripel** (m, n, p) mit $m \in M$, $n \in N$ und $p \in P$ geschrieben, auch wenn man formal betrachtet die Elemente von $(M \times N) \times P$ etwas anders schreiben müsste. Wie?³. Und so kann man das mit beliebig aber endlich vielen Mengen machen. Man erhält dann n-Tupel (s_1, \dots, s_n) . Wichtig ist, dass immer alle erdenklichen Kombinationen von Elementen gebildet werden.

Bildet man das kartesische Produkt einer Menge mit sich selbst, so verwendet man die Kurzschreibweise als Potenz, z.B. $\mathbb{R}^3 := \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Aber das wissen Sie ja längst.

³Eigentlich hätten sie die Form $((m, n), p)$, da man ein Paar aus $(m, n) \in M \times N$ und $p \in P$ bildet. Dies ist aber unnötig unübersichtlich.

1.2 Abbildungen

Wir beginnen mit der Definition einer Abbildung.

Definition 1.2.1 Seien $A, B \neq \emptyset$ beliebige Mengen. Unter einer **Abbildung** f von A nach B versteht man eine Zuordnung folgender Art: **Jedem** Element $a \in A$ wird **genau ein** Element $b \in B$ zugewiesen. Man schreibt:

$$\begin{aligned} f : A &\rightarrow B \\ a &\mapsto f(a), \end{aligned}$$

wobei $f(a)$ das Element von B repräsentiert, das $a \in A$ zugeordnet wird, also $b = f(a)$. Die Menge A heißt **Definitionsbereich** (engl.: *domain*) von f . Der **Wertebereich** (**Bild**, engl.: *range, image*) von f ist

$$\text{im } f := f(A) := \{f(a) \mid a \in A\} \subset B.$$

Allgemeiner definiert man das Bild der Teilmenge $C \subset A$ unter f als

$$f(C) := \{f(a) \mid a \in C\}.$$

Ferner bezeichnet

$$f^{-1}(D) := \{a \in A \mid f(a) \in D\} \subset A$$

das **Urbild** von D bezüglich f . Schließlich wird der **Graph** von f noch definiert durch

$$\text{graph } f := G(f) := \{(a, f(a)) \mid a \in A\}.$$

Sezieren wir erst mal diese Definition im Detail, damit uns nichts entgeht. Hier sind sehr viele Dinge auf einmal hinein gepackt. Zunächst ist eine Abbildung eine Zuordnung von Elementen. Auch wenn die reellen Zahlen erst im nächsten Abschnitt erscheinen, so werden sie hier trotzdem schon für ein Beispiel benutzt. Wir sehen uns die Abbildung

$$\begin{aligned} f : [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

an. Hier wird eindeutig eine Zuordnungsvorschrift erklärt. Jeder reellen Zahl im Intervall $[-1, 1]$ wird ihr Quadrat zugeordnet. Was alles sagt jetzt die Definition aus?

1. **Jedem** Element von $[-1, 1]$ wird ein Element von \mathbb{R} zugeordnet. Wir dürfen also nichts auslassen! Dies bedeutet insbesondere, dass die Zuordnungsvorschrift auch für alle Elemente im Definitionsbereich ausführbar sein muss. Die Abbildung $x \mapsto \sqrt{x}$ wäre also nicht auf $[-1, 1]$ möglich. Übrigens wird gelegentlich der Begriff des **maximalen Definitionsbereichs** verwendet. Hiermit ist gemeint, dass man alle Elemente (meist Zahlen) verwendet, auf die die Vorschrift angewendet werden kann. Bei $x \mapsto x^2$ wäre dies \mathbb{R} , bei $x \mapsto \sqrt{x}$ nur \mathbb{R}_0^+ , also die Menge aller nicht-negativen reellen Zahlen.

2. Jedem Element von $[-1, 1]$ wird **genau ein** Element aus \mathbb{R} zugeordnet. Zweideutigkeiten sind nicht erlaubt. Eine Vorschrift der Art “Jedem $x \in [-1, 1]$ wird $a \in \mathbb{R}$ mit $a^2 = x + 5$ zugeordnet” ist keine Abbildung! Warum?⁴.
3. Der **Definitionsbereich** legt fest, welche Werte überhaupt in die Abbildungsvorschrift eingesetzt werden sollen. Je nach Zusammenhang kann es sinnvoll sein, weniger als den maximalen Definitionsbereich zu verwenden.
4. Das **Bild** beschreibt die Menge genau der Werte, die durch die Abbildungsvorschrift erreicht werden können. In obigem Beispiel ist das $[0, 1]$.
5. Das **Urbild** hat, trotz der Schreibweise, zunächst nicht zwingend etwas mit der Umkehrabbildung zu tun, mit der wir uns gleich noch beschäftigen werden. Auch für nicht umkehrbare Funktionen ist der Begriff des Urbilds klar definiert. Die Idee des Urbilds ist folgende: Wir geben uns eine bestimmte Menge vor, z.B. $[0, 1/4]$, und fragen uns, welche Werte aus dem Definitionsbereich hierauf abgebildet werden. Im Beispiel wäre das $f^{-1}([0, 1/4]) = [-1/2, 1/2]$. Beachten Sie, dass die Abbildung f im Beispiel nicht umkehrbar ist.
6. Der **Graph** besteht aus Paaren: der erste Eintrag ist der Wert, dem der zweite Eintrag zugeordnet wird. Dadurch entstehen die bekannten Bilder, in unserem Beispiel wäre das eine Parabel.

Abbildungen können verschiedene Eigenschaften haben. Hier sind die grundlegenden.

Definition 1.2.2 Sei $f : A \rightarrow B$ eine Abbildung.

a) f heißt **injektiv**, wenn gilt:

$$\text{Gilt } f(a_1) = f(a_2) \text{ für } a_1, a_2 \in A, \text{ so ist } a_1 = a_2.$$

b) f heißt **surjektiv**, wenn $f(A) = B$.

c) f heißt **bijektiv**, wenn f injektiv und surjektiv ist.

Äquivalent zur Definition der Injektivität ist nach Satz 1.1.7 die folgende Definition:
 f ist injektiv, wenn gilt:

$$\text{Wenn } a_1 \neq a_2, \text{ dann ist } f(a_1) \neq f(a_2).$$

⁴ Es gibt mehr als ein $a \in \mathbb{R}$ mit dieser Eigenschaft: $\sqrt{x+5}$ und $-\sqrt{x+5}$

Injektivität bedeutet also, dass das Einsetzen verschiedener Zahlen in die Vorschrift stets verschiedene Ergebnisse liefert. Surjektivität hingegen ist lediglich die Frage, ob man beim Aufschreiben der Notation $f : A \rightarrow B$ den Wertebereich als B verwendet hat. Eine Abbildung der Form $f : D \rightarrow f(D)$ ist somit automatisch surjektiv.

Beispiel 1.2.3 Sehen wir uns die folgenden Abbildungen an:

$$\begin{array}{llll} f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} & F : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+ & G : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 & x \mapsto x^2 & x \mapsto x^2 & x \mapsto x^2 \end{array}$$

f ist nicht injektiv, weil beispielsweise $f(-0,5) = f(0,5)$. Auch die Frage nach der Surjektivität müssen wir verneinen, da beispielsweise der Wert $1,5$ nie von f angenommen wird, jedoch in \mathbb{R} liegt. Es gibt also kein $x \in [-1, 1]$, so dass $f(x) = 1,5$.

Auch bei g liegt keine Injektivität vor. Da müssen wir gar nicht viel nachprüfen. Die Vorschrift ist wie bei f , aber der Definitionsbereich ist eine Obermenge. Wenn es schon bei f nicht geklappt hat, dann geht das hier auch schief. Aber eine Erweiterung des Definitionsbereichs lässt Hoffnung bezüglich der Surjektivität aufkommen, denn wir haben potentiell mehr Werte. Jedoch klappt auch dies hier nicht: Alle negativen Zahlen fehlen im Bild von g .

F hingegen ist bijektiv! Erlauben wir nur nicht-negative x , so ist $x_1^2 = x_2^2$ für $x_1, x_2 \in \mathbb{R}_0^+$ eindeutig auflösbar: $x_1 = x_2$. F ist also injektiv. Auch die Surjektivität liegt vor, weil die negativen Zahlen als Werte ausgeschlossen wurden. Also ist F bijektiv.

Bei G hat sich gegenüber F nur die Menge auf der rechten Seite geändert. Dies ändert nichts an der Injektivität. Es beeinflusst nur die Surjektivität. Sie geht flöten, weil wir wieder auf die negativen Zahlen schauen müssen. \diamond

Wozu das Ganze? Diese Begriffe hängen sehr eng mit dem Lösen einer Gleichung zusammen. Betrachten wir die folgenden Gleichungen:

$$x^2 = 4 \tag{1.1}$$

$$y^2 = -2 \tag{1.2}$$

$$z^2 = 0, \quad x, y, z \in \mathbb{R} \tag{1.3}$$

Wenn wir Gleichungen lösen, kommen wir nie an den folgenden beiden Fragen vorbei (neben der natürlich ganz zentralen Frage, wie die Lösung aussieht): Ist die Gleichung lösbar? Wenn ja, ist die Lösung eindeutig?

Formulieren wir die Fragen ein wenig um: Ist die Gleichung lösbar? = Gibt es ein x (oder y oder z), so dass der Wert auf der rechten Seite angenommen wird? Dies ist eng verknüpft mit der Frage nach der Surjektivität.

Ist die Lösung eindeutig? = Kann es mehrere x (oder y oder z) geben, die zum gleichen Wert auf der rechten Seite führen? Hier haben wir die Injektivität.

Wie wäre es bei diesen Gleichungen?⁵

⁵Gleichung (1.1) ist lösbar. Die Lösung ist aber nicht eindeutig: $x \in \{-2, 2\}$. Gleichung (1.2) ist nicht lösbar. Gleichung (1.3) ist lösbar, und die Lösung ist eindeutig: $z = 0$.

Eng damit verbunden ist der Begriff der Umkehrabbildung.

Definition 1.2.4 Eine Abbildung $f : M \rightarrow N$ heißt **umkehrbar** (invertierbar), wenn es eine Abbildung $f^{-1} : N \rightarrow M$ gibt, so dass $f^{-1}(f(m)) = m$ für alle $m \in M$ und $f(f^{-1}(n)) = n$ für alle $n \in N$ gilt. f^{-1} heißt **Umkehrabbildung** (Inverse) von f .

Satz 1.2.5 Sei $f : M \rightarrow N$ eine Abbildung. Dann gilt:

- a) f ist invertierbar. $\Leftrightarrow f$ ist bijektiv.
- b) Ist f invertierbar, so ist f^{-1} eindeutig bestimmt.

Sie kennen (hoffentlich) alle ein Beispiel aus der Schule. Die Exponentialfunktion

$$\exp : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad x \mapsto e^x$$

ist invertierbar. Es gibt also genau eine Funktion, die uns erlaubt, aus $e^x = y$ den Wert x in Abhängigkeit von y auszudrücken. Man nennt sie den natürlichen Logarithmus. Der Zusammenhang zwischen Bijektivität und Invertierbarkeit ist wie folgt einsichtig: Zunächst muss es zu jedem y wenigstens ein x geben, damit die Gleichung gilt. Andernfalls könnten wir das quasi umgekehrte Zuordnen $y \mapsto x$ vergessen. Dafür brauchen wir die Surjektivität. Es muss aber zusätzlich unmissverständlich, also eindeutig, sein, welches x dem jeweiligen y zugeordnet wird. Dafür brauchen wir die Injektivität.

Im bijektiven Beispiel $F : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}_0^+, x \mapsto x^2$ gibt es somit eine Umkehrfunktion. Man nennt sie die Quadratwurzel: $F^{-1}(y) =: \sqrt{y}$. Es gilt

$$(\sqrt{x})^2 = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+, \quad \sqrt{x^2} = x \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+,$$

und denken Sie immer daran, dass

$$\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Wir werden später den Begriff der Verknüpfung noch benötigen.

Definition 1.2.6 Seien $A, B, C \neq \emptyset$ Mengen und $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ Abbildungen. Die **Verknüpfung** (Verkettung) von g und f wird wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\rightarrow C \\ a &\mapsto (g \circ f)(a) := g(f(a)) \end{aligned}$$

Gelesen wird dies als "g Kringel f".

Beispiel 1.2.7a) Für invertierbare Abbildungen f haben wir das schon benutzt: $(f \circ f^{-1})(x) = x$ usw.

b) Seien $f : x \mapsto x^2$ und $g : x \mapsto \sin x$ gegebene Funktionen. Dann gilt:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= \sin(x^2), \\ (f \circ g)(x) &= (\sin x)^2 =: \sin^2 x.\end{aligned}$$

◇

1.3 Die reellen Zahlen

Wir legen jetzt hiermit für alle Zeiten fest, was die reellen Zahlen sind. Es folgt geballte Information.

Axiom 1.3.1 *Es existiere eine Menge \mathbb{R} mit folgenden Eigenschaften:*

1. \mathbb{R} ist ein **Körper**, d.h. es existieren Abbildungen

$$\begin{aligned}+ : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \text{ (Addition)} \\ \cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \text{ (Multiplikation)}\end{aligned}$$

mit folgenden Eigenschaften:

$$\left. \begin{array}{l}(A1) \quad (a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R} \\ (M1) \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c) \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}\end{array} \right\} \text{ (Assoziativgesetze)}$$

$$\left. \begin{array}{l}(A2) \quad a + b = b + a \quad \forall a, b \in \mathbb{R} \\ (M2) \quad a \cdot b = b \cdot a \quad \forall a, b \in \mathbb{R}\end{array} \right\} \text{ (Kommutativgesetze)}$$

$$\left. \begin{array}{l}(A3) \quad \exists 0 : a + 0 = a \quad \forall a \in \mathbb{R} \\ (M3) \quad \exists 1 \in \mathbb{R} : a \cdot 1 = a \quad \forall a \in \mathbb{R}\end{array} \right\} \text{ (neutrale Elemente)}$$

$$\left. \begin{array}{l}(A4) \quad \forall a \in \mathbb{R} \exists a' \in \mathbb{R} : a + a' = 0 \\ (M4) \quad \forall a \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \exists \tilde{a} \in \mathbb{R} : a \cdot \tilde{a} = 1\end{array} \right\} \text{ (inverse Elemente)}$$

Folgende Schreibweisen werden verwendet:

$$-a := a', \quad a - b := a + (-b), \quad \frac{1}{a} := \tilde{a}, \quad \frac{b}{a} := b \cdot \frac{1}{a}.$$

$$(D) \quad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \text{ (Distributivgesetz)}$$

2. \mathbb{R} ist **angeordnet**, d.h. es existiert eine Relation \leq , so dass gilt

(a) \mathbb{R} ist **totalgeordnet**, d.h.

i. \mathbb{R} ist **teilgeordnet**, d.h.

- Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt: $x \leq x$.
- Ist $x \leq y$ und $y \leq z$ für $x, y, z \in \mathbb{R}$, so ist $x \leq z$.
- Ist $x \leq y$ und $y \leq x$ für $x, y \in \mathbb{R}$, so ist $x = y$.

(Wir führen die Bezeichnung $x < y$ für den Fall ein, dass $x \leq y$ und $x \neq y$.)

und

ii. Für je zwei Elemente $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$x \leq y \text{ oder } y \leq x.$$

und

(b) Die Ordnung ist **verträglich mit Addition und Multiplikation**, d.h. für $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

- i. $a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c$
- ii. $a \leq b, 0 \leq c \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$

3. \mathbb{R} ist **vollständig**, d.h. jede nach oben beschränkte Teilmenge $\neq \emptyset$ von \mathbb{R} besitzt ein Supremum in \mathbb{R} .

Die Elemente von \mathbb{R} heißen **reelle Zahlen**.

Um die letzte Eigenschaft zu verstehen, benötigen wir noch eine Definition.

Definition 1.3.2 Seien $A \subset \mathbb{R}$ und $c \in \mathbb{R}$.

- a) c heißt **obere Schranke** (engl.: upper bound) von A , wenn $a \leq c$ für alle $a \in A$.
- b) c heißt **untere Schranke** (engl.: lower bound) von A , wenn $a \geq c$ für alle $a \in A$.
- c) c heißt **Supremum** von A , wenn c kleinste obere Schranke von A ist, d.h. ist $d \in \mathbb{R}$ obere Schranke von A , so ist $d \geq c \geq x$ für alle $x \in A$. Man schreibt: $c = \sup A$.
- d) c heißt **Infimum** von A , wenn c größte untere Schranke von A ist. Die Bezeichnung ist $c = \inf A$.
- e) c heißt **Maximum** von A , wenn $c = \sup A$ und $c \in A$.
- f) c heißt **Minimum** von A , wenn $c = \inf A$ und $c \in A$.
- g) A heißt **nach oben beschränkt**, wenn A eine obere Schranke besitzt.
- h) A heißt **nach unten beschränkt**, wenn A eine untere Schranke besitzt.
- i) A heißt **beschränkt**, wenn A nach oben und nach unten beschränkt ist.

Satz 1.3.3 *Supremum und Infimum sind eindeutig bestimmt, wenn sie jeweils existieren.*

Sie fühlen sich erschlagen? Keine Sorge, das ist normal. Aber schauen wir uns das Axiom noch mal genauer an. \mathbb{R} ist ein Körper. Wenn Sie sich die einzelnen Eigenschaften ansehen, dann sind das nichts anderes als die Rechenregeln, die Sie von Kind auf gelernt haben - nur eben komprimiert aufgeschrieben. Und Sie sehen auch - was für Ingenieure weniger wichtig ist - die Sicht der Mathematik auf die Rechenoperationen: Es gibt nur Addition und Multiplikation. Subtraktion und Division sind keine eigenständigen Operationen. Die Körperaxiome legen also fest, wie wir rechnen dürfen. So und nur so geht es, egal was manche Studierende so in ihren Klausuren fabrizieren. ;-)

Dann haben wir die Ordnung. Die Teilordnung legt zunächst sehr elementare Dinge fest. Eine Zahl muss stets kleiner oder gleich sich selbst sein. Man nennt das die Reflexivität. Die folgende Eigenschaft ist die Transitivität: Ist eine Zahl kleiner gleich einer zweiten und diese kleiner gleich einer dritten, so ist die erste kleiner gleich der dritten. Die Ungleichung überträgt sich also, daher Transitivität. Die dritte Eigenschaft der Teilordnung ist hilfreich, weil man manchmal Gleichheit besser zeigen kann, indem man \leq und \geq separat nachweist.

Die Teilordnung verzichtet noch auf eine Forderung, die bei der Totalordnung ergänzt wird: Zwei beliebige Zahlen müssen stets vergleichbar sein. Denken Sie an ein einfaches Beispiel: Auf dem \mathbb{R}^2 kann man folgende simple Relation definieren:

$$(a, b) \leq (x, y) :\Leftrightarrow a \leq x \wedge b \leq y$$

(wobei das Symbol $:\Leftrightarrow$ für “definitionsgemäß dann und nur dann” steht). Wir vergleichen also komponentenweise. Dies ist eine Teilordnung. Sie können es selbst nachprüfen. Aber es ist keine Totalordnung. Warum?⁶ Die Verträglichkeit mit Addition und Multiplikation ist das, was wir brauchen, um Ungleichungen aufzulösen oder sonstwie zu bearbeiten. Wir dürfen also auf beiden Seiten die gleiche Zahl addieren, ohne dass sich an der Beziehung etwas ändert. Außerdem dürfen wir mit einer **nicht-negativen** Zahl die Ungleichung multiplizieren und die Relation bleibt bestehen. Mit negativen Faktoren würde dies schiefgehen. Multiplizieren Sie doch mal $2 \leq 3$ mit -1 .

Schließlich wird noch die Vollständigkeit gefordert. Dies ist eine zentrale Eigenschaft der reellen Zahlen, ohne die die Analysis nicht denkbar wäre. Nicht-Mathematikern bleibt dies zwar meist verschlossen, jedoch benutzen Anwender sehr oft dieses Axiom, ohne es zu wissen. Es lohnt sich also, trotzdem ein Gefühl dafür zu bekommen. Vergleichen wir einmal \mathbb{R} mit \mathbb{Q} , der Menge der rationalen Zahlen. \mathbb{Q} erfüllt alle Axiome, die \mathbb{R} erfüllt, bis auf die Vollständigkeit. Wie könnte ein Gegenbeispiel hierfür aussehen?⁷ Äquivalent zum Axiom der Vollständigkeit ist übrigens die Forderung, dass jede nach unten beschränkte, nicht-leere Teilmenge von \mathbb{R} ein Infimum besitzt.

⁶Man kann zwei Vektoren finden, auf die die Relation nicht anwendbar ist, z.B. gilt bei $(0,1)$ und $(1,0)$ weder $(0,1) \leq (1,0)$ noch $(1,0) \leq (0,1)$.

⁷Wir suchen also eine Teilmenge M von \mathbb{Q} , die der Vollständigkeits-Bedingung widerspricht. Sie muss somit nach oben beschränkt sein, aber kein Supremum besitzen. Eine nach oben beschränkte Menge zu finden, ist sehr

Aus den Axiomen lassen sich noch verschiedene andere Regeln und Eigenschaften ableiten. Insbesondere gelten die folgenden.

Satz 1.3.4 Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- a) $a \leq b \wedge c \leq 0 \Rightarrow ac \geq bc$,
- b) $a^2 := a \cdot a \geq 0$,
- c) $0 < a \leq b \Rightarrow \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} > 0$.

Somit gilt dann auch

$$a \leq b < 0 \underset{\text{a)}}{\Rightarrow} -a \geq -b > 0 \underset{\text{c)}}{\Rightarrow} 0 < -\frac{1}{a} \leq -\frac{1}{b} \underset{\text{a)}}{\Rightarrow} 0 > \frac{1}{a} \geq \frac{1}{b} .$$

Besonders wichtig ist auch die folgende Lösungsformel.

Satz 1.3.5 (p-q-Formel) Seien $p, q \in \mathbb{R}$. Dann hat die Gleichung

$$x^2 + px + q = 0$$

für $x \in \mathbb{R}$

- keine Lösung, wenn $\frac{p^2}{4} < q$
- genau eine Lösung $x = -\frac{p}{2}$, wenn $\frac{p^2}{4} = q$
- zwei Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}, \quad (1.4)$$

wenn $\frac{p^2}{4} > q$. Das obige Polynom lässt sich dann wie folgt in Linearfaktoren zerlegen:

$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Man muss sich hier nicht die Fallunterscheidung merken, sondern nur die Lösungsformel (1.4), denn daraus ergeben sich die ersten beiden Fälle automatisch. Ist $\frac{p^2}{4} < q$, so ist der Wert unter der Wurzel (genannt Radikand) negativ. Ist $\frac{p^2}{4} = q$, so ist der Radikand gleich Null und die Unterscheidung in + und – davor ist obsolet.

Erfahrungsgemäß kann es nicht schaden, auch noch mal die Bruchrechenregeln zu wiederholen.

einfach. Der Knackpunkt ist die Existenz des Supremums, der kleinsten oberen Schranke, oder besser: die Nicht-Existenz. Ein Beispiel ist die Menge $M := \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$. Sicherlich ist die Menge nach oben beschränkt. 1,5 wäre zum Beispiel eine obere Schranke. Der springende Punkt ist aber nun, dass das Supremum auch Element von \mathbb{Q} sein muss. Wir werden aber kein Element von \mathbb{Q} finden, das die **kleinste** obere Schranke von M ist. Egal welche rationale obere Schranke c man wählt, es gäbe noch kleinere rationale obere Schranken. Die einzige obere Schranke, die quasi eine scharfe Grenze bilden würde, wäre $\sqrt{2}$. Diese Zahl ist aber irrational.

Satz 1.3.6 (Bruchrechenregeln) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gilt:

a)

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} = \frac{ad}{cd} + \frac{bc}{cd} = \frac{ad + bc}{cd}, \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{d} = \frac{ad}{cd} - \frac{bc}{cd} = \frac{ad - bc}{cd}$$

b)

$$\frac{a}{c} \cdot \frac{b}{d} = \frac{ab}{cd}, \quad \frac{a}{c} : \frac{b}{d} = \frac{a}{c} \cdot \frac{d}{b} = \frac{ad}{bc} \quad (\text{wenn } b \neq 0)$$

Wir besitzen damit das Handwerkszeug, um Gleichungen und Ungleichungen zu lösen.

Beispiel 1.3.7a) Die Gleichung $3x^2 + 15x - 18 = 0$ lösen wir, indem wir sie zunächst auf die für die p-q-Formel benötigte Form bringen, d.h. vor x^2 darf nichts (oder besser: muss eine 1) stehen. Dafür dividieren wir die Gleichung durch 3. Für $x^2 + 5x - 6 = 0$ liefert nun die Lösungsformel

$$x_{1,2} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + 6} = -\frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{24}{4}} = -\frac{5}{2} \pm \frac{7}{2}.$$

Somit gibt es die beiden Lösungen $x_1 = 1$ und $x_2 = -6$.

b) Die Gleichung $x^2 + 9x + 6 = 0$ ergibt die Lösungen

$$x_{1,2} = -\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81}{4} - 6} = -\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{81 - 24}{4}} = -\frac{9}{2} \pm \sqrt{\frac{57}{4}} = \frac{1}{2} \left(-9 \pm \sqrt{57} \right),$$

die offensichtlich irrational sind.

c) Für die Gleichung $x^2 + 6x + 9 = 0$ liefert die p-q-Formel $x_{1,2} = -3 \pm \sqrt{9 - 9}$. Es gibt also nur eine Lösung: $x = -3$.

d) Schließlich kann über die Gleichung $x^2 + 2x + 7 = 0$ nach Aufschreiben von $x_{1,2} = -1 \pm \sqrt{1 - 7}$ ausgesagt werden, dass sie keine reelle Lösung besitzt.

e) Betrachten wir nun die Gleichung

$$\frac{1}{x} + \frac{x}{2} = 4.$$

Auf den ersten Blick weiß man nicht, was man hier tun soll. Es gibt keine Lösungsformel, die das Resultat liefert. Deshalb muss man einen Weg finden, dies zu vereinfachen. Was geht denn einfacher hier? Nun, zunächst liegen hier zwei Brüche vor. Es wäre schön, wenn wir das Ganze ohne Brüche schreiben könnten. Nun könnte man wahlweise die Gleichung mit x oder 2 multiplizieren. Es würde dadurch aber jeweils immer nur ein Bruch verschwinden. Doch die Multiplikation mit $2x$ liefert das gewünschte Ziel: $1 \cdot 2 + x \cdot x = 4 \cdot 2x$, d.h. $x^2 - 8x + 2 = 0$. Eine Variante dieses Weges wäre das Addieren der beiden Brüche, was

$$\frac{2}{2x} + \frac{x^2}{2x} = 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2 + x^2}{2x} = 4$$

liefern würde. Die Multiplikation mit $2x$ führt auch hier zu $x^2 - 8x + 2 = 0$. Die Lösungen sind $x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{14}$. \diamond

Wir müssen uns aber bei Beispiel e) über eines im Klaren sein: Nicht alle Schritte, die hier gemacht wurden, sind äquivalent! Genauer gesagt ist die Multiplikation mit x ein Problem, denn wir wissen zunächst nicht, was x ist. Es könnte sein, dass $x = 0$ gilt. Dann würden wir die Gleichung mit 0 multiplizieren und damit künstlich Lösungen schaffen. Denken Sie an das frühere Beispiel $3 = 2 \Rightarrow 0 = 0$. Da wir aber in Beispiel e) am Ende herausgefunden haben, dass $x = 0$ keine Lösung ist, haben wir noch mal Glück gehabt.

Warum sind Äquivalenzen so wichtig? Wir haben auf der einen Seite eine Gleichung und auf der anderen Seite eine potentielle Lösung. Das Ziel muss sein, dass wir nach dem Prinzip

$$\text{Gleichung mit } x \Leftrightarrow x \in \{\dots\}$$

gearbeitet haben (wobei hier berücksichtigt ist, dass mehrere Lösungen auftreten können). Dies beinhaltet zwei Teile:

$$\text{Gleichung mit } x \Rightarrow x \in \{\dots\}$$

bedeutet: Wenn es ein x gibt, das die Gleichung erfüllt, dann kann x nur aus der folgenden Auswahl sein. Anders ausgedrückt (siehe Satz 1.1.7): Alles was nicht in der Menge aufgeführt ist, ist definitiv keine Lösung. Aber die Elemente der Menge müssen nicht zwangsläufig eine Lösung sein. Im Beispiel $3 = 2 \Rightarrow 0 = 0$ wird aus einer Gleichung ohne Lösung eine Gleichung gemacht, für die alle $x \in \mathbb{R}$ eine Lösung bilden. Die genannte Richtung erlaubt es also nur, Lösungen auszuschließen. Die Umkehrung

$$\text{Gleichung mit } x \Leftarrow x \in \{\dots\}$$

besagt hingegen, dass die Auswahl für x lauter Lösungen der Gleichung liefert. Anders ausgedrückt: Was rechts für x aufgeführt ist, ist sicher eine Lösung, denn genau genommen steht hier: "Wenn x aus der Menge ... ist, dann gilt die Gleichung ...". Das bedeutet aber nicht, dass hier alle Lösungen aufgeführt sind, denn die Aussage $x^2 - 1 = 0 \Leftarrow x = -1$ ist sehr wohl wahr.

Kurzum: Eine Umformungskette, die ein \Rightarrow statt \Leftrightarrow beinhaltet, kann zusätzliche Zahlen liefern, die keine Lösungen sind. Bei einer Umformungskette, die ein \Leftarrow statt \Leftrightarrow enthält, gehen möglicherweise Lösungen verloren. Eine Kette, der unterwegs jeweils beide Richtungen verloren gehen, ist natürlich Müll, weil dann gar keine Beziehung mehr zwischen der Gleichung und der vermeintlichen Lösung besteht.

Wir lösen noch ein paar Gleichungen...

Beispiel 1.3.8a) Betrachten wir

$$\frac{\frac{4x+6}{2x+1}}{\frac{12x+18}{3x-3}} = x^2 - 1$$

Zunächst sollte man solche Ausdrücke vereinfachen. Beseitigen wir den Doppelbruch und kürzen wir!

$$\frac{\frac{4x+6}{2x+1}}{\frac{12x+18}{3x-3}} = x^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{4x+6}{2x+1} : \frac{4x+6}{x-1} = x^2 - 1 \Rightarrow \frac{4x+6}{2x+1} \cdot \frac{x-1}{4x+6} = x^2 - 1$$

Stopp! Nicht gleich wild drauflosrechnen! Sehen Sie sich die Gleichung genau an! Na, gemerkt? Richtig, hier kann man viel vereinfachen! Zum Beispiel

$$\begin{aligned} \frac{4x+6}{2x+1} \cdot \frac{x-1}{4x+6} = x^2 - 1 &\Rightarrow \frac{x-1}{2x+1} = x^2 - 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2x+1} = x+1 \\ &\Rightarrow 2x^2 + 3x + 1 = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + 3x = 0 \\ &\Leftrightarrow x(2x+3) = 0 \Leftrightarrow x \in \left\{0, -\frac{3}{2}\right\} \end{aligned}$$

Vier Folgerungen muss man genau ansehen (siehe rote Markierung):

1. Die erste Stelle ist am leichtesten zu übersehen: Durch das Bilden des Kehrwerts geht die Information verloren, dass zuvor $x - 1$ im Nenner stand. Wäre $x = 1$ potentielle Lösung, so müsste man diese im Nachhinein ausschließen.
2. Wir haben danach durch $4x + 6$ gekürzt. Dies ist ein Problem, denn wir haben $x = -\frac{3}{2}$ erhalten. Hier wurde durch Null gekürzt! Somit müssen wir die Gleichung noch einmal ansehen. In der Tat würde dort der Nenner des Doppelbruchs Null werden. $x = -\frac{3}{2}$ scheidet somit aus.
3. Dann haben wir auf beiden Seiten durch $x - 1$ dividiert. Eigentlich gilt hier nur " \Leftarrow ", was alles zerstören würde. Jedoch haben wir weiter oben erkannt, dass $x \neq 1$ gelten muss. Deswegen liegt hier ein äquivalenter Schritt vor.
4. Schließlich wurde die Gleichung mit $2x + 1$ multipliziert. Wäre $x = -\frac{1}{2}$ potentielle Lösung, so müsste diese noch überprüft werden.

Fazit: $x = 0$ ist die einzige Lösung. Eine Probe (die nie schaden kann) bestätigt dies.

b) Zur Abwechslung mal etwas mit Wurzeln:

$$\sqrt{x+9} - \sqrt{x-7} = 2$$

Das Ziel sollte klar sein. Die Wurzeln müssen weg. Quadrieren hilft nicht, weil die Binomische Formel dann u.a. $-2\sqrt{x+9} \cdot \sqrt{x-7}$ liefert. Die 3. Binomische Formel beseitigt links die Wurzel, wenn man mit $\sqrt{x+9} + \sqrt{x-7}$ multipliziert, doch dann erscheinen rechts Wurzeln. Wir

quadrieren zunächst doch:

$$\begin{aligned} x + 9 - 2\sqrt{x+9} \cdot \sqrt{x-7} + (x-7) &= 4 \\ \Leftrightarrow 2x - 2 - 2\sqrt{(x+9)(x-7)} &= 0 \\ \Leftrightarrow x - 1 - \sqrt{(x+9)(x-7)} &= 0 \end{aligned}$$

Hier hilft nun die 3. Binomische Formel. Wir multiplizieren mit $(x-1) + \sqrt{(x+9)(x-7)}$ (“Wurzeltrick”). Das ergibt

$$\begin{aligned} (x-1)^2 - (x+9)(x-7) &= 0 \\ \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 - (x^2 + 2x - 63) &= 0 \\ \Leftrightarrow -4x + 64 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= 16 \end{aligned}$$

Allerdings waren nicht alle Schritte Äquivalenzumformungen. Welche? ⁸ Es gilt nur “ \Rightarrow ”. Daher ist die Probe erforderlich:

$$\sqrt{16+9} - \sqrt{16-7} = 5 - 3 = 2$$

Also ist $x = 16$ die Lösung (und zwar die einzige). \diamond

...und ein paar Ungleichungen.

Beispiel 1.3.9a) Fangen wir an mit

$$\frac{1}{x-3} < x-2. \quad (1.5)$$

Wir multiplizieren mit $x-3$. Doch Vorsicht! Ist $x < 3$, also $x-3 < 0$, so dreht dies die Ungleichung um. Wir machen eine Fallunterscheidung:

1. Fall: $x > 3$. Dann ist (1.5) äquivalent zu

$$1 < (x-2)(x-3) \Leftrightarrow x^2 - 5x + 5 > 0. \quad (1.6)$$

Angenommen, hier würde “=” stehen. Dann gilt:

$$x^2 - 5x + 5 = 0 \Leftrightarrow x_{1,2} = \frac{5}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4} - 5} = \frac{5}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Daher ist (1.6) äquivalent zu

$$\left(x - \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5})\right) \left(x - \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5})\right) > 0.$$

⁸ Das Quadrieren und der Wurzeltrick: In beiden Fällen wurde mit Ausdrücken multipliziert, die von x abhängen.

Positiv ist ein Produkt genau dann, wenn beide Faktoren das gleiche Vorzeichen haben. Also gilt (1.6) im Fall 1 genau dann, wenn

$$x > \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5}) \text{ oder } x < \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5}).$$

Wegen $x > 3$, also wenn $x > \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5})$

2. Fall: $x < 3$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (1.5) &\Leftrightarrow 1 > (x-2)(x-3) \\ &\Leftrightarrow 0 > \left(x - \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5})\right) \left(x - \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5})\right) \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5}) < x < \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5}) \end{aligned}$$

Wegen $x < 3$ wird daraus:

$$\frac{1}{2}(5 - \sqrt{5}) < x < 3$$

Fazit: Die Lösungsmenge von (1.5) ist also

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \mid \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5}) < x < 3 \text{ oder } x > \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5}) \right\}$$

(denn für $x = 3$ macht die Ungleichung natürlich auch keinen Sinn). Sehen Sie auch Abbildung 1.1 an.

b) Sehen wir uns noch die Ungleichung

$$\frac{1}{x-1} \leq \frac{1}{2x-3} \tag{1.7}$$

an. Es liegt nahe, Kehrwerte zu bilden, doch Sie wissen, wie empfindlich das Symbol “ \leq ” hierauf reagiert. Wir müssen also beachten, wann hier die Vorzeichen gewechselt werden. Dies ergibt die folgende Fallunterscheidung:

1.Fall: $x < 1$: Dann ist $x - 1 < 0$ und $2x - 3 < 0$ ($\Leftrightarrow x < \frac{3}{2}$). Also gilt

$$\frac{1}{x-1} \leq \frac{1}{2x-3} \Leftrightarrow x-1 \geq 2x-3 \Leftrightarrow 2 \geq x.$$

Da die Nullstellen der Nenner nicht im betrachteten Bereich “ $x < 1$ ” liegen, gilt hier Äquivalenz beim ersten Schritt. Somit sind alle x in diesem Fall eine Lösung.

2.Fall: $1 < x < \frac{3}{2}$. Dann ist $x - 1 > 0$ und $2x - 3 < 0$, also auch

$$\frac{1}{2x-3} < 0 < \frac{1}{x-1}.$$

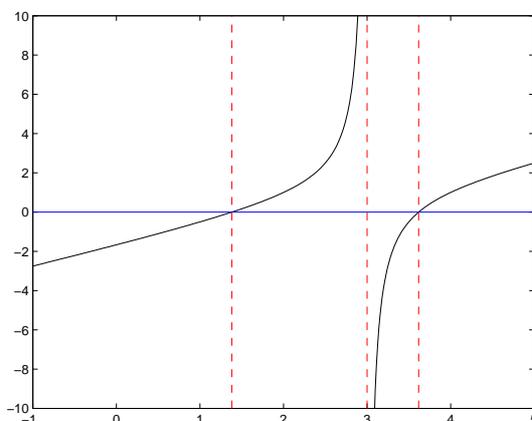


Abbildung 1.1: Graph von $f(x) := x - 2 - \frac{1}{x-3}$. Die gesuchte Lösungsmenge ist $\{x \in \mathbb{R} \setminus \{3\} \mid f(x) > 0\}$. Die Werte $\frac{1}{2}(5 \pm \sqrt{5})$ und 3 sind durch gestrichelte Linien markiert.

Dadurch kann die Ungleichung (1.7) unmöglich gelten.

3. Fall: $x > \frac{3}{2}$. Hier gilt $x - 1 > 0$ und $2x - 3 > 0$, also

$$\frac{1}{x-1} \leq \frac{1}{2x-3} \Leftrightarrow x-1 \geq 2x-3 \Leftrightarrow 2 \geq x$$

Insgesamt ist also $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ oder } \frac{3}{2} < x \leq 2\}$ die Lösungsmenge, siehe Abbildung 1.2. \diamond

Noch ein paar Punkte zur Erinnerung...

Axiom 1.3.10 *Es gebe Objekte $-\infty$ und $+\infty$, die nicht in \mathbb{R} enthalten sind und folgende Eigenschaft haben:*

$$\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty$$

Definition 1.3.11 *Seien $a, b \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Mengen der Form*

$$\begin{aligned} [a, b] &:= \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}, \\ [a, b[&:= [a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}, \\]a, b] &:= (a, b] := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}, \\]a, b[&:= (a, b) := \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} \end{aligned}$$

heißen **Intervalle**.

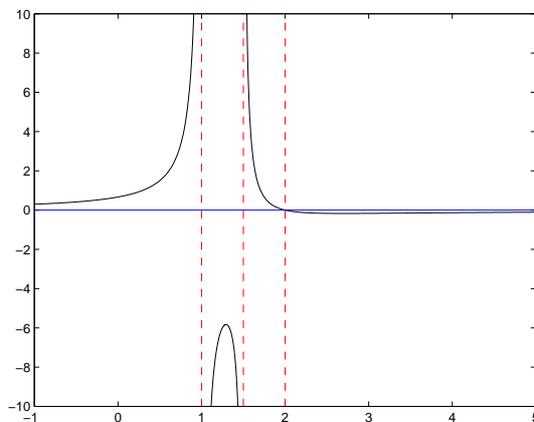


Abbildung 1.2: Graph von $f(x) := \frac{1}{2x-3} - \frac{1}{x-1}$. Die gesuchte Lösungsmenge ist $\{x \in \mathbb{R} \setminus \{1, \frac{3}{2}\} \mid f(x) \geq 0\}$. Die Werte $\{1, \frac{3}{2}, 2\}$ sind durch gestrichelte rote Linien markiert.

Beispiel 1.3.12

- $M = [1, 2[$ ist beschränkt, $\inf M = \min M = 1$, $\sup M = 2$, M hat kein Maximum.
- $M =]1, +\infty[$ ist nach unten beschränkt, $\inf M = 1$, $\sup M = +\infty$, M hat weder Minimum noch Maximum.
- $M =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$.
- $]1, 1[= \emptyset$, $[1, 1] = \{1\}$.
- Die Lösungsmenge in Beispiel 1.3.9 a) ist

$$\mathbb{L} = \left] \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5}), 3 \left[\cup \right] \frac{1}{2}(5 + \sqrt{5}), +\infty \left[$$

und im Beispiel 1.3.9 b)

$$\mathbb{L} =]-\infty, 1[\cup \left] \frac{3}{2}, 2 \right].$$

- $[0, +\infty[= \mathbb{R}_0^+$, $]0, +\infty[= \mathbb{R}^+$, $] -\infty, 0] = \mathbb{R}_0^-$ usw.

◇

Definition 1.3.13

- a) Für $x \in \mathbb{R}$ heißt $|x| := \begin{cases} x, & \text{falls } x \geq 0 \\ -x, & \text{falls } x < 0 \end{cases}$ **Betrag** von x .
- b) Für $x \in \mathbb{R}$ heißt $\operatorname{sgn} x := \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ **Vorzeichen** (Signum) von x .

Satz 1.3.14 Für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

- a) $|x| \geq 0$
- b) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- c) $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
- d) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung)
- e) $|x| = x \cdot \operatorname{sgn} x$

Beispiel 1.3.15 Wir untersuchen die Ungleichung

$$|x + 1| > \frac{1}{|x - 1|}$$

Es bietet sich hier an, die Ungleichung mit $|x - 1|$ zu multiplizieren. Da dieser Ausdruck stets nicht-negativ ist (und hier sogar positiv ist, da $x = 1$ auszuschließen ist), ändert sich das Ungleichheitszeichen hierbei nicht. Es gilt also

$$\begin{aligned} |x + 1| > \frac{1}{|x - 1|} &\Leftrightarrow |x + 1| \cdot |x - 1| > 1, \quad x \neq 1 \\ &\Leftrightarrow |(x + 1) \cdot (x - 1)| > 1, \quad x \neq 1 \\ &\Leftrightarrow |x^2 - 1| > 1, \quad x \neq 1 \end{aligned}$$

Für $x = 1$ ist die Ungleichung ohnehin falsch. Wir können das ignorieren.

Wir brauchen nun eine Fallunterscheidung wegen des Betrages.

1. Fall: $x^2 - 1 \geq 0$ ($\Leftrightarrow x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus]-1, 1[$)

Hier gilt $|x^2 - 1| = x^2 - 1$, also

$$\begin{aligned} |x^2 - 1| > 1 &\Leftrightarrow x^2 - 1 > 1 \Leftrightarrow x^2 > 2 \\ &\Leftrightarrow |x| > \sqrt{2} \Leftrightarrow x \in \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]. \end{aligned}$$

Dies ist eine Teilmenge der betrachteten Menge des Falls.

2. Fall: $x^2 - 1 < 0$ ($\Leftrightarrow x^2 < 1 \Leftrightarrow x \in]-1, 1[$)

Nun ist $|x^2 - 1| = -(x^2 - 1) = -x^2 + 1$, also

$$|x^2 - 1| > 1 \Leftrightarrow -x^2 + 1 > 1 \Leftrightarrow 0 > x^2.$$

Das ist unmöglich. In diesem Fall ist die Ungleichung also unlösbar. Die Lösungsmenge ist somit $\mathbb{L} = \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$, siehe auch Abbildung 1.3.

◇

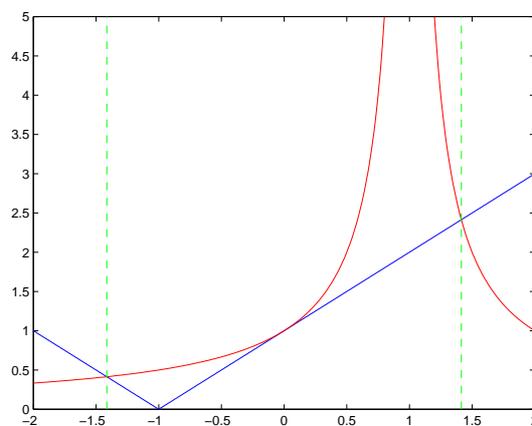


Abbildung 1.3: $f(x) := |x+1|$ ist in blau und $f(x) := \frac{1}{|x-1|}$ ist in rot gezeichnet; die Werte $\pm\sqrt{2}$ sind mit grünen gestrichelten Linien markiert.

1.4 Vollständige Induktion

Die vollständige Induktion ist eine Beweistechnik, die für Aussagen verwendet wird, die z.B. für alle natürlichen Zahlen gilt. Vorab legen wir fest: $0 \in \mathbb{N}$.

Prinzip der vollständigen Induktion (“Dominosteinprinzip”)

Sei $m \in \mathbb{Z}$ fest und $\mathbb{N}_m := \{n \in \mathbb{Z} | n \geq m\}$.

Eine Aussage $A(n)$, die für alle $n \in \mathbb{N}_m$ erklärt ist, ist für alle $n \in \mathbb{N}_m$ wahr, wenn

1. $A(m)$ wahr ist und es gilt
2. wenn $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}_m$ wahr ist, dann ist $A(n+1)$ auch wahr.

Alternativ zu 2.:

Wenn $A(k)$ für alle $k \leq n$ ($k \in \mathbb{N}_m$) für ein festes $n \in \mathbb{N}_m$ wahr ist, dann ist $A(n+1)$ wahr.

Teil 1 des Induktionsbeweises steht für das Anstoßen des ersten Steines, während Teil 2 aussagt “fällt der n -te Stein, so fällt auch der $(n+1)$ -te” oder anders ausgedrückt “jeder Stein wirft den nächsten um”. Damit ist garantiert, dass alle Steine fallen. Ein fallender Stein steht hierbei für eine ganze Zahl, für die die Aussage wahr ist. Wir können also argumentieren (wenn z.B. $m=0$): Nach Teil 1 gilt die Aussage für 0. Wegen Teil 2 damit auch für 1. Wegen Teil 2 damit auch für 2. Wegen Teil 2 damit auch für 3 ...

Die Alternative zu Teil 2 argumentiert auf die äquivalente Art “sind alle Steine bis zum n -ten gefallen, so fällt auch der $(n+1)$ -te.”

Auf dem gleichen Prinzip basiert auch die rekursive Definition.

Prinzip der rekursiven Definition

Sei $m \in \mathbb{Z}$ fest. Ein Ausdruck oder Begriff $B(n)$ ist eindeutig für alle $n \in \mathbb{N}_m$ definiert, wenn folgendes gilt:

1. $B(m)$ ist definiert und
2. $B(n+1)$ wird (rekursiv) mit $B(n)$ eindeutig definiert.

Dies lässt sich am besten an konkreten Beispielen erläutern.

Definition 1.4.1 Die **Fakultät** lässt sich wie folgt definieren: $0! := 1$, $(n+1)! := (n+1) \cdot n!$, $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Fakultät für alle $n \in \mathbb{N}$ ($= \mathbb{N}_0$) eindeutig definiert ($B(n) = “n!”$). Ferner:

$$\binom{n}{m} := \frac{n!}{(n-m)!m!} \text{ für } n, m \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq m \text{ heißt } \mathbf{Binomialkoeffizient} \text{ (“}n \text{ über } m\text{”)}$$

Definition 1.4.2 Eine Abbildung $a : \mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{R}$ ($m \in \mathbb{Z}$) heißt **Folge**.

Man benutzt folgende Bezeichnungen:

$$\underbrace{a(n)}_{\text{Folglied}} =: a_n.$$

$$\underbrace{a = (a_n) = (a_n)_{n \geq m} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}_m} = (a_n)_n = (a_n)_{n=m, m+1, \dots}}_{\text{Folge}}$$

Speziell für $m=0$: $a = (a_n)_{n \geq 0} = (a_n)_{n \in \mathbb{N}} = (a_n)_{n=0,1,\dots} = \dots$
 (z.B. $a_n = \frac{1}{(n+1)^2}$; $n = 0, 1, \dots$; ergibt die Folge: $\frac{1}{1}, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots$).

Definition 1.4.3 Sei $(a_n)_{n \geq m}$ eine Folge.

a) Summen werden mit einem großen Sigma abgekürzt:

$$\sum_{k=m}^m a_k := a_m \quad (B(m))$$

$$\underbrace{\sum_{k=m}^{n+1} a_k}_{B(n+1)} := \underbrace{\sum_{k=m}^n a_k}_{B(n)} + a_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_m.$$

Ferner: $\sum_{k=m}^n a_k := 0$, falls $n < m$. ("leere Summe")

Damit: $\sum_{k=m}^m a_k = \sum_{k=m}^{m-1} a_k + a_m$.

b) Für Produkte wird ein großes Pi benutzt:

$$\prod_{k=m}^m a_k := a_m$$

$$\prod_{k=m}^{n+1} a_k := \left(\prod_{k=m}^n a_k \right) \cdot a_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}_m.$$

Ferner: $\prod_{k=m}^n a_k := 1$, falls $n < m$. ("leeres Produkt")

c) Sei $a \in \mathbb{R}$. Wir definieren rekursiv: $a^0 := 1$, $a^{n+1} := a^n \cdot a$ für $n \in \mathbb{N}$.

Satz 1.4.4 Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^n k}_{A(n)} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Beweis:

$n=0$ (Induktionsanfang): Wir vergleichen beide Seiten. Links haben wir $\sum_{k=0}^0 k = 0$. Rechts steht $\frac{n(n+1)}{2} = \frac{0(0+1)}{2} = 0$

Die Aussage stimmt also für $n = 0$.

Induktionsannahme: $A(n)$ gelte für ein $n \in \mathbb{N}$.

Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$:

Zu zeigen (z.z.): Dann (d.h.: benutze, dass $A(n)$ gilt) gilt $A(n + 1)$, d.h.

$$\sum_{k=0}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+1+1)}{2}$$

Wir müssen also sehen, ob wir die Aussage $A(n)$ einbauen können. Dies geht wie folgt:

$$\sum_{k=0}^{n+1} k \stackrel{\text{Def.}}{=} \sum_{k=0}^n k + (n+1) \stackrel{\text{Ind.ann.}}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \stackrel{\text{ausklammern}}{=} \underbrace{\left(\frac{n}{2} + 1\right)}_{=\frac{n+2}{2}} (n+1)$$

Damit ist die Induktion komplett. Die Formel ist für alle $n \in \mathbb{N}$ bewiesen. ■

Satz 1.4.5 (Binomischer Lehrsatz) Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Beweis:

Induktionsanfang $n=0$:

$$(x + y)^0 = 1, \quad \sum_{k=0}^0 \binom{0}{k} x^k y^{0-k} = \binom{0}{0} x^0 y^{0-0} = 1$$

Die Aussage stimmt also.

Induktionsannahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelte:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Induktionsschritt $n \rightarrow n + 1$:

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= (x + y)^n \cdot (x + y) \\ &\stackrel{\text{Ind.ann.}}{=} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \cdot (x + y) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^{k+1} y^{n-k} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}. \end{aligned}$$

Eine Indexverschiebung $k \rightarrow k - 1$ ergibt nun bei der linken Summe:

$$(x + y)^{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} x^k y^{n-(k-1)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n+1-k}.$$

Wir fassen die beiden Summen im gemeinsamen Indexbereich zusammen:

$$\begin{aligned} (x + y)^{n+1} &= \sum_{k=1}^n \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) x^k y^{n+1-k} \\ &\quad + \underbrace{\binom{n}{n}}_{=\binom{n+1}{n+1}=1} x^{n+1} \underbrace{y^{n-(n+1-1)}}_{=y^{(n+1)-(n+1)}} + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=\binom{n+1}{0}=1} x^0 y^{n+1}. \end{aligned}$$

Um die erste Summe zu vereinfachen, brauchen wir eine Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} &= \frac{n!}{(n-k+1)!(k-1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!} \\ &= \frac{n! \cdot k + n!(n-k+1)}{(n-k+1)!k!} = \frac{n!(k-k) + n!(n+1)}{(n+1-k)!k!} = \binom{n+1}{k}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Damit erhalten wir:

$$(x + y)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k y^{n+1-k}.$$

Das war zu beweisen. ■

Formel (1.8) ist die Grundlage des Pascal'schen Dreiecks, siehe Abbildung 1.4.

Satz 1.4.6 (Bernoulli'sche Ungleichung)

$$\forall h \in [-1, +\infty[\quad \forall n \in \mathbb{N} : (1 + h)^n \geq 1 + nh$$

Der Beweis wird als Übungsaufgabe überlassen.

			1		1				
			1		2		1		
		1		3		3		1	
		1	4		6		4	1	
	1	5		10		10		5	1
1	6	15		20		15		6	1

Abbildung 1.4: Pascal'sches Dreieck: Die n -te Zeile ($n = 1, 2, \dots$) steht für die Werte $\binom{n}{0}, \dots, \binom{n}{n}$. Man erhält sie, indem man mit der Zeile "1 1" beginnt und dann wie folgt eine neue Zeile aus der vorherigen erstellt: Ein Wert in der neuen Zeile ist die Summe der beiden direkt darüber liegenden (siehe Gleichung (1.8)). Links und rechts wird außerdem eine 1 in der Zeile ergänzt. Aus dem Diagramm liest man beispielsweise mit dem Binomischen Lehrsatz ab, dass $(x + y)^6 = x^6 + 6x^5y + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + y^6$ gilt.

1.5 Komplexe Zahlen I

Hat es Sie nicht auch schon immer gestört, dass $x^2 = -1$ keine Lösung in \mathbb{R} hat? Das ging Mathematiker(inne)n schon vor Jahrhunderten so. Sie fanden eine Lösung...

Definition 1.5.1 \mathbb{R} wird als Teilmenge von \mathbb{R}^2 betrachtet ("eingebettet"), indem $x \in \mathbb{R}$ mit $(x, 0) \in \mathbb{R}^2$ identifiziert wird.

Auf \mathbb{R}^2 definieren wir die Addition

$$(x, y) + (a, b) := (x + a, y + b) \quad (\text{d.h. komponentenweise})$$

und die Multiplikation

$$(x, y) \cdot (a, b) := (xa - yb, xb + ya)$$

\mathbb{R}^2 mit dieser Addition und dieser Multiplikation wird mit \mathbb{C} bezeichnet. Die Elemente heißen **komplexe Zahlen**. Wir schreiben $1 := (1, 0)$, $i := (0, 1)$. i heißt **imaginäre Einheit**.

Somit ist $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Satz 1.5.2 \mathbb{C} ist ein Körper.

So kurz dieser Satz auch sein mag, er sagt enorm viel aus. Wir können nämlich in \mathbb{C} so rechnen wie in \mathbb{R} . Sehen Sie sich noch einmal die Körperaxiome an.

Definition 1.5.3 Da $\mathbb{R}^2 \ni (x, y) = (x, 0) + (0, y)$, werden Elemente $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ als $x + iy \in \mathbb{C}$ geschrieben ($iy = (0, 1) \cdot (y, 0) = (0 \cdot y - 1 \cdot 0, 0 \cdot 0 + 1 \cdot y) = (0, y)$).

Ist $z = x + iy \in \mathbb{C}$; $x, y \in \mathbb{R}$, so heißt

- $x =: \operatorname{Re} z$ der **Realteil** von z und $y =: \operatorname{Im} z$ der **Imaginärteil** von z ,
- $\bar{z} := x - iy$ die zu z **konjugierte komplexe Zahl**,
- $|z| := \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ der **Betrag** von z .

Die Darstellung von \mathbb{C} als \mathbb{R}^2 nennt man “komplexe Zahlenebene” oder “Gauß’sche Zahlenebene”, siehe Abbildung 1.5.

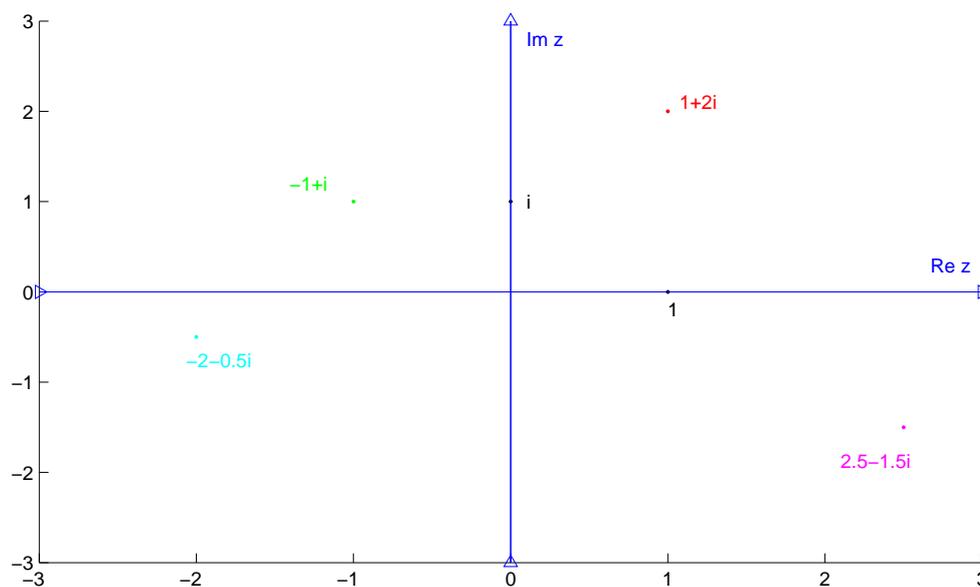


Abbildung 1.5: Komplexe Zahlenebene

Beispiel 1.5.4

$$\text{a) } i^2 = (0, 1) \cdot (0, 1) \stackrel{\text{Def.}}{=} (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1, 0) = -1$$

Somit gilt:

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$|i| = |0 + 1i| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1.$$

- b) Niemand würde ernsthaft das Produkt zweier komplexer Zahlen mit der Formel aus der Definition ausrechnen. Viel einfacher geht das mit $i^2 = -1$ und den Körperaxiomen. Es gilt:

$$(a + ib) \cdot (x + iy) = (a, b) \cdot (x, y) \stackrel{\text{Def.}}{=} (ax - by, ay + bx)$$

bzw.

$$\begin{aligned} (a + ib)(x + iy) &\stackrel{\text{C ist Körper!}}{=} ax + aiy + ibx + i^2by \\ &\stackrel{\text{C ist Körper!}}{=} \underbrace{ax - by}_{\text{Realteil}} + i \underbrace{(ay + bx)}_{\text{Imaginärteil}} \end{aligned}$$

- c) Sei $z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x + iy)(x - iy) = x^2 - i^2y^2 \\ &= x^2 - (-1) \cdot y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2 \end{aligned}$$

- d) Seien $x, y, a, b \in \mathbb{R}$ und $a + ib \neq 0$ (d.h. $a \neq 0$ oder $b \neq 0$). Wir versuchen, den Real- und Imaginärteil eines komplexen Bruchs zu bestimmen.

$$\frac{x + iy}{a + ib} = \frac{(x + iy)(a - ib)}{(a + ib)(a - ib)} = \frac{xa - i^2yb + i(-xb + ya)}{a^2 + b^2}$$

↑ "Erweiterung mit dem komplex Konjugierten des Nenners"

$$= \underbrace{\frac{xa + yb}{a^2 + b^2}}_{\text{Realteil des Bruchs}} + i \underbrace{\frac{ya - xb}{a^2 + b^2}}_{\text{Imaginärteil des Bruchs}}$$

Statt diese Formel auswendig zu lernen, ist es viel sinnvoller, sich die verwendete Technik zu merken. Hierzu ein Beispiel:

$$z := \frac{2 + 3i}{-1 + 2i} = \frac{(2 + 3i)(-1 - 2i)}{(-1)^2 + 2^2} = \frac{-2 - 4i - 3i - 6i^2}{5} = \frac{4}{5} - \frac{7}{5}i.$$

Also ist $\text{Re } z = \frac{4}{5}$, $\text{Im } z = -\frac{7}{5}$.

◇

Satz 1.5.5

a) Der Binomische Lehrsatz $(x + y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$, $n \in \mathbb{N}$, gilt auch für $x, y \in \mathbb{C}$.

b) $\forall z, w \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} \overline{z + w} &= \bar{z} + \bar{w}, \quad \overline{zw} = \bar{z}\bar{w}, \quad \overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}} \quad (\text{falls } w \neq 0), \\ \bar{\bar{z}} &= z, \quad \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}(z + \bar{z}), \quad \operatorname{Im} z = \frac{1}{2i}(z - \bar{z}) \\ |z + w| &\leq |z| + |w|, \quad |zw| = |z| \cdot |w|, \quad \left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|} \quad (\text{falls } w \neq 0) \\ |\bar{z}| &= |z|. \end{aligned}$$

Für $z \in \mathbb{R}$ stimmt der komplexe Betrag $|z|$ mit dem reellen überein.

Exemplarischer Beweis der Formel für den Realteil:

Sei $z = x + iy$; $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt: $z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x = 2 \operatorname{Re} z$.

Satz 1.5.6 (Fundamentalsatz der Algebra) Jedes (komplexe) Polynom $P(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ ($a_k \in \mathbb{C} \forall k$) vom Grad n (d.h. $a_n \neq 0$) lässt sich in \mathbb{C} in genau n Linearfaktoren zerlegen, d.h. es existieren $z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$ (die nicht notwendigerweise verschieden sind), so dass

$$P(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) = a_n \prod_{k=1}^n \underbrace{(z - z_k)}_{\text{Linearfaktor}}$$

Die z_k sind alle Nullstellen von P . Die Anzahl der gleichen Linearfaktoren einer Nullstelle nennt man die **Vielfachheit** der Nullstelle.

Beispiel 1.5.7

a) $P(z) = z^2 + 2z + 1 = (z + 1)^2 = (z - (-1))^2$, $z = -1$ Nullstelle der Vielfachheit 2

b) $P(z) = z^2 + 1$ hat keine reelle Nullstelle, aber

$$z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z_{1/2} = 0 \pm \sqrt{0 - 1} = \pm i,$$

d.h.

$$z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$$

(Test: $(z - i)(z + i) = z^2 - i^2 = z^2 + 1$) i und $-i$ haben beide die Vielfachheit 1.

c) $P(z) = 2z^3 + 4z^2 - 8z + 2 = 2(z^3 + 2z^2 - 4z + 1)$

1 Nullstelle erraten: $z = 1$ ($P(1) = 0$), Linearfaktor $(z - 1)$

Eine Nullstelle haben wir. Dadurch wissen wir, dass wir das Polynom zerlegen können in

$$P(z) = (z - 1)Q(z),$$

wobei Q ein Polynom vom Grad 2 sein muss. Um Q bestimmen zu können, führen wir eine Polynomdivision durch.

$$\begin{array}{r} (z^3 + 2z^2 - 4z + 1) : (z - 1) = z^2 + 3z - 1 \\ - (z^3 - z^2) \\ \hline 0 + 3z^2 - 4z \\ - (3z^2 - 3z) \\ \hline -z + 1 \\ - (z - 1) \\ \hline 0 \end{array}$$

Somit lässt sich P wie folgt schreiben:

$$P(z) = 2(z^2 + 3z - 1)(z - 1),$$

wobei der erste Faktor die folgenden Nullstellen hat:

$$z_{2,3} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - (-1)} = \frac{-3 \pm \sqrt{9+4}}{2} = \frac{1}{2}(-3 \pm \sqrt{13}).$$

Somit ist die komplette Zerlegung von P in Linearfaktoren

$$P(z) = 2 \left(z - \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} \right) \left(z - \frac{-3 - \sqrt{13}}{2} \right) (z - 1)$$

und P hat die Nullstellen

$$z_1 = 1, \quad z_2 = \frac{-3 + \sqrt{13}}{2}, \quad z_3 = \frac{-3 - \sqrt{13}}{2},$$

die alle reell sind und alle die Vielfachheit 1 haben.

d) Das Polynom

$$P(z) = (z^2 + 2)(z - 2i)^2(z + 3)$$

hat die Nullstellen $\sqrt{2}i$, $-\sqrt{2}i$, -3 (jeweils mit Vielfachheit 1) und $2i$ (mit Vielfachheit 2).

◇

Die Summe der Vielfachheiten aller komplexen Nullstellen eines Polynoms vom Grad n ist n .

Bemerkung 1.5.8 Für $z = x + iy$ und $w = a + ib$ (mit $x, y, a, b \in \mathbb{R}$) kann man

$$z \leq w :\Leftrightarrow x \leq a \text{ und } y \leq b$$

definieren. Dies entspricht einer Ordnung in \mathbb{R}^2 der Form

$$(x, y) \leq (a, b) :\Leftrightarrow x \leq a \wedge y \leq b.$$

Mit anderen Worten: Eine komplexe Zahl sei kleiner oder gleich einer anderen, wenn das \leq sowohl für den Realteil als auch für den Imaginärteil gilt. Damit wird jedoch nur eine Teilordnung auf \mathbb{C} definiert und keine Totalordnung, denn beispielsweise $1 + 2i$ und $2 + i$ können nicht miteinander verglichen werden. Es gilt

$$1 + 2i \not\leq 2 + i \text{ und } 2 + i \not\leq 1 + 2i.$$

Wir haben das schon zuvor diskutiert, als wir die Totalordnung auf \mathbb{R} eingeführt haben. Angeordnete Körper, also Körper mit einer Totalordnung, die mit Addition und Multiplikation verträglich ist, wie das zum Beispiel für \mathbb{R} der Fall ist, haben immer die Eigenschaft, dass $x^2 \geq 0$ für alle Elemente x gilt. Somit kann man auf \mathbb{C} keine derartige Ordnung einführen, weil beispielsweise $i^2 = -1 < 0$.

Beispiel 1.5.9 In Wechselstromkreisen kann man die Kirchhoff'schen Regeln anwenden, wenn man Kapazitäten und Induktivitäten als komplexe Widerstände auffasst. Man verwendet folgendes:

Größe	komplexer Widerstand Z
Ohm'scher Widerstand R	$Z = R$
Kapazität C	$Z = \frac{1}{i\omega C}$
Induktivität L	$Z = i\omega L$

Die zeitabhängige Wechselspannung $U(t)$ und die zugehörige Stromstärke $I(t)$ werden dazu passend beschrieben durch

$$\begin{aligned} U(t) &= U_0(\cos(\omega t + \alpha) + i \sin(\omega t + \alpha)) \\ I(t) &= I_0(\cos(\omega t + \beta) + i \sin(\omega t + \beta)). \end{aligned}$$

Hierbei sind ω die Frequenz und α und β die Phasen. Mit dieser komplexen Darstellung gelten sowohl das Ohm'sche Gesetz

$$U(t) = Z I(t)$$

als auch die Kirchhoff'schen Regeln

1. Für komplexe Widerstände Z_1, \dots, Z_n in Reihe gilt der Gesamtwiderstand

$$Z = Z_1 + \dots + Z_n = \sum_{k=1}^n Z_k.$$

2. Sind komplexe Widerstände Z_1, \dots, Z_n parallel geschaltet, so haben sie den Gesamtwiderstand Z mit

$$\frac{1}{Z} = \frac{1}{Z_1} + \dots + \frac{1}{Z_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{Z_k}.$$

Hierbei nennt man $\operatorname{Re} Z$ den Wirkwiderstand, $\operatorname{Im} Z$ den Blindwiderstand und $|Z|$ den Scheinwiderstand oder die Impedanz.

Sind beispielsweise der Ohm'sche Widerstand R , die Kapazität C und die Induktivität L in Reihe geschaltet (siehe Abbildung 1.6), so haben sie den Gesamtwiderstand

$$Z = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L.$$

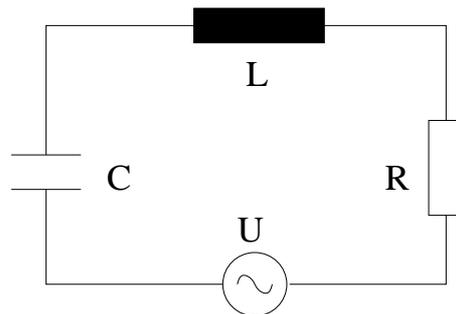


Abbildung 1.6: Reihenschaltung von drei verschiedenartigen komplexen Widerständen

Dies kann man mit folgender Überlegung vereinfachen: Wir wissen, dass $i^2 = -1$ gilt, also $-i \cdot i = 1$. Division durch i ergibt somit

$$\boxed{-i = \frac{1}{i}}$$

Folglich lässt sich der Gesamtwiderstand der Reihenschaltung als

$$Z = R + i \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)$$

schreiben. Damit ist für diese Schaltung der Wirkwiderstand R , der Blindwiderstand $\omega L - \frac{1}{\omega C}$ und der Scheinwiderstand

$$|Z| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}.$$

Die Herleitung der entsprechenden Formeln für eine Parallelschaltung wird als Übungsaufgabe überlassen. \diamond

Kapitel 2

Grundlagen der Linearen Algebra und Analytischen Geometrie

2.1 Vektorräume

Definition 2.1.1 Eine nicht-leere Menge V , für die eine **Addition** (d.h. eine Rechenvorschrift “+” derart, dass $a + b \in V$ für alle $a, b \in V$ ist) und eine **skalare Multiplikation** (d.h. $\lambda a \in V$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ (λ ist ein “Skalar”) und alle $a \in V$) definiert ist, die folgende Eigenschaften erfüllen:

V1) Kommutativgesetz der Addition: $a + b = b + a \quad \forall a, b \in V$

V2) Assoziativgesetz der Addition: $(a + b) + c = a + (b + c) \quad \forall a, b, c \in V$

V3) neutrales Element der Addition: Es gibt ein Element $0 \in V$ (präziser 0_V), so dass $a + 0 = a \quad \forall a \in V$

V4) inverses Element der Addition: Zu jedem $a \in V$ gibt es ein Element von V , genannt $-a$, so dass $a + (-a) = 0$ (gemeint ist 0_V aus V3)

V5) $1a = a \quad \forall a \in V$ (gemeint ist die 1 in \mathbb{R})

V6) Assoziativgesetz der Skalarmultiplikation: $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \forall a \in V$

V7) Distributivgesetz I: $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \forall a, b \in V$

V8) Distributivgesetz II: $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \forall a \in V$,

heißt **\mathbb{R} -Vektorraum** (Vektorraum über \mathbb{R} , linearer Raum über \mathbb{R}). Die Elemente heißen **Vektoren**. Kurzschreibweise: $a - b := a + (-b)$ für $a, b \in V$.

Ersetzt man überall in der Definition \mathbb{R} durch \mathbb{C} , so hat man einen \mathbb{C} -Vektorraum.

Sofern im Folgenden nichts weiter spezifiziert ist, steht “Vektorraum” für “ \mathbb{R} -Vektorraum”.

Natürlich ist $0_{\mathbb{R}} = 0_{\mathbb{C}}$ und $1_{\mathbb{R}} = 1_{\mathbb{C}}$.

Satz 2.1.2 Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum mit $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Dann gilt

- a) $0_{\mathbb{R}}a = 0_V \quad \forall a \in V, \quad \lambda 0_V = 0_V \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$
- b) Das neutrale Element 0_V ist eindeutig.
- c) Die inversen Elemente der Addition sind eindeutig.
- d) $\underbrace{-a}_{\substack{\text{inverses} \\ \text{Element}}} = \underbrace{(-1)a}_{\substack{\text{skalare Mult. von} \\ -1 \in \mathbb{R} \text{ und } a \in V}} \quad \forall a \in V$
- e) $\underbrace{-(a+b)}_{\text{inv. Element von } (a+b)} = \underbrace{(-a) + (-b)}_{\substack{(\text{inv. Element von } a) \\ + (\text{inv. Element von } b)}} \quad \forall a, b \in V$

Beweis: Die einzelnen Eigenschaften lassen sich wie folgt beweisen:

- a) Wir benutzen die Eigenschaften eines Vektorraums und eines Körpers, um die Aussage zu zeigen.

$$\begin{aligned} 0_{\mathbb{R}}a &\stackrel{A3}{=} (0_{\mathbb{R}} + 0_{\mathbb{R}})a \stackrel{V8}{=} 0_{\mathbb{R}}a + 0_{\mathbb{R}}a \quad / - 0_{\mathbb{R}}a \\ &\stackrel{V4}{\Rightarrow} 0_V = (0_{\mathbb{R}}a + 0_{\mathbb{R}}a) - 0_{\mathbb{R}}a \stackrel{V2}{=} 0_{\mathbb{R}}a + \underbrace{(0_{\mathbb{R}}a - 0_{\mathbb{R}}a)}_{\stackrel{V4}{=} 0_V} \stackrel{V3}{=} 0_{\mathbb{R}}a \end{aligned}$$

Für die 2. Aussage kann man wie folgt fortfahren:

$$\begin{aligned} \lambda 0_V &\stackrel{V3}{=} \lambda(0_V + 0_V) \stackrel{V7}{=} \lambda 0_V + \lambda 0_V \quad / - \lambda 0_V \\ &\stackrel{\text{wie oben}}{\Rightarrow} 0_V = \lambda 0_V \end{aligned}$$

- b) Angenommen $\tilde{0} \in V$ erfüllt auch: $a + \tilde{0} = a \quad \forall a \in V$

$$\text{Dann gilt: } 0_V \stackrel{\substack{\text{da } \tilde{0} \\ \text{neutrales Elem.}}}{=} 0_V + \tilde{0} \stackrel{\substack{\text{da } 0_V \\ \text{neutr. Element}}}{=} \tilde{0}$$

- c) Wir wählen ein beliebiges $a \in V$. Angenommen, es gibt $b \in V$ und $c \in V$, so dass

$$a + b = 0 \quad \text{und} \quad a + c = 0.$$

Wir addieren bei der ersten Gleichung auf beiden Seiten c und erhalten

$$\underbrace{(c + a)}_{=0} + b = c,$$

also $b = c$.

$$\begin{aligned} \text{d) } 0_V &= 0_{\mathbb{R}} a = (1 - 1)a \stackrel{\text{a)}}{=} 1a + (-1)a \stackrel{\text{V8}}{=} a + (-1)a \\ &\stackrel{\text{V4}}{=} (-1)a \text{ ist } \mathbf{das} \text{ inverse Element zu } a, \text{ also } -a = (-1)a. \end{aligned}$$

e) zu zeigen: $(-a) + (-b)$ ist das inverse Element zu $(a + b)$, d.h.

$$(a + b) + ((-a) + (-b)) = 0_V.$$

Dann rechnen wir das einfach mal nach:

$$(a + b) + ((-a) + (-b)) \stackrel{\text{V1}}{=} (a + b) + ((-b) + (-a)) \stackrel{\text{V2}}{=} a + \underbrace{(b + (-b))}_{\stackrel{\text{V4}}{=} 0_V} + (-a) \stackrel{\text{V3}}{=} a + (-a) \stackrel{\text{V4}}{=} 0_V$$

■

Beachten Sie, dass es in Vektorräumen i.Allg. keine Division gibt.

Wir sehen uns nun einige Beispiele von Vektorräumen an.

Beispiel 2.1.3

a) $V = \mathbb{R}^2$ ist ein Vektorraum mit der Addition

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

und der skalaren Multiplikation

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ für } \lambda \in \mathbb{R}.$$

Wir prüfen das nach:

$$\text{V1) } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Def.}}{=} \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{\text{reelle Add.} \\ \text{ist kommutativ}}}{=} \begin{pmatrix} y_1 + x_1 \\ y_2 + x_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Def.}}{=} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{V2) } &\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 + z_1 \\ x_2 + y_2 + z_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 + z_1 \\ y_2 + z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} \right). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{V3) } 0_{\mathbb{R}^2} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ d.h. } 0_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} 0_{\mathbb{R}} \\ 0_{\mathbb{R}} \end{pmatrix}. \\ &\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + 0_{\mathbb{R}^2} = \begin{pmatrix} x_1 + 0 \\ x_2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

V4) Zu $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ ist $-x = \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}$:

$$x + (-x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{\mathbb{R}^2}.$$

V5) $1x = 1 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Def.}}{=} \begin{pmatrix} 1x_1 \\ 1x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x.$

V6) $\lambda(\mu x) = \lambda \left(\mu \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \right) = \lambda \begin{pmatrix} \mu x_1 \\ \mu x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \mu x_1 \\ \lambda \mu x_2 \end{pmatrix} \stackrel{\text{Def.}}{=} (\lambda \mu) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$

V7) $\lambda(x + y) = \lambda \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda(x_1 + y_1) \\ \lambda(x_2 + y_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \lambda y_1 \\ \lambda x_2 + \lambda y_2 \end{pmatrix}$
 $= \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \lambda y_1 \\ \lambda y_2 \end{pmatrix} = \lambda x + \lambda y.$

V8) $(\lambda + \mu)x = (\lambda + \mu) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)x_1 \\ (\lambda + \mu)x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 + \mu x_1 \\ \lambda x_2 + \mu x_2 \end{pmatrix} = \lambda x + \mu x.$

b) Sei $V = \mathbb{R}^n$; für $x, y \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ist

$$x + y = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$\lambda x = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}.$$

Analog zu a) kann man nachweisen, dass dies ein Vektorraum ist.

c) Sei $V = C(I)$, $I \subset \mathbb{R}$ irgendein Intervall.

$C(I)$ ist die Menge aller stetigen ("continuous" = engl. für "stetig") Funktionen $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ (siehe später). Für $f, g \in C(I)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ sei

$$(f + g) : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ gegeben durch } (f + g)(x) := f(x) + g(x) \quad \forall x \in I$$

$$(\lambda f) : I \rightarrow \mathbb{R} \text{ gegeben durch } (\lambda f)(x) := \lambda(f(x)) \quad \forall x \in I$$

(also wie üblich).

$f + g$, λf sind wieder stetig, also in $C(I)$. V1) - V8) gelten.

(z.B.: $0_{C(I)}$ ist die Funktion, die konstant 0 ist).

d) Die Menge aller Polynome (man bezeichnet sie mit Pol oder \mathbb{P}) bildet ebenfalls einen Vektorraum. Sind $P, Q \in \text{Pol}$, d.h.

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x^1 + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad Q(x) = b_m x^m + \dots + b_1 x + b_0 = \sum_{k=0}^m b_k x^k,$$

so ist $P + Q \in \text{Pol}$ und $\lambda P \in \text{Pol}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, und V1) bis V8) gelten.

- e) Die Menge $\text{Pol}_n = \mathbb{P}_n$ aller Polynome vom Grad $\leq n$ ist ebenfalls ein Vektorraum, denn ist

$$P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x^1 + a_0 = \sum_{k=0}^n a_k x^k, \quad Q(x) = b_n x^n + \dots + b_1 x + b_0 = \sum_{k=0}^n b_k x^k,$$

wobei hier a_n und b_n genauso wie andere Koeffizienten verschwinden dürfen, d.h. es gilt $\deg P, \deg Q \leq n$ ($\deg = \text{Grad}$), so gilt

$$(P + Q)(x) = (a_n + b_n) x^n + \dots + (a_1 + b_1) x + a_0 + b_0 = \sum_{k=0}^n (a_k + b_k) x^k,$$

also $P + Q \in \text{Pol}_n$, und

$$(\lambda P)(x) = \lambda a_n x^n + \dots + \lambda a_1 x + \lambda a_0 = \sum_{k=0}^n \lambda a_k x^k, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

also auch $\lambda P \in \text{Pol}_n$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Außerdem gelten V1) bis V8). So ist beispielsweise die Konstante 0 das Nullelement 0_{Pol_n} (also das neutrale Element der Addition) für Polynome und in jedem Pol_n enthalten, da es vom Grad $\leq n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist, und das inverse Element der Addition zu P (P wie oben) ist

$$-P(x) = \sum_{k=0}^n (-a_k) x^k.$$

- f) Ersetzt man in Teil e) das \leq durch ein $=$, so hat man keinen Vektorraum (es sei denn, $n = 0$). Nennen wir mal vorübergehend \tilde{P}_n die Menge aller Polynome vom Grad n (also vom exakten Grad n) für ein festes $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann sind beispielsweise die beiden Polynome $P(x) = x^n$ und $Q(x) = -x^n$ in \tilde{P}_n enthalten, jedoch nicht ihre Summe $(P + Q)(x) = 0$.

- g) Wir werden noch später den Begriff “differenzierbar” einführen, auch wenn dieser schon wie die Stetigkeit aus der Schule bekannt sein sollte. Unter einer stetig differenzierbaren Funktion versteht man nun eine Funktion, die differenzierbar ist und deren Ableitung stetig ist. Für beispielsweise ein Intervall I führt man nun die Menge (man würde auch sagen “den Raum”) $C^{(k)}(I)$ aller auf I k -mal stetig differenzierbaren Funktionen ein. Auch dies ist ein Vektorraum. Und offensichtlich gilt

$$C^{(k+1)}(I) \subset C^{(k)}(I) \subset C^{(0)}(I) = C(I) \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

- h) Der Raum \mathbb{C}^n aller n -Tupel mit komplexen Einträgen kann mit einer Addition und Skalarmultiplikation analog zu \mathbb{R}^n versehen werden, nur dass man

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \vdots \\ \lambda x_n \end{pmatrix}$$

für $\lambda \in \mathbb{C}$ setzt. Dies ist ein Beispiel für einen \mathbb{C} -Vektorraum.

◇

In Teil g) haben wir gesehen, dass Vektorräume Teilmengen besitzen können, die selbst eine Vektorraum-Struktur besitzen. Man nennt so etwas einen Unterraum oder linearen Teilraum. Hat man schon den übergeordneten Vektorraum (nennen wir ihn V) als einen solchen identifiziert, so kann man sich für den Unterraum (nennen wir ihn U) Arbeit sparen. Kommutativ-, Assoziativ- und Distributivgesetz (I und II) gelten ja erwiesenermaßen für alle Elemente im großen Raum V und folglich auch auf jeder Teilmenge. Somit bleibt die Frage, was durch die Einschränkung auf eine Teilmenge an den Vektorraum-Eigenschaften verloren gehen kann. Geht man die Definition des Vektorraums Punkt für Punkt durch, so bleibt man an den folgenden drei Punkten hängen:

1. Addition oder Skalarmultiplikation könnten möglicherweise nicht innerhalb der Menge U verbleiben (denken Sie an das Beispiel \tilde{P}_n , das eine Teilmenge des Vektorraums Pol_n ist, und Summen hervorbringt, die nicht mehr in \tilde{P}_n liegen).
2. Das Nullelement könnte nicht mehr in der Teilmenge U liegen.
3. Es könnte Elemente x der Teilmenge U geben, für die das inverse Element der Addition $-x$ nicht mehr in der Menge U liegt (stellen Sie sich etwa vor, man würde als Teilmenge des \mathbb{R}^2 nur die Punkte mit nicht-negativen Komponenten, also den rechten oberen Quadranten, nehmen).

Man kann sich nun leicht überlegen, dass es reicht, darauf zu achten, dass das erste genannte Problem nicht auftritt, weil dann die anderen beiden auch nicht auftreten können. Warum?¹

Definition 2.1.4 Ist V ein Vektorraum und $U \subset V$, so heißt U **Untervektorraum (Unterraum, linearer Teilraum)** von V , wenn Addition und Skalarmultiplikation auf U in U verbleiben, d.h.

1. für alle $x, y \in U$ ist $x + y \in U$ und
2. für alle $x \in U$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ ist $\lambda x \in U$.

¹Wenn man weiß, dass die Skalarmultiplikation in U verbleibt, dann gilt für alle $x \in U$, dass $0_{\mathbb{R}} \cdot x \in U$, also $0_V (= 0_U) \in U$, und dass $(-1) \cdot x \in U$, also $-x \in U$.

Mit anderen Worten: U ist selbst ein Vektorraum mit der gleichen Addition und der gleichen Skalarmultiplikation.

Wir sehen uns auch hierfür ein paar Beispiele an.

Beispiel 2.1.5 a) Aus den obigen Beispielen und Analysis-Kenntnissen der Schule erhält man direkt, dass die folgenden Unterräume von $C(I)$, wobei I irgendein Intervall ist, wie folgt verschachtelt sind:

$$\text{Pol}_n \subset \text{Pol}_m \subset C^{(k)}(I) \subset C^{(l)}(I) \subset C(I)$$

für $n, m, k, l \in \mathbb{N}$ mit $n \leq m$ und $k \geq l$.

b) \mathbb{R}^2 kann man als Unterraum des \mathbb{R}^3 interpretieren, indem man den \mathbb{R}^2 mit dem Unterraum

$$\left\{ \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

assoziiert. Wir sehen, geometrisch gesprochen, also den \mathbb{R}^2 als Ebene im Raum an. Allgemeiner kann man auf analoge Weise den \mathbb{R}^n als Unterraum des \mathbb{R}^m auffassen, wenn $n < m$. So ist beispielsweise auch \mathbb{R} ein Unterraum des \mathbb{R}^2 , indem an die x -Achse des \mathbb{R}^2 als \mathbb{R} auffasst. Erinnern Sie sich an dieser Stelle noch einmal daran, wie wir \mathbb{C} eingeführt haben.

c) Sehen wir uns mal die folgende Teilmenge des \mathbb{R}^3 an:

$$U := \left\{ r \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \mid r, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Um zu prüfen, ob ein Unterraum des \mathbb{R}^3 vorliegt, müssen wir uns beliebige Summen und beliebige Skalarmultiplikationen ansehen. Dazu brauchen wir beliebige Vektoren $x, y \in U$ und beliebige Skalare $\lambda \in \mathbb{R}$. Wir müssen nun irgendwie einbauen, wie U aufgebaut ist. Wir wissen daher, dass x und y von folgender Form sein müssen:

$$\begin{aligned} x &= r_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ y &= r_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + s_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

wobei r_1, r_2, s_1 und s_2 beliebige reelle Zahlen sein müssen, d.h. wir dürfen keine weiteren Einschränkungen für sie in Anspruch nehmen. Würden wir feststellen, dass die Untervektorraum-Definition nur dann nachgewiesen werden kann, dass beispielsweise durch r_2 dividiert wird oder

die Wurzel aus s_1 gezogen wird, so wäre der Anspruch der Beliebigkeit verletzt worden — es wären eben nicht alle x und alle y , für die die Bedingung gelten würde.

Wir müssen also zeigen, dass $x + y \in U$ und $\lambda x \in U$ gilt. Sehen wir uns die Ausdrücke an:

$$\begin{aligned} x + y &= \underbrace{(r_1 + r_2)}_{\in \mathbb{R}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{(s_1 + s_2)}_{\in \mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \\ \lambda x &= \underbrace{(\lambda r_1)}_{\in \mathbb{R}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \underbrace{(\lambda s_1)}_{\in \mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dies passt zur Definition von U . Also sind $x + y$ und λx stets auch Elemente von U . Somit ist U ein linearer Teilraum des \mathbb{R}^3 .

d) Sehen wir uns noch

$$U := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 3x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$$

an. Zur Überprüfung, ob ein Unterraum des \mathbb{R}^3 vorliegt, müssen wir untersuchen, ob beliebige Summen $x + y$ ($x, y \in U$) und beliebige skalare Multiplikationen λx ($\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in U$) in U enthalten sind. Damit $x + y \in U$ gilt, müssen die Komponenten folgendes erfüllen:

$$3(x + y)_1 - (x + y)_2 + (x + y)_3 = 0.$$

Rechnen wir es nach:

$$\begin{aligned} 3(x + y)_1 - (x + y)_2 + (x + y)_3 &= 3(x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) + (x_3 + y_3) \\ &= \underbrace{(3x_1 - x_2 + x_3)}_{=0, \text{ da } x \in U} + \underbrace{(3y_1 - y_2 + y_3)}_{=0, \text{ da } y \in U} \\ &= 0, \end{aligned}$$

also $x + y \in U$. Schließlich gilt noch:

$$3\lambda x_1 - \lambda x_2 + \lambda x_3 = \lambda \underbrace{(3x_1 - x_2 + x_3)}_{=0, \text{ da } x \in U} = 0,$$

also $\lambda x \in U$. Somit ist U ein Unterraum des \mathbb{R}^3 .

e) Für eine fest gewählte Konstante $c \in \mathbb{R}$ setzen wir

$$U_c := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 - x_2 = c\}.$$

Ist dies ein Unterraum des \mathbb{R}^2 ? Seien also $x, y \in U_c$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Dann gilt

$$(x + y)_1 - (x + y)_2 = (x_1 + y_1) - (x_2 + y_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2) = c + c = 2c$$

und

$$(\lambda x)_1 - (\lambda x)_2 = \lambda x_1 - \lambda x_2 = \lambda(x_1 - x_2) = \lambda c.$$

Damit ein Unterraum vorliegt, muss rechts immer c herauskommen, egal wie x , y und λ gewählt wurden. Dies funktioniert nur bei U_0 , weil eben $2 \cdot 0 = 0$ und $\lambda \cdot 0 = 0$. Also gilt: U_c ist ein Unterraum des \mathbb{R}^2 dann und nur dann, wenn $c = 0$. \diamond

Sieht man sich die Teile d) und e) genauer an, so stellt man fest, dass folgende allgemeineren Aussagen gelten:

- Seien $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ beliebige Vektoren. Dann ist

$$\{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \}$$

ein linearer Teilraum des \mathbb{R}^n .

- Seien $c, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ fest gewählte Konstanten. Dann gilt: Die Menge

$$\{ x \in \mathbb{R}^n \mid a_1 x_1 + \dots + a_n x_n = c \}$$

ist ein Unterraum des \mathbb{R}^n genau dann, wenn $c = 0$.

Der Beweis, dass dies gilt, wird als Übungsaufgabe überlassen.

Definition 2.1.6 Sei V ein Vektorraum.

a) Ein Ausdruck der Form $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k$, kurz $\sum_{j=1}^k \lambda_j v_j$, mit $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$; $v_1, \dots, v_k \in V$ heißt **Linearkombination** der Vektoren v_j . Die Menge

$$\text{Lin}(v_1, \dots, v_k) := \text{span}(v_1, \dots, v_k) := \left\{ \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j \mid \lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R} \right\}$$

heißt (**Spann** oder) **lineare Hülle** der v_j .

b) Ist U ein Unterraum von V , so heißt $\{v_1, \dots, v_k\}$ **Erzeugendensystem** von U , falls $U = \text{span}(v_1, \dots, v_k)$. Man sagt dann auch " v_1, \dots, v_k spannen U auf".

Beispiel 2.1.7

Erzeugendensysteme von $\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$ sind z.B.

$$\text{a) } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit anderen Worten: Ist v_1, \dots, v_k ein Erzeugendensystem von U , so gilt: Für jedes $u \in U$ existieren Koeffizienten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$, so dass

$$u = \sum_{j=1}^k \lambda_j v_j.$$

Für die drei Erzeugendensysteme sieht dies jeweils wie folgt aus:

$$\text{a) } \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u_1 = \lambda_1 \text{ und } u_2 = \lambda_2$$

$$\text{b) } \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow u_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \text{ und } u_2 = \lambda_1 - \lambda_2$$

$$\Leftrightarrow u_1 + u_2 = 2\lambda_1 \text{ und } u_1 - u_2 = 2\lambda_2$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}(u_1 + u_2) \text{ und } \lambda_2 = \frac{1}{2}(u_1 - u_2).$$

$$\text{c) } \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ liefert keine eindeutige Lösung, z.B.}$$

$$\lambda_1 = u_1, \lambda_2 = 0, \lambda_3 = u_2$$

oder

$$\lambda_1 = 0, \lambda_2 = u_1, \lambda_3 = u_2 - u_1.$$

oder unendlich viele andere Varianten.

◇

Wir sehen also, dass es Erzeugendensysteme gibt, in denen die Koeffizienten der Linearkombinationen eindeutig sind, und welche, in denen es mehrere (und dann gleich unendlich viele) Möglichkeiten gibt. Diese Tatsache führt zu den Begriffen der linearen Unabhängigkeit und der Basis.

Definition 2.1.8

a) Seien v_1, \dots, v_k Elemente des Vektorraums V . Sie heißen **linear unabhängig**, falls die Gleichung

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_k v_k = 0_V$$

nur eine Lösung hat: $\lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$ ("triviale Lösung"). Ansonsten heißen sie **linear abhängig**.

b) Die maximale Anzahl an linear unabhängigen Elementen, die es in einem Vektorraum V geben kann, heißt **Dimension** von V . Man schreibt hierfür $\dim V$. Gibt es keine obere Grenze, so schreibt man $\dim V = +\infty$.

c) Ein Erzeugendensystem eines (Unter-) Vektorraums, das linear unabhängig ist, heißt **Basis** des (Unter-) Vektorraums.

Satz 2.1.9 In einem endlich-dimensionalen Vektorraum ist die Anzahl der Elemente einer beliebigen Basis stets gleich der Dimension des Raums. Mehr Vektoren sind stets linear abhängig. Ist n die Dimension, so bilden n linear unabhängige Vektoren stets eine Basis. Die Darstellung eines Elements eines Vektorraums als Linearkombination einer gegebenen Basis ist stets eindeutig. Ein Erzeugendensystem, in dem nicht alle Darstellungen eindeutig sind, ist linear abhängig.

Beispiel 2.1.10

$$e^1 := \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array}} \right\} n \text{ Komponenten, } e^2 := \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right), \dots, e^{n-1} := \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right), e^n := \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \quad (2.1)$$

ist die Standard-Basis des \mathbb{R}^n . Dass hier eine Basis vorliegt, sieht man leicht:

$$0_{\mathbb{R}^n} = \lambda_1 e^1 + \dots + \lambda_n e^n = \left(\begin{array}{c} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{array} \right) \Leftrightarrow \lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$$

Es gilt also

$$\boxed{\dim \mathbb{R}^n = n}$$

D.h. $m(> n)$ Vektoren in \mathbb{R}^n sind stets linear abhängig. \diamond

Satz 2.1.11 Vektoren v_1, \dots, v_k eines Vektorraums V sind genau dann linear abhängig, wenn mindestens einer von ihnen als Linearkombination der anderen darstellbar ist.

Beispiel 2.1.12

- a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig. Sehen wir mal nach, welches der Elemente durch die anderen dargestellt werden kann.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + (-1) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Hier geht es also mit allen.

- b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind auch linear abhängig. Man erhält hier

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist nicht als Linearkombination der anderen darstellbar, denn

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda + 2\mu = 1, \quad \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 1$$

ist nicht lösbar.

- c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sind linear abhängig. Es gilt beispielsweise

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

◇

Satz 2.1.13 Sei V ein Vektorraum und $M := \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ eine endliche Teilmenge und $A \subset M$ eine Auswahl daraus. Es gilt:

- a) Ist A linear abhängig, so ist M auch linear abhängig.
 b) Ist M linear unabhängig, so ist A auch linear unabhängig.

Bemerkung 2.1.14 Mengen von Vektoren, die die Null enthalten, sind stets linear abhängig, denn in

$$\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{j-1} v_{j-1} + \lambda_j \cdot 0 + \lambda_{j+1} v_{j+1} + \dots + \lambda_k v_k = 0$$

kann λ_j beliebig gewählt werden. Man schreibt $\dim\{0\} := 0$.

Beispiel 2.1.15

(i) Nach Bsp. 2.1.12 c) ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear abhängig.

(ii) Nach Bsp. 2.1.10 ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ linear unabhängig. ◇

Beispiel 2.1.16 Die Menge aller Monome vom Grad $\leq n$

$$\{1, x, x^2, x^3, \dots, x^n\}$$

bildet eine Basis von Pol_n , denn bekanntermaßen gilt

$$p \in \text{Pol}_n \Rightarrow \exists! a_0, \dots, a_n : p(x) = \sum_{j=0}^n a_j x^j.$$

Somit ist $\{1, x, \dots, x^n\}$ ein Erzeugendensystem und, wegen der Eindeutigkeit der Koeffizienten, auch eine Basis. Also ist

$$\dim \text{Pol}_n = n + 1.$$

◇

Satz 2.1.17 (Basisergänzungssatz) Sei V ein Vektorraum der Dimension $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $0 < k < n$, $k \in \mathbb{N}$ und $E := \{v_1, \dots, v_k\} \subset V$ ein linear unabhängiges System. Dann kann E zu einer Basis von V ergänzt werden, d.h. es existieren $n - k$ Vektoren w_1, \dots, w_{n-k} , so dass $\{v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_{n-k}\}$ eine Basis von V ist.

Satz 2.1.18 Sei U ein Unterraum des endlich-dimensionalen Vektorraums V . Dann gilt

$$\dim U \leq \dim V,$$

wobei “ $<$ ” genau dann gilt, wenn $U \neq V$ (d.h. $U \subsetneq V$).

2.2 Skalarprodukt, Vektorprodukt und Co.

Definition 2.2.1 Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Eine Abbildung $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ heißt **Skalarprodukt (Innenprodukt)**, falls folgendes gilt:

- (i) $\langle x, x \rangle \geq 0 \forall x \in V$ (d.h. $\langle x, x \rangle \in \mathbb{R}_0^+$) und $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (positive Definitheit)
- (ii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \forall x, y \in V$ (Symmetrie (wenn $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) bzw. hermitesch (wenn $\mathbb{K} = \mathbb{C}$))
- (iii) $\langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \forall x, y, z \in V$ (Bilinearität)

Ein Vektorraum V , der mit einem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ versehen ist, wird auch **Innenprodukt-raum** oder **Prä-Hilbertraum** genannt, wobei der letzte Begriff meist nur bei unendlich-dimensionalen Vektorräumen gebraucht wird.

Beachten Sie, dass der Querstrich in (ii) für die komplexe Konjugation steht. Bei \mathbb{R} -Vektorräumen entfällt dies natürlich, da $z = \bar{z}$ genau dann, wenn $z \in \mathbb{R}$.

Aus obigen Bedingungen an ein Skalarprodukt kann man herleiten, was, in Analogie zu Fall (iii), gilt, wenn die Linearkombination im 2. Argument steht:

$$\langle z, \lambda x + \mu y \rangle \stackrel{\text{(ii)}}{=} \overline{\langle \lambda x + \mu y, z \rangle} \stackrel{\text{(iii)}}{=} \bar{\lambda} \overline{\langle x, z \rangle} + \bar{\mu} \overline{\langle y, z \rangle} \stackrel{\text{(ii)}}{=} \bar{\lambda} \langle z, x \rangle + \bar{\mu} \langle z, y \rangle$$

gilt für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ und alle $x, y, z \in V$.

Beispiel 2.2.2

- a) Ein Beispiel eines Skalarprodukts sollten Sie bereits aus der Schule kennen, das **Euklidische Skalarprodukt** auf dem \mathbb{R}^n . Für beliebige $x, y \in \mathbb{R}^n$ definiert man

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^n x_j y_j. \quad (2.2)$$

Oft, gerade auch von Anwenderseite, schreibt man nur kurz $x \cdot y$ für dieses Skalarprodukt. Beachten Sie jedoch, dass dies keine Multiplikation ist, denn das Resultat liegt nicht mehr im ursprünglichen Raum \mathbb{R}^n (wenn $n > 1$). Deshalb darf man hier auch nicht den Punkt “ \cdot ” als Symbol wegfällen lassen.

- b) Ähnlich geht das auch im \mathbb{C} -Vektorraum \mathbb{C}^n . Für beliebige $x, y \in \mathbb{C}^n$ definiert man

$$\langle x, y \rangle := \sum_{j=1}^n x_j \bar{y}_j.$$

Es ist leicht einzusehen, dass im Spezialfall $x, y \in \mathbb{R}^n$ die obige Formel mit (2.2) übereinstimmt. Jedoch kann man nicht (2.2) als Skalarprodukt im \mathbb{C}^n verwenden. Warum?²

² Die Abbildung wäre nicht hermitesch.

- c) Wir haben bereits weiter oben gesehen, dass $C[a, b]$, die Menge aller stetigen Funktionen $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, ein Vektorraum ist. Auch diesen Vektorraum kann man mit einem Skalarprodukt versehen — er ist also ein Prä-Hilbertraum. Dies geht wie folgt: Für beliebige $f, g \in C[a, b]$ setzt man

$$\langle f, g \rangle := \int_a^b f(x)g(x) dx. \quad (2.3)$$

Wir werden uns später noch ausführlicher hiermit beschäftigen.

◇

Definition 2.2.3 Sei V ein Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Zwei Vektoren $x, y \in V$ heißen **orthogonal**, wenn $\langle x, y \rangle = 0$. Man schreibt hierfür auch $x \perp y$. Allgemeiner nennt man eine Teilmenge $M \subset V$ ein **Orthogonalsystem**, wenn die Elemente von M paarweise orthogonal sind. Ein Orthogonalsystem, das eine Basis eines Vektorraums bildet, heißt auch **Orthogonalbasis** des Vektorraums.

Beispiel 2.2.4

- a) Die Standardbasis e^1, \dots, e^n des \mathbb{R}^n (siehe (2.1)) ist eine Orthogonalbasis des \mathbb{R}^n . Die Orthogonalität sieht man hier wie folgt: Sei (e^j, e^k) ein beliebiges Paar zweier verschiedener (d.h. $j \neq k$) Basisvektoren. Dann gilt für das Skalarprodukt, wenn $j \leq k$ (sonst vertauschen wir die beiden Vektoren (beachte die Symmetrie!))

$$\begin{aligned} \langle e^j, e^k \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j\text{-te Komponente}, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow k\text{-te Komponente} \right\rangle \\ &= 0 \cdot 0 + \dots + 0 \cdot 0 + \underbrace{1 \cdot 0}_{j\text{-ter Summand}} + 0 \cdot 0 + \dots + 0 \cdot 0 + \underbrace{0 \cdot 1}_{k\text{-ter Summand}} + 0 \cdot 0 + \dots + 0 \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

- b) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bilden eine Orthogonalbasis des \mathbb{R}^2 . Um dies nachzuweisen, müssen wir zwei Eigenschaften prüfen:

- Es ist ein Orthogonalsystem. Rechnen wir es nach:

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) = 1 - 1 = 0.$$

Dies stimmt also.

- Es ist eine Basis. Dafür muss das System linear unabhängig sein und in seiner Anzahl mit der Dimension des Vektorraums übereinstimmen. Letzteres ist offensichtlich der Fall. Es bleibt, die lineare Unabhängigkeit zu zeigen. Sei also

$$\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dies ist äquivalent zu $\lambda + \mu = 0$ und $\lambda - \mu = 0$ ($\Leftrightarrow \lambda = \mu$). Hieraus erhält man $2\lambda = 0$ und $\lambda = \mu$, also $\lambda = \mu = 0$.

◇

Offensichtlich ist der Nullvektor zu allem orthogonal.

Satz 2.2.5 Sei $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Innenproduktraum und 0_V der zugehörige Nullvektor. Dann ist

$$\langle 0_V, x \rangle = 0_{\mathbb{R}}$$

für alle $x \in V$.

Beweis: Nach Satz 2.1.2 a) wissen wir, dass $0_V = 0_{\mathbb{R}} w$ für alle $w \in V$ gilt. Wegen der Bilinearität des Skalarprodukts ist somit für beliebige $x \in V$ (und $w \in V$):

$$\langle 0_V, x \rangle = \langle 0_{\mathbb{R}} w, x \rangle = 0_{\mathbb{R}} \langle w, x \rangle = 0_{\mathbb{R}}.$$

■

Orthogonalsysteme haben viele Vorteile. Einer davon ist, dass man bei ihnen nicht die lineare Unabhängigkeit prüfen muss.

Satz 2.2.6 Die Elemente eines endlichen Orthogonalsystems, das nicht die 0 enthält, sind stets linear unabhängig.

Korollar 2.2.7 Sei V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und $\dim V = n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Dann gilt: Jedes Orthogonalsystem ohne Nullvektor, das genau n Vektoren enthält, ist eine Basis von V .

Zur Übung sehen wir uns mal folgende Aufgabe an:

Beispiel 2.2.8 Bestimmen Sie die Parameter a , b und c in

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix},$$

so dass eine Orthogonalbasis vorliegt.

Hierfür prüfen wir nach, ob die ersten beiden Vektoren überhaupt orthogonal sind, weil sonst die Aufgabe nicht lösbar wäre. Doch sie sind orthogonal, denn

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = 1 - 1 = 0.$$

Damit man ein Orthogonalsystem erhält, müssen noch zwei Bedingungen erfüllt sein:

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle &= 0 \\ \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle &= 0. \end{aligned}$$

Das Ausrechnen der Skalarprodukte führt zu

$$a + 2b + c = 0 \tag{2.4}$$

$$a - c = 0 \quad (\Leftrightarrow a = c). \tag{2.5}$$

Durch Einsetzen von (2.5) in (2.4) erhält man

$$2a + 2b = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -a.$$

Für die Wahl von a , b und c hat man also einen Freiheitsgrad, d.h. einer der drei kann beliebig gewählt werden, und die anderen beiden sind dann festgelegt. Wählt man beispielsweise $a \in \mathbb{R}$ beliebig, so muss $b = -a$ und $c = a$ gelten. Um nun eine Orthogonalbasis zu erhalten, benutzen wir Bemerkung 2.1.14 und Korollar 2.2.7. Es ergibt sich, dass $a = 0$ ausgeschlossen werden muss (Warum?³) und alle anderen Wahlmöglichkeiten zu einer Orthogonalbasis führen.

Das Resultat ist also: Als dritter Vektor kann man jeden Vektor der Form

$$\begin{pmatrix} a \\ -a \\ a \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

³ Dies würde den dritten Vektor zum Nullvektor machen. Das System wäre linear abhängig.

verwenden. ◇

Wir kommen zu einem anderen wichtigen Begriff: der Norm.

Definition 2.2.9 Sei V ein \mathbb{K} -Vektorraum ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$). Eine Abbildung $\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Norm**, wenn sie folgende Eigenschaften hat:

- (i) $\|x\| \geq 0$ für alle $x \in V$, und es gilt: $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (positive Definitheit).
- (ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ für alle $x \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ (Homogenität).
- (iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ für alle $x, y \in V$ (Dreiecksungleichung).

Man nennt $(V, \|\cdot\|)$ auch einen **normierten Raum**.

Hierzu ein paar Bemerkungen:

- Geometrisch kann man die Norm eines Vektors als seine Länge interpretieren.
- Beachten Sie, dass auch in \mathbb{C} -Vektorräumen die Norm stets nur reelle Werte annimmt.
- Den Namen “Dreiecksungleichung” erläutert Abbildung 2.1.

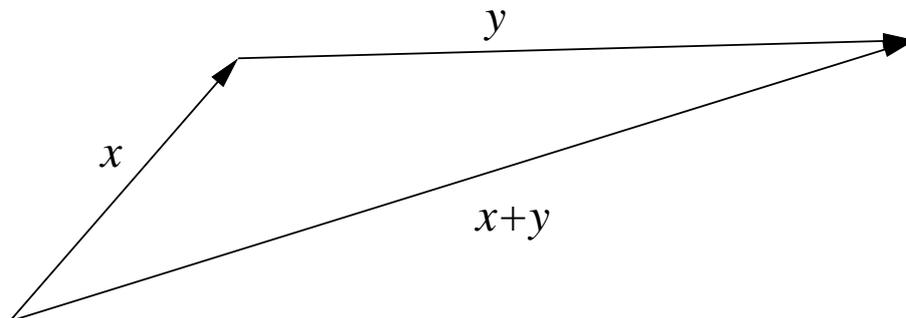


Abbildung 2.1: Illustration der Dreiecksungleichung der Norm: Die Summe zweier Vektoren kann nicht länger sein als die Gesamtlänge der beiden Vektoren.

Satz 2.2.10 (induzierte Norm) Mit einem Skalarprodukt kann man stets eine Norm konstruieren:

$$\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

Beispiel 2.2.11

a) Im \mathbb{R}^n induziert das Euklidische Skalarprodukt die Euklidische Norm:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j \cdot x_j} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j^2}$$

So ist zum Beispiel

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2} = \sqrt{6}.$$

Es gilt

$$\langle x, y \rangle = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \cos \angle(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Speziell für $\mathbb{R}^1 = \mathbb{R}$ gilt $\|x\| = \sqrt{x^2} = |x|$. Im \mathbb{R}^n ist die Kurzschreibweise $|x| := \|x\|$ gebräuchlich.

b) In \mathbb{C}^n ist

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{\sum_{j=1}^n x_j \cdot \bar{x}_j} = \sqrt{\sum_{j=1}^n |x_j|^2}$$

Auch hier schreibt man kurz $|x| := \|x\|$.

c) Auf $C[a, b] := C([a, b])$ kann man mit $1 \leq p < +\infty$ die Norm

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad f \in C[a, b],$$

definieren. Speziell für $p = 2$ gilt:

$$\|f\|_2 = \left(\int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\int_a^b f(x) \cdot f(x) dx} = \sqrt{\langle f, f \rangle},$$

d.h. $\|\cdot\|_2$ ist die durch das in Gleichung (2.3) definierte Skalarprodukt induzierte Norm.

d) Auf $C([a, b])$ kann z.B. noch $\|f\|_\infty := \max_{x \in [a, b]} |f(x)|$ als Norm definiert werden.

◇

Satz 2.2.12 (Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung) Sei V ein Vektorraum mit dem Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und der induzierten Norm $\|\cdot\|$. Dann gilt

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\| \quad \forall x, y \in V,$$

wobei “=” genau dann gilt, wenn x und y linear abhängig sind.

Die Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung (CSB-Ungleichung) gilt natürlich auch für das Euklidische Skalarprodukt. Für dieses hat man:

$$|\langle x, y \rangle| = \underbrace{\|x\| \cdot \|y\|}_{\geq 0} \cdot \underbrace{|\cos \angle(x, y)|}_{\in [0,1]} \leq \|x\| \cdot \|y\|,$$

wobei

$$|\cos \angle(x, y)| = 1 \Leftrightarrow \angle(x, y) \in \{0, \pi\} \Leftrightarrow y = \lambda x, \lambda \in \mathbb{R} \text{ (oder } x = \mu y, \mu \in \mathbb{R}\text{)}.$$

Beispiel 2.2.13 Seien $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ Vektoren. Für sie gilt $\langle x, y \rangle = y_1 + 2y_2$,

$$\|x\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}, \quad \|y\| = \sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

Die CSB-Ungleichung besagt nun, dass

$$|\langle x, y \rangle| = |y_1 + 2y_2| \leq \sqrt{5} \sqrt{y_1^2 + y_2^2},$$

wobei “=” genau dann gilt, wenn x und y linear abhängig sind. Ist z.B. $y = \lambda x$, so gilt:

$$y = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \|y\| = \sqrt{\lambda^2 \cdot 1^2 + \lambda^2 \cdot 2^2} = |\lambda| \cdot \sqrt{5} \Rightarrow \|x\| \cdot \|y\| = \sqrt{5} \cdot |\lambda| \cdot \sqrt{5} = 5|\lambda|$$

$$\langle x, y \rangle = \lambda + 2 \cdot 2\lambda = 5\lambda \Rightarrow |\langle x, y \rangle| = 5|\lambda|.$$

◇

Definition 2.2.14 Ein Orthogonalsystem $\{v_1, \dots, v_k\}$ mit der Eigenschaft, dass $\|v_j\| = 1$ $\forall j = 1, \dots, k$ (“normierte Vektoren”, “Einheitsvektoren”)

$$(d.h. \langle v_i, v_j \rangle = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} =: \delta_{ij} \text{ “Kronecker-Delta”})$$

heißt **Orthonormalsystem** (ONS). Entsprechend nennt man ein Orthonormalsystem, das eine Basis des Vektorraums V ist, eine **Orthonormalbasis** (ONB) von V .

Beispiel 2.2.15

a) e^1, \dots, e^n ist eine ONB des \mathbb{R}^n .

b) $\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt) \right\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt) \right\}_{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}} \cup \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\}$ ist ein (unendliches) ONS in $C([0, 2\pi])$.

◇

Satz 2.2.16 (Fourierentwicklung) Sei v_1, \dots, v_n eine ONB des Vektorraums V und $x \in V$. Dann gilt

$$x = \sum_{j=1}^n \langle x, v_j \rangle v_j.$$

Definition 2.2.17 Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ ist das **Vektorprodukt (Kreuzprodukt)** definiert durch

$$(x \wedge y :=) x \times y := \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Dies gilt nur im \mathbb{R}^3 ! Man kann sich die Orientierung der Vektoren mit der ‘‘Rechte-Hand-Regel’’ merken (siehe auch Abbildung 2.2): Das Kreuzprodukt tritt zum Beispiel bei der Lorentzkraft F auf, die auf ein Teilchen mit der Ladung $Q \in \mathbb{R}$ wirkt, welches sich mit der Geschwindigkeit $v \in \mathbb{R}^3$ im Magnetfeld $B \in \mathbb{R}^3$ bewegt: $F = Qv \times B$.

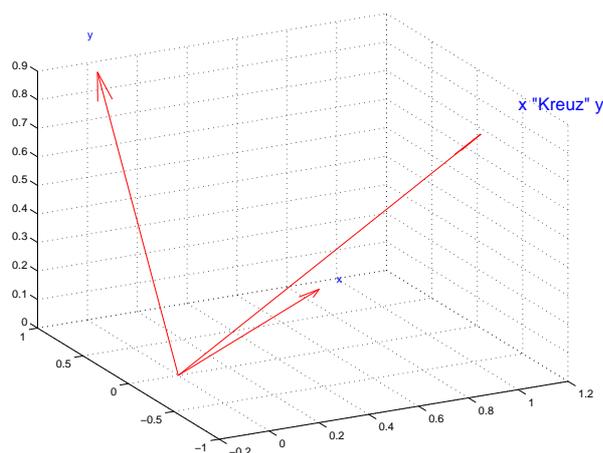


Abbildung 2.2: Kreuzprodukt

Beispiel 2.2.18 Sei $Q = 1$, $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dann ist

$$F = 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 - 0 \cdot 1 \\ 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \\ 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$



Satz 2.2.19 Seien $w, x, y, z \in \mathbb{R}^3$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- 1) $x \times y = 0 \Leftrightarrow x$ und y sind linear abhängig,
- 2) $\langle x, x \times y \rangle = \langle y, x \times y \rangle = 0$ (d.h. das Vektorprodukt ist orthogonal zu den ursprünglichen Vektoren),
- 3) $\|x \times y\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \sin \sphericalangle(x, y)$ (Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms, siehe Abbildung 2.3),
- 4) $x \times y = -y \times x$ (Antisymmetrie),
- 5) $\lambda(x \times y) = (\lambda x) \times y = x \times (\lambda y)$,
- 6) $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$, $(x + y) \times z = x \times z + y \times z$ (Distributivgesetz),
- 7) $\|x \times y\|^2 = \|x\|^2 \cdot \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2$,
- 8) $x \times (y \times z) = \langle x, z \rangle y - \langle x, y \rangle z$ (Entwicklungssatz, Grassmann-Identität),
- 9) $\langle x \times y, w \times z \rangle = \langle x, w \rangle \langle y, z \rangle - \langle y, w \rangle \langle x, z \rangle$ (Lagrange-Identität).

Achtung: Es gilt kein Assoziativgesetz für das Vektorprodukt, d.h. im Allgemeinen ist

$$(x \times y) \times z \neq x \times (y \times z) \quad (\text{vgl. 8})$$

Die Lorentzkraft ist also maximal, wenn $\sin \sphericalangle(v, B) = 1$, d.h. $\sphericalangle(v, B) = \frac{\pi}{2}$, d.h. $\langle v, B \rangle = 0$.

Beispiel 2.2.20 Aus zwei linear unabhängigen Vektoren $x, y \in \mathbb{R}^3$ kann man somit leicht eine Basis aus Einheitsvektoren konstruieren

$$v_1 = \frac{x}{\|x\|}, \quad v_2 = \frac{y}{\|y\|}, \quad v_3 = \frac{x \times y}{\|x \times y\|} \quad \left(\text{oder } -\frac{x \times y}{\|x \times y\|} \right),$$

($\|x \times y\| \neq 0$ wegen linearer Unabhängigkeit)

Zum Beispiel sind

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

linear unabhängig. Mit

$$x \times y = \begin{pmatrix} 1 & - & 2 \\ 2 & - & (-1) \\ 1 & - & (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

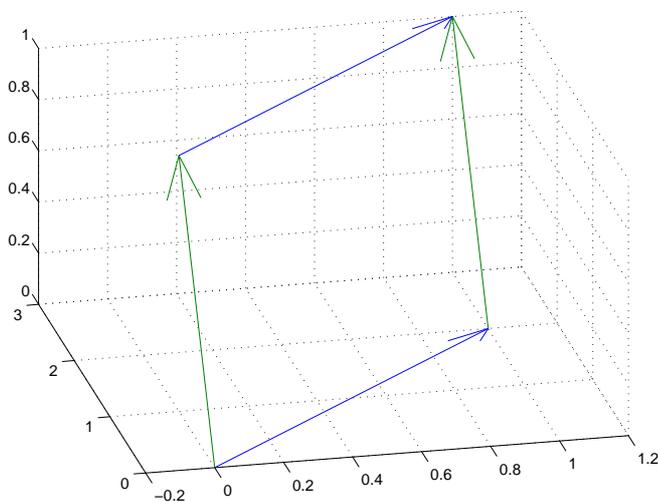


Abbildung 2.3: Von $x = (1, 2, 0)$ (blau) und $y = (0, 1, 1)$ (grün) aufgespanntes Parallelogramm mit Flächeninhalt $\|x \times y\| = \sqrt{6}$ (rechnen Sie es nach!).

erhält man die Basis aus Einheitsvektoren:

$$\frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Sind x, y orthogonale Vektoren in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, so ist $\frac{x}{\|x\|}$, $\frac{y}{\|y\|}$ und $\frac{x \times y}{\|x \times y\|}$ eine ONB des \mathbb{R}^3 \diamond

Bemerkung 2.2.21 e^1, \dots, e^n stellt eine Standard-ONB des \mathbb{R}^n dar. Ihr entspricht die übliche Darstellung der Elemente des \mathbb{R}^n in karthesischen Koordinaten:

$$x = \sum_{j=1}^n \langle x, e^j \rangle e^j,$$

d.h. für $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ ist hier

$$x = \sum_{j=1}^n x_j e^j = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Diese ONB ist aber nicht immer ideal. Bei Problemen, die z.B. eine radiale Symmetrie aufweisen, wie z.B. sich kugelförmig von einem Punkt ausbreitende Wellen, sind Kugelkoordinaten (Polarkoordinaten) oft eine bessere Wahl:

a) \mathbb{R}^2 :

Zu $r \in \mathbb{R}_0^+$ und $\varphi \in [0, 2\pi[$ sei $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$. Für konstante r beschreibt dies eine Kreislinie.

Die Umkehrung sieht wie folgt aus:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} (= \sqrt{r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi} = \sqrt{r^2} = |r| = r)$$

$$\varphi = \begin{cases} \arccos \frac{x}{r}, & \text{falls } y \geq 0 \text{ und } r \neq 0 \\ 2\pi - \arccos \frac{x}{r}, & \text{falls } y < 0 (\Rightarrow r \neq 0) \\ \text{beliebig wählbar,} & \text{falls } r = 0 \end{cases}$$

Damit ist die Abbildung $\mathbb{R}_0^+ \times [0, 2\pi[\ni (r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ nicht injektiv (wegen $(0, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$).

Aber die Einschränkung $\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\ni (r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ ist bijektiv.

Lokale Koordinaten: Auf einer Kreisscheibe vom Radius $r > 0$,

$$\left\{ \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix} \middle| \varphi \in [0, 2\pi[\right\} =: S_r^1 \quad (\text{"1-Sphäre"})$$

kann man wie folgt eine lokale ONB einführen:

$$e^r(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad e^\varphi(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

Dies ist eine ONB, denn

$$\langle e^r(\varphi), e^\varphi(\varphi) \rangle = 0, \|e^r(\varphi)\| = \|e^\varphi(\varphi)\| = 1.$$

Die Verwendung ist wie folgt: Im Punkt $\xi = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$, der durch $\varphi \in [0, 2\pi[$ eindeutig gegeben ist, kann $(e^r(\varphi), e^\varphi(\varphi))$ als ONB für einen Wert $f(\xi)$ einer vektorwertigen Funktion $f : S_r^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ an dieser Stelle ξ dienen. Sehen wir uns z.B. ein Magnetfeld $B \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ an (d.h. f ist konstant) und betrachten dieses auf dem Kreisrand S_r^1 (weil etwa ein kreisförmiges Objekt im Magnetfeld liegt).

Sei $\xi \in S_r^1$ mit Polarkoordinate $\varphi \in [0, 2\pi[$. Das Magnetfeld an der Stelle ξ kann wie folgt zerlegt werden (Satz 2.2.16, Fourierentwicklung):

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 \ni B(\xi) &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, e^r(\varphi) \right\rangle e^r(\varphi) + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, e^\varphi(\varphi) \right\rangle e^\varphi(\varphi) \\ &= \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} + \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \right\rangle \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} \\ &= \underbrace{\begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \varphi \\ -\sin^2 \varphi \end{pmatrix}}_{\text{Radialteil (Normalteil)}} + \underbrace{\begin{pmatrix} +\cos \varphi \sin \varphi \\ -\cos^2 \varphi \end{pmatrix}}_{\text{Tangentialteil zum Kreis an der Stelle } \xi}, \end{aligned}$$

siehe Abbildung 2.4. Dass eine Darstellung des Magnetfelds in karthesischen Koordinaten nicht hilfreich ist, wenn man beispielsweise einen Metallring analysiert, zeigt Abbildung 2.4. Es ist hier viel wichtiger, den tangentialen Teil vom normalen Teil zu trennen. Diese Anteile ändern sich aber von Punkt zu Punkt auf der Kreislinie.

b) \mathbb{R}^3 : Die Polarkoordinaten sind nun $r \in \mathbb{R}_0^+$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ (Längengrad), $t \in [-1, 1]$ (Polarabstand), wobei man

$$\begin{aligned} t &= \cos \vartheta \text{ für } \vartheta \in [0, \pi] \\ \text{oder } t &= \sin \vartheta \text{ für } \vartheta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

(ϑ : Breitengrad) schreiben kann. Die Beziehung zwischen karthesischen und Polarkoordinaten ist:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\sqrt{1-t^2} \cos \varphi \\ r\sqrt{1-t^2} \sin \varphi \\ rt \end{pmatrix} \quad (\text{also für } \vartheta \in [0, \pi] : \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix})$$

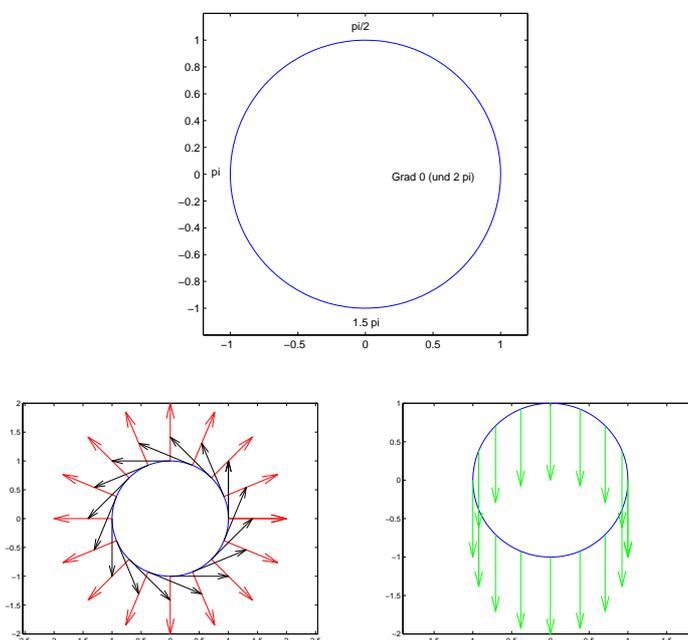


Abbildung 2.4: oben: Kreis mit Beispielen für Werte φ , unten links: lokale ONB e^r (rot) und e^φ (schwarz) gezeichnet am zugehörigen Kreispunkt, unten rechts: Vektorfeld $(0,-1)$ geplottet auf dem Kreis, Tangential- und Normalanteil variieren.

Hierbei ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ der Nordpol. In diesem Fall ist die Einschränkung

$$\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[\times]-1, 1[\ni (r, \varphi, t) \mapsto \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \setminus \text{span} \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

bijektiv.

lokale Koordinaten: Auf einer Sphäre vom Radius $r > 0$ (Bezeichnung: S_r^2) schreibt man zum Punkt, der durch φ, t gegeben ist:

$$e^r(\varphi, t) = \begin{pmatrix} \sqrt{1-t^2} \cos \varphi \\ \sqrt{1-t^2} \sin \varphi \\ t \end{pmatrix}, e^\varphi(\varphi) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, e^t(\varphi, t) = \begin{pmatrix} -t \cos \varphi \\ -t \sin \varphi \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix}$$

Auch dies ist eine ONB:

$$\langle e^r(\varphi, t), e^\varphi(\varphi) \rangle = 0, \quad e^r(\varphi, t) \times e^\varphi(\varphi) = e^t(\varphi, t) \quad \forall \varphi, t$$

$$\Rightarrow \langle e^t(\varphi, t), e^r(\varphi, t) \rangle = 0 = \langle e^t(\varphi, t), e^\varphi(\varphi) \rangle \quad \forall \varphi, t$$

$$\|e^r(\varphi, t)\| = \|e^t(\varphi, t)\| = \|e^\varphi(\varphi)\| = 1 \quad \forall \varphi, t$$

e^r ist normal zur Sphäre, nach außen gerichtet.

e^φ und e^t sind tangential zur Sphäre; e^φ zeigt stets nach Osten und e^t nach Norden.

Entsprechend wie im \mathbb{R}^2 ist die Zerlegung in Tangential- und Normalteil einer vektoriellen Funktion (Vektorfeld) $f : S_r^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$f(\underbrace{\xi(\varphi, t)}_{\substack{\text{Durch } \varphi, t \text{ gegebener} \\ \text{Punkt } \xi \text{ in } S_r^2}}) = \underbrace{\langle f(\xi(\varphi, t)), e^\varphi(\varphi) \rangle e^\varphi(\varphi) + \langle f(\xi(\varphi, t)), e^t(\varphi, t) \rangle e^t(\varphi, t)}_{\text{Tangentialteil/Horizontalteil}}$$

$$+ \underbrace{\langle f(\xi(\varphi, t)), e^r(\varphi, t) \rangle e^r(\varphi, t)}_{\text{Normalteil/Radialteil/Vertikalteil}}$$

Sehen Sie sich auch Abbildung 2.5 an.

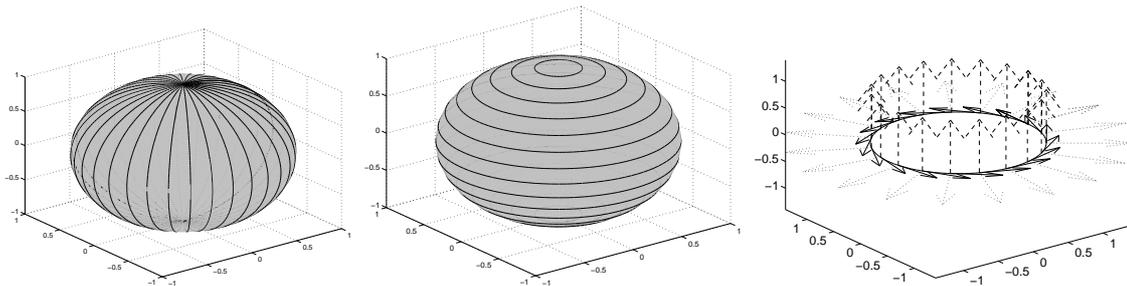


Abbildung 2.5: links: Linien jeweils konstanter φ -Werte, Mitte: Linien jeweils konstanter t -Werte, rechts: lokale ONB für die Sphäre im \mathbb{R}^3 (gezeichnet auf dem Äquator ($t = 0$)).

Definition 2.2.22 Sei V ein Vektorraum mit Unterraum U . Eine Abbildung $P : V \rightarrow U$ heißt **Projektion**, wenn $P(Pv) = Pv \quad \forall v \in V$.

Satz 2.2.23 (Orthogonalprojektion) Sei V ein Vektorraum und U ein Unterraum von V mit ONB v_1, \dots, v_k . Eine Projektion von V auf U ist wie folgt gegeben:

$$P_U x := \sum_{j=1}^k \langle x, v_j \rangle v_j \quad \forall x \in V.$$

Das Ergebnis ist von der Wahl der ONB unabhängig und hängt nur von U ab.

Beispiel 2.2.24

a) $V = \mathbb{R}^3$, $U = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right)$ ($=x_1 - x_2$ -Ebene). Zunächst wird eine ONB von U

benötigt, z.B. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; oder $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (ergibt wieder U).

Dann ist

$$\begin{aligned} P_U x &= \left\langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \left\langle x, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -(x_1 - x_2) \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

siehe Abbildung 2.6.

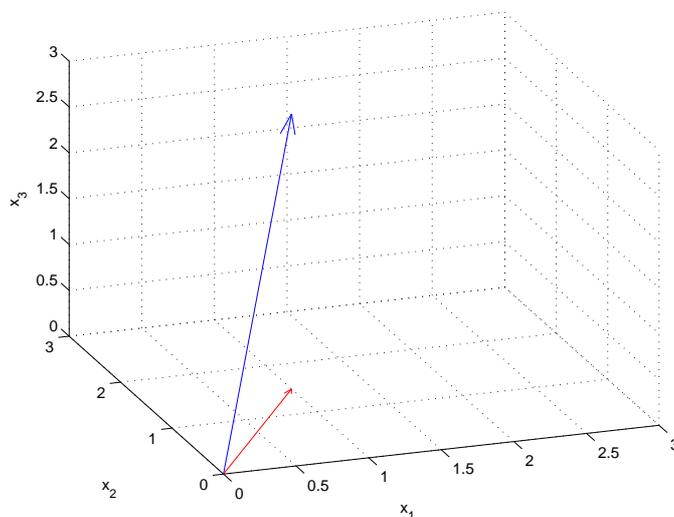


Abbildung 2.6: Projektion (rot) des Vektors $(1;1,5;3)$ (blau) auf die x_1, x_2 -Ebene.

Zu U gibt es einen sogenannten **Orthogonalraum** U^\perp , so dass
 $\forall x \in U \forall y \in U^\perp \quad \langle x, y \rangle = 0, \quad \forall z \in V \exists! x \in U, y \in U^\perp : z = x + y$

Dieser Raum ist

$$\begin{aligned} U^\perp &= \text{span} \left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right) \\ &= \text{span} \left(\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \right) = \text{span} \left(\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right) \end{aligned}$$

$x - P_U x$ repräsentiert den orthogonalen Anteil:

$$x = \underbrace{P_U x}_{\in U} + \underbrace{(x - P_U x)}_{\in U^\perp}$$

b) Tangentialteil und Normalteil in der Bemerkung 2.2.21 sind jeweils (lokale) Projektionen. \diamond

Satz 2.2.25 (Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren) *Ist V ein Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ und Basis (x_1, \dots, x_k) , so kann man wie folgt eine ONB von V konstruieren:*

$$\begin{aligned} v_1 &:= x_1 \\ v_j &:= x_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle x_j, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i; \quad j = 2, \dots, k \end{aligned}$$

$\left(\frac{v_1}{\|v_1\|}, \dots, \frac{v_k}{\|v_k\|} \right)$ ist eine ONB von V .

Hier wird projiziert, denn

$$\frac{\langle x, v_i \rangle}{\|v_i\|^2} v_i = \frac{1}{\|v_i\|} \langle x, v_i \rangle \frac{1}{\|v_i\|} v_i \stackrel{\text{Bilin.}}{=} \underbrace{\left\langle x, \frac{v_i}{\|v_i\|} \right\rangle}_{\text{Projektion von } x \text{ auf } \text{span}(v_i)} \underbrace{\frac{1}{\|v_i\|} v_i}_{\text{Teil der ONB}}$$

2.3 Geraden und Ebenen

2.3.1 Definitionen und Parameterdarstellung

2.3.1.1 Gerade im \mathbb{R}^2

Eine Gerade im \mathbb{R}^2 ist durch einen Aufpunkt $a \in \mathbb{R}^2$ und einen Richtungsvektor $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ gegeben (siehe auch Abbildung 2.7):

$$G = \{a + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

Man nennt dies auch eine Parameterdarstellung.

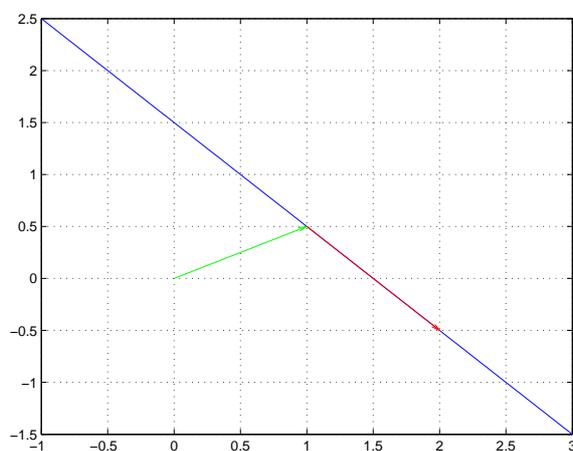


Abbildung 2.7: Gerade (blau) mit Ortsvektor des Aufpunkts (grün) und Richtungsvektor (rot).

2.3.1.2 Gerade im \mathbb{R}^3

Entsprechend sind Geraden im \mathbb{R}^3 durch einen Aufpunkt $a \in \mathbb{R}^3$ und einen Richtungsvektor $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ gegeben (siehe auch Abbildung 2.8).

$$G = \{a + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

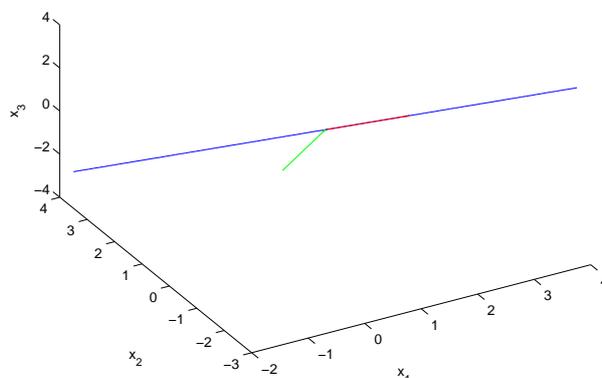


Abbildung 2.8: Gerade (blau) mit Ortsvektor des Aufpunkts (grün) und Richtungsvektor (rot).

2.3.1.3 Ebene im \mathbb{R}^3

Eine Ebene im \mathbb{R}^3 ist gegeben durch einen Aufpunkt $a \in \mathbb{R}^3$ und zwei linear unabhängige Richtungsvektoren $v, w \in \mathbb{R}^3$ (siehe auch Abbildung 2.9).

$$E = \{a + \lambda v + \mu w \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

2.3.2 alternative Darstellungen

2.3.2.1 Gerade im \mathbb{R}^2

Eine Gerade im \mathbb{R}^2 kann auch über einen Normalenvektor $n \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dargestellt werden (siehe Abbildung 2.10), wobei noch ein Skalar $c \in \mathbb{R}$ vorzugeben ist.

$$G = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid \langle x, n \rangle = c\} \quad (\text{“Normalenform der Gerade”})$$

Idealerweise ist n ein Einheitsvektor, d.h. $\|n\| = 1$. Dann spricht man von einer **Hesse’schen Normalenform**. Zusammenhang zu 2.3.1.1: $\langle v, n \rangle = 0$ und

$$\langle a + \lambda v, n \rangle = c \quad \Leftrightarrow \quad \underbrace{\langle a, n \rangle}_{\text{Bilinearität}} + \lambda \underbrace{\langle v, n \rangle}_{=0} = c \quad \Leftrightarrow \quad \langle a, n \rangle = c$$

Ausgeschrieben ist

$$G = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 n_1 + x_2 n_2 = c\}$$

(Darstellung über algebraische Gleichung, “Koordinatendarstellung”).

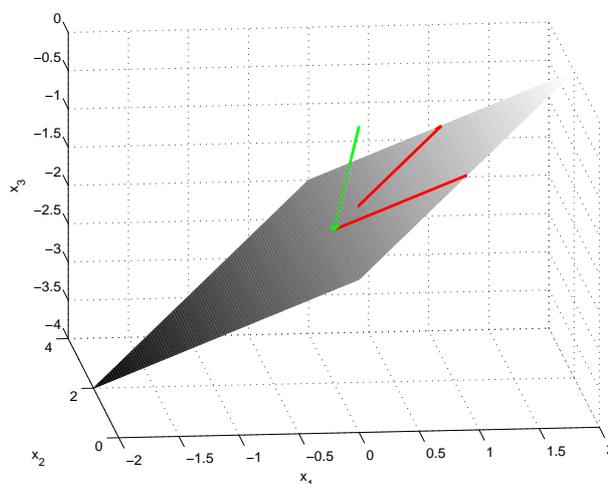


Abbildung 2.9: Ebene mit Ortsvektor des Aufpunkts (grün) und Richtungsvektoren (rot).

2.3.2.2 Ebene im \mathbb{R}^3

Entsprechend kann man Ebenen im \mathbb{R}^3 darstellen über einen Normalenvektor $n \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ und eine Konstante $c \in \mathbb{R}$ (siehe Abbildung 2.11).

$$E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \langle x, n \rangle = c\}$$

Für $\|n\| = 1$ hat man wieder die Hesse'sche Normalenform. Die Koordinatendarstellung ist

$$x_1 n_1 + x_2 n_2 + x_3 n_3 = c$$

und der Zusammenhang zu 2.3.1.3 ist

$$\langle v, n \rangle = 0 = \langle w, n \rangle, \langle a, n \rangle = c$$

2.3.3 Schnitte

2.3.3.1 Gerade mit Gerade

Seien die Geraden

$$G_1 = \{a + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}, G_2 = \{b + \mu w \mid \mu \in \mathbb{R}\}$$

gegeben. In den Schnittpunkten muss also gelten:

$$a + \lambda v = b + \mu w \Leftrightarrow a - b = \mu w - \lambda v \quad (2.6)$$

Hierbei sind a, b, v, w gegeben. Jede Lösung (λ, μ) gibt einen Schnittpunkt.

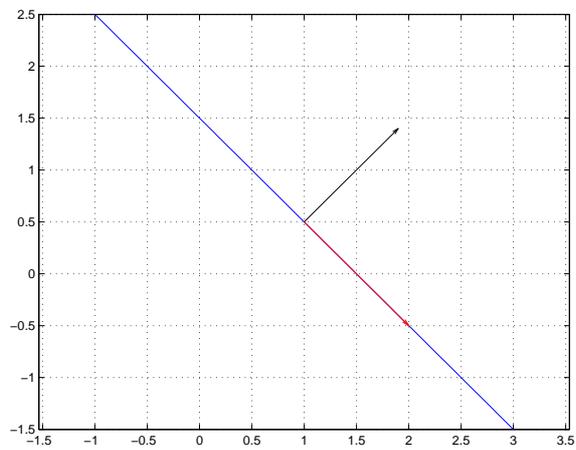


Abbildung 2.10: Gerade (blau) mit Richtungsvektor (rot) und Normalenvektor (schwarz).

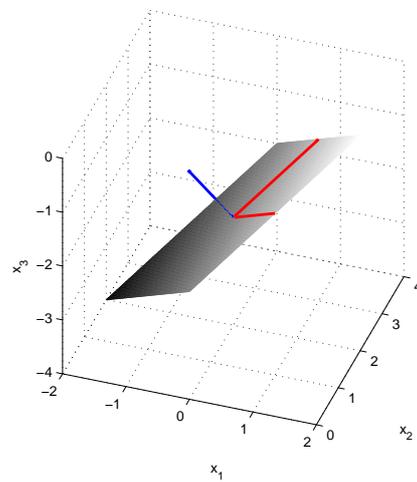


Abbildung 2.11: Ebene mit Richtungsvektoren v und w (rot) und Normale $v \times w$ (blau).

1. Im \mathbb{R}^2 gibt es folgende Möglichkeiten:

- (a) v und w sind linear unabhängig $\Rightarrow (v, w)$ ist eine **Basis** des \mathbb{R}^2
 $\Rightarrow \exists! \lambda, \mu : a - b = \mu w - \lambda v$
 $\Rightarrow \exists!$ Schnittpunkt $a + \lambda v = b + \mu w$ (für obiges λ und μ).
- (b) v und w sind linear abhängig, d.h. es liegen parallele Geraden vor (z.B. $w = rv$), d.h. (2.6) $\Leftrightarrow a - b = \mu rv - \lambda v = (\mu r - \lambda)v$
 - i. wenn $a - b$ parallel zu $v : G_1 = G_2$ (zu jedem λ gibt es ein passendes μ und umgekehrt).
 - ii. wenn $a - b$ nicht parallel zu $v : (2.6)$ hat keine Lösung. $G_1 \cap G_2 = \emptyset$

2. Im \mathbb{R}^3 unterscheidet man:

- (a) v und w sind linear unabhängig $\Rightarrow (v, w)$ ist eine Basis eines 2-dimensionalen Unterraumes U des \mathbb{R}^3
 - i. wenn $a - b \in U : \exists! \lambda, \mu \Rightarrow$ genau ein Schnittpunkt (analog zu oben)
 - ii. wenn $a - b \notin U : G_1 \cap G_2 = \emptyset$, obwohl G_1 und G_2 nicht parallel sind (“windschiefe Geraden”)
- (b) v und w sind linear abhängig, d.h. es liegen parallele Geraden vor (siehe die beiden Möglichkeiten oben).

Die einzelnen Fälle sind in Abbildung 2.12 illustriert.

2.3.3.2 Gerade mit Ebene im \mathbb{R}^3

Seien $G = \{a + \lambda v \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, $E = \{b + rw_1 + sw_2 \mid r, s \in \mathbb{R}\}$ gegeben, wobei w_1, w_2 linear unabhängig sind. In Schnittpunkten gilt:

$$a + \lambda v = b + rw_1 + sw_2 \Leftrightarrow a - b = rw_1 + sw_2 - \lambda v \quad (2.7)$$

Es gibt folgende Möglichkeiten:

- 1. v, w_1, w_2 sind linear unabhängig \Rightarrow Basis des $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ eindeutige Lösung $\Rightarrow \exists!$ Schnittpunkt.
- 2. $v \in \text{span}(w_1, w_2) =: U$, (d.h. G und E sind parallel)
 - (a) Wenn $a - b \in U$, dann hat (2.7) einen Freiheitsgrad. Genau gilt:
Zu jedem $\lambda \in \mathbb{R}$ gibt es passende $(r, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, so dass

$$\underbrace{a - b + \lambda v}_{\in U} = \underbrace{rw_1 + sw_2}_{\text{Basisdarstellung}}$$

$$\Rightarrow G \cap E = G$$

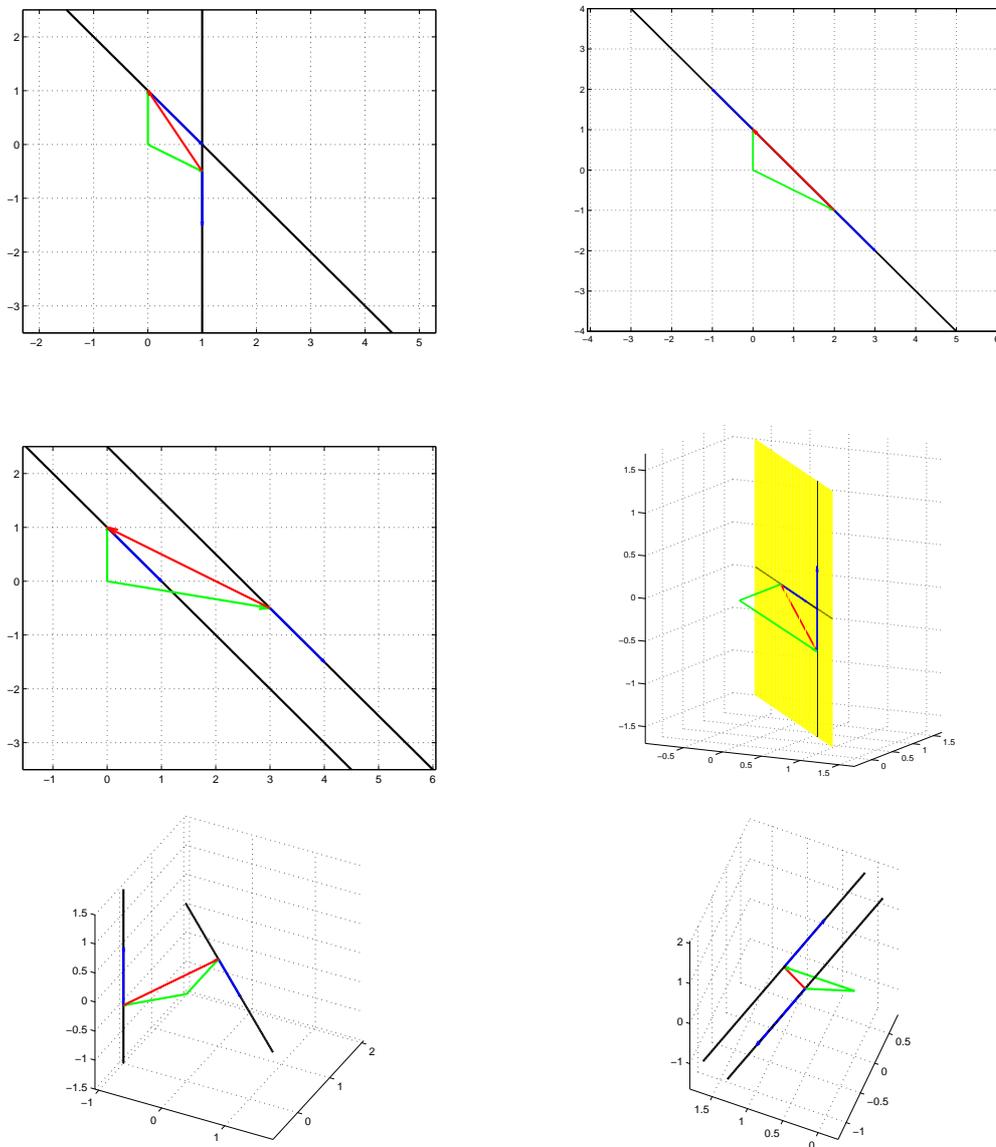


Abbildung 2.12: Schnitt zweier Geraden (jeweils schwarz) mit Richtungsvektoren v und w (jeweils blau), Ortsvektoren a und b (jeweils grün) und Vektor $a - b$ (rot). Gezeigt sind (in Leserichtung) die Fälle 1a, 1b.i), 1b.ii), 2a.i), 2a.ii) und 2b (hier eine der beiden Möglichkeiten). Im Fall 2a.i) ist noch eine von v und w aufgespannte Ebene in gelb eingezeichnet, um zu verdeutlichen, dass $a - b \in \text{span}(v, w)$.

(b) Wenn $a - b \notin U$, dann ist $G \cap E = \emptyset$

Die einzelnen Fälle sind in Abbildung 2.13 illustriert.

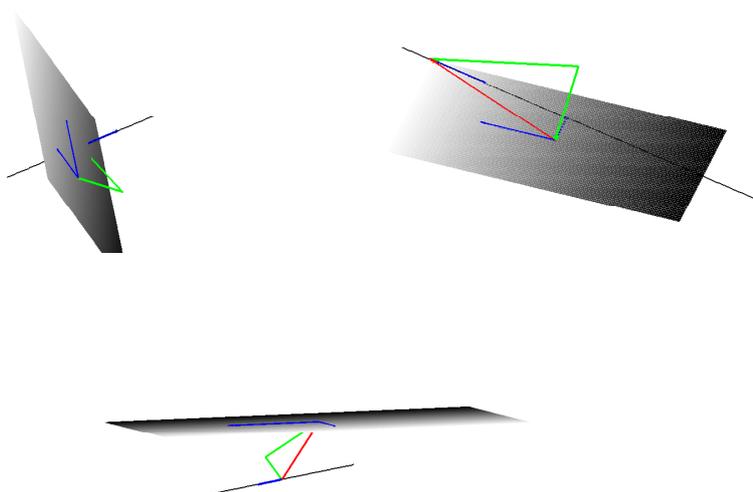


Abbildung 2.13: Schnitt einer Geraden und einer Ebene, wobei die Richtungsvektoren wieder in blau, die Ortsvektoren der Aufpunkte wieder in grün und deren Differenz wieder in rot dargestellt sind. Gezeigt sind (in Leserichtung) die Fälle 1, 2a und 2b.

2.3.3.3 Ebene mit Ebene im \mathbb{R}^3

Seien $E_1 = \{a + \lambda v_1 + \mu v_2 \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$, $E_2 = \{b + r w_1 + s w_2 \mid r, s \in \mathbb{R}\}$ gegeben, wobei (v_1, v_2) linear unabhängig sind und (w_1, w_2) linear unabhängig sind. In Schnittpunkten ist:

$$a + \lambda v_1 + \mu v_2 = b + r w_1 + s w_2 \Leftrightarrow a - b = r w_1 + s w_2 - \lambda v_1 - \mu v_2 \quad (2.8)$$

(v_1, v_2, w_1, w_2) müssen linear abhängig sein.

Sei $U = \text{span}(v_1, v_2, w_1, w_2)$. Es gilt: $2 \leq \dim U \leq 3$. Folgende Möglichkeiten gibt es:

1. Sei $\dim U = 2 \Rightarrow \text{span}(v_1, v_2) = \text{span}(w_1, w_2) = U$ (parallele Ebenen)

(a) Wenn $a - b \in U$, dann gibt es zu jedem Paar (r, s) ein passendes Paar $(\lambda, \mu) \Rightarrow E_1 = E_2$.

(b) Wenn $a - b \notin U$, dann gibt es keine Lösung. $E_1 \cap E_2 = \emptyset$

2. Sei $\dim U = 3 \Rightarrow U = \mathbb{R}^3 \Rightarrow (2.8)$ ist lösbar. Genauer gesagt gibt es genau einen Freiheitsgrad, d.h. auf einen der drei Vektoren kann verzichtet werden. Somit liegt eine Schnittgerade vor.

Die einzelnen Fälle sind in Abbildung 2.14 dargestellt.

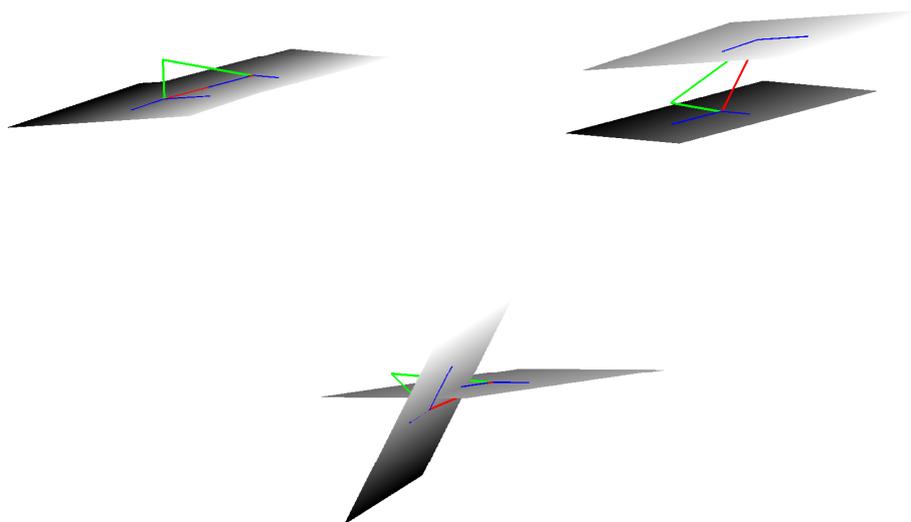


Abbildung 2.14: Schnitt zweier Ebenen, wobei die Richtungsvektoren wieder in blau, die Ortsvektoren der Aufpunkte wieder in grün und deren Differenz wieder in rot dargestellt sind. Gezeigt sind (in Leserichtung) die Fälle 1a, 1b und 2.

2.4 Matrizen und lineare Gleichungssysteme

Fangen wir mit einem Beispiel eines linearen Gleichungssystems (LGS) an

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 4 \\ -x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 &= 5, \end{aligned}$$

das man abstrakter schreiben kann als:

$$\begin{array}{cc|c} \hline 2 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 5 \\ \hline \end{array}$$

Definition 2.4.1 Eine rechteckige Anordnung von reellen Zahlen mit n Zeilen und m Spalten heißt $\mathbf{n} \times \mathbf{m}$ - **Matrix**. Die Menge aller $n \times m$ - Matrizen wird mit $\text{Mat}(n \times m, \mathbb{R})$ oder $\mathbb{R}^{n \times m}$ bezeichnet.

Die Notation hierfür ist

$$A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times m}$$

Beispiel 2.4.2

a)

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 2}$$

b)

$$A = (i^j)_{i,j=1,2,3} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

Dies ist eine so genannte “**quadratische Matrix**”, d.h. die Anzahl der Zeilen ist gleich der Anzahl der Spalten.

◇

Satz 2.4.3 $\mathbb{R}^{n \times m}$ ist ein Vektorraum mit der folgenden Addition und Skalarmultiplikation: Sind $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$, $B = (b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ so ist

$$\begin{aligned} A + B &:= (a_{ij} + b_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \\ \lambda A &:= (\lambda a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}} \end{aligned}$$

(d.h. komponentenweise wie im \mathbb{R}^n). Das Nullelement dieses Vektorraums ist die Nullmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Beispiel 2.4.4

a)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

b)

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -6 & 8 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

c)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$$

◇

Bemerkung 2.4.5

a) Ein Zeilenvektor (x_1, \dots, x_n) kann formal auch als $1 \times n$ -Matrix aufgefasst werden und

ein Spaltenvektor $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ als $n \times 1$ -Matrix. Ihre Addition und Skalarmultiplikation entsprechen denen für Matrizen.

b) Soweit nichts anderes vermerkt ist, werden Matrizen mit Großbuchstaben bezeichnet und ihre Komponenten mit den entsprechenden Kleinbuchstaben (wie oben).

Definition 2.4.6 (Multiplikation von Matrizen)

Für $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ sei

$$A \cdot B := \left(\sum_{j=1}^m a_{ij} b_{jk} \right)_{\substack{i=1, \dots, n \\ k=1, \dots, p}} \in \mathbb{R}^{n \times p}.$$

(Beachte: Die Anzahl der Spalten der 1. Matrix muss gleich der Anzahl der Zeilen der 2. Matrix sein)

Sehen wir uns das genauer an. Die (i, k) -te Komponente der Produktmatrix kommt wie folgt zustande:

$$\begin{array}{ccc} \underline{i} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{im} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1k} & \cdots & b_{1p} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & \cdots & b_{mk} & \cdots & b_{mp} \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \diamond & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \leftarrow \underline{i}, \\ & \uparrow \underline{k} & & \uparrow \underline{k} & \end{array}$$

wobei

$$\diamond = a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \dots + a_{im}b_{mk}$$

Dies ist genau das Skalarprodukt der i -ten Zeile von A mit der k -ten Spalte von B !

Speziell gilt: Ist die rechte Matrix ein Vektor $x \in \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m \times 1}$, so ist $Ax \in \mathbb{R}^{n \times 1} = \mathbb{R}^n$, wenn $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, wobei

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m \end{pmatrix}$$

Man kann ferner Potenzen definieren:

Für $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (quadratisch!) ist

$$A^2 := A \cdot A, \quad A^k := A^{k-1} \cdot A \quad (k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}), \quad A^1 := A,$$

$$A^0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} =: I =: E_n \quad n \times n - \text{“Einheitsmatrix”}$$

Damit kann ein lineares Gleichungssystem (LGS) wie folgt dargestellt werden:

$$b \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times m} \text{ gegeben; } x \in \mathbb{R}^m \text{ gesucht, so dass}$$

$$\boxed{Ax = b}$$

Satz 2.4.7 Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $C \in \mathbb{R}^{p \times q}$, $D \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $F \in \mathbb{R}^{m \times p}$ und sei $E_k := \mathbb{R}^{k \times k}$ Einheitsmatrix. Dann gilt:

- a) $\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- b) $E_n A = A = A E_m$ (d.h. E_n ist die Eins in $\mathbb{R}^{n \times n}$)
- c) $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$ (Assoziativgesetz)
- d) $(A + D) \cdot B = A \cdot B + D \cdot B$, $A \cdot (B + F) = A \cdot B + A \cdot F$ (Distributivgesetz)

Achtung

- Es gibt kein Kommutativgesetz für Matrizen! So erhält man z.B. für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

die Produkte

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$$

- Außerdem gibt es nicht stets eine multiplikative Inverse! Sehen wir uns z.B. die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

an. Gäbe es eine Matrix A^{-1} , so dass $AA^{-1} = E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, so müsste für alle $B \in \mathbb{R}^{n \times 2}$ gelten: $B \cdot (AA^{-1}) = B \cdot E_2 = B$. Aber für beispielsweise

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt

$$\begin{aligned} B \cdot (AA^{-1}) &= (B \cdot A) \cdot A^{-1} = \left(\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \right) \right) \cdot A^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} * & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq B, \end{aligned}$$

wobei “*” für Stellen mit unbekanntem (nicht zwingend gleichen) Wert steht.

Definition 2.4.8 Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt **invertierbar (regulär)**, falls es eine Matrix $B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gibt, so dass $A \cdot B = E_n$, sonst **singulär**.

Satz 2.4.9 Existiert B in Definition 2.4.8, so ist die Matrix B eindeutig durch $A \cdot B = E_n$ gegeben. Man schreibt $A^{-1} := B$ (**inverse Matrix, Inverse**).

Es gilt: $A^{-1}A = AA^{-1} = E_n$.

Also: Hat man ein LGS $Ax = b$ mit invertierbarer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, dann hat das LGS genau eine Lösung: $x = A^{-1}b$, denn es gilt:

$$Ax = b \xrightleftharpoons[A]{A^{-1}} A^{-1}(Ax) = A^{-1}b \Leftrightarrow (A^{-1}A)x = A^{-1}b \Leftrightarrow E_n x = A^{-1}b \Leftrightarrow x = A^{-1}b.$$

Verfahren 2.4.10 (Gauß'sches Eliminationsverfahren) Das Verfahren wird in den Tabellen 2.1 bis 2.3 in der linken Spalte beschrieben und rechts an einem Beispiel ausgeführt.

Es ist stets sehr empfehlenswert, Gleichungen so bald wie möglich zu vereinfachen. So hat man es beispielsweise statt mit

$$\begin{array}{ccc|c} 20 & 10 & 40 & 100 \\ 50 & 25 & 75 & 100 \end{array}$$

mit

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 4 & 10 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{array}$$

deutlich einfacher.

Gauß'sches Eliminationsverfahren

Zu lösen sei das LGS $Ax = b$, wobei $b \in \mathbb{R}^n$ und $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ gegeben sind und $x \in \mathbb{R}^m$ gesucht ist. Es gibt hierbei keine Bedingung an A !

Als Beispiel betrachten wir das LGS

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

a) Vorwärtselimination

Es ist hierbei das Ziel, eine Matrix der Form

$$\begin{pmatrix} * & \cdots & \cdots & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & * & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & * \end{pmatrix}$$

(“rechte obere Dreiecksmatrix”) zu erhalten, wobei $*$ bedeutet, dass hier ein beliebiger Wert stehen darf.

a1) Aufschreiben als erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b) =: \tilde{A}$. Sei $\tilde{A} =: (\tilde{a}_{i,j})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m+1}}$.

$$\text{a1) } \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 2 \end{array}$$

a2) Es muss $\tilde{a}_{1,1} \neq 0$ sein (gegebenenfalls Zeilen in $(A|b)$ vertauschen, bis links oben keine Null steht; geht dies nicht (d.h. ist die erste Spalte voller Nullen), so spielt x_1 keine Rolle im LGS \rightarrow dies merken und x_1 aus dem LGS entfernen)

a2) \checkmark

Tabelle 2.1: Erläuterungen des Gauß'schen Eliminationsverfahrens, links allgemein, rechts am Beispiel

Gauß'sches Eliminationsverfahren (Teil II)

a3) Ziel: In der ersten Spalte sollen unter $\tilde{a}_{1,1}$ lauter Nullen entstehen.

Durchführung: Addition einer passenden Vielfachen der 1. Zeile zur 2., dann passende Vielfache der 1. Zeile zur 3. addieren usw.

z.B. $-\frac{\tilde{a}_{2,1}}{\tilde{a}_{1,1}}$ -faches der 1. Zeile zur 2. Zeile addieren (oder: $-\tilde{a}_{2,1}$ -faches der 1. Zeile zum $\tilde{a}_{1,1}$ -fachen der 2. Zeile addieren), dann $-\frac{\tilde{a}_{3,1}}{\tilde{a}_{1,1}}$ -faches der 1. Zeile zur 3. Zeile addieren, ...

Das Ergebnis sieht wie folgt aus:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} \blacksquare & * & \cdots & * & * \\ 0 & * & \cdots & * & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & * & \cdots & * & * \end{array} \right),$$

wobei \blacksquare für einen beliebigen Eintrag $\neq 0$ steht und $*$ wieder für (ganz) beliebige Einträge steht. Streiche nun die erste Zeile und die erste Spalte, und verwende die restliche $((n-1) \times m)$ -Matrix als neues \tilde{A} . Fahre hiermit wie in a2) und a3) beschrieben fort, bis die obere Dreiecksmatrix erreicht ist.

b) Lösbarkeitsentscheidung

Gibt es links vom senkrechten Strich eine (oder mehrere) Zeile(n), die nur als Nullen bestehen?

bei nein: gehe zu c)

bei ja: Steht rechts davon auch eine Null?

bei nein: Das LGS hat keine Lösung, denn die Zeile hat die Form $0x_1 + \dots + 0x_m = b_j \neq 0$.

bei ja: Ignoriere diese Zeile(n) und gehe zu c)

a3)

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & / \cdot (-2) & / \cdot (-3) \\ 4 & -1 & 1 & 0 & \leftrightarrow + & \\ 3 & -2 & 2 & 2 & & / \cdot 2 \leftrightarrow + \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & & \\ 0 & -3 & -1 & -2 & / \cdot (-7) & \\ 0 & -7 & 1 & 1 & / \cdot 3 \leftrightarrow + & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & & \\ 0 & -3 & -1 & -2 & & \\ 0 & 0 & 10 & 17 & & \end{array}$$

b) Das LGS ist lösbar!

Tabelle 2.2: Fortsetzung von Tabelle 2.1

Gauß'sches Eliminationsverfahren (Teil III)

c) Rückwärtssubstitution

Nach Streichen der Nullzeilen wird erst die untere Gleichung gelöst. Dann wird Schritt für Schritt nach oben eingesetzt und gelöst.

Speziell wenn nach Teil b) die Form

$$n \text{ Zeilen } \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} \blacksquare & * & \cdots & \cdots & * & | & * \\ 0 & \blacksquare & * & \cdots & * & | & * \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & * & | & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \blacksquare & | & * \end{pmatrix}}_{n+1 \text{ Spalten}} \right.$$

vorliegt, kann man alternativ wie in a) vorgehen, jedoch von unten nach oben. Dies liefert eine Diagonalmatrix auf der linken Seite:

$$\begin{pmatrix} \blacksquare & 0 & \cdots & \cdots & 0 & | & * \\ 0 & \blacksquare & 0 & \cdots & 0 & | & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & | & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 & | & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \blacksquare & | & * \end{pmatrix}$$

Dieses umgewandelte LGS ist unmittelbar lösbar.

3. Gleichung:

$$10x_3 = 17 \Leftrightarrow x_3 = \frac{17}{10} = 1,7$$

in die 2. Gleichung:

$$-3x_2 - x_3 = -2 \Leftrightarrow -3x_2 - \frac{17}{10} = -2$$

$$\Leftrightarrow -3x_2 = -\frac{3}{10} \Leftrightarrow x_2 = \frac{1}{10} = 0,1$$

in die 1. Gleichung:

$$2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Leftrightarrow 2x_1 + 1,8 = 1$$

$$\Leftrightarrow 2x_1 = -0,8 \Leftrightarrow x_1 = -0,4$$

Alternativweg Rückwärtselimination

2	1	1	1			
0	-3	-1	-2	/ · 10	↕ +	
0	0	10	17	/ · 1		/ · 1

-20	-10	0	7	↕ +
0	10	10	0	1 / · 1
0	0	10	17	

10	-5	0	0	2
0	10	0	1	
0	0	10	17	

$$\Rightarrow x_3 = \frac{17}{10}, x_2 = \frac{1}{10}, x_1 = -\frac{2}{5}$$

Tabelle 2.3: Fortsetzung von Tabelle 2.2

Satz 2.4.11 Seien $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ und $b \in \mathbb{R}^m$ gegeben. Ist $\tilde{x} \in \mathbb{R}^m$ eine Lösung des zugehörigen LGS, d.h. $A\tilde{x} = b$, so gilt:

$$\{x \in \mathbb{R}^m \mid Ax = b\} = \{\tilde{x} + y \mid \underbrace{Ay = 0}_{\substack{\text{homogenes} \\ \text{LGS}}}\}$$

Das heißt: “Die allgemeine Lösung des inhomogenen LGS ist eine spezielle (“partikuläre”) Lösung des inhomogenen LGS plus die allgemeine Lösung des homogenen LGS” (egal, welche spezielle Lösung gewählt wurde). Eine alternativer Lösungsweg ist also: Finde eine spezielle Lösung und löse dann das homogene LGS mit der Gauß-Elimination.

Das Gauß-Verfahren basiert auf dem folgenden Satz:

Satz 2.4.12 Die folgenden Umformungen an der erweiterten Koeffizientenmatrix $(A|b)$ ändern nichts an der Lösungsmenge des LGS $Ax = b$:

- Vertauschung zweier Gleichungen
- Multiplikation einer Gleichung mit einem Faktor $\neq 0$
- Addition einer Gleichung zu einer anderen

als Kombination von b) und c): Addition/Subtraktion des Vielfachen (Faktor $\neq 0$) einer Gleichung zu/von einer anderen.

Beispiel 2.4.13

a)

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & -3x_2 & +4x_3 = 5 \\ x_1 & & -x_3 = 1 \\ -x_1 & +x_2 & -x_3 = -2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & & & \\ \hline 2 & -3 & 4 & 5 & & \\ x_1 & & -1 & 1 & / \cdot (-2) \leftrightarrow + & \\ -1 & 1 & -1 & -2 & & / \cdot 2 \leftrightarrow + \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & & & \\ \hline 2 & -3 & 4 & 5 & & \\ 0 & -\beta_{-1} & \beta_2 & \beta_1 & \downarrow & \\ 0 & -1 & 2 & 1 & / \cdot (-1) \leftrightarrow + & \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} x_1 & x_2 & x_3 & & & \\ \hline 2 & -3 & 4 & 5 & (1) & \\ 0 & -1 & 2 & 1 & (2) & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & (3) & \end{array}$$

d.h. nur noch zwei Gleichungen

(2) $-x_2 + 2x_3 = 1$. Sei $x_3 = \lambda \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt.

$$\Rightarrow x_2 = 2x_3 - 1 = 2\lambda - 1$$

in (1):

$$\begin{aligned}
 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 &= 5 \Rightarrow 2x_1 - 3(2\lambda - 1) + 4\lambda = 5 \\
 &\Rightarrow 2x_1 - 6\lambda + 3 + 4\lambda = 5 \Rightarrow 2x_1 = 2 + 2\lambda \Rightarrow x_1 = 1 + \lambda \\
 \Rightarrow \text{Lösungsmenge } \mathbb{L} &= \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 + \lambda \\ 2\lambda - 1 \\ \lambda \end{array} \right) \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(\begin{array}{c} 1 \\ -1 \\ 0 \end{array} \right) + \lambda \left(\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 1 \end{array} \right) \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\}
 \end{aligned}$$

Spezielle Lösung: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

homogenes LGS zum Vergleich:

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 2 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \xrightarrow{\substack{\downarrow \\ / \cdot (-2) \leftrightarrow + \\ / \cdot 2 \leftrightarrow +}} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 2 & -3 & 4 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \end{array} \xrightarrow{:3} \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 2 & -3 & 4 & 0 \text{ (1)} \\ 0 & -1 & 2 & 0 \text{ (2)} \\ 0 & -1 & 2 & 0 \text{ (3)} \end{array}$$

Die Zeilen (2) und (3) sind identisch.

(2) $-x_2 + 2x_3 = 0 \rightarrow x_2 = 2x_3 = 2\lambda$, für $x_3 = \lambda$ beliebig gewählt

(1) $2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \Rightarrow 2x_1 - 6\lambda + 4\lambda = 0 \Rightarrow 2x_1 = 2\lambda \Rightarrow x_1 = \lambda$

\Rightarrow allgemeine homogene Lösung: $\lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. (vgl. Satz 2.4.11)

b)

$$\begin{array}{rcl} x_1 & -x_2 & +x_3 = 1 \\ x_1 & & -x_3 = 0 \\ 2x_1 & & +3x_3 = 5 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 5 \end{array}$$

Variablentausch (d.h. Spaltentausch links)

$$\begin{array}{ccc|c} x_2 & x_1 & x_3 & \\ \hline -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{array} \xrightarrow{\substack{\downarrow \\ / \cdot (-2) \\ \leftrightarrow +}} \begin{array}{ccc|c} x_2 & x_1 & x_3 & \\ \hline -1 & 1 & 1 & 1 \text{ (1)} \\ 0 & 1 & -1 & 0 \text{ (2)} \\ 0 & 0 & 5 & 5 \text{ (3)} \end{array}$$

2 Möglichkeiten weiterzurechnen

- (i) (3) $5x_3 = 5 \Rightarrow x_3 = 1$
 (2) $x_1 - x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3 = 1$
 (1) $-x_2 + x_1 + x_3 = 1 \Rightarrow -x_2 + 2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1$

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

(ii)

$$\begin{array}{ccc|c} x_2 & x_1 & x_3 & \\ \hline -1 & 1 & 1 & 1 \quad \uparrow - \\ 0 & 1 & -1 & 0 \quad \uparrow + \\ 0 & 0 & 1 & 1 \quad \uparrow \quad \uparrow \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_2 & x_1 & x_3 & \\ \hline -1 & 1 & 0 & 0 \quad \uparrow - \\ 0 & 1 & 0 & 1 \quad \uparrow \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_2 & x_1 & x_3 & \\ \hline -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \Rightarrow x_2 = 1, x_1 = 1, x_3 = 1. \quad \mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

c)

$$\begin{array}{rcl} x_1 & +x_2 & +x_3 = 1 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 = 3 \\ 3x_1 & -x_2 & +3x_3 = 2 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & 2 \end{array} \begin{array}{l} \downarrow \quad / \cdot (-3) \downarrow \\ / \cdot (-1) \quad \leftrightarrow + \\ \leftrightarrow + \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & \cancel{2}_1 & 0 & -\cancel{2}_{-1} \Rightarrow x_2 = -1 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \Rightarrow -4x_2 = -1 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{4} \end{array}$$

Dies ist ein Widerspruch!

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \emptyset$$

d)

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 & +x_2 & +x_3 = 1 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 = 2 \\ -x_1 & -x_2 & +3x_3 = 0 \\ -2x_1 & +x_2 & -4x_3 = -3 \end{array}$$

(Hier gibt es mehr Gleichungen als Unbekannte (“überbestimmtes LGS”), somit keine quadratische Matrix A!)

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & -3 \end{array} \quad \begin{array}{l} \downarrow \quad \downarrow \\ / \cdot (-2) \quad \leftrightarrow + \\ / \cdot 2 \quad \leftrightarrow + \quad \downarrow \\ \leftrightarrow + \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 2 & 1 & 1 & 1 \\ \rightarrow 0 & 3 & -1 & -3 \\ 0 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 2 & -3 & -2 \end{array} \quad \begin{array}{l} \downarrow \quad / \cdot 2 \downarrow \\ / \cdot 3 \quad \leftrightarrow + \\ / \cdot (-3) \quad \leftrightarrow + \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 2 & 1 & 1 & 1 \quad (1) \\ 0 & 3 & -1 & -3 \quad (2) \\ 0 & 0 & 20 & 0 \quad (3) \\ 0 & 0 & 7 & 0 \quad (4) \end{array}$$

Aus den Gleichungen (3) und (4) folgt: $x_3 = 0$. Aus (2), (3) und (4) ergibt sich: $3x_2 - 0 = -3$ und daraus $x_2 = -1$.

Zusammen mit (1) erhält man: $2x_1 + (-1) + 0 = 1 \Rightarrow 2x_1 = 2 \Rightarrow x_1 = 1$.

Hier ist das überbestimmte LGS also trotzdem lösbar wegen Redundanz (d.h. eine der Gleichungen ist überflüssig, die 4. Zeile kann hier durch die 3. eliminiert werden). Wir erhalten

$$\mathbb{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

e)

$$\begin{array}{rcl} x_1 & -x_2 & +2x_3 = 5 \\ 2x_1 & +x_2 & -x_3 = 1 \end{array}$$

Hier gibt es nun weniger Gleichungen als Unbekannte (“unterbestimmtes LGS”). Es kann somit sicher keine eindeutige Lösung geben.

$$\rightarrow \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} / \cdot (-2) \quad \downarrow \\ \leftrightarrow + \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & -1 & 2 & 5 \quad (1) \\ 0 & 3 & -5 & -9 \quad (2) \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{aus (2) : } 3x_2 - 5x_3 = -9 \Rightarrow x_2 = -3 + \frac{5}{3}x_3, x_3 \in \mathbb{R} \text{ beliebig,}$$

$$\text{aus (1) : } x_1 - x_2 + 2x_3 = 5 \Rightarrow x_1 - \left(-3 + \frac{5}{3}x_3\right) + 2x_3 = 5$$

$$\Rightarrow x_1 + 3 - \frac{5}{3}x_3 + \frac{6}{3}x_3 = 5 \Rightarrow x_1 = 2 - \frac{1}{3}x_3$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{L} &= \left\{ \left(\begin{array}{c} 2 - \frac{1}{3}\lambda \\ -3 + \frac{5}{3}\lambda \\ \lambda \end{array} \right) \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \left(\begin{array}{c} 2 \\ -3 \\ 0 \end{array} \right) + \lambda \left(\begin{array}{c} -\frac{1}{3} \\ \frac{5}{3} \\ 1 \end{array} \right) \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \left(\begin{array}{c} 2 \\ -3 \\ 0 \end{array} \right) + \lambda \left(\begin{array}{c} -1 \\ 5 \\ 3 \end{array} \right) \middle| \lambda \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

◇

Definition 2.4.14 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Betrachtet man die einzelnen Zeilen als Zeilenvektoren mit je m Komponenten, so ist die maximale Anzahl darin enthaltener linear unabhängiger Zeilen der **Rang** von A . Man schreibt $\text{Rang } A =: \text{Rg } A =: \text{rk } A$ ("rank").

Satz 2.4.15 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dann geben die folgenden Zahlen jeweils den Rang von A an:

- wie in Definition 2.4.14,
- maximale Anzahl linear unabhängiger Spalten in A ,
- Anzahl der Zeilen, die nicht nur aus Nullen bestehen, nach der Gaußelimination bei A (d.h. ohne b).

Beispiel 2.4.16

- Zum Beispiel in Beispiel 2.4.13 a):

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 2 & -3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -2 \end{array} \quad \rightarrow \quad \begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 2 & -3 & 4 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{rk } A = 2$$

b)

$$\begin{array}{ccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & \\ \hline 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & 0 \end{array}$$

Wir beobachten:

1. Die Spalten sind im \mathbb{R}^2 . \Rightarrow Maximal 2 sind linear unabhängig. $\Rightarrow \text{rk } A \leq 2$.
2. Die 2. Zeile ist das Doppelte der 1. Zeile \Rightarrow die erste und die zweite Zeile der Matrix sind linear abhängig $\Rightarrow \text{rk } A = 1$.

◇

Satz 2.4.17 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Für die Lösungsmenge \mathbb{L} des homogenen LGS $Ax = 0$, $x \in \mathbb{R}^m$ gesucht, gilt: \mathbb{L} ist ein Unterraum des \mathbb{R}^m mit Dimension $m - \text{rk } A$, wobei $\dim \mathbb{L} = 0$ (d.h. $\text{rk } A = m$) hier bedeutet: $\mathbb{L} = \{0\}$.

Insbesondere gilt: $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ invertierbar $\Leftrightarrow \text{rk } A = m$.

In Kombination mit Satz 2.4.11 kann damit auch Information für inhomogene LGS gewonnen werden (bis auf die Lösbarkeit). Als Beispiel siehe noch einmal Beispiel 2.4.13.

2.5 Determinanten

Definition 2.5.1 Die **Determinante** einer Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ ist wie folgt definiert:

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} := \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} := ad - bc.$$

Geometrische Deutung:

- Der Flächeninhalt des Parallelogramms, das durch die Vektoren $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ definiert wird, ist $ad - bc$.
- Wir wissen bereits: $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ sind linear abhängig
 $\Leftrightarrow \exists \lambda : \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ oder: $\exists \mu : \mu \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$.
 Sehen wir uns das genauer an:

$$\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \Leftrightarrow a = \lambda b \text{ und } c = \lambda d \Rightarrow ad - bc = \lambda bd - \lambda bd = 0$$

und umgekehrt:

$$ad - bc = 0 \Rightarrow ad = bc \Rightarrow \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \text{ sind linear abhängig } (a = \frac{c}{d}b; c = \frac{a}{b}d = \frac{c}{d}d, \text{ wenn alles } \neq 0).$$

Satz 2.5.2 Sei $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$. Dann gilt: A ist invertierbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

Der Beweis ist eine freiwillige Übungsaufgabe.

Definition 2.5.3 Seien $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ drei beliebige Vektoren. Das **Spatprodukt** ist wie folgt definiert:

$$[x, y, z] := \langle x, (y \times z) \rangle$$

Die Determinante von $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ ist das Spatprodukt der Spalten:

$$\det A := \left[\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix} \right]$$

Das Spatprodukt liefert das Volumen des von x, y und z aufgespannten Spats. Es ist:

$$\begin{aligned} \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \right) \right\rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 z_3 - y_3 z_2 \\ y_3 z_1 - y_1 z_3 \\ y_1 z_2 - y_2 z_1 \end{pmatrix} \right\rangle \\ &= x_1 (y_2 z_3 - y_3 z_2) + x_2 (y_3 z_1 - y_1 z_3) + x_3 (y_1 z_2 - y_2 z_1) \\ &= x_1 (y_2 z_3 - y_3 z_2) - x_2 (y_1 z_3 - y_3 z_1) + x_3 (y_1 z_2 - y_2 z_1) \\ &= x_1 \begin{vmatrix} y_2 & z_2 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_3 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \\ &= x_1 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} - x_2 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + x_3 \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Die roten Zahlen stehen hierbei für gestrichene Werte.

Definition 2.5.4 (Determinante, rekursiv definiert) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ (stets quadratische Matrizen!)

1. Für $n = 1$ ist $A = (a_{11})$, $\det A = a_{11}$.
2. $n = 2, 3$ wie oben

3. $\det A = \sum_{i=1}^n a_{i1} \det(A_{i1}) \cdot (-1)^{i+1}$, wobei A_{ij} die $(n-1) \times (n-1)$ -Matrix ist, die aus A durch Streichen der i -ten Zeile und der j -ten Spalte hervorgeht.

Satz 2.5.5 (Entwicklungssatz für Determinanten) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt für alle $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\det A = \underbrace{\sum_{i=1}^n a_{ij} \det(A_{ij}) \cdot (-1)^{i+j}}_{\text{“Entwicklung nach } j\text{-ter Spalte”}} = \underbrace{\sum_{i=1}^n a_{ji} \det(A_{ji}) \cdot (-1)^{i+j}}_{\text{“Entwicklung nach } j\text{-ter Zeile”}}$$

Beispiel 2.5.6

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 3 = -5$$

b)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 4 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 7 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (5 \cdot 9 - 8 \cdot 6) - 4 \cdot (2 \cdot 9 - 8 \cdot 3) + 7 \cdot (2 \cdot 6 - 5 \cdot 3) \\ &= \dots \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (0 \cdot 1 - (-2) \cdot 0) + (1 \cdot 1 - (-2) \cdot 2) + 2 \cdot (1 \cdot 0 - 0 \cdot 2) \\ &= 1 + 4 = 5 \end{aligned}$$

Einfacher ist hier aber die Entwicklung nach der zweiten Zeile:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix} &= (-1)^{2+1} \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix} + (-1)^{2+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} * & * \\ * & * \end{vmatrix} \\ &= 1 \cdot (1 \cdot 1 - (-2) \cdot 2) = 5 \end{aligned}$$

◇

Man kann 3×3 -Determinanten auch mit der Regel von Sarrus berechnen. Dazu kopiert man die ersten beiden Spalten rechts neben die Matrix, im letzten Beispiel wäre das

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & -2 \end{array}$$

Dann addiert man die drei Produkte längs der Diagonalen von links oben nach rechts unten,

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & -2 \end{array}$$

hier $1 \cdot 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) \cdot (-2) = 4$. Schließlich subtrahiert man hiervon die drei Produkte längs der Diagonalen von links unten nach rechts oben.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & -2 \end{array}$$

Im Beispiel ist die Determinante damit $4 - 2 \cdot 0 \cdot 2 - (-2) \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 = 4 + 1 = 5$. Dies funktioniert nur bei 3×3 -Determinanten!

Satz 2.5.7 Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt:

1. Auswirkungen der Gauß-Elimination auf die Determinante von A :
 - a) Vertauschung zweier Zeilen oder Spalten: Vorzeichenwechsel der Determinanten.
 - b) Multiplikation einer Zeile oder Spalte mit $\lambda \neq 0$: Multiplikation der Determinanten mit λ ($\Rightarrow \det(\lambda A) = \lambda^n \det A$).
 - c) Addition einer Zeile (Spalte) zu einer anderen Zeile (Spalte): Die Determinante bleibt unverändert.
2. $\det(AB) = (\det A)(\det B)$
3. A invertierbar $\Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Beachten Sie: Es existiert keine allgemeine Aussage über $\det(A + B)$.

Korollar 2.5.8 Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Dann gilt:

1. $\det(AB) = \det(BA)$
2. $\det(A^k) = (\det A)^k$
3. Ist A invertierbar, so ist $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$
4. Ist B invertierbar, so ist $\det(B^{-1}AB) = \det A$
5. Ist A eine Blockmatrix der Form

$$a) A = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & E \end{pmatrix} \text{ mit } C \in \mathbb{R}^{p \times p}, E \in \mathbb{R}^{q \times q}, n = p+q, D \in \mathbb{R}^{p \times q}, 0 \text{ die } q \times p\text{-Nullmatrix}$$

oder

$$b) A = \begin{pmatrix} C & 0 \\ D & E \end{pmatrix} \text{ mit } C \in \mathbb{R}^{p \times p}, E \in \mathbb{R}^{q \times q}, n = p+q, D \in \mathbb{R}^{q \times p}, 0 \text{ die } p \times q\text{-Nullmatrix}$$

so ist

$$\det A = (\det C) \cdot (\det E).$$

(Beachte den benötigten Nullblock.)

Beispiel 2.5.9

a)

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 4 & 7 & 8 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & 3 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 0.$$

Die ersten zwei Zeilen der letzten Determinanten sind offensichtlich linear abhängig. Somit ist der Rang der zugehörigen Matrix kleiner als 4. Folglich ist diese Matrix nicht invertierbar, so dass ihre Determinante verschwindet. Also ist die ursprünglich zu bestimmende Determinante ebenfalls gleich Null.

b)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot (-3) = -6$$



Satz 2.5.10 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ in oberer Dreiecksform, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & \cdots & * \\ 0 & a_{22} & \ddots & * & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 0 & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

so ist $\det A = \prod_{j=1}^n a_{jj}$.

Beispiel siehe oben.

Satz 2.5.11 (Cramer'sche Regel) Sei das LGS $Ax = b$ mit invertierbarer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gegeben. Dann gilt für die eindeutige Lösung $x \in \mathbb{R}^n$:

$$x_i = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{\det A},$$

d.h. tausche in A die i -te Spalte durch b aus, berechne die Determinante und dividiere anschließend durch $\det A$.

Beispiel 2.5.12

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{=A} x = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}}_{=b}$$

$$\begin{aligned} \det A &= 2 \cdot (2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - (-1) \cdot (3 \cdot 1 - 1 \cdot (-1)) + 1 \cdot (3 \cdot 3 - 2 \cdot (-1)) \\ &= -2 + 4 + 11 \\ &= 13 \neq 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow A$ invertierbar \Rightarrow eindeutige Lösung.

Es gibt verschiedene Möglichkeiten, die Lösung zu berechnen.

a) Gaußelimination

b) Berechne A^{-1} mit dem Gauß-Jordan-Verfahren (siehe Literatur) $\Rightarrow x = A^{-1}b$.

c) Mit der Cramer'schen Regel:

$$\begin{aligned} x_1 &= (\det A)^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 8 & 3 & -1 \\ -3 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{13} \cdot (8 \cdot (-1) - (-3) \cdot 4 + 2 \cdot 11) \\ &= \frac{26}{13} = 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_2 &= (\det A)^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 8 & -1 \\ -1 & -3 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{13} \cdot (2 \cdot (-9) - (-1) \cdot 10 + 1 \cdot 21) \\ &= \frac{-18 + 10 + 21}{13} = \frac{13}{13} = 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_3 &= (\det A)^{-1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ -1 & 2 & -3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{13} \cdot (2 \cdot 7 - (-1) \cdot (-2) + 1 \cdot (-25)) \\ &= \frac{14 - 2 - 25}{13} = -\frac{13}{13} = -1 \\ &\Rightarrow x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Gauß-Elimination ist meist weniger aufwendig. ◇

Beispiel 2.5.13 Bestimmung der Determinanten mit Gauß-Elimination

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc|l} 1 & 2 & -1 & 2 & \\ -1 & 0 & 2 & 3 & \\ 2 & 4 & 0 & 1 & \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \\ \hline \leftrightarrow & \leftrightarrow & & & \end{array} \begin{array}{l} \text{Veränderung der Determinante} \\ \cdot(-1) \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l}
 2 & 1 & -1 & 2 & / \cdot (-2) & \downarrow & \text{irrel. für Det.} & \left. \begin{array}{l} \text{Veränderung der Determinante} \\ \\ \end{array} \right| \\
 0 & -1 & 2 & 3 & & \downarrow & & \cdot 2 \\
 4 & 2 & 0 & 1 & \leftrightarrow + & & & \\
 -1 & -1 & -1 & 1 & & / \cdot 2 & \leftrightarrow + & \text{relev. für Det.}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l}
 2 & 1 & -1 & 2 & & & & \left. \begin{array}{l} \text{Veränderung der Determinante} \\ \\ \end{array} \right| \\
 0 & -1 & 2 & 3 & & \downarrow & & \cdot (-1) \\
 0 & 0 & 2 & -3 & & & & \\
 0 & -1 & -3 & 4 & / \cdot (-1) & \leftrightarrow + & \text{relevant} &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc|l}
 2 & 1 & -1 & 2 & & & & \left. \begin{array}{l} \text{Veränderung der Determinante} \\ \\ \end{array} \right| \\
 0 & -1 & 2 & 3 & & & & \cdot 2 \\
 0 & 0 & 2 & -3 & / \cdot (-5) & \downarrow & \text{irrel.} & \\
 0 & 0 & 5 & -1 & / \cdot 2 & \leftrightarrow + & \text{relev.} &
 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
 2 & 1 & -1 & 2 \\
 0 & -1 & 2 & 3 \\
 0 & 0 & 2 & -3 \\
 0 & 0 & 0 & 13
 \end{array}$$

Nach Satz 2.5.10 ist also die Determinante der neuen Matrix $= 2 \cdot (-1) \cdot 2 \cdot 13 = -4 \cdot 13$. Also gilt:

$$\det A = \frac{-4 \cdot 13}{(-1) \cdot 2 \cdot (-1) \cdot 2} = -13$$

◇

D.h. Für $\lambda \neq 0$ gilt:

Die Addition des λ -fachen einer Zeile zu einer anderen Zeile verursacht keine Änderungen bei der Determinanten, die Addition einer Zeile zum λ -fachen einer anderen Zeile ergibt die Multiplikation der Determinanten mit λ . Entsprechendes gilt für die Spalten, denn in Zeilenlupe gilt:

$$\begin{array}{ccc|l}
 * & * & * & \left. \begin{array}{l} \text{Veränderung der Determinante} \\ \\ \end{array} \right| \\
 * & * & * & / \cdot \lambda \\
 * & * & * & \cdot \lambda
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|l}
 * & * & * & \left. \begin{array}{l} \text{Veränderung der Determinante} \\ \\ \end{array} \right| \\
 \lambda * & \lambda * & \lambda * & \downarrow \\
 * & * & * & \leftrightarrow + \\
 & & & \text{keine}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} * & * & * & \text{Veränderung der Determinante} \\ \lambda * & \lambda * & \lambda * & / : \lambda \\ \lambda * + * & \lambda * + * & \lambda * + * & : \lambda \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} * & * & * & \text{Veränderung der Determinante} \\ * & * & * & \text{keine} \\ \lambda * + * & \lambda * + * & \lambda * + * & \end{array}$$

beziehungsweise

$$\begin{array}{ccc|c} * & * & * & \text{Veränderung der Determinante} \\ * & * & * & \cdot \lambda \\ * & * & * & / \cdot \lambda \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} * & * & * & \text{Veränderung der Determinante} \\ * & * & * & \text{keine} \\ \lambda * & \lambda * & \lambda * & \begin{array}{l} \downarrow \\ \leftrightarrow + \end{array} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc|c} * & * & * & \text{Veränderung der Determinante} \\ * & * & * & \text{keine} \\ * + \lambda * & * + \lambda * & * + \lambda * & \end{array}$$

Was wir bisher gemacht haben, geht genauso auch für Matrizen mit komplexen Einträgen. Wir können also jeweils $\mathbb{C}^{n \times m}$ bzw. $\mathbb{C}^{n \times n}$ schreiben.

Wir beschäftigen uns nun noch mit transponierten Matrizen.

Definition 2.5.14 Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $A = (a_{ij})_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=1, \dots, m}}$. Dann heißt $A^T := (a_{ji}^T)_{\substack{j=1, \dots, m \\ i=1, \dots, n}} \in \mathbb{C}^{m \times n}$ **transponierte Matrix** (die Transponierte) von A ($a_{ji}^T = a_{ij}$). Gilt $A = A^T$ (\Rightarrow insbesondere $n = m$), so heißt A **symmetrisch**.

Beispiel 2.5.15

a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & -8 \\ 0 & 6 & 9 \end{pmatrix}, A^T = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 2 & 7 & 6 \\ 3 & -8 & 9 \end{pmatrix}$$

c)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

ist symmetrisch.

◇

Das Transponieren ist also ein Spiegeln der Matrixeinträge an der Hauptdiagonalen (welche durch die Komponenten, deren Zeilen- und Spaltenindex gleich sind, gegeben ist).

Satz 2.5.16 (Rechenregeln für Transponierte) Seien $A, B \in \mathbb{C}^{n \times m}$, $D \in \mathbb{C}^{m \times p}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt:

$$(\lambda A)^T = \lambda A^T, (A + B)^T = A^T + B^T, \underbrace{(AD)^T}_{\substack{n \times p \\ p \times n}} = \underbrace{D^T}_{p \times m} \underbrace{A^T}_{m \times n}, (A^T)^T = A.$$

Für $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ gilt speziell:

$$\det A = \det A^T$$

Ist A invertierbar, so ist $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$.

Satz 2.5.17 Ist $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ invertierbar, so ist

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Rechnen Sie es selbst nach! ⁴

⁴. $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} vp + q\varrho - & \varrho p - p\varrho \\ vq + qv - & \varrho q - p\varrho \end{pmatrix} \frac{\varrho q - p\varrho}{1} = \begin{pmatrix} v & \varrho - \\ q - & p \end{pmatrix} \frac{\varrho q - p\varrho}{1} \begin{pmatrix} p & \varrho \\ q & v \end{pmatrix} = 1-VV$

2.6 Eigenvektoren und Eigenwerte

Definition 2.6.1 Seien V und W \mathbb{K} -Vektorräume. Eine Abbildung $f : V \rightarrow W$ heißt **linear**, wenn

$$f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{K} \quad \forall x, y \in V$$

gilt.

Beispiel 2.6.2

a) Ist $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, so ist die Abbildung

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^m &\rightarrow \mathbb{R}^n \\ x &\mapsto Ax \end{aligned}$$

linear.

b) Ableiten ist linear (siehe auch später), denn die Abbildung

$$\begin{aligned} D : C^{(1)}[a, b] &\rightarrow C[a, b] \\ f &\mapsto f' \end{aligned}$$

ist linear.

◇

Interessanterweise gibt es Funktionen, die beim Ableiten nur ein konstantes Vielfaches liefern. So ist z.B. die Ableitung von $f(x) = e^{\lambda x}$ für ein festes $\lambda \in \mathbb{R}$ gerade $f'(x) = \lambda \cdot f(x)$. Betrachtet man zweite Ableitungen (auch das ist eine lineare Beziehung), so gilt $f''(x) = \lambda f'(x)$ für $\lambda \geq 0$, wenn $f(x) = e^{\sqrt{\lambda}x}$ und für $\lambda < 0$, wenn $f(x) = \sin(\sqrt{-\lambda}x)$ oder $f(x) = \cos(\sqrt{-\lambda}x)$. Dies ist z.B. bei sich ausbreitenden Wellen von Interesse, denn $f'' + \frac{\omega^2}{c^2} f = 0$ ist die Gleichung für eine eindimensionale Welle mit Kreisfrequenz (Eigenfrequenz) ω und Geschwindigkeit c . Auch für Matrizen ist so etwas möglich:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Definition 2.6.3 Sei V ein Vektorraum (über \mathbb{R} oder \mathbb{C}) und $f : V \rightarrow V$ eine lineare Abbildung. Existieren $v \in V \setminus \{0\}$ und $\lambda \in \mathbb{C}$, so dass $f(v) = \lambda v$, so heißt v **Eigenvektor** von f und λ **Eigenwert** von f . Man nennt

$$\text{Eig}(\lambda) := \{v \in V \mid f(v) = \lambda v\}$$

Eigenraum von λ bezüglich f .

Insbesondere gilt also für $n \times n$ -Matrizen A : $v \neq 0$ ist Eigenvektor zum Eigenwert λ von A genau dann, wenn $Av = \lambda v$. (Für nicht-quadratische Matrizen macht dieser Begriff keinen Sinn, da dann Ax und x nicht gleich viele Komponenten haben.)

Es gilt also:

$$\begin{aligned}
 & \lambda \in \mathbb{C} \text{ Eigenwert von } A \in \mathbb{C}^{n \times n} \\
 \Leftrightarrow & \exists v \neq 0 : Av = \lambda v \\
 \Leftrightarrow & \exists v \neq 0 : Av - \lambda v = 0 \\
 \Leftrightarrow & \exists v \neq 0 : Av - \lambda E_n v = 0 \quad (E_n : n \times n - \text{Einheitsmatrix}) \\
 \Leftrightarrow & \exists v \neq 0 : (A - \lambda E_n)v = 0 \\
 \Leftrightarrow & \text{Das homogene LGS } (A - \lambda E_n)v = 0 \text{ hat eine nicht-triviale (d.h. } \neq 0) \text{ Lösung} \\
 \Leftrightarrow & A - \lambda E_n \text{ ist nicht invertierbar.} \\
 \Leftrightarrow & \det(A - \lambda E_n) = 0.
 \end{aligned}$$

Es gilt also der folgende Satz.

Satz 2.6.4 λ ist Eigenwert der $n \times n$ -Matrix A genau dann, wenn $\det(A - \lambda E_n) = 0$.

Sehen wir uns diese Gleichung genauer an. Wir suchen im Grunde die Nullstellen eines Polynoms n -ten Grades.

Definition 2.6.5 Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Der Ausdruck $\chi_A(\lambda) := \det(A - \lambda E_n)$ heißt **charakteristisches Polynom** von A .

Beispiel 2.6.6

a)

$$\begin{aligned}
 A &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \\
 A - \lambda E_n &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 4 - \lambda \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \det(A - \lambda E_n) &= (1 - \lambda)(2 - \lambda)(4 - \lambda) \\
 &\Rightarrow \text{Eigenwerte } 1, 2 \text{ und } 4.
 \end{aligned}$$

Eigenvektoren:

– zu $\lambda = 1$: $(A - 1 \cdot E_n)v = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1-1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 4-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow v_2 = v_3 = 0, v_1$ beliebig

$$\Rightarrow \text{Eig}(1) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}.$$

Die Eigenvektoren zum Eigenwert 1 haben die Gestalt $\begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

– zu $\lambda = 2$:

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow v_1 = v_3 = 0, v_2 \text{ beliebig}$$

– zu $\lambda = 4$: v_3 beliebig, $v_1 = v_2 = 0$.

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 2 \cdot 2 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow (1-\lambda)^2 = 4 \Leftrightarrow |1-\lambda| = 2 \Leftrightarrow 1-\lambda = \pm 2 \Leftrightarrow \lambda = 1 \mp 2;$$

Eigenwerte: $\{-1, 3\}$

Eigenvektoren:

– zu $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1+1 & 2 \\ 2 & 1+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{array} \begin{array}{c} \downarrow \\ \leftarrow - \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow v_1 = -v_2,$$

$$\text{Eig}(-1) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\};$$

$$\text{Eigenvektoren: } \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

– zu $\lambda = 3$:

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & 0 \end{array} \xrightarrow{\substack{\downarrow \\ \leftrightarrow +}} \begin{array}{cc|c} -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow v_1 = v_2,$$

$$\text{Eig}(3) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\text{Eigenvektoren: } \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

Test:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - 2a \\ 2a - a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ a \end{pmatrix} = (-1) \cdot \begin{pmatrix} a \\ -a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2a \\ 2a + a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ 3a \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}$$

c)

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \left| \begin{array}{cc|c} 2-\lambda & 1 \\ -1 & 2-\lambda \end{array} \right| = (2-\lambda)^2 - (-1) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow (2-\lambda)^2 = -1 \Leftrightarrow 2-\lambda = \pm i \Leftrightarrow \lambda = 2 \mp i$$

Eigenräume zu $2 \mp i$:

$2 - i$:

$$\begin{array}{cc|c} 2-2+i & 1 & 0 \\ -1 & 2-2+i & 0 \end{array} \xrightarrow{\substack{\downarrow \\ / \cdot i \quad \leftrightarrow +}} \begin{array}{cc|c} i & 1 & 0 \\ -1 & i & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} i & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow iv_1 = -v_2;$$

$$\text{Eig}(2-i) = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ -ia \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{C} \right\}$$

$$\text{Test: } \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ -ia \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a - ia \\ -a - 2ia \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (2-i)a \\ i^2a - 2ia \end{pmatrix} = (2-i) \begin{pmatrix} a \\ -ia \end{pmatrix}$$

$2 + i$: entsprechend

◇

Wir wissen durch den Fundamentalsatz der Algebra (Satz 1.5.6):

Jedes Polynom vom Grad n lässt sich in genau n komplexe Linearfaktoren zerlegen.

Das charakteristische Polynom einer $n \times n$ -Matrix A hat den Grad n und den führenden Koeffizienten $(-1)^n$

$$\Rightarrow \text{Zu } \chi_A \text{ existieren } \lambda_1, \dots, \lambda_n, \text{ so dass } \chi_A(x) = (x - \lambda_1) \cdot \dots \cdot (x - \lambda_n)(-1)^n$$

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sind dabei die Eigenwerte von A . Hierbei können Linearfaktoren bzw. Eigenwerte mehrfach auftreten. Die Anzahl, wie oft ein Eigenwert auftritt, nennt man die **algebraische Vielfachheit** des Eigenwerts, während $\dim \text{Eig}(\lambda)$ die **geometrische Vielfachheit** von λ genannt wird.

Beachte, dass $\mathbb{R}^{n \times n} \subset \mathbb{C}^{n \times n}$.

Satz 2.6.7 *Das charakteristische Polynom von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ hat den Grad n und die Form*

$$\chi_A(x) = (-1)^n x^n + (-1)^{n-1} (\text{Spur } A) x^{n-1} + \sum_{j=1}^{n-2} a_j x^j + \det A$$

(für unbekannte a_1, \dots, a_{n-2}). Hierbei ist $\text{Spur } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ ($=: \text{tr } A$, trace of A) die Summe der Elemente der Hauptdiagonalen von A .

Beispiel 2.6.8 Wir bestimmen die Eigenwerte von

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Das zugehörige charakteristische Polynom ist

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 \\ 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2 - 0 \stackrel{!}{=} 0.$$

Damit ist $\lambda = 2$ der einzige Eigenwert von A . Er hat die algebraische Vielfachheit 2. Wir suchen nun die Eigenvektoren zu diesem Eigenwert:

$$\begin{aligned} Av = 2v &\Leftrightarrow (A - 2E_2)v = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow 0 = 0 \text{ und } v_1 = 0. \end{aligned}$$

Der Eigenraum ist damit

$$\text{Eig}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$$

und alle Eigenvektoren sind von der Form

$$\begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} \text{ mit } r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(Sie können hier auch \mathbb{R} durch \mathbb{C} ersetzen, je nach Zusammenhang.)

Beachten Sie, dass der Eigenraum $\text{Eig}(2)$ nur die Dimension 1 hat, obwohl der Eigenwert die algebraische Vielfachheit 2 hat. Die geometrische Vielfachheit des Eigenwerts ist also 1. \diamond

Wir haben in Satz 2.5.10 bereits gesehen, dass man Determinanten von Dreiecksmatrizen sehr einfach berechnen kann. Wir werden nun sehen, dass solche Matrizen auch die Eigenwertbestimmung wesentlich vereinfachen.

Satz 2.6.9 Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine obere Dreiecksmatrix, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Dann sind a_{11}, \dots, a_{nn} die Eigenwerte von A .

Beweis: Das charakteristische Polynom ist nach Satz 2.5.10

$$\chi_A(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = \prod_{j=1}^n (a_{jj} - \lambda)$$

und verschwindet offensichtlich genau dann, wenn $\lambda \in \{a_{jj} \mid j = 1, \dots, n\}$ \blacksquare

Satz 2.6.10 Ist $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ eine Diagonalmatrix, d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix},$$

dann sind die Standard-Basisvektoren e^j , $j = 1, \dots, n$, Eigenvektoren von A (und zwar jeweils zum Eigenwert a_{jj}).

Beweis: Wir rechnen es einfach nach:

$$Ae^j = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & a_{jj} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow j = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ a_{jj} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{jj} e^j$$

■

Satz 2.6.11 $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist invertierbar genau dann, wenn alle Eigenwerte $\neq 0$ sind.

Satz 2.6.12 Sei λ Eigenwert von $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ zum Eigenvektor v . Ferner sei $r \in \mathbb{C}$ und $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ invertierbar. Dann kann man auch etwas über Eigenwerte und -vektoren der folgenden Matrizen aussagen:

Matrix	Eigenwert	Eigenvektor z.B.
A	λ	v
rA	$r\lambda$	v
$A^k, k \in \mathbb{N}$	λ^k	v
$A + rE_n$	$\lambda + r$	v
$B^{-1}AB$	λ	$B^{-1}v$
A^{-1} , falls A invertierbar	λ^{-1}	v

Beweis:

$$(rA)v = r(Av) = r\lambda v$$

$$A^k v = A^{k-1} Av = A^{k-1} \lambda v = \lambda A^{k-1} v = \dots = \underbrace{\lambda^k v}_{\text{Induktion}}$$

(Die Induktion sparen wir uns hier. Sie sollten sie natürlich ausführen können.)

$$(A + rE_n)v = \underbrace{Av}_{=\lambda v} + r \underbrace{E_n v}_{=v} = (\lambda + r)v$$

$$(B^{-1}AB)(B^{-1}v) = B^{-1}A \underbrace{(BB^{-1})}_{=E_n} v = B^{-1}Av = B^{-1}(\lambda v) = \lambda B^{-1}v$$

$$\left. \begin{array}{l} \underbrace{A^{-1}Av}_{=A^{-1}(\lambda v) = \lambda A^{-1}v} = v \end{array} \right\} \Rightarrow A^{-1}v = \frac{1}{\lambda}v \quad (\lambda \neq 0, \text{ siehe oben})$$

■

Satz 2.6.13 Eigenvektoren v_1, \dots, v_k zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ der gleichen Matrix sind linear unabhängig.

Satz 2.6.14 Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. A besitze n linear unabhängige Eigenvektoren v_1, \dots, v_n ; jeweils zum Eigenwert λ_j , d.h. $Av_j = \lambda_j v_j \quad \forall j = 1, \dots, n$ (die λ_j müssen nicht verschieden sein). Sei $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$ die Matrix, die als Spalten die Vektoren v_1, \dots, v_n hat:

$$B = (v_1, \dots, v_n),$$

dann gilt

$$B^{-1}AB = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

d.h. "A wird durch B diagonalisiert".

Beispiel 2.6.15

- a) Wir nehmen von oben die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; $\lambda_1 = -1$, $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\lambda_2 = 3$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Die Eigenvektoren sind in der Tat, wie es Satz 2.6.13 vorhersagt, linear unabhängig und in diesem Fall sogar orthogonal. Mit

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad B^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

erhält man

$$B^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

- b) Sehen wir uns auch noch mal $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ an. Nur 2 war ein Eigenwert, mit algebraischer Vielfachheit 2 und geometrischer Vielfachheit 1, d.h. $\dim \text{Eig}(2) = 1$. Damit kann man hier keine zwei linear unabhängigen Eigenvektoren finden.

◇

Aufgrund des Satzes 2.5.16 ist die folgende Aussage sofort einsichtig.

Satz 2.6.16 A und A^T haben stets die gleichen Eigenwerte (mit gleichen Vielfachheiten).

2.7 Spezielle Matrizen

Definition 2.7.1

- a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. A heißt **orthogonal**, wenn $A^T A = E_n$ (d.h. $A^T = A^{-1}$).
- b) Sei $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$. A heißt **unitär**, wenn $\overline{A}^T A = E_n$ (d.h. $\overline{A}^T = A^{-1}$), wobei $\overline{A} := (\overline{a_{ij}})_{i,j=1,\dots,n}$ (d.h. komplexe Konjugation der Komponenten).

Da $\det A = \det A^T$ und $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$ gilt, erhalten wir die folgende Aussage.

Satz 2.7.2 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ orthogonal. Dann gilt: $|\det A| = 1$.

Orthogonale Matrizen A mit $\det A = 1$ können als Drehungen interpretiert werden. Orthogonale Matrizen A mit $\det A = -1$ stellen (Dreh-)Spiegelungen dar.

Beispiel 2.7.3

- a) Betrachten wir die Matrix $A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix}$. Da $A^T = A$ gilt, ist sie symmetrisch. Außerdem ist sie orthogonal, denn $A^T = A = A^{-1}$ gilt, wie man leicht nachprüfen kann:

$$AA^T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_2$$

Sehen wir uns an, was diese Matrix macht.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}; \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix},$$

siehe Abbildung 2.15.

Der Punkt $(\cos \frac{\varphi}{2}, \sin \frac{\varphi}{2})^T$ ist ein so genannter Fixpunkt der Abbildung $x \mapsto Ax$, weil er auf sich selbst abgebildet wird. Man kann sich durch Zeichnen einiger Resultate leicht veranschaulichen, dass diese Abbildung eine Spiegelung an der Achse $\left\{ r \begin{pmatrix} \cos \frac{\varphi}{2} \\ \sin \frac{\varphi}{2} \end{pmatrix} \mid r \in \mathbb{R} \right\}$ darstellt. (Beachten Sie, dass $\det A = -1$).

- b) Variieren wir die Matrix ein wenig.

$$A = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$$

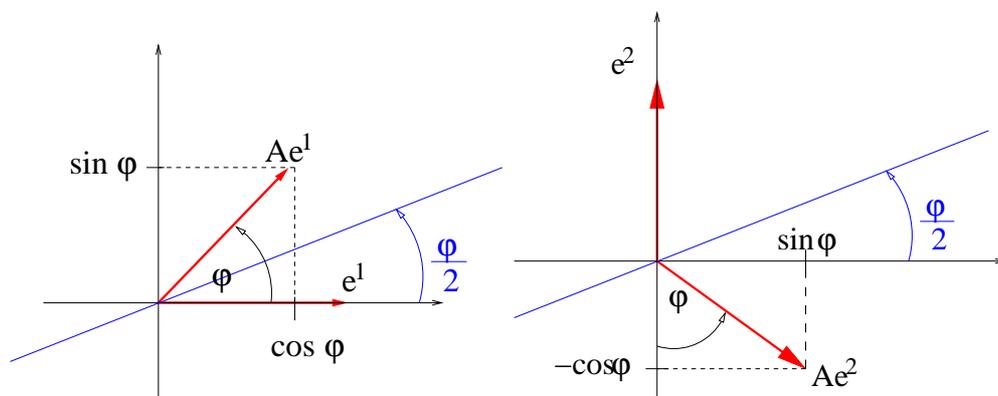


Abbildung 2.15: A bewirkt eine Spiegelung an der blau gezeichneten Achse.

ist zwar nicht symmetrisch, aber auch orthogonal, denn

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Auch hier sehen wir uns an, was die zugehörige lineare Abbildung macht.

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} + \varphi) \\ \sin(\frac{\pi}{2} + \varphi) \end{pmatrix},$$

siehe Abbildung 2.16.

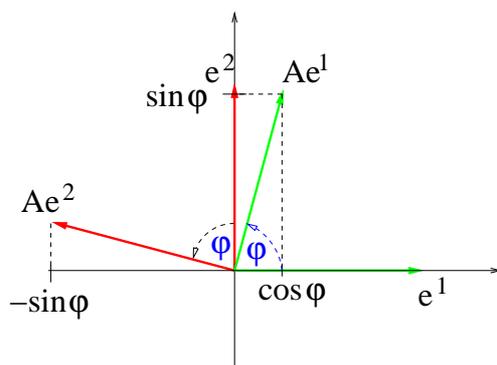


Abbildung 2.16: A bewirkt eine Drehung um den Winkel φ im Gegenuhrzeigersinn.

Beachten Sie, dass

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2} + 0) \\ \sin(\frac{\pi}{2} + 0) \end{pmatrix}$$

und $\det A = 1$. Geometrisch erhält man hier eine Drehung um den Winkel φ im Gegen-
uhrzeigersinn.

◇

Satz 2.7.4 (Hauptachsentransformation) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch.

Dann hat A nur reelle Eigenwerte. Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ diese Eigenwerte, gezählt nach der algebraischen Vielfachheit.

Dann existiert ein Orthonormalsystem von Eigenvektoren $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$, so dass

$$Av^{(j)} = \lambda_j v^{(j)} \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Schreibt man diese Eigenvektoren als Spalten der Matrix $B = (v^{(1)}, \dots, v^{(n)})$, so ist B orthogonal und diagonalisiert A :

$$B^T A B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Definition 2.7.5 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Die Abbildung $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) := \langle x, Ax \rangle$ heißt **quadratische Form** von A .

Beispiel 2.7.6

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \left| \begin{array}{cc} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{array} \right| = (2-\lambda)(1-\lambda) - 1 \\ &= \underbrace{\lambda^2}_{=(-1)^n \lambda^n} - \underbrace{3\lambda}_{(-1)^{n-1} (\text{tr} A) \lambda^{n-1}} + \underbrace{2-1}_{=\det A} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - 1}. \end{aligned}$$

Die Eigenwerte sind also

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Wir bestimmen die Eigenvektoren, zunächst zu $\lambda_1 = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$.

$$\begin{array}{cc|c} v_1 & v_2 & \\ \hline 2 - \frac{3+\sqrt{5}}{2} & -1 & 0 \\ -1 & 1 - \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \end{array} \begin{array}{l} \downarrow \\ / \cdot \left(2 - \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) \leftarrow + \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{cc|c} v_1 & v_2 & \\ \hline 2 - \frac{3+\sqrt{5}}{2} & -1 & 0 \\ 0 & -1 + 2 - 3 \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{2} + \frac{(3+\sqrt{5})^2}{4} & 0 \end{array}$$

Der rechte untere Eintrag der Matrix ist

$$-1 + 2 - \frac{9}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{4}(9 + 6\sqrt{5} + 5) = -\frac{7}{2} + \frac{7}{2} = 0$$

Wir erhalten damit nur eine Gleichung:

$$\Rightarrow v_2 = \left(2 - \frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right) v_1 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2} v_1$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{1^2 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2}} &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}(1 - 2\sqrt{5} + 5)}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix} =: v^{(1)} \end{aligned}$$

ein orthonormaler Eigenvektor.

Es muss einen dazu orthogonalen Eigenvektor für den Eigenwert $\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ geben. Da es nur eine orthogonale Richtung gibt, bleibt nur

$$v^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{5} \\ +2 \end{pmatrix}$$

(oder $-v^{(2)}$) übrig. Wir testen unser Resultat:

$$Av^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} -1 + \sqrt{5} \\ +2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} -2 + 2\sqrt{5} - 2 \\ +1 - \sqrt{5} + 2 \end{pmatrix}$$

$$\frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} -4+2\sqrt{5} \\ +3-\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

wobei

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot (-1+\sqrt{5}) = \frac{1}{2} (-3+4\sqrt{5}-5) = -4+2\sqrt{5}$$

und

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} \cdot 2 = +3-\sqrt{5}$$

Also ist $Av^{(2)} = \lambda_2 v^{(2)}$. Wir stellen nun die Matrix B auf und diagonalisieren damit A .

$$B = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ 1-\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}, \quad B^T = \frac{1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 2 & 1-\sqrt{5} \\ -1+\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} B^T A B &= \frac{1}{10-2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1-\sqrt{5} \\ -1+\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1+\sqrt{5} \\ 1-\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10-2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1-\sqrt{5} \\ -1+\sqrt{5} & 2 \end{pmatrix} \underbrace{\begin{pmatrix} 4-1+\sqrt{5} & -2+2\sqrt{5}-2 \\ -2+1-\sqrt{5} & 1-\sqrt{5}+2 \end{pmatrix}}_{= \begin{pmatrix} 3+\sqrt{5} & -4+2\sqrt{5} \\ -1-\sqrt{5} & 3-\sqrt{5} \end{pmatrix}} \\ &= \frac{1}{10-2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 6+2\sqrt{5}-1+5 & -8+4\sqrt{5}+3-4\sqrt{5}+5 \\ -3+2\sqrt{5}+5-2-2\sqrt{5} & 4-6\sqrt{5}+10+6-2\sqrt{5} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{10-2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 10+2\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 20-8\sqrt{5} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Einträge in der Hauptdiagonalen kann man mit dem "Wurzeltrick" vereinfachen:

$$\frac{5+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{(5+\sqrt{5})^2}{25-5} = \frac{1}{20} \cdot (25+2 \cdot 5 \cdot \sqrt{5}+5) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5} = \lambda_1$$

$$\frac{10-4\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} = \frac{(10-4\sqrt{5})(5+\sqrt{5})}{25-5} = \frac{1}{20} \cdot (50-10\sqrt{5}-4 \cdot 5) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{5} = \lambda_2$$

Also gilt

$$B^T A B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Eine solche Transformation kann man mit einem Basiswechsel interpretieren. Statt e^1 und e^2 als Basis zu nehmen, verwenden wir $v^{(1)}$ und $v^{(2)}$. Dies kann man wie folgt verständlich machen:

Betrachten wir zunächst die quadratische Form $\langle x, Ax \rangle =: f(x)$ und ihre Niveauflächen $N_c := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = c\}$. Es gilt

$$\begin{aligned} \langle x, Ax \rangle &= \left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 2x_1^2 - x_1x_2 - x_1x_2 + x_2^2 \stackrel{!}{=} c \\ &\Leftrightarrow x_2 = x_1 \pm \sqrt{x_1^2 - 2x_1^2 + c} = x_1 \pm \sqrt{c - x_1^2} \end{aligned}$$

wobei $x_1 \in [-\sqrt{c}, \sqrt{c}]$, d.h. die Gleichung der Niveaufläche ist nicht lösbar für $c < 0$. Wählen wir nun $v^{(1)}$ und $v^{(2)}$ als neue Koordinatenachsen ($(v^{(1)}, v^{(2)})$ ist eine ONB!).

$$x = \alpha v^{(1)} + \beta v^{(2)}; \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R};$$

$$\begin{aligned} \langle x, Ax \rangle = c &\Leftrightarrow \langle \alpha v^{(1)} + \beta v^{(2)}, A(\alpha v^{(1)} + \beta v^{(2)}) \rangle \\ &= \alpha^2 \langle v^{(1)}, Av^{(1)} \rangle + \alpha\beta \langle v^{(1)}, Av^{(2)} \rangle + \beta\alpha \langle v^{(2)}, Av^{(1)} \rangle + \beta^2 \langle v^{(2)}, Av^{(2)} \rangle \\ &= \alpha^2 \langle v^{(1)}, \lambda_1 v^{(1)} \rangle + \alpha\beta \left(\langle v^{(1)}, \lambda_2 v^{(2)} \rangle + \langle v^{(2)}, \lambda_1 v^{(1)} \rangle \right) + \beta^2 \langle v^{(2)}, \lambda_2 v^{(2)} \rangle \\ &= \alpha^2 \lambda_1 \underbrace{\langle v^{(1)}, v^{(1)} \rangle}_{=1} + \alpha\beta \left(\lambda_2 \underbrace{\langle v^{(1)}, v^{(2)} \rangle}_{=0} + \lambda_1 \underbrace{\langle v^{(2)}, v^{(1)} \rangle}_{=0} \right) + \beta^2 \lambda_2 \underbrace{\langle v^{(2)}, v^{(2)} \rangle}_{=1} \\ &= \alpha^2 \lambda_1 + \beta^2 \lambda_2 = c, \end{aligned}$$

d.h. α ist der Koeffizient der $v^{(1)}$ -Achse und β ist hier der Koeffizient der $v^{(2)}$ -Achse. Wir erhalten eine Ellipse, da λ_1 und λ_2 positiv sind; $v^{(1)}$ und $v^{(2)}$ sind die **Hauptachsen** (engl.: principal axes, Singular: ... axis) der Ellipse, siehe auch Abbildung 2.17.

Offensichtlich hängt die geometrische Form der Niveauflächen von den Eigenwerten von A ab, siehe auch [7], S. 344-345. \diamond

Definition 2.7.7 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. A heißt

- positiv definit**, wenn $\langle x, Ax \rangle > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- positiv semidefinit**, wenn $\langle x, Ax \rangle \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- negativ definit**, wenn $\langle x, Ax \rangle < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$
- negativ semidefinit**, wenn $\langle x, Ax \rangle \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$
- indefinit**, wenn es x und y in \mathbb{R}^n gibt mit

$$\langle x, Ax \rangle > 0 \text{ und } \langle y, Ay \rangle < 0.$$

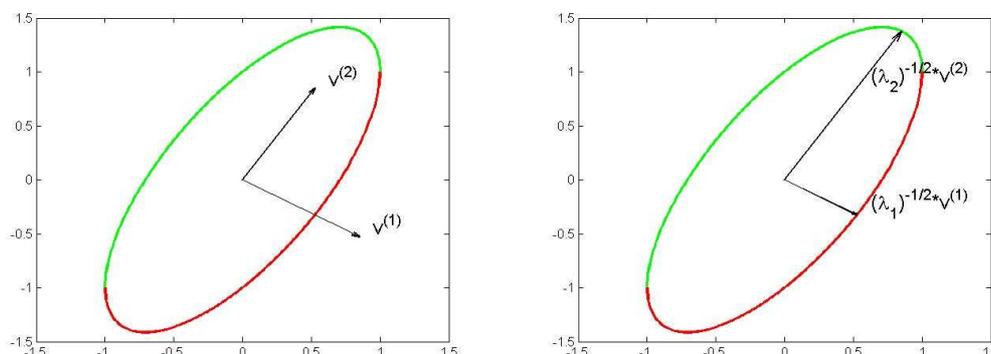


Abbildung 2.17: Ellipse mit Hauptachsen

Offensichtlich gilt:

- positiv definit \Rightarrow positiv semidefinit;
 \neq
- negativ definit \Rightarrow negativ semidefinit.
 \neq

Beispiel 2.7.8 Im letzten Beispiel ist A positiv definit, denn

$$\langle x, Ax \rangle = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2 \geq 0 \text{ und } = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

◇

Satz 2.7.9 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

- A ist positiv *semi*-definit.
- $-A$ ist negativ *semi*-definit.
- Für jede beliebige Matrix $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist $W^T A W$ positiv *semi*-definit.
- Alle Eigenwerte von A sind positiv/*nicht-negativ*.
- Die folgenden n Determinanten sind positiv/*nicht-negativ*:

$$a_{11}, \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \dots, \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1j} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & \cdots & a_{jj} \end{pmatrix}, \dots, \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \det A$$

(so genannte "Hauptminoren").

Achtung: Es gilt zwar

$$A = A^T \text{ negativ definit} \Leftrightarrow \text{alle Eigenwerte von } A \text{ negativ .}$$

aber:

$$A = A^T \text{ negativ definit} \not\Leftrightarrow \text{alle Hauptminoren von } A \text{ negativ .}$$

Man muss daher

$$A \text{ negativ definit} \Leftrightarrow -A \text{ positiv definit}$$

beim Hauptminorenkriterium benutzen.

Beispiel 2.7.10

a) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Wir berechnen die Hauptminoren:

$$1. \ 1 > 0 \checkmark$$

$$2. \ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 > 0 \checkmark$$

$$3. \ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (9 - 4) + 1 \cdot (0 - 3) = 5 - 3 = 2 > 0 \checkmark$$

Also ist A positiv definit.

b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

Da die erste Hauptminore negativ ist, betrachten wir

$$-A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Hauptminoren sind

$$1. \ 3 > 0 \checkmark$$

$$2. \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 11 > 0$$

$$3. \det(-A) = 22 > 0$$

Also ist A negativ definit.

c) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Die Hauptminoren sind

$$1. 2 > 0$$

$$2. \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

Also ist A indefinit, denn bei $-A$ wäre die 1. Hauptminore negativ.

d) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Die Hauptminoren sind

$$1. 4 > 0$$

$$2. \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 4 = 0$$

$$3. \det A = 0 \text{ (1. Zeile} = 2 \cdot \text{(2. Zeile))}.$$

Also ist A positiv semidefinit.

◇

2.8 Die Normalgleichung

Beispiel 2.8.1 Wir haben eine Messkurve, siehe Abbildung 2.18, für die Messung einer unbekanntes Funktion f , hier $f \in \mathbb{P}_3$. Wir verwenden also den Ansatz

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Für f muss gelten

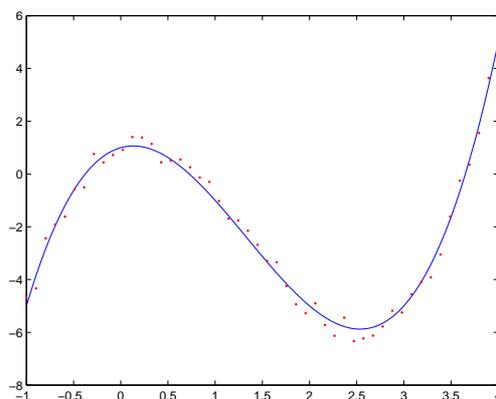


Abbildung 2.18: Eine Messreihe und der Graph eines kubischen Polynoms als Approximationsversuch

$$f(x_i) = y_i \quad \forall i = 1, \dots, n \quad (n \text{ deutlich größer als } 4),$$

das heißt

$$ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d = y_i \quad \forall i = 1, \dots, n.$$

Dies ist ein überbestimmtes LGS:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x_1^3 & x_1^2 & x_1 & 1 \\ x_2^3 & x_2^2 & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_n^3 & x_n^2 & x_n & 1 \end{pmatrix}}_{=:A} \underbrace{\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}}_{=:x} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}}_{=:y}$$

Dieses ist im Allgemeinen nicht lösbar: Wegen Messfehlern gibt es kein Polynom $f \in \mathbb{P}_3$, dessen Graph durch diese Punkte verläuft. Also ist eine Interpolation ($f(x_i) = y_i \forall i$) nicht möglich. Stattdessen geht nur eine Approximation ($f(x_i) \approx y_i \forall i$).

Präzise ist unsere Aufgabe folgende: Minimiere den quadratischen Fehler: Suche $f \in \mathbb{P}_3$, so dass

$$\sum_{i=1}^n \underbrace{\left(f(x_i) - y_i \right)^2}_{\text{Approximationsfehler bei } x_i} \leq \sum_{i=1}^n (g(x_i) - y_i)^2 \quad \forall g \in \mathbb{P}_3, \text{ d.h.}$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n \left(\underbrace{ax_i^3 + bx_i^2 + cx_i + d}_{\substack{\text{(i-te Zeile von A) \cdot x} \\ \text{= i-te Komp. von Ax}}} - y_i \right)^2}_{=\|Ax-y\|^2} \quad \text{minimieren!}$$

Die Aufgabe kann man etwas allgemeiner formulieren: Sei g_0, \dots, g_k eine Funktionenbasis (oben: $g_j(x) = x^j; j = 0, \dots, 3$). Eine Funktion $f = \sum_{j=0}^k a_j g_j$ ist gesucht, so dass

$$\underbrace{\sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=0}^k a_j g_j(x_i) - y_i \right)^2}_{=\|Ax-y\|^2} \quad \text{minimal wird}$$

mit $A = (g_j(x_i))_{\substack{i=1, \dots, n \\ j=0, \dots, k}}, x = (a_j)_{j=0, \dots, k}, y = (y_i)_{i=1, \dots, n}$.

Man spricht hier von einem **Ausgleichsproblem** oder einer **least-square-approximation**. Die Lösung heißt **Bestapproximation**. ◇

Satz 2.8.2 Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}, n > m$ und $y \in \mathbb{R}^n$. Ist $x \in \mathbb{R}^m$ Lösung des Ausgleichsproblems

$$„Finde $x \in \mathbb{R}^m$, so dass $\|Ax - y\| = \min \{ \|A\tilde{x} - y\| : \tilde{x} \in \mathbb{R}^m \}$ „,$$

so erfüllt x die **Normalgleichung**

$$A^T Ax = A^T y.$$

Das Ausgleichsproblem ist stets lösbar.

Beachten Sie den Unterschied zur Normalengleichung $\langle x, n \rangle = b$ einer Ebene oder Gerade.

Beispiel 2.8.3 (lineare Regression)

Hier ist $f \in \mathbb{P}_1$ zu gegebenen Messwerten gesucht, siehe Abbildung 2.19. Z.B. hat man ein Intervall $[0, 1]$ mit äquidistanter Unterteilung $x_i = \frac{i}{n}; i = 0, \dots, n$ und entsprechend $n + 1$ Messungen y_0, \dots, y_n .

Gesucht ist $x = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ (von $f(x) = ax + b$) mit $A^T Ax = A^T y$;

$$A = \begin{pmatrix} x_0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0}{n} & 1 \\ \frac{1}{n} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \frac{n}{n} & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 0 & n \\ 1 & n \\ \vdots & \vdots \\ n & n \end{pmatrix}, \quad A^T = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & n \\ n & n & \dots & n \end{pmatrix},$$

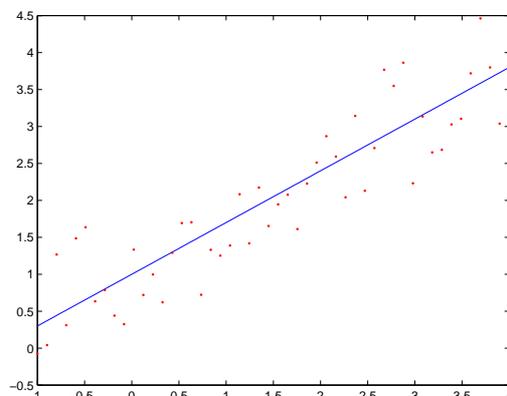


Abbildung 2.19: Eine Messreihe und der Graph eines Polynoms ersten Grades als Approximationsversuch

$$\begin{aligned}
 A^T A &= \frac{1}{n^2} \begin{pmatrix} 0^2 + 1^2 + \dots + n^2 & (0 + 1 + \dots + n) \cdot n \\ (0 + 1 + \dots + n) \cdot n & n^2 + n^2 + \dots + n^2 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{n^2} \begin{pmatrix} \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} & \frac{n^2(n+1)}{2} \\ \frac{n^2(n+1)}{2} & n^2(n+1) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{n+1}{n} \begin{pmatrix} \frac{2n+1}{6} & \frac{n}{2} \\ \frac{n}{2} & n \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

wobei wir beim zweiten Gleichheitszeichen Satz 1.4.4 und Aufgabe 8a benutzt haben. Da

$$\begin{aligned}
 \det(A^T A) &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 \left(\frac{(2n+1)}{6} \cdot n - \frac{n^2}{4}\right) \\
 &= \frac{n(n+1)^2}{n^2} \left(\frac{n}{3} + \frac{1}{6} - \frac{n}{4}\right) = \frac{(n+1)^2}{n} \left(\frac{n}{12} + \frac{1}{6}\right) \neq 0 \quad \forall n
 \end{aligned}$$

hat die Normalgleichung genau eine Lösung.

Da das Ausgleichsproblem lösbar ist, liefert die eindeutige Lösung der Normalgleichung die Lösung des Ausgleichsproblems. \diamond

Beachten Sie, dass $A^T A$ symmetrisch ist, da

$$(A^T A)^T = A^T (A^T)^T = A^T A.$$

Dies erspart Arbeit beim Ausrechnen von $A^T A$.

Kapitel 3

Folgen und Reihen

3.1 Konvergenz und Divergenz von Folgen

Sehen wir uns als Beispiel eine Messreihe an (Abbildung 3.1).

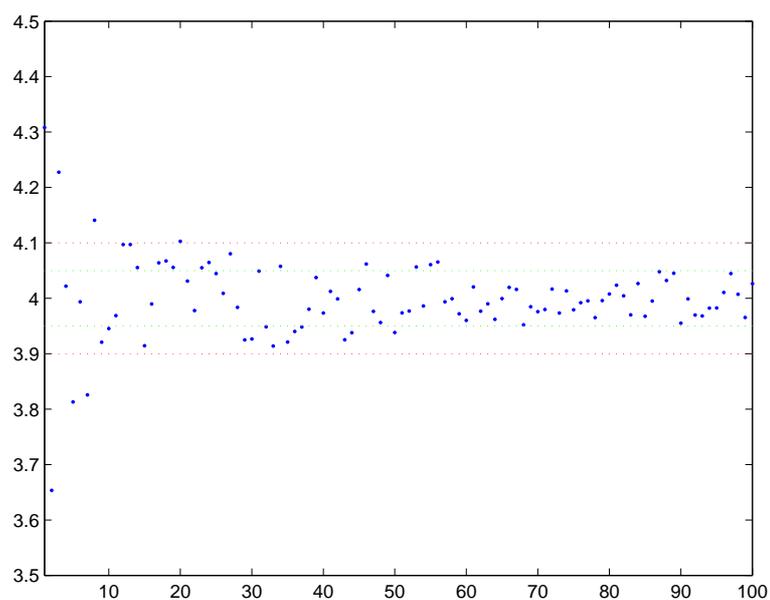


Abbildung 3.1: Folge/Messreihe (a_n): Zum Grenzwert α sind die Werte $\alpha \pm \varepsilon$ für zwei verschiedene Werte ε eingezeichnet. Damit α Grenzwert ist, muss die Folge für jedes noch so kleine $\varepsilon > 0$ irgendwann endgültig innerhalb der Schranken $\alpha - \varepsilon < a_n < \alpha + \varepsilon$ verbleiben.

Die Frage könnte hier sein: Pendeln sich die Messungen bei einem bestimmten Wert ein?

Definition 3.1.1 Eine Folge $(a_n)_n \left(\begin{array}{l} (a_n)_n : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C} \\ n \mapsto a_n \end{array} \right)$ heißt **konvergent** gegen $\alpha \in \mathbb{C}$,

wenn gilt:

Zu jedem $\left(\begin{array}{l} \varepsilon > 0 \\ \varepsilon \in \mathbb{R} \end{array} \right)$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ (genau $n_0(\varepsilon)$), so dass für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt:

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon$$

(gleichwertig: $\dots |a_n - \alpha| \leq \varepsilon$)

ebenso: $\dots |a_n - \alpha| \leq \gamma\varepsilon$ ($\gamma > 0$ Konstante)

ebenso: $\dots |a_n - \alpha| < \gamma\varepsilon$ ($\gamma > 0$ Konstante)

kurz: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 \quad |a_n - \alpha| < \varepsilon$.

Wir schreiben $\alpha = \lim a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$; $a_n \rightarrow \alpha$, $a_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \alpha$. α heißt **Grenzwert (Limes)** von (a_n) . Folgen mit dem Limes 0 heißen **Nullfolgen**.

Anschaulich gesprochen: "In jeden noch so kleinen ε -Schlauch um α taucht die Folge irgendwann endgültig ein" (siehe auch Abbildung 3.1).

(Beachte: Mit $\varepsilon > 0$ wird automatisch auch $\varepsilon \in \mathbb{R}$ gefordert, da auf \mathbb{C} keine Totalordnung existiert.)

Beispiel 3.1.2

a)

$$a_n := \frac{1}{n+1}, \quad n \geq 0$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig aber fest.

Es gilt **für alle** $n \geq \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil =: n_0(\varepsilon)$, dass: $n \geq \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon}$

$$\Rightarrow n+1 \geq \frac{1}{\varepsilon} \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \leq \varepsilon \Leftrightarrow \left| \frac{1}{n+1} - 0 \right| \leq \varepsilon$$

also: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

$\lceil \cdot \rceil$ steht hierbei für das Aufrunden zur nächsten ganzen Zahl.

b) Für $a_n := \frac{1}{n}$, $n \geq 1$ ist analog $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

c) Sei $a_n := \alpha$ konstant.

Für beliebige $\varepsilon > 0$ gilt: $\forall n \geq 0 =: n_0$:

$$|a_n - \alpha| = |\alpha - \alpha| = 0 < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \lim a_n = \alpha.$$

◇

Satz 3.1.3 (Grenzwertsätze (GWS)) Seien (a_n) und (b_n) konvergente Folgen in \mathbb{C} , $\alpha = \lim a_n$, $\beta = \lim b_n$. Dann gilt

a) $(a_n + b_n)$, $(a_n - b_n)$ und $(a_n \cdot b_n)$ sind konvergent und

$$\lim \left(a_n \overset{\pm}{\cdot} b_n \right) = \alpha \overset{\pm}{\cdot} \beta.$$

b) Ist $b_n \neq 0 \forall n$ und $\beta \neq 0$, so ist $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ auch konvergent und

$$\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}.$$

Beispiel 3.1.4

a) Sei $a_n := \frac{2}{n+1} + i \frac{1}{n^2}$, $n \geq 1$. Wir wissen

$$\frac{2}{n+1} = \underbrace{2}_{\rightarrow 2 \text{ (konst. Folge)}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\rightarrow 0} \rightarrow 2 \cdot 0 = 0,$$

$$\frac{1}{n^2} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0} \rightarrow 0,$$

$$i \cdot \frac{1}{n^2} \rightarrow i \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \lim a_n = 0 + i \cdot 0 = 0.$$

b)

$$a_n := \frac{2n^2 + 3n + 4}{4n^2 + 2n + 1}$$

Wir kürzen hier durch die höchste Potenz des Nenners und erhalten

$$a_n = \frac{2 + 3 \cdot \frac{1}{n} + 4 \cdot \frac{1}{n^2}}{4 + 2 \cdot \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} \rightarrow \frac{2 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 0}{4 \cdot 2 \cdot 0 + 0} = \frac{1}{2}.$$

c) $a_0 := 1$, $a_n := \frac{1}{2} a_{n-1}$. Dies ist eine **rekursive** Folge. Mit Induktion erhält man: $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$

◇

Die GWS gelten nicht umgekehrt, z.B. $(a_n \cdot b_n)$ konvergent $\not\Rightarrow$ (a_n) und (b_n) konvergent: $a_n := n$, $b_n := \frac{1}{n}$, $a_n \cdot b_n = 1 \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$, aber $(a_n) = (n)$ nicht konvergent.

Definition 3.1.5

- a) Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{C}$ heißt **divergent**, wenn es kein $\alpha \in \mathbb{C}$ gibt, so dass $\alpha = \lim a_n$.
 b) Eine **reelle** Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ heißt **bestimmt divergent**, wenn

$$b1) a_n \rightarrow +\infty : \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty : \Leftrightarrow \forall M > 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : a_n \geq M$$

oder

$$b2) a_n \rightarrow -\infty : \Leftrightarrow \lim a_n = -\infty : \Leftrightarrow \forall M < 0 \exists n_0 \forall n \geq n_0 : a_n \leq M$$

Anschaulich gesprochen: "Jede noch so hohe (bzw. niedrige) Schranke wird irgendwann endgültig überwunden" (siehe auch Abbildung 3.2).

- c) Eine reelle Folge, die divergent, aber nicht bestimmt divergent ist, heißt **unbestimmt divergent**.

Beispiel 3.1.6

Sei $a_n := n^2$. Sei $M > 0$ beliebig. Es gilt:

$$\forall n \geq \lceil \sqrt{M} \rceil : n \geq \sqrt{M} \Rightarrow a_n = n^2 \geq M$$

also: $\lim n^2 = +\infty$

◇

Definition 3.1.7 Eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ heißt

- a) **nach oben beschränkt**, wenn es ein $\gamma \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n \leq \gamma$ für alle n .
 b) **nach unten beschränkt**, wenn es ein $\gamma \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n \geq \gamma$ für alle n .
 c) **beschränkt**, wenn sie nach oben und nach unten beschränkt ist.

Die Beschränktheit von Folgen ist also analog zum Beschränktheitsbegriff bei Mengen.

Beispiel 3.1.8

$a_n := n$ ist nach unten beschränkt: $0 \leq a_n \forall n$
 $b_n := -\frac{1}{n+1}$ ist beschränkt: $-1 \leq b_n < 0 \forall n$

◇

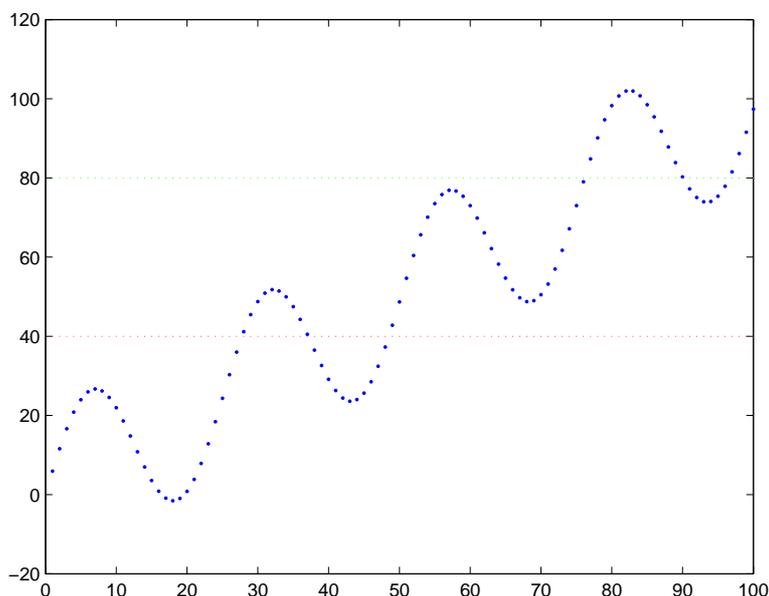


Abbildung 3.2: Gegen $+\infty$ bestimmt divergente Folge (a_n) : Die Folge wächst (jeweils endgültig ab einem bestimmten Index) über alle Grenzen.

Satz 3.1.9

I) Seien (a_n) und (b_n) reelle Folgen. Dann gilt:

a) $a_n \rightarrow +\infty, b_n \rightarrow b \in \mathbb{R}$ (oder $b_n \rightarrow +\infty$) $\Rightarrow a_n + b_n \rightarrow +\infty$

b) $a_n \rightarrow +\infty, b_n \rightarrow b \in \mathbb{R}^+$ (oder $b_n \rightarrow +\infty$) $\Rightarrow a_n \cdot b_n \rightarrow +\infty$

c) $a_n \rightarrow +\infty, b_n \rightarrow b \in \mathbb{R}^-$ (oder $b_n \rightarrow -\infty$) $\Rightarrow a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty$

d) $|a_n| \rightarrow +\infty, b_n \rightarrow b \in \mathbb{R}, a_n \neq 0 \forall n \Rightarrow \frac{b_n}{a_n} \rightarrow 0$

II) (a_n) (komplexe) Nullfolge, (b_n) beschränkt $\Rightarrow (a_n \cdot b_n)$ Nullfolge.

Korollar 3.1.10 Seien $(a_n), (b_n)$ reelle Folgen.

(i) $a_n \rightarrow -\infty, b_n \rightarrow b \in \mathbb{R}$ (oder $b_n \rightarrow -\infty$) $\Rightarrow a_n + b_n \rightarrow -\infty$

(ii) $a_n \rightarrow -\infty, b_n \rightarrow b \in \mathbb{R}^+$ (oder $b_n \rightarrow +\infty$) $\Rightarrow a_n \cdot b_n \rightarrow -\infty$

(iii) $a_n \rightarrow -\infty, b_n \rightarrow b \in \mathbb{R}^-$ (oder $b_n \rightarrow -\infty$) $\Rightarrow a_n \cdot b_n \rightarrow +\infty$

(iv) (a_n) konvergent, $\lim a_n \neq 0$, (b_n) bestimmt divergent, $a_n \neq 0 \forall n \Rightarrow \lim \frac{b_n}{a_n}$ geht aus der folgenden Tabelle hervor:

		lim b_n	
		$+\infty$	$-\infty$
lim a_n	> 0	$+\infty$	$-\infty$
	< 0	$-\infty$	$+\infty$

Beispiel 3.1.11

a)

$$a_n = \underbrace{n^2}_{\rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{(6n!)_{\rightarrow +\infty}}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty$$

b)

$$\underbrace{n^2}_{\rightarrow +\infty} \cdot \underbrace{\log \frac{1}{n}}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow -\infty$$

Achtung! Es gibt keine allgemeinen Regeln für die folgenden Fälle:

1. $a_n + b_n$, wobei $a_n \rightarrow +\infty$, $b_n \rightarrow -\infty$

Beispiele:

- $a_n = n$, $b_n = -n$, $a_n + b_n = n - n = 0 \rightarrow 0$
- $a_n = 2n$, $b_n = -n$, $a_n + b_n = 2n - n = n \rightarrow +\infty$
- $a_n = n$, $b_n = -2n$, $a_n + b_n = n - 2n = -n \rightarrow -\infty$

2. $a_n \cdot b_n$, $|a_n| \rightarrow +\infty$, $b_n \rightarrow 0$

Beispiele:

- $a_n = n$, $b_n = \frac{1}{n}$, $a_n \cdot b_n = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \rightarrow 1$
- $a_n = n^2$, $b_n = \frac{1}{n}$, $a_n \cdot b_n = n \rightarrow +\infty$
- $a_n = n$, $b_n = \frac{1}{n^2}$, $a_n \cdot b_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$

3. $\frac{b_n}{a_n}$, $|a_n| \rightarrow \infty$, $|b_n| \rightarrow \infty$

Beispiele:

- $a_n = n$, $b_n = n$, $\frac{b_n}{a_n} = 1 \rightarrow 1$

- $a_n = n^2, b_n = n, \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0$
- $a_n = n, b_n = n^2, \frac{b_n}{a_n} = n \rightarrow +\infty$

4. $\frac{b_n}{a_n}, a_n \rightarrow 0, (b_n)$ konvergent

- $a_n = \frac{1}{n}, b_n = \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{b_n}{a_n} = 1 \rightarrow 1$
- $a_n = \frac{1}{n}, b_n = 1 \Rightarrow \frac{b_n}{a_n} = n \rightarrow +\infty$
- $a_n = -\frac{1}{n}, b_n = 1 \Rightarrow \frac{b_n}{a_n} = -n \rightarrow -\infty$
- $a_n = \frac{(-1)^n}{n}, b_n = 1 \Rightarrow \frac{b_n}{a_n} = n \cdot (-1)^n$ unbestimmt divergent
- $a_n = \frac{1}{n}, b_n = \frac{1}{n^2} \Rightarrow \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0.$

◇

Beispiel 3.1.12

a)

$$a_n = \frac{2n^3 + 6n + 7}{1n^2 + 2n + 3} = \frac{\overbrace{2n^3}^{\rightarrow +\infty \text{ (Satz 3.1.9.I.a)}} + \overbrace{6n}^{\rightarrow 0} + \overbrace{7}^{\rightarrow 0}}{\underbrace{1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}}_{\rightarrow 1 \text{ (Grenzwertsätze)}}} \Rightarrow a_n = \underbrace{\frac{1}{1 + \frac{2}{n} - \frac{3}{n^2}}}_{\frac{1}{1} \text{ (Grenzwertsätze)}} \cdot \underbrace{\left(2n + \frac{6}{n} + \frac{7}{n^2}\right)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty \text{ (Satz 3.1.9.I.b)}$$

b)

$$a_n = \frac{n^2 + 8n + 2}{n^4 + 6n} = \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{8}{n^3} + \frac{2}{n^4}}{1 + \frac{6}{n^3}} \rightarrow \frac{0 + 0 + 0}{1 + 0} = 0$$

nach den Grenzwertsätzen.

Allgemein kann man für rationale Ausdrücke $r_n := \frac{P(n)}{Q(n)}$ (P Polynom vom Grad ν , Q Polynom vom Grad μ) mit

$$P(z) = a_\nu z^\nu + \dots + a_0; \quad a_\nu \neq 0$$

$$Q(z) = b_\mu z^\mu + \dots + b_0; \quad b_\mu \neq 0$$

folgendes überlegen:

$$r_n = \frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{a_\nu n^{\nu-\mu} + a_{\nu-1} n^{\nu-1-\mu} + \dots + a_0 n^{-\mu}}{b_\mu + b_{\mu-1} n^{-1} + \dots + b_0 n^{-\mu}} =: \tilde{P}(n) \\ =: \tilde{Q}(n)$$

1. Fall: $\nu > \mu$:

$$\tilde{P}(n) \rightarrow \begin{cases} +\infty, & \text{falls } a_\nu > 0 \quad (\text{Satz 3.1.9.I.b}) \\ -\infty, & \text{falls } a_\nu < 0 \quad (\text{Satz 3.1.9.I.c}) \end{cases} \\ \tilde{Q}(n) \rightarrow b_\mu \neq 0$$

$$\text{also: } r_n \rightarrow \begin{cases} +\infty, & \text{falls } a_\nu b_\mu > 0 \quad (\text{d.h. gleiche Vorzeichen}) \\ -\infty, & \text{falls } a_\nu b_\mu < 0 \end{cases}$$

nach Korollar 3.1.10 (iv).

2. Fall: $\nu < \mu$:

$$\tilde{P}(n) \rightarrow 0, \quad \tilde{Q}(n) \rightarrow b_\mu \neq 0 \stackrel{\text{GWS}}{\Rightarrow} r_n \rightarrow 0.$$

3. Fall: $\nu = \mu$:

$$\tilde{P}(n) \rightarrow a_\nu, \quad \tilde{Q}(n) \rightarrow b_\mu \neq 0 \stackrel{\text{GWS}}{\Rightarrow} r_n \rightarrow \frac{a_\nu}{b_\mu}$$

◇

Definition 3.1.13 Eine reelle Folge (a_n) heißt

- monoton wachsend (steigend), falls gilt: Ist $n_1 < n_2$, so ist $a_{n_1} \leq a_{n_2}$.
- streng monoton wachsend (steigend), falls gilt: Ist $n_1 < n_2$, so ist $a_{n_1} < a_{n_2}$.
- monoton fallend, falls gilt: Ist $n_1 < n_2$, so ist $a_{n_1} \geq a_{n_2}$.
- streng monoton fallend, falls gilt: Ist $n_1 < n_2$, so ist $a_{n_1} > a_{n_2}$.

Beispiel 3.1.14

$a_n := \frac{1}{n}$ ist streng monoton fallend.

$b_n := n$ ist streng monoton wachsend.

$c_n := 1$ ist monoton fallend und monoton wachsend.

$d_n := (-1)^n$ hat keine Monotonieeigenschaft.

◇

Satz 3.1.15 (Satz von der monotonen Konvergenz) Eine monoton wachsende, nach oben beschränkte reelle Folge (a_n) ist konvergent: $\sup a_n = \lim a_n$.

(\Rightarrow Eine monoton fallende, nach unten beschränkte reelle Folge (a_n) ist konvergent: $\inf a_n = \lim a_n$.)

Satz 3.1.16 (Einschließungssatz, Sandwich Theorem) Seien (a_n) , (b_n) und (c_n) reelle Folgen und $a_n \leq b_n \leq c_n$ ($\forall n \geq N$, N fest). Sind (a_n) und (c_n) konvergent und $\lim a_n = \lim c_n$, dann ist (b_n) konvergent und $\lim a_n = \lim b_n = \lim c_n$.

Satz 3.1.17 Die Folge $(a_n)_{n \geq 1}$ mit $a_n := \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist konvergent.

Definition 3.1.18 Ihr Grenzwert $e := \lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ wird als **Euler'sche Zahl** bezeichnet.

Es gilt $e \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, d.h. e ist irrational. Man erhält

$$a_{10} \approx 2,5937, \quad a_{100} \approx 2,7048, \quad a_{1000} \approx 2,7169$$

$$e \approx 2,7182818$$

Die folgenden elementaren "Grenzwerte" sollte man kennen:

a_n	$\lim a_n$
$a = \text{const.}$	a
$\frac{1}{n}$	0
n	$+\infty$
$a^n, a > 1$	$+\infty$
$a^n, a = 1$	1
$a^n, a < 1$	0
$a^n, a \leq -1$	unbestimmt divergent
$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$	e

3.2 Reihen

Beispiel 3.2.1 Mit vollständiger Induktion kann man zeigen, dass

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \forall q \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \quad (0^0 := 1).$$

Betrachten wir nun die Folge

$$\left(\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \right)_n = \left(\sum_{k=0}^n q^k \right)_n$$

Für $|q| < 1$ liegt Konvergenz gegen $\frac{1-0}{1-q} = \frac{1}{1-q}$ vor.

Für $q > 1$ liegt bestimmte Divergenz gegen $+\infty$ vor, da $-q^{n+1} \rightarrow -\infty$ und $1 - q < 0$.

Für $q \leq -1$ haben wir unbestimmte Divergenz wegen des permanenten Vorzeichenwechsels von q^{n+1} .

Also gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1}{1-q}, & \text{falls } |q| < 1 \\ +\infty, & \text{falls } q > 1 \end{cases}$$

kurz:

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n q^k$$

Man spricht hier von der **geometrischen Reihe**. Für $q = \frac{1}{2}$ ist dies in Abbildung 3.3 veranschaulicht. \diamond

Definition 3.2.2 Sei $(a_k)_{k \geq m}$ eine Folge (reell oder komplex). Hieraus wird die Folge $(\sum_{k=m}^n a_k)_{n \geq m}$ gebildet ("Folge der Partialsummen"). Ist diese neue Folge konvergent, so spricht man von einer konvergenten **Reihe**. Man schreibt

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k := \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=m}^n a_k$$

und sagt kurz: " $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergiert". Ansonsten spricht man von einer divergenten Reihe.

Unterscheiden Sie stets die Folgen $(a_k)_k$ und $(\sum_{k=m}^n a_k)_n$; in obigem Beispiel ist $a_k = q^k$, $m = 0$, $\sum_{k=0}^n a_k = \sum_{k=0}^n q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$; $(q^k)_k$ konvergiert für $|q| < 1$ gegen 0, $(\sum_{k=0}^n q^k)_n$ konvergiert für $|q| < 1$ gegen $\frac{1}{1-q}$.

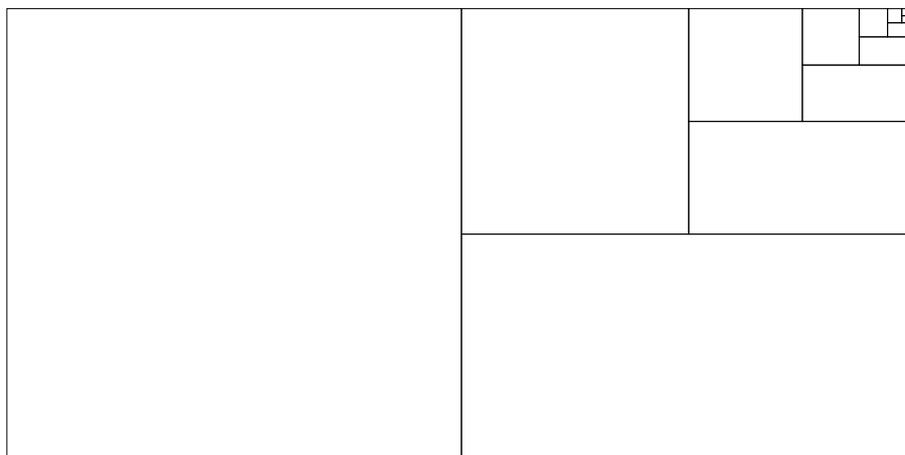


Abbildung 3.3: Eine geometrische Reihe kann wie folgt veranschaulicht werden: Beginnend mit einem Rechteck der Fläche 1 werden nach und nach Rechtecke, die jeweils die q -fache Fläche ihres Vorgängers haben, hinzugefügt, ohne dass dies abbricht. Das Bild zeigt (bis einschließlich den Summanden q^{12}) den Fall $q = \frac{1}{2}$, in dem $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{2-1} = 2$ gilt.

Satz 3.2.3 Sei $(a_k)_{k \geq m}$ eine Folge. Es gilt:

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k \text{ konvergiert} \Rightarrow (a_k)_k \text{ Nullfolge, d.h. } a_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Beispiel 3.2.4

a) Betrachten wir die so genannte **harmonische Reihe**.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = ?$$

Wir teilen die Reihe auf:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{\geq \frac{1}{4}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right)}_{\geq 2 \cdot \frac{1}{8}} + \dots$$

$$\begin{aligned}
& \dots + \frac{1}{2^n} + \left(\frac{1}{2^n + 1} + \dots + \frac{1}{2^{n+1} - 1} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) + \dots \\
& \geq \underbrace{\left(2^{n+1} - (2^n + 1) + 1 \right)}_{\text{Anzahl der Summanden}} \frac{1}{2^{n+1}} \\
& = \frac{2^{n+1} - 2^n}{2^{n+1}} = \frac{2^n(2^1 - 1)}{2^{n+1}} \\
& = \frac{1}{2} \\
& \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \dots = +\infty.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

divergent, obwohl $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0$ (daher gilt \nrightarrow in Satz 3.2.3).

b) Allgemein ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^\alpha}$ konvergent für $\alpha > 1$. Auf den Beweis wird hier verzichtet.

◇

Es gibt verschiedene Kriterien für die Konvergenz von Reihen, wovon hier einige aufgelistet werden.

Satz 3.2.5 Seien (a_k) , (b_k) reelle Folgen, so dass $0 \leq a_k \leq b_k$ für alle k gilt (zumindest ab einem Index k_0 , d.h. $\exists k_0 \forall k \geq k_0 : 0 \leq a_k \leq b_k$).

- a) Wenn $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ divergiert, dann divergiert $\sum_{k=m}^{\infty} b_k$ (**Minorantenkriterium**).
- b) Wenn $\sum_{k=m}^{\infty} b_k$ konvergiert, dann konvergiert $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ (**Majorantenkriterium**).

Es erscheint schlüssig, dass dies gilt. Wenn die kleinere Summe schon divergiert (und bei positiven Summanden heißt das immer, die Reihe ist unendlich), dann muss dies erst recht auch für die größere Reihe gelten. Und umgekehrt: Wenn das Aufsummieren der größeren Summanden noch etwas Endliches liefert, so muss die Reihe über die kleineren Summanden erst recht endlich bleiben. Wichtig ist jedoch bei beiden Kriterien, dass die Summanden nicht-negativ sind. Ein simples Argument hierfür: Wenn die a_k alle negativ sind, dann ist es belanglos, wenn die Reihe über die b_k konvergiert, weil das Summieren der a_k bei $-\infty$ landen kann.

Sehen wir uns ein paar Beispiele an:

Beispiel 3.2.6

- a) Betrachte $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\log k}$. Es gilt für alle $k \geq 2$: $0 < \log k < k \Leftrightarrow \frac{1}{\log k} > \frac{1}{k}$. Da $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$ ($= -1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$) divergente Minorante ist, gilt $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{\log k} = +\infty$.

- b) Sehen wir uns $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ an. Es gilt $k! \geq k^2$ für alle $k \geq 4$ und damit $\frac{1}{k!} \leq \frac{1}{k^2}$. Folglich ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ eine konvergente Majorante. Also konvergiert $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}$ ($= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$).

◇

Den Grenzwert der letzten Reihe kann man auch bestimmen. Den Beweis sparen wir uns hier, schenken jedoch dem Resultat Beachtung.

Satz 3.2.7

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = e.$$

Rechen Sie mal selbst Summen $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}$ aus und vergleichen Sie mit $(1 + \frac{1}{n})^n$ und e .

Definition 3.2.8 Eine Reihe $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ heißt **absolut konvergent**, wenn die Reihe $\sum_{k=m}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Eine konvergente und nicht absolut konvergente Reihe heißt **bedingt konvergent**.

Bisher haben wir nur Beispiele von Reihen gehabt, bei denen die Summanden alle positiv waren, für die also kein Unterschied zwischen Konvergenz und absoluter Konvergenz bestand. Die meisten Kriterien funktionieren außerdem nur für nicht-negative oder gar nur für positive Summanden. Eine Ausnahme stellt das Leibniz-Kriterium dar, das nur für alternierende Reihen verwendbar ist, also für Reihen, bei denen das Vorzeichen von einem Summanden zum nächsten immer wieder wechselt.

Satz 3.2.9 (Leibniz-Kriterium für alternierende Reihen) Sei die Reihe $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ **alternierend** (d.h. $\operatorname{sgn}(a_k \cdot a_{k+1}) = -1 \forall k$, d.h. ständige Vorzeichenwechsel) und die Folge der Beträge der Summanden $(|a_k|)_{k \geq m}$ **monoton fallend** und eine **Nullfolge**. Dann ist die Reihe $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$ konvergent. Ferner gilt

$$\frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k}{a_{n+1}} \in [0, 1] \quad \forall n. \quad (3.1)$$

Es müssen also stets drei Bedingungen überprüft werden, um mit dem Leibniz-Kriterium auf Konvergenz zu schließen. Der letzte Teil der Aussage ist übrigens hilfreich, wenn man den Fehler beim Abbrechen einer Reihe bestimmen will. Häufig kommt es nämlich in der Praxis vor, dass man an dem Wert einer konvergenten Reihe interessiert ist. Natürlich kann man nicht in endlicher Zeit unendlich viele Zahlen aufsummieren. Deswegen bricht man die Reihe ab. Man berechnet also nur $\sum_{k=m}^n a_k$ statt $\sum_{k=m}^{\infty} a_k$. Der Fehler, den man hierbei macht, d.h. der Abstand zwischen der Näherung und dem tatsächlichen Wert, ist $\sum_{k=m}^{\infty} a_k - \sum_{k=m}^n a_k = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Nach (3.1) kann dieser Fehler nicht mehr als a_{n+1} sein, wenn das Leibniz-Kriterium erfüllt ist.

Wir sehen uns auch für dieses Kriterium zwei Beispiele an.

Beispiel 3.2.10

a) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ ist nicht absolut konvergent, denn

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$$

ist die harmonische Reihe.

Prüfen wir mit dem Leibniz-Kriterium, ob sie konvergent ist:

- (i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ ist alternierend,
- (ii) Die Folge $\left(\left| \frac{(-1)^k}{k} \right| \right) = \left(\frac{1}{k} \right)$ ist monoton fallend und
- (iii) $\left| \frac{(-1)^k}{k} \right| = \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$.

Also ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ konvergent und folglich bedingt konvergent.

b) Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2}$ ist absolut konvergent, da

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k}{k^2} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

bekanntermaßen konvergent ist (siehe oben). Außerdem kann man wie im Teil a) nachweisen, dass die Reihe nach Leibniz konvergiert.

◇

Das Beispiel zeigt, dass konvergente Reihen nicht zwingend absolut konvergent sein müssen. In der Tat stellen absolut konvergente Reihen einen echten Spezialfall konvergenter Reihen dar.

Satz 3.2.11 *Jede absolut konvergente Reihe ist konvergent. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht.*

Bei Folgen liefern die Grenzwertsätze eine Möglichkeit, kompliziert aufgebaute Folgen in einfachere zu zerlegen, deren Grenzwert man bereits kennt. Ähnliche Aussagen gelten auch für Reihen, jedoch mit Einschränkungen, wie der folgende Satz zeigt.

Satz 3.2.12 (Rechenregeln für Reihen) *Seien $\alpha = \sum_{k=m}^{\infty} a_k$ und $\beta = \sum_{k=m}^{\infty} b_k$ konvergente Reihen. Dann gilt:*

1.

$$\sum_{k=m}^{\infty} (a_k \pm b_k) = \alpha \pm \beta \text{ ist konvergent,}$$

$$\sum_{k=m}^{\infty} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=m}^{\infty} a_k = \lambda \alpha \text{ ist konvergent für alle } \lambda \in \mathbb{C}.$$

Die zweite Gleichung wird auch als **unendliches Distributivgesetz** bezeichnet.

2. Sind beide Reihen sogar absolut konvergent, so existiert das **Cauchy-Produkt**

$$\left(\sum_{k=m}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=m}^{\infty} b_k \right) = \sum_{k=m}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k a_j b_{k-j} \right),$$

wobei die Reihe auf der rechten Seite dann auch absolut konvergent ist.

Die Formel des Cauchy-Produkts erscheint auf den ersten Blick willkürlich. Im Grunde geht es aber nur um eine Sortierung von Summanden. Zur Erläuterung nehmen wir den Fall $m = 0$ an. Stellen Sie sich vor, was passiert, wenn man zwei Reihen multipliziert:

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} b_k \right) = (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots) (b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \dots)$$

Wir müssten das Produkt nach der Regel "jeder mit jedem" berechnen. Das ergibt unendlich viele Summanden, deren Sortierung eines gewissen Systems bedarf. Wir könnten z.B. so vorgehen:

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots) (b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \dots) \\ &= a_0 b_0 + a_0 b_1 + a_0 b_2 + a_0 b_3 + \dots \\ & \quad + a_1 b_0 + a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + \dots \\ & \quad + a_2 b_0 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3 + \dots \\ & \quad + \dots \end{aligned}$$

Das Cauchy-Produkt folgt einem anderen System. Es orientiert sich an der Summe der Indizes. Sehen Sie sich die Formel genauer an. In $\sum_{j=0}^k a_j b_{k-j}$ ist die Summe der Indizes stets k . In der äußeren Summe des Cauchy-Produkts wird dann über k summiert. Es werden also erst alle Produkte aufgeschrieben, für die die Indizes zusammen 0 ergeben, dann die mit der Indexsumme 1 usw.:

$$\begin{aligned} & (a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + \dots) (b_0 + b_1 + b_2 + b_3 + \dots) \\ &= \underbrace{a_0 b_0}_{\text{Summe der Indizes=0}} + \underbrace{(a_0 b_1 + a_1 b_0)}_{\text{Summe der Indizes=1}} + \underbrace{(a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)}_{\text{Summe der Indizes=2}} + \dots \end{aligned}$$

Wir werden später noch ein Beispiel zum Cauchy-Produkt betrachten.

Satz 3.2.13 (Quotientenkriterium) Ist $(a_n)_{n \geq m}$ eine reelle Folge und gibt es eine reelle Zahl q mit $0 < q < 1$ und einen Index $N(\geq m)$, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$0 < a_n \text{ und } \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq q,$$

dann ist die Reihe $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ konvergent.

Satz 3.2.14 (Wurzelkriterium) Ist $(a_n)_{n \geq m}$ eine reelle Folge und gibt es eine reelle Zahl q mit $0 \leq q < 1$ und einen Index $N(\geq m)$, so dass für alle $n \geq N$ gilt

$$0 \leq a_n \text{ und } \sqrt[n]{a_n} \leq q,$$

dann ist die Reihe $\sum_{n=m}^{\infty} a_n$ konvergent.

Bei beiden Kriterien gibt es zwei wichtige Bedingungen an die Zahl q , die leider immer wieder ignoriert werden, nämlich:

1. q muss unabhängig von n sein. Es steht jeweils im Kriterium "...für alle n ... gilt ... $\leq q$ " und nicht etwa q_n . Die Zahl q muss also universell für alle Terme, die hier auftreten, sein.
2. q muss echt kleiner als 1 sein.

Es reicht also keineswegs, wenn $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ oder $\sqrt[n]{a_n}$ echt kleiner als 1 ist. Nein, es muss eine Zahl q geben, die immer dazwischen passt. Das ist ein entscheidender Unterschied, wie die Teile a) und b) des folgenden Beispiels zeigen.

Beispiel 3.2.15

- a) Wir sehen uns noch mal die geometrische Reihe an: $\sum_{n=0}^{\infty} r^n$ mit $|r| < 1$. Der Fall $r = 0$ ist trivial. Sei also $r \neq 0$. Wir prüfen gleich auf absolute Konvergenz, wir betrachten also $\sum_{n=0}^{\infty} |r^n|$, d.h. die Summanden sind $a_n = |r^n| = |r|^n > 0$. Für das Quotientenkriterium stellen wir fest, dass

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|r|^{n+1}}{|r|^n} = \underbrace{|r|}_{=q} < 1.$$

Alternativ würde man für das Wurzelkriterium erhalten, dass

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{|r|^n} = \underbrace{|r|}_{=q} < 1.$$

Wir kommen zum Schluss: $\sum_{n=0}^{\infty} |r^n|$ ist konvergent. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} r^n$ ist absolut konvergent.
 $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} r^n$ ist konvergent.

- b) Wir erinnern uns, dass die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist. Macht man jedoch den typischen Fehler beim Quotienten- oder Wurzelkriterium würde man zu dem falschen Schluss einer konvergenten Reihe kommen. Gemeint ist folgendes: Für die Summanden $a_n = \frac{1}{n} > 0$ gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \frac{n}{n+1} \leq 1 \quad \forall n$$

bzw.

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{n}} \leq 1 \quad \forall n.$$

Trotzdem divergiert die Reihe. Die Bedingungen der beiden Kriterien sind hier nicht erfüllt. Es gibt keine Zahl q , die für alle n zwischen $\frac{n}{n+1}$ (bzw. $\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$) und 1 passt, denn

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1.$$

Weil die beiden Terme gegen 1 konvergieren, würden sie sich irgendwann endgültig zwischen jede beliebig gewählte Zahl $q < 1$ und die 1 setzen und dort verweilen.

Wie passt dies zur Definition der Konvergenz von Folgen?¹

- c) Sehen wir uns $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$, wobei $x \in \mathbb{C}$ beliebig aber fest gewählt ist, an. Auch hier untersuchen wir gleich auf absolute Konvergenz, d.h. wir betrachten $\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{x^n}{n!} \right|$ mit den Summanden $a_n = \left| \frac{x^n}{n!} \right| = \frac{|x|^n}{n!}$. Wir verwenden das Quotientenkriterium:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{|x|^n} = \frac{|x|}{n+1}.$$

Für $n \geq \lceil |x| \rceil (=: N)$ gilt:

$$n+1 \geq |x| + 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{|x|+1} \underset{|x| \geq 0}{\Rightarrow} \left(\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \right) \frac{|x|}{n+1} \leq \underbrace{\frac{|x|}{|x|+1}}_{=:q} < 1.$$

Beachten Sie, dass q eine feste Zahl ist, die unabhängig vom Summationsindex n ist.

Es gilt somit: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ ist für alle $x \in \mathbb{C}$ eine absolut konvergente Reihe.

Damit ist eine Abbildung $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definiert, weil zu jeder Zahl $x \in \mathbb{C}$ ein entsprechender Grenzwert erhalten wird. Wir werden so etwas (wie Sie es sicherlich zumindest im reellen Fall schon kennen) eine Funktion nennen. Sehen wir uns an, was wir über diese Funktion

¹Setzen Sie $\varepsilon = 1 - q < 0$ in der Definition.

in Erfahrung bringen können. Wir kennen zumindest den Wert bei $x = 1$, denn nach Satz 3.2.7 ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e.$$

Außerdem liefert das Cauchy-Produkt (das hiermit auch an einem Beispiel erläutert wird) eine interessante Eigenschaft:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{x^n}{n!}}_{=:b_n} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{y^n}{n!}}_{=:c_n} \right) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k b_j c_{k-j} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{j=0}^k \frac{x^j}{j!} \frac{y^{k-j}}{(k-j)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \frac{k!}{j!(k-j)!} x^j y^{k-j} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x+y)^k, \end{aligned}$$

wobei man die letzte Gleichheit durch den Binomischen Lehrsatz (Satz 1.4.5) erhält.

◇

Wir haben hiermit einen entscheidenden Schritt getan.

Definition 3.2.16 Eine Abbildung $f : D \rightarrow W$, $D \subset \mathbb{C}^n$, $W \subset \mathbb{C}^m$, heißt **Funktion**.

Definition 3.2.17 Die **Exponentialfunktion** (**e-Funktion**) $\exp : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ wird definiert durch

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad (=: e^z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Satz 3.2.18 (Funktionalgleichung der Exponentialfunktion)

$$e^{x+y} = e^x \cdot e^y \quad \forall x, y \in \mathbb{C}.$$

Den Beweis haben wir oben geführt.

Mit Hilfe der e-Funktion kann man gleich noch andere Funktionen definieren.

Satz 3.2.19 Die reelle Einschränkung $\exp|_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ ist bijektiv. Ihre Umkehrfunktion heißt (**natürlicher**) **Logarithmus** $\log : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$. Man schreibt statt \log auch \ln .

Während von Mathematiker(inne)n oft die Bezeichnung \log verwendet wird, bevorzugen Anwender(innen) meist \ln .

Definition 3.2.20 Für $a \in \mathbb{R}^+$ und $x \in \mathbb{R}$ sei $a^x := e^{x \cdot \ln a}$.

Die Umkehrabbildung von $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $x \mapsto a^x$ ist

$$f^{-1}(y) = \frac{\ln y}{\ln a} =: \log_a y, \quad y \in \mathbb{R}^+,$$

“Logarithmus zur Basis a ”. Offensichtlich ist $\ln = \log_e$.

Satz 3.2.21 (Logarithmengesetze) Es gilt für alle $a, x, y \in \mathbb{R}^+$, $z \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \log_a(xy) &= \log_a x + \log_a y, \\ \log_a(x^z) &= z \log_a x. \end{aligned}$$

Somit gilt außerdem

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a(x \cdot y^{-1}) = \log_a x + \log_a y^{-1} = \log_a x - \log_a y.$$

für alle $a, x, y \in \mathbb{R}^+$.

Die Bedeutung der e -Funktion ist unter anderem (aber nicht nur) bei Wachstums- und Zerfallsprozessen zu erkennen.

Beispiel 3.2.22

a) **Exponentielles Wachstum** wird beschrieben durch die Funktion

$$f(t) = a \cdot e^{bt},$$

wobei t die Zeit ist und a und b reelle Konstanten sind, für die $a \neq 0$ und $b > 0$ gelten muss. Hierbei ist a der Anfangswert, d.h. der Wert zum Zeitpunkt $t = 0$, denn

$$f(0) = a \cdot e^{b \cdot 0} = a.$$

Gehen wir der Frage nach, wann sich die Menge verdoppelt. Wir betrachten einen beliebigen Zeitpunkt t_1 und suchen also einen Zeitpunkt t_2 , zu dem doppelt so viel vorhanden ist wie zur Zeit t_1 . Das müssen wir erst mathematisch formulieren. Es muss also gelten:

$$f(t_2) = 2 \cdot f(t_1).$$

Wir setzen die Definition von f ein:

$$a \cdot e^{bt_2} = 2a \cdot e^{bt_1}$$

Division durch a ($a \neq 0$ wurde angenommen!) ergibt:

$$e^{bt_2} = 2e^{bt_1}$$

Damit haben wir die erste interessante Erkenntnis. Die gesuchte Zeit ist also unabhängig vom Anfangswert a , weil dieser aus der Gleichung eliminiert werden kann. Wir dividieren nun durch e^{bt_1} , was ebenfalls nicht Null sein kann, weil die e-Funktion nie den Wert 0 annimmt.

$$e^{b(t_2-t_1)} = 2e^{b \cdot 0} (= 2)$$

Wir wenden nun den \ln auf beiden Seiten an.

$$b(t_2 - t_1) = \ln 2$$

Wir dividieren durch b (auch das ist nicht Null).

$$t_2 - t_1 = \frac{\ln 2}{b}$$

Also gilt:

$$t_2 = t_1 + \frac{\ln 2}{b}$$

Die **Verdopplungszeit**, die Zeit, die also ab t_1 verstreichen muss, ist somit $\frac{\ln 2}{b}$. Sie ist daher auch unabhängig vom Zeitpunkt t_1 , ab dem die Verdopplung beginnen soll.

- b) **Exponentieller Zerfall** tritt nicht nur bei Radioaktivität auf, sondern beschreibt beispielsweise auch die Entladung eines Kondensators. Hier hat man das gleiche f wie oben mit nur einem entscheidenden Unterschied: $b < 0$. Entsprechend stellt man sich nun die Frage, wann der Bestand halbiert statt verdoppelt wird und kommt, wie oben (prüfen Sie es als keine Übung nach), zunächst zu

$$b(t_2 - t_1) = \ln \frac{1}{2},$$

wobei hier $\frac{1}{2}$ statt 2 erscheint, weil man ja nach Halbierung statt Verdopplung sucht. Wir wissen aber, dass $\ln 2^{-1} = -\ln 2$, und somit landen wir bei

$$t_2 - t_1 = -\frac{\ln 2}{b} \Rightarrow t_2 = t_1 + \frac{\ln 2}{-b}$$

Also kommt man in beiden Fällen zu der Größe $\frac{\ln 2}{|b|}$. Im ersten Fall ist es die Verdopplungszeit, im zweiten die so genannte **Halbwertszeit**.

Was wäre eigentlich passiert, wenn man beim Zerfall nach einer Verdopplungszeit gesucht hätte?²
 \diamond

Nicht nur die e-Funktion kann man über eine absolut konvergente Reihe definieren, sondern auch noch andere Funktionen.

Definition 3.2.23 Für beliebige $z \in \mathbb{C}$ seien definiert:

$$\sin z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (\text{Sinus}), \quad (3.2)$$

$$\cos z := \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad (\text{Cosinus}), \quad (3.3)$$

$$\sinh z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} \quad (\text{Sinus hyperbolicus}), \quad (3.4)$$

$$\cosh z := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!} \quad (\text{Cosinus hyperbolicus}). \quad (3.5)$$

Die letzten beiden Funktionen zählen zu den **Hyperbelfunktionen**. Man setzt außerdem

$$\begin{aligned} \tan x &:= \frac{\sin x}{\cos x} \quad (\text{Tangens}), \\ \tanh y &:= \frac{\sinh y}{\cosh y} \quad (\text{Tangens hyperbolicus}) \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{C}$, für die $\cos x \neq 0$, und alle $y \in \mathbb{C}$.

Beachten Sie, dass $\cosh z \neq 0$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

Die Graphen der Funktionen finden Sie in Abbildung 3.4. Die einschlägigen Eigenschaften von \sin und \cos , wie z.B. die Additionstheoreme, werden hier als bereits bekannt vorausgesetzt.

Aus den Reihendarstellungen lassen sich zunächst ein paar Eigenschaften ableiten.

Satz 3.2.24 \cos und \cosh sind **gerade Funktionen**, d.h.

$$\cos(-z) = \cos(z), \quad \cosh(-z) = \cosh(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

\sin und \sinh sind **ungerade Funktionen**, d.h.

$$\sin(-z) = -\sin(z), \quad \sinh(-z) = -\sinh(z) \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C}.$$

²Man erhält die Halbwertszeit mit einem Minus davor, also $-\frac{\ln 2}{|b|} = \frac{\ln 2}{b}$. Das ist auch einsichtig, denn man muss einfach eine Halbwertszeit zurück in der Zeit gehen, um den doppelten Bestand vorzufinden.

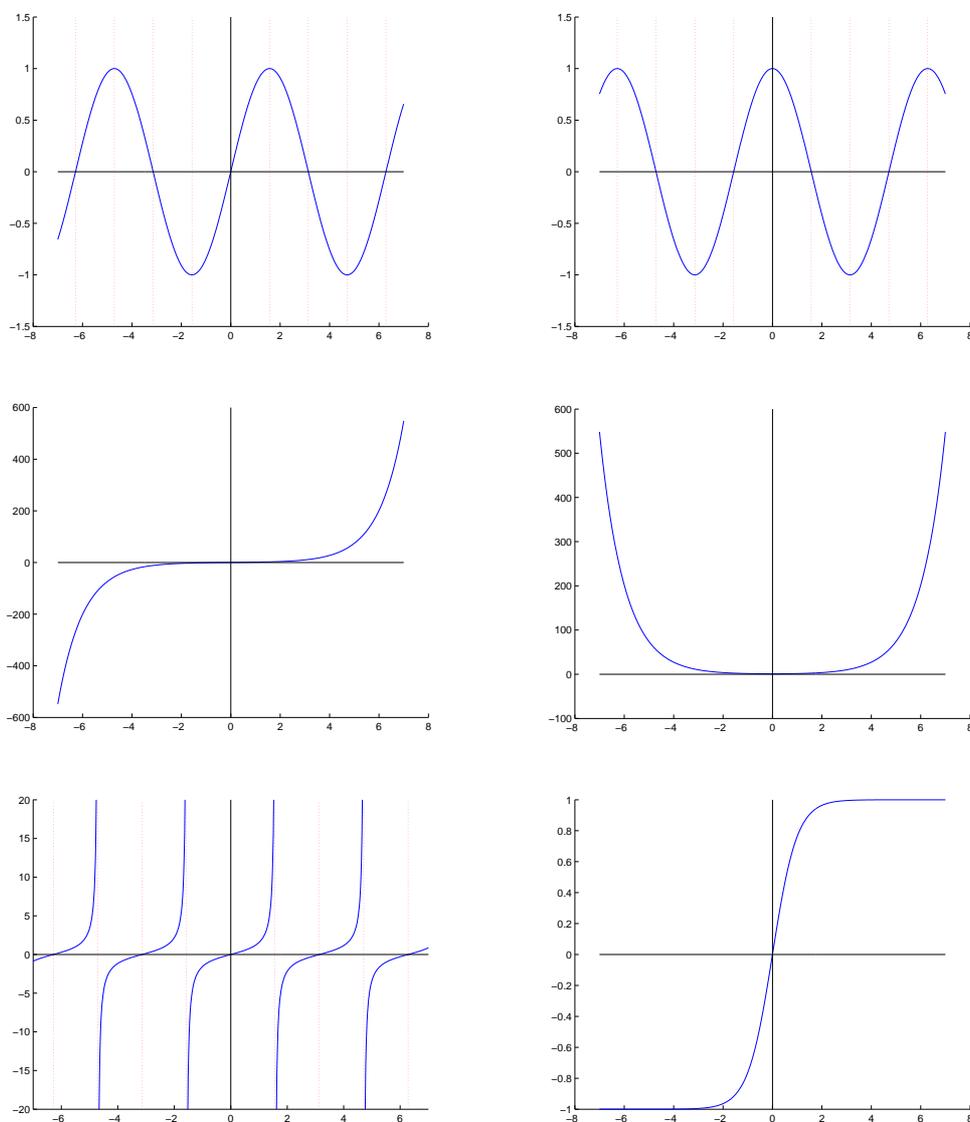


Abbildung 3.4: Graphen von \sin (links oben), \cos (rechts oben), \sinh (Mitte links), \cosh (Mitte rechts), \tan (links unten) und \tanh (rechts unten): Bei den trigonometrischen Funktionen \sin , \cos und \tan sind die Stellen -2π , $-\frac{3}{2}\pi$, $-\pi$, $-\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$, π , $\frac{3}{2}\pi$ und 2π eingezeichnet.

Warum gilt das?³

Damit sind tan und tanh auch ungerade Funktionen.

Da die obigen Reihen optisch eine Ähnlichkeit mit der Reihe der e-Funktion aufweisen, ist es nicht verwunderlich, dass auch ein mathematischer Zusammenhang besteht. Wir teilen hierfür die Reihe der e-Funktion auf, d.h. wir ordnen sie um (ob und dass wir das dürfen soll uns hier nicht kümmern):

$$\begin{aligned} \exp(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{\substack{n=0 \\ n \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{z^n}{n!} + \sum_{\substack{n=1 \\ n \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \\ &= \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k}}{(2k)!}}_{=\cosh z} + \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}}_{=\sinh z} \end{aligned}$$

nach (3.5) bzw. (3.4). Mit Satz 3.2.24 sehen wir ferner, dass

$$e^{-z} = \cosh(-z) + \sinh(-z) = \cosh z - \sinh z.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} e^z + e^{-z} &= \cosh z + \sinh z + \cosh z - \sinh z, \\ e^z - e^{-z} &= \cosh z + \sinh z - (\cosh z - \sinh z). \end{aligned}$$

Wir fassen bis hierhin zusammen.

Satz 3.2.25 Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$\begin{aligned} e^z &= \cosh z + \sinh z, \\ \cosh z &= \frac{1}{2} (e^z + e^{-z}), \\ \sinh z &= \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}). \end{aligned}$$

Auch für die trigonometrischen Funktionen lässt sich ein Zusammenhang herleiten, indem man die imaginäre Einheit i verwendet:

$$\begin{aligned} \exp(iz) &= \cosh(iz) + \sinh(iz) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(iz)^{2k+1}}{(2k+1)!}. \end{aligned}$$

³Bei cos und cosh treten nur gerade Exponenten auf, und es gilt $(-z)^{2k} = z^{2k}$. Bei sin und sinh hingegen treten nur ungerade Exponenten auf, für die $(-z)^{2k+1} = -(z^{2k+1})$ gilt.

Da $i^{2k} = (i^2)^k = (-1)^k$ und $i^{2k+1} = i^{2k} \cdot i = (-1)^k \cdot i$ gilt, erhalten wir

$$\exp(iz) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + i \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!}.$$

Wenn wir jetzt noch (3.3) und (3.2) verwenden, haben wir den folgenden Satz gezeigt:

Satz 3.2.26 (Euler'sche Formel) Für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Korollar 3.2.27 Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$|e^{ix}| = 1.$$

Beweis: Mit der Euler'schen Formel haben wir direkt den Real- und Imaginärteil von e^{ix} , wenn x reell ist. Damit ist

$$|e^{ix}| = \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x} = \sqrt{1} = 1.$$

■

Beachten Sie jedoch, dass für nicht-reelle z die Euler'sche Formel keineswegs eine Zerlegung in Real- und Imaginärteil darstellt, da dann $\sin z$ und $\cos z$ als komplex anzusehen sind.

Die Reihen, die wir bisher kennengelernt haben, haben alle eine gemeinsame Struktur: Die Variable läuft ganzzahlige Potenzen durch, und diese Potenzen werden mit Faktoren versehen. Das verlangt nach etwas mehr Systematik.

Definition 3.2.28 Reihen der Form

$$\sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad z_0 \in \mathbb{C} \text{ fest, } z \in \mathbb{C} \text{ variabel,}$$

heißen **Potenzreihen**. z_0 heißt **Zentrum** (oder auch **Entwicklungszentrum**) der Potenzreihe.

Über die Konvergenz lässt sich eine zentrale Aussage machen.

Satz 3.2.29 Für eine Potenzreihe $\sum_{k=m}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$, $z_0 \in \mathbb{C}$ fest, existiert ein $R \in \mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$, so dass die Reihe für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| < R$ absolut konvergiert und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z - z_0| > R$ divergiert. Die Menge $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ heißt **Konvergenzkreis**. R heißt **Konvergenzradius** der Potenzreihe. Man kann ihn auf folgende Arten erhalten:

- Existiert $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$ (in $\mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$), so ist $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right|$.

- Existiert $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$ (in $\mathbb{R}_0^+ \cup \{+\infty\}$), so ist $R = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}$.

Beachten Sie, dass hier genau die Kehrwerte der Terme beim Quotienten- bzw. Wurzelkriterium auftreten (zumindest optisch, denn für diese Kriterien müsste man den ganzen Summand, also hier $a_k(z - z_0)^k$ statt a_k , in Betracht ziehen).

Beispiel 3.2.30

- a) Wir sehen uns die Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k}$$

an. Hier ist das Entwicklungszentrum also $z_0 = 0$ und die Koeffizienten sind $a_k = \frac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Es gilt

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k+1}} = \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 1.$$

Also ist der Konvergenzradius $R = 1$. Das bedeutet, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z-0| = |z| < 1$ die Reihe (absolut) konvergiert und für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| > 1$ die Reihe divergiert. Satz 3.2.29 liefert leider keine allgemeine Aussage über den Rand des Konvergenzkreises, in diesem Beispiel also für die $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = 1$. In der Tat ist auch keine allgemeine Aussage möglich, denn

- für $z = 1$ ist $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = +\infty$ die harmonische Reihe und
- für $z = -1$ ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ aufgrund des Leibniz-Kriteriums (Satz 3.2.9) konvergent.

- b) Für \exp , \sin , \cos , \sinh und \cosh ist jeweils $R = +\infty$, d.h. die Reihen konvergieren (absolut) für alle $z \in \mathbb{C}$.

◇

3.3 Komplexe Zahlen II

Es lohnt sich, auf der Grundlage der komplexen e-Funktion und der Euler'schen Formel, sich noch einmal dem Thema der komplexen Zahlen zu widmen. So kann man, neben der Darstellung einer komplexen Zahl mittels Real- und Imaginärteil, noch einen anderen Weg finden.

Satz 3.3.1 (Polardarstellung) Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ lässt sich eindeutig darstellen als

$$z = |z| e^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi[.$$

Hierbei nennt man $\arg z := \varphi$ das **Argument** von z oder die **Phase** von z .

Denken Sie daran, dass \sin und \cos 2π -periodisch sind, d.h. $\sin(x+2\pi) = \sin x$ und $\cos(x+2\pi) = \cos x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daher muss man das Argument φ auf $[0, 2\pi[$ einschränken, um Eindeutigkeit zu gewährleisten. Wichtig ist hierbei nur, dass das Intervall die Länge 2π hat und genau ein Rand dabei ist. Man könnte beispielsweise auch alternativ $] - \pi, \pi]$ wählen.

Für $z \in \mathbb{C}$ erhält man damit mit der Euler'schen Formel

$$z = |z| e^{i\varphi} = |z| \cos \varphi + |z| i \sin \varphi$$

Real- und Imaginärteil der Zahl sind damit :

$$\operatorname{Re} z = |z| \cos \varphi, \quad \operatorname{Im} z = |z| \sin \varphi. \quad (3.6)$$

Wie man aus z den Betrag berechnet, wissen Sie schon. Mit (3.6) kann man auch die Phase bestimmen. Man muss nur aufpassen, in welchem Quadranten der komplexen Zahlenebene man sich befindet.

Die Polardarstellung kann man geometrisch bezüglich der komplexen Zahlenebene interpretieren. Der Betrag $|z|$ steht für den Abstand vom Nullpunkt und das Argument für einen Winkel, siehe Abbildung 3.5. Stellen Sie sich vor, Sie stehen im Nullpunkt und blicken längs der x -Achse (in positive Richtung). Einen Ort z , zu dem Sie sich in der Ebene begeben sollen, kann man eindeutig festlegen, indem man Ihnen zunächst sagt, um welchen Winkel Sie sich nach links drehen sollen ($\arg z$) und wie weit Sie dann laufen sollen ($|z|$).

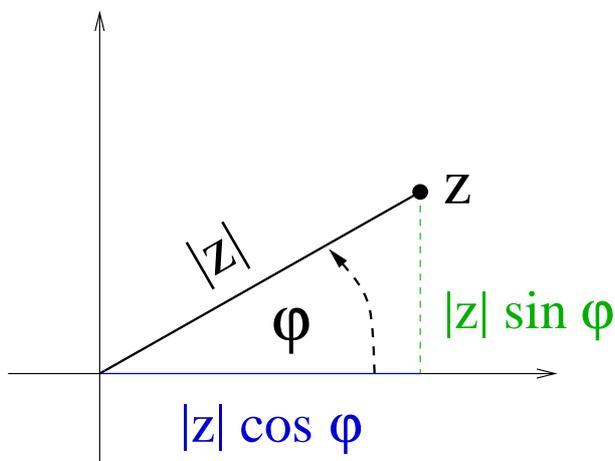


Abbildung 3.5: Polardarstellung einer komplexen Zahl

Ein Vorteil der Polardarstellung ist die Vereinfachung der Multiplikation zweier komplexer Zahlen

$$z = |z| e^{i\varphi}, \quad w = |w| e^{i\psi}.$$

Dann erhält man schlichtweg

$$zw = |z| e^{i\varphi} |w| e^{i\psi} = |z| \cdot |w| e^{i(\varphi+\psi)}.$$

Die Beträge werden also multipliziert und die Argumente werden addiert, siehe auch Abbildung 3.6.

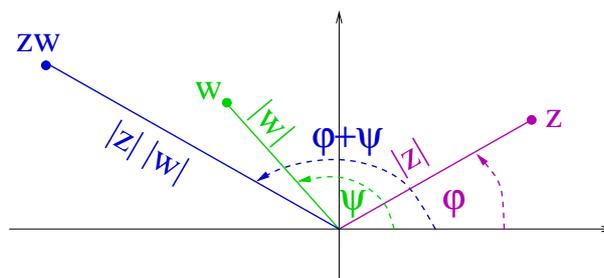


Abbildung 3.6: Multiplikation zweier komplexer Zahlen mittels Polardarstellung

Satz 3.3.2 (Formeln von De Moivre) Für beliebige $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gilt

1.

$$zw = |z| \cdot |w| e^{i(\arg z + \arg w)}$$

2.

$$z^n = |z|^n e^{in \arg z} \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

3.

$$\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|} e^{i(\arg z - \arg w)}$$

Korollar 3.3.3 (Komplexe Wurzeln) Für alle $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ hat die Gleichung $z^n = a$ genau n Lösungen (Wurzeln). Diese sind gegeben durch

$$z_k = |a|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{2\pi k + \arg a}{n}}; \quad k = 0, \dots, n-1. \quad (3.7)$$

Beweis: Aus dem Fundamentalsatz der Algebra (Satz 1.5.6) wissen wir, dass es nicht mehr als n Lösungen geben kann. Der Rest ist Nachrechnen mit Hilfe der Formeln von De Moivre:

$$\begin{aligned} z_k^n &= |a|^{\frac{n}{n}} e^{i \frac{2\pi k + \arg a}{n} \cdot n} \\ &= |a| e^{i 2\pi k} \cdot e^{i \arg a} \\ &= |a| (e^{i 2\pi})^k \cdot e^{i \arg a} \\ &= |a| e^{i \arg a} \\ &= a. \end{aligned}$$

■

Könnte man in (3.7) auch $k = 1, \dots, n$ wählen?⁴

Beispiel 3.3.4

a) Für $z^2 = 2$ ($= 2 \cdot e^{i \cdot 0}$) erhält man die altbekannten Wurzeln:

$$\begin{aligned} z_0 &= |2|^{1/2} e^{i \cdot 0} = \sqrt{2}, \\ z_1 &= |2|^{1/2} e^{i \frac{2\pi + 0}{2}} = \sqrt{2} e^{i\pi} = \sqrt{2} (\cos \pi + i \sin \pi) = \sqrt{2} (-1 + i \cdot 0) = -\sqrt{2}. \end{aligned}$$

b) Die Wurzeln von $z^3 = i$ erhält man wie folgt: Zunächst brauchen wir die Polardarstellung von i . Es gilt $|i| = 1$. Außerdem muss

$$|i| \cos \varphi = \operatorname{Re} i, \quad |i| \sin \varphi = \operatorname{Im} i$$

gelten, also

$$\cos \varphi = 0, \quad \sin \varphi = 1.$$

Wegen der Einschränkung $\varphi \in [0, 2\pi[$ erhalten wir $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Also ist

$$i = 1 \cdot e^{i \frac{\pi}{2}}$$

und wir können die Formeln für die 3. Wurzeln verwenden:

$$\begin{aligned} z_0 &= |i|^{\frac{1}{3}} \exp\left(i \frac{0 + \frac{\pi}{2}}{3}\right) = e^{i \frac{1}{6} \pi}, \\ z_1 &= 1 \cdot \exp\left(i \frac{2\pi + \frac{\pi}{2}}{3}\right) = e^{i \frac{5}{6} \pi}, \\ z_2 &= 1 \cdot \exp\left(i \frac{4\pi + \frac{\pi}{2}}{3}\right) = e^{i \frac{9}{6} \pi} = e^{i \frac{3}{2} \pi} = \cos\left(\frac{3}{2} \pi\right) + i \sin\left(\frac{3}{2} \pi\right) = -i. \end{aligned}$$

Rechnen Sie nach, dass $-i$ eine 3. Wurzel von i ist!⁵

⁴ $z^n = (u/(v \operatorname{Re} + 0 \cdot \operatorname{Im})) e^{i \frac{2\pi k + \arg a}{n} \cdot n} = u/(v \operatorname{Re} + 0 \cdot \operatorname{Im}) e^{i 2\pi k + i \arg a} = u/(v \operatorname{Re} + u \operatorname{Im}) e^{i 2\pi k + i \arg a} = u/(v \operatorname{Re} + u \operatorname{Im}) e^{i 2\pi k} e^{i \arg a} = u/(v \operatorname{Re} + u \operatorname{Im}) e^{i \arg a} = u/(v \operatorname{Re} + u \operatorname{Im}) a$
⁵ $i = (i-1) \cdot (i-1) \cdot (i-1) = (i-1)(i-1)(i-1) = i(i-1)(i-1) = i(i^2 - 2i + 1) = i(-1 - 2i + 1) = i(-2i) = -2i^2 = -2(-1) = 2$

c) Für $z^n = 1$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ erhält man die so genannten **n-ten Einheitswurzeln**:

$$z_k = e^{i \frac{2\pi k}{n}}, \quad k = 0, \dots, n-1.$$

◇

Die Formel (3.7) lässt sich auch mit Hilfe der Einheitswurzeln formulieren, wenn man beachtet, dass

$$z_k = |a|^{\frac{1}{n}} e^{i \frac{\arg a}{n}} \cdot e^{i \frac{2\pi k}{n}}.$$

Kapitel 4

Grenzwerte von Funktionen und Stetigkeit

4.1 Grenzwerte von Funktionen

Falls nichts anderes angegeben wird, werden ab sofort stets Funktionen vom Typ $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, betrachtet.

Definition 4.1.1 Sei $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $c \in \mathbb{R}$. f hat

- a) einen **Grenzwert** $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = c \Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) mit $x_n \neq a \forall n$, die gegen a konvergiert (und im Definitionsbereich von f liegt), konvergiert die Folge $(f(x_n))$ gegen c .
- b) einen **rechtsseitigen Grenzwert** $\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = c \Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) mit $x_n > a \forall n$, die gegen a konvergiert (und im Definitionsbereich von f liegt), konvergiert die Folge $(f(x_n))$ gegen c .
- c) einen **linksseitigen Grenzwert** $\lim_{x \rightarrow a-} f(x) = c \Leftrightarrow$ Für jede Folge (x_n) mit $x_n < a \forall n$, die gegen a konvergiert (und im Definitionsbereich von f liegt), konvergiert die Folge $(f(x_n))$ gegen c .

Hierbei treten die Fälle b) und c) nur bei $a \in \mathbb{R}$ auf.

Ist $c \in \mathbb{R}$, so spricht man von **Konvergenz**. Bei $c = -\infty$ oder $c = +\infty$ erhält man analog die Definition **bestimmter Divergenz**. Existiert kein $c \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, so spricht man von **unbestimmter Divergenz**.

Man schreibt auch kurz $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a(+/-)} c$.

Beispiel 4.1.2

a) Als Beispiel betrachten wir die **Gaußklammer**, die das Abrunden repräsentiert:

$$[x] := \max\{n \in \mathbb{Z} \mid n \leq x\}.$$

$[x]$ ist also die größte ganze Zahl $\leq x$. Der Graph von $f(x) := [x]$ ist in Abbildung 4.1 dargestellt. Es gilt für $y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, dass

$$\lim_{x \rightarrow y} [x] = \lim_{x \rightarrow y^+} [x] = \lim_{x \rightarrow y^-} [x] = [y],$$

und für $n \in \mathbb{Z}$, dass

$$\lim_{x \rightarrow n^-} [x] = n - 1, \quad \lim_{x \rightarrow n^+} [x] = n,$$

während $\lim_{x \rightarrow n} [x]$ nicht existiert (unbestimmte Divergenz).

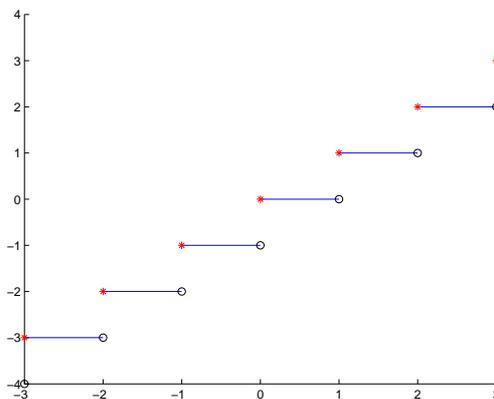


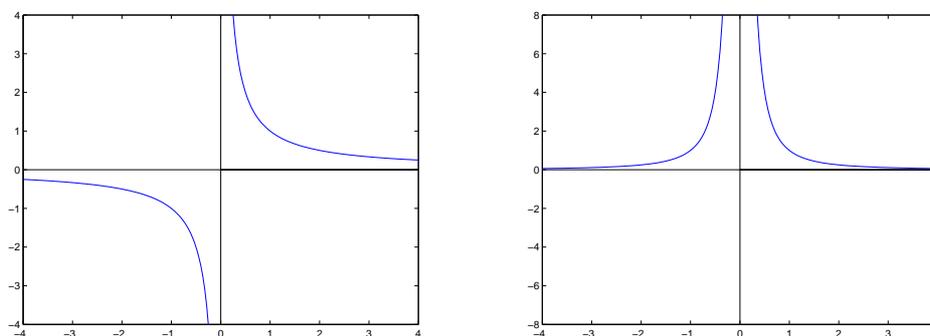
Abbildung 4.1: Graph der Gaußklammer: Punkte, die dazugehören, sind jeweils mit einem roten Stern gekennzeichnet, während schwarze Kringel bedeuten, dass der Punkt nicht dazugehört.

b) Es gilt

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} &= 0, & \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} &= 0, \end{aligned}$$

während $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ nicht existiert. Hingegen existiert der folgende Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty,$$

Abbildung 4.2: Graphen von $x \mapsto \frac{1}{x}$ (links) und $x \mapsto \frac{1}{x^2}$ (rechts)

siehe auch Abbildung 4.2.

c) Für die folgendermaßen abschnittsweise definierte Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 1 & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

gilt

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1,$$

siehe auch Abbildung 4.3.

◇

Satz 4.1.3 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ existieren beide und sind gleich. $\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existiert.

Dann stimmt $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ auch mit dem links- und dem rechtsseitigen Grenzwert überein.

Da die Konvergenz von Funktionen auf die Konvergenz von Folgen zurückgeführt wird, lassen sich die Grenzwertsätze entsprechend übertragen.

Satz 4.1.4 (Grenzwertsätze für Funktionen) Konvergieren $f(x)$ und $g(x)$ für $x \rightarrow a$, so gilt:

a)

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(f(x) \overset{\pm}{\cdot} g(x) \right) = \left(\lim_{x \rightarrow a} f(x) \right) \overset{\pm}{\cdot} \left(\lim_{x \rightarrow a} g(x) \right).$$

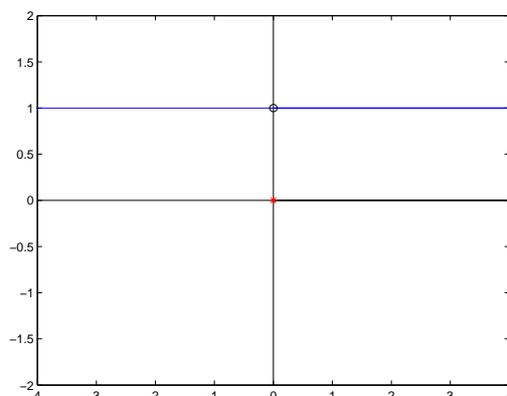


Abbildung 4.3: Hier gilt $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$ für jedes beliebige $a \in \mathbb{R}$.

b) Ist $g(x) \neq 0$ für alle x ("nahe a ") und $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$, so ist

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}.$$

Das gleiche gilt, wenn man jeweils nur den rechtsseitigen oder nur den linksseitigen Grenzwert verwendet.

Beispiel 4.1.5

a) Wir suchen $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{-2}}{1+e^{-x}}$. Da $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-2}$ und $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+e^{-x}) \neq 0$ existieren und in \mathbb{R} sind (d.h. da Konvergenz vorliegt), gilt

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{-2}}{1+e^{-x}} = \frac{\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{-2}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+e^{-x})} = \frac{0}{1 + \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x}} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

b) Mit ähnlicher Argumentation kommt man zu

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{\lim_{x \rightarrow -1} (x^2 - 1)}{\lim_{x \rightarrow -1} (x - 1)} = \frac{1 - 1}{-1 - 1} = \frac{0}{-2} = 0.$$

c) Bei $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ sind die Grenzwertsätze nicht anwendbar, da der Nenner gegen Null geht. Jedoch kann man hier den Bruch durch Kürzen vereinfachen:

$$\frac{x^2 - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = x + 1.$$

Jetzt kann man die Grenzwertsätze verwenden:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2.$$

◇

Wegen der Rückführung auf die Konvergenz und Divergenz von Folgen, kann man auch Satz 3.1.9 und Korollar 3.1.10 sowie den Einschließungssatz (Satz 3.1.16) sinngemäß auf Funktionen übertragen. Dies gilt aber auch für die Gegenbeispiele im Beispiel nach Korollar 3.1.10.

4.2 Stetigkeit

Definition 4.2.1 Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, heißt **stetig** (engl.: *continuous*) in $x_0 \in D$, falls $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ existiert und $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ gilt. f heißt stetig, wenn f stetig in allen $x_0 \in D$ ist. Rechts- und linksseitige Stetigkeit sind analog über die entsprechenden Grenzwerte definiert.

Beispiel 4.2.2 Die Gaußklammer $[x]$ ist stetig in allen $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ und unstetig in allen $x \in \mathbb{Z}$. ◇

Satz 4.2.3 Folgende Typen von Funktionen sind grundsätzlich stetig:

- a) Polynome,
- b) rationale Funktionen $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (P, Q Polynome) in ihrem Definitionsbereich (d.h. in allen $x \in \mathbb{R}$, für die $Q(x) \neq 0$),
- c) durch Potenzreihen definierte Funktionen im Inneren (d.h. nicht zwingend auch auf dem Rand) ihres Konvergenzkreises.
- d) $f(x) = x^\alpha$, $\alpha \notin \mathbb{N}$, auf

$$\begin{array}{ll} \mathbb{R}_0^+, & \text{falls } \alpha > 0 \\ \mathbb{R}^+, & \text{falls } \alpha < 0, \alpha \notin \mathbb{Z} \\ \mathbb{R} \setminus \{0\}, & \text{falls } \alpha < 0, \alpha \in \mathbb{Z} \end{array}$$

Beispiel 4.2.4

- a) $f(x) = x^5 - \pi x^3 + \sqrt{2}x - \frac{8}{9}$ ist stetig auf ganz \mathbb{R} .

- b) $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ ist stetig auf $\mathbb{R} \setminus \{1\}$. Wegen $\frac{x^2-1}{x-1} = x+1$ ist außerdem f in $x_0 = 1$ **stetig fortsetzbar**, d.h. man kann eine Funktion $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definieren durch

$$\tilde{f}(x) := \begin{cases} f(x) & x \neq 1 \\ 2 & x = 1 \end{cases},$$

die eine Fortsetzung von $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ist (d.h. $\tilde{f}(x) = f(x)$ für alle x aus dem Definitionsbereich von f) und stetig auf ganz \mathbb{R} ist (denn $\lim_{x \rightarrow 1} \tilde{f}(x) = 2 = \tilde{f}(1)$).

- c) $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x-2)^k}{k}$ ist eine Potenzreihe mit Zentrum $z_0 = 2$ und Koeffizienten $a_k = \frac{1}{k}$. Wegen

$$\left| \frac{a_k}{a_{k+1}} \right| = \frac{\frac{1}{k}}{\frac{1}{k+1}} = \frac{k+1}{k} \rightarrow 1$$

ist der Konvergenzradius 1. Damit ist die Funktion (mindestens) für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x-2| < 1$ stetig, d.h. für alle $x \in]1, 3[$.

- d) exp, sin, cos, sinh, cosh und konstante Funktionen sind stetig auf ganz \mathbb{R} .

◇

Satz 4.2.5

- a) Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ ($D \subset \mathbb{R}$) stetige Funktionen. Dann sind $f + g$, $f - g$ und $f \cdot g$ stetig. Ferner ist $\frac{f}{g}$ stetig in allen $x \in D$ mit $g(x) \neq 0$ (d.h. im maximalen Definitionsbereich von $\frac{f}{g}$).
- b) Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : E \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $g(E) \subset D$. Dann ist auch die Verkettung

$$\begin{aligned} f \circ g : E &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(g(x)) \end{aligned}$$

stetig.

Beispiel 4.2.6

- a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{\sin x}{e^x} \text{ in ganz } \mathbb{R} \text{ stetig.} \\ g(x) &= \frac{e^x}{\sin x} \text{ in } \mathbb{R} \setminus \{n\pi | n \in \mathbb{Z}\} \text{ stetig.} \end{aligned}$$

b) $f(x) = \sin\left(e^x + \sqrt{1 + \cos^2 x}\right)$
 $x \mapsto \cos x$ stetig auf \mathbb{R} , $y \mapsto y^2$ stetig auf $\mathbb{R} \xrightarrow{4.2.5\text{ b}} x \mapsto (\cos x)^2$ stetig $\xrightarrow[\text{konst. Fkt. stetig}]{4.2.5\text{ a}} 1 + \cos^2 x$
 stetig.
 Da $1 + \cos^2 x \in \mathbb{R}_0^+$ und $y \mapsto \sqrt{y}$ auf \mathbb{R}_0^+ stetig (4.2.3 d), ist nach 4.2.5 b auch $x \mapsto \sqrt{1 + \cos^2 x}$ stetig auf $\mathbb{R} \xrightarrow[4.2.5\text{ a}]{4.2.3\text{ c}} e^x + \sqrt{1 + \cos^2 x}$ stetig auf $\mathbb{R} \xrightarrow[4.2.5\text{ b}]{4.2.3\text{ c}} \sin\left(e^x + \sqrt{1 + \cos^2 x}\right)$
 stetig auf \mathbb{R} .

c) Wo ist $\tan x$ stetig?¹

◇

Satz 4.2.7 Funktionen f , die auf einem Intervall I stetig und streng monoton sind, haben eine Umkehrfunktion f^{-1} auf $f(I)$, die stetig und im gleichen Sinne streng monoton ist.

Beispiel 4.2.8 \exp ist stetig auf \mathbb{R} und streng monoton wachsend. $\Rightarrow \log = \ln$ ist auf $\exp(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^+$ streng monoton wachsend und stetig. ◇

(f streng monoton wachsend $:\Leftrightarrow$ ist $x < y$, so ist $f(x) < f(y)$)
 usw. (analog zur Definition bei Folgen))

Definition 4.2.9 Eine Funktion heißt (nach oben/unten) **beschränkt**, wenn es ihr Wertebereich ist.

Entsprechend ist

$$\sup_{x \in D} f(x) := \sup\{f(x) \mid x \in D\}$$

usw.

Satz 4.2.10 (Zwischenwertsatz) Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $c, d \in [a, b]$, $c < d$. Dann nimmt f auf dem Teilintervall $[c, d]$ alle Werte zwischen $f(c)$ und $f(d)$ an.

Der Zwischenwertsatz wird in Abbildung 4.4 veranschaulicht. Eine Anwendung findet der Zwischenwertsatz beispielsweise in der Nullstellenbestimmung.

¹ $\{z \in \mathbb{C} \mid \Re \frac{z}{1+z^2}\} \setminus \mathbb{R} \cup \mathbb{R}$

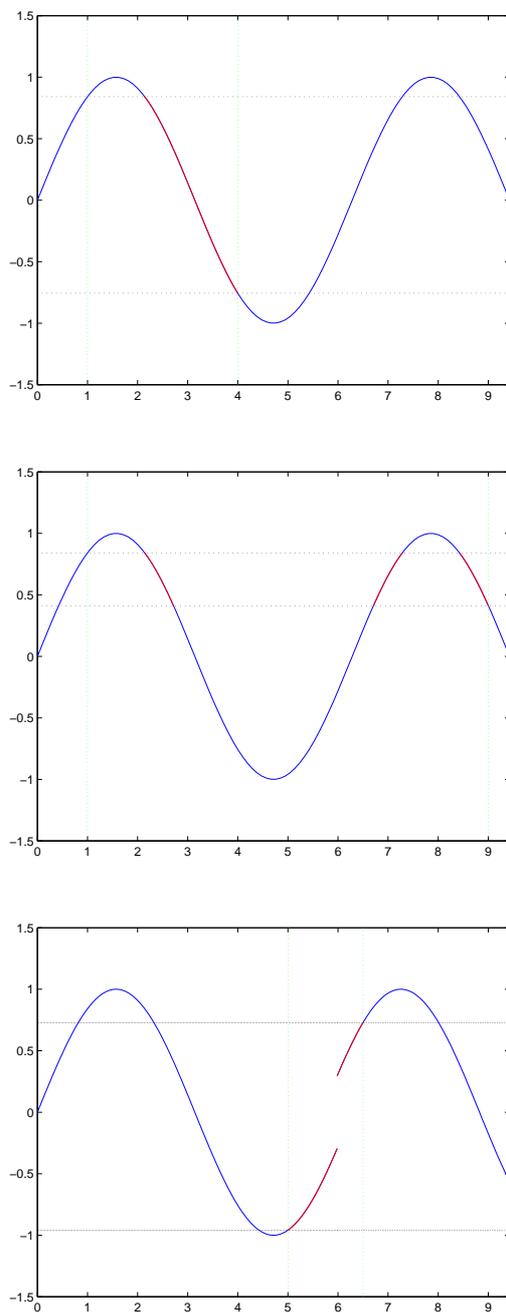


Abbildung 4.4: Illustration des Zwischenwertsatzes: c und d sind jeweils grün markiert und $f(c)$ sowie $f(d)$ sind schwarz markiert. Der rote Teil des Graphen zeigt, dass alle Funktionswerte zwischen $f(c)$ und $f(d)$ angenommen werden. Es können auch Werte mehrfach auftreten, wie im mittleren Beispiel. Das untere Beispiel zeigt, dass bei unstetigen Funktionen die Aussage des Zwischenwertsatzes nicht gelten muss.

Kapitel 5

Differentialrechnung

5.1 Die Ableitung

Definition 5.1.1 Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **differenzierbar** in $x_0 \in D$, wenn der Grenzwert $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$ existiert. In diesem Fall wird $f'(x_0) := \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ **Ableitung** von f in x_0 genannt. Eine andere Bezeichnung ist

$$\left(\frac{d}{dx} f \right) (x) := f'(x).$$

Man liest "d nach dx".

Zur graphischen Veranschaulichung wird auf Abbildung 5.1 verwiesen.

Beispiel 5.1.2

a) $f(x) = c$ konstant

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \frac{c - c}{h} = 0 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \\ \Rightarrow f'(x) &= 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

f überall in \mathbb{R} differenzierbar.

b) $f(x) = x$

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \frac{x_0+h - x_0}{h} = \frac{h}{h} = 1 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1 \\ \Rightarrow f'(x) &= 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

f überall in \mathbb{R} differenzierbar.

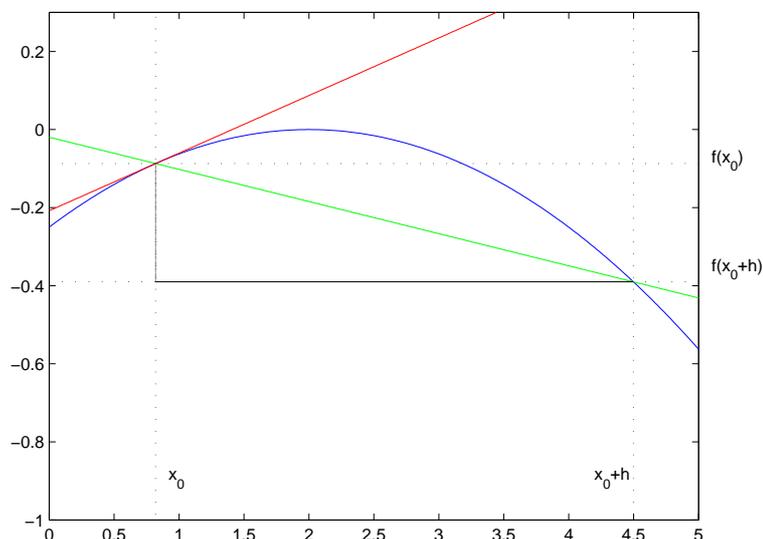


Abbildung 5.1: Das Prinzip einer Ableitung ist wie folgt: Die (grüne) Sekante durch $(x_0, f(x_0))$ und $(x_0 + h, f(x_0 + h))$ hat die Steigung $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{(x_0+h)-x_0}$ (siehe schwarzes Steigungsdreieck). Im Grenzwert $h \rightarrow 0$ wird hieraus die (rote) Tangente an den Graphen in $(x_0, f(x_0))$ mit Steigung $f'(x_0)$.

c) $f(x) = x^2$

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \frac{(x_0+h)^2 - x_0^2}{h} \\ &= \frac{x_0^2 + 2hx_0 + h^2 - x_0^2}{h} = 2x_0 + h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 2x_0 \\ \Rightarrow f'(x) &= 2x \quad \forall x \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

f überall in \mathbb{R} differenzierbar.

d) $f(x) = \sqrt{x}$. Wir benutzen hier den Wurzeltrick:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} &= \frac{(\sqrt{x+h} - \sqrt{x})(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \\ &= \frac{(\sqrt{x+h})^2 - (\sqrt{x})^2}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \frac{x+h-x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{1}{2\sqrt{x}}, \text{ wenn } x \neq 0$$

$\Rightarrow f$ differenzierbar in \mathbb{R}^+ , $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \forall x > 0$.

Wie ist es mit $x_0 = 0$?

$$\frac{\sqrt{0+h} - \sqrt{0}}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}} \xrightarrow{h \rightarrow 0(+)} +\infty \notin \mathbb{R} \quad \text{keine Ableitung!}$$

$\Rightarrow f$ in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

e) $f(x) = |x|$

(i) $x_0 > 0$:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{|x_0+h| - |x_0|}{h}$$

Wegen $h \rightarrow 0$ kann man davon ausgehen, dass h hinreichend nahe bei 0 ist (genauer $0 < |h| < x_0$), so dass $x_0 + h > 0$ ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned} \frac{|x_0+h| - |x_0|}{h} &= \frac{(x_0+h) - x_0}{h} = 1 \xrightarrow{h \rightarrow 0} 1 \\ \Rightarrow f'(x) &= 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

(ii) $x_0 < 0$:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{|x_0+h| - |x_0|}{h}$$

Hier kann angenommen werden, dass h hinreichend nahe bei 0 ist, so dass $x_0 + h < 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \frac{|x_0+h| - |x_0|}{h} &= \frac{-x_0-h+x_0}{h} \\ &= -\frac{h}{h} = -1 \xrightarrow{h \rightarrow 0} -1 \\ \Rightarrow f'(x) &= -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}^- \end{aligned}$$

(iii) $x_0 = 0$:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \frac{|h| - 0}{h} = \frac{|h|}{h}$$

Zur Erinnerung: $\lim_{h \rightarrow 0}$ bedeutet, dass für h beliebige Folgen (h_n) mit Limes 0 (und $h_n \neq 0 \forall n$) eingesetzt werden können müssen. Zum Beispiel

$$\begin{aligned}
 h_n &= \frac{1}{n} \Rightarrow \frac{|h_n|}{h_n} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1. \\
 \text{oder } h_n &= -\frac{1}{n} \Rightarrow \frac{|h_n|}{h_n} = \frac{\frac{1}{n}}{-\frac{1}{n}} = -1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -1. \\
 &\Rightarrow \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} \text{ existiert nicht.}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f$ nicht differenzierbar in 0, differenzierbar in $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $f'(x) = \operatorname{sgn} x \forall x \neq 0$. Die Nicht-Differenzierbarkeit in 0 erkennt man am Graphen daran, dass dort ein Knick vorliegt, so dass man nicht eindeutig eine Tangente anlegen kann (siehe Abbildung 5.2).

◇

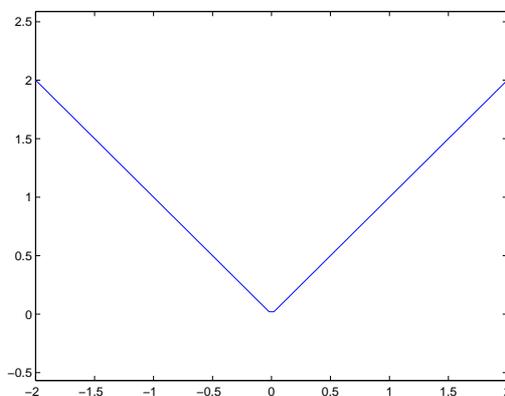


Abbildung 5.2: Graph von $f(x) = |x|$: In $x = 0$ kann man nicht eindeutig eine Tangente anlegen. Die Funktion ist dort nicht differenzierbar.

5.2 Ableitungsregeln

Satz 5.2.1 (Ableitungsregeln)

a) Seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : D \rightarrow \mathbb{R}$ in $x_0 \in D$ differenzierbar. Dann gilt:

(i) $f \pm g$ und αf ($\alpha \in \mathbb{R}$ konstant) sind in $x_0 \in D$ differenzierbar und es gilt

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0), \quad (\alpha f)'(x_0) = \alpha f'(x_0)$$

(ii) $f \cdot g$ ist in $x_0 \in D$ differenzierbar und es gilt

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \quad \textbf{Produktregel}$$

(iii) Ist $g(x) \neq 0$ für alle x "nahe bei x_0 ", so ist $\frac{f}{g}$ differenzierbar in x_0 und es gilt

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2} \quad \textbf{Quotientenregel}$$

b) $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $g : E \rightarrow \mathbb{R}$, $g(E) \subset D$. Sei g in $x_0 \in E$ differenzierbar und f in $g(x_0)$ differenzierbar. Dann ist $f \circ g$ in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0) \quad \textbf{Kettenregel}$$

"Äußere Ableitung mal innere Ableitung".

Satz 5.2.2 $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ hat die Ableitung $f'(x) = nx^{n-1}$ auf ganz \mathbb{R} .

Beweis:

$n = 1$: siehe oben.

$n \rightarrow n + 1$: Die Formel gelte für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

Sei $f(x) = x^{n+1} = x \cdot x^n \Rightarrow$ Produktregel und Induktionsannahme liefern:

$$f'(x) = 1 \cdot x^n + x \cdot \underbrace{nx^{n-1}}_{\text{Ind.ann.}} = x^n + nx^n = (n+1)x^n.$$

■

Beispiel 5.2.3

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + 3x^2 + 7x + \pi \\ f'(x) &= 3x^2 + 6x + 7 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} f(x) &= x^{-n}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}. \\ f(x) &= \frac{1}{x^n} \\ \Rightarrow f'(x) &= \frac{0 \cdot x^n - 1 \cdot nx^{n-1}}{x^{2n}} = (-n)x^{n-1-2n} = (-n)x^{-n-1} \end{aligned}$$

Damit gilt die Formel aus Satz 5.2.2 auch für $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

◇

Satz 5.2.4 Potenzreihen sind im Inneren des Konvergenzkreises differenzierbar. Ferner gilt: Ist $P(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R , so gilt für alle $z \in \mathbb{R}$ mit $|z - z_0| < R$: $P'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k k (z - z_0)^{k-1}$, d.h. die Potenzreihe ist gliedweise differenzierbar.

Beispiel 5.2.5

a)

$$\begin{aligned} \exp(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \\ \exp'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} nx^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} \\ (m:=n-1) \rightarrow &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{x^m}{m!} = \mathbf{\exp(x)} \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \sin(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} \\ \sin'(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (2k+1) \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = \mathbf{\cos x} \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}
\cos(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} \\
\Rightarrow \cos'(x) &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k (2k) \frac{x^{2k-1}}{(2k)!} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} \stackrel{\substack{n:=k-1 \\ (\Leftrightarrow k=n+1)}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
&= - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = -\sin x \quad \forall x \in \mathbb{R}
\end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned}
f(x) &= \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \\
\tan'(x) &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\
&= \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \\
&\forall x \in \mathbb{R} \setminus \underbrace{\left\{ \frac{2n+1}{2} \pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}}_{\text{Nullst. des cos}}
\end{aligned}$$

◇

Satz 5.2.6 Ist f stetig und streng monoton mit Umkehrfunktion f^{-1} und ist f in x_0 differenzierbar mit $f'(x_0) \neq 0$, so ist f^{-1} in $y_0 = f(x_0)$ differenzierbar mit

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}, \text{ d.h. } (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))}$$

Merkregel, kein Beweis:

$$\begin{aligned}
(f^{-1} \circ f)(x) &= x \quad \text{nach Definition der Umkehrfunktion} \\
\Rightarrow (f^{-1} \circ f)'(x) &= 1 \quad \forall x.
\end{aligned}$$

Andererseits: Nach der Kettenregel (erfordert nicht nur die Differenzierbarkeit von f in x_0 , sondern auch die von f^{-1} in $f(x_0)$) gilt:

$$\begin{aligned} (f^{-1} \circ f)'(x_0) &= (f^{-1})'(f(x_0)) \cdot f'(x_0) \stackrel{!}{=} 1 \\ \Rightarrow_{f'(x_0) \neq 0} (f^{-1})'(f(x_0)) &= \frac{1}{f'(x_0)} \end{aligned}$$

Beispiel 5.2.7

$$\begin{aligned} \log(\exp(x)) &= x \quad \forall x \\ \log'(\exp(x)) &= \frac{1}{\exp'(x)} = \frac{1}{\exp(x)} \\ \text{Mit } y := \exp(x) : \log'(y) &= \frac{1}{y} \quad \forall y \in \mathbb{R}^+ \\ & \quad (\Rightarrow y \in \mathbb{R}^+) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{mit der Merkregel: } \frac{d}{dx}(\log(\exp(x))) &= \frac{d}{dx} x = 1. \\ &= \log'(\exp(x)) \cdot \exp'(x) = \log'(\exp(x)) \cdot \exp(x) \\ \Rightarrow \log'(\exp(x)) &= \frac{1}{\exp(x)} \end{aligned}$$

◇

Beispiel 5.2.8

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{\sin x} \Rightarrow f'(x) = e^{\sin x} \cdot \cos x \\ g(x) &= \sin(e^x) \Rightarrow g'(x) = \cos(e^x) \cdot e^x \end{aligned}$$

b)

$$f(x) = x \cdot \log x \Rightarrow f'(x) = 1 \cdot \log x + x \cdot \frac{1}{x} = 1 + \log x.$$

Folgende Ableitungen sollte man kennen:

$f(x)$	$f'(x)$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}, \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$
c (Konstante)	0
e^x	e^x
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\log x = \ln x$	$\frac{1}{x}$

Beachten Sie jeweils den Definitionsbereich von f bzw. f' . ◇

Definition 5.2.9 Ist $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ in $D_{f'} \subset D_f$ differenzierbar, so ist eine Funktion

$$\begin{aligned} f' : D_{f'} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x) \end{aligned}$$

definiert. Ist f' differenzierbar (in x), so wird $(f')'(x) =: f''(x)$ **zweite Ableitung** von f (in x) genannt. Ist f' differenzierbar in $D_{f''} \subset D_{f'}$, so entsteht wieder eine Funktion $f'': D_{f''} \rightarrow \mathbb{R}$ und so weiter:

$f^{(n)}$ ist die n -te Ableitung von f .

Beispiel 5.2.10

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 2x + 7 \\ f'(x) &= 6x + 2 \\ f''(x) &= 6 \\ f'''(x) &= 0 \\ f^{(n)}(x) &= 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 3. \end{aligned}$$

◇

Satz 5.2.11 (Leibniz-Regel) Sind f und g n -fach differenzierbar ($n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$), so gilt

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

Beispiel 5.2.12

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sin x \cdot \cos x \\
 f''(x) &= \binom{2}{0} \sin x \cdot \cos'' x + \binom{2}{1} \sin' x \cdot \cos' x + \binom{2}{2} \sin'' x \cdot \cos x \\
 &= \sin x (-\cos x) + 2 \cos x (-\sin x) + (-\sin x) \cdot \cos x \\
 &= -4 \sin x \cdot \cos x
 \end{aligned}$$

Test:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \cos x \cdot \cos x + \sin x (-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x \\
 &= \cos^2 x + \sin^2 x - 2 \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x \\
 \Rightarrow f''(x) &= 0 - 2 \cdot 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = -4 \sin x \cdot \cos x \quad \checkmark.
 \end{aligned}$$

◇

Satz 5.2.13

$$\boxed{f \text{ differenzierbar in } x_0 \stackrel{\Rightarrow}{\neq} f \text{ stetig in } x_0}$$

Gegenbeispiel für die Umkehrung: $f(x) = |x|$ ist nicht differenzierbar in $x_0 = 0$, ist aber dort stetig.

5.3 Zentrale Sätze der Differentialrechnung**Satz 5.3.1 (Satz von Rolle)**

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf $[a, b]$ und differenzierbar auf $]a, b[$, wobei $f(a) = f(b)$.

$$\Rightarrow \exists \xi \in]a, b[: f'(\xi) = 0$$

Der Satz von Rolle wird in Abbildung 5.3 veranschaulicht.

Satz 5.3.2 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ in $[a, b]$ stetig und differenzierbar in $]a, b[$. f habe in $x_0 \in]a, b[$ ein Maximum oder Minimum. $\Rightarrow f'(x_0) = 0$.

Satz 5.3.3 (Mittelwertsatz der Differentialrechnung)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in $[a, b]$ und differenzierbar auf $]a, b[$.

$$\Rightarrow \exists \xi \in]a, b[: f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

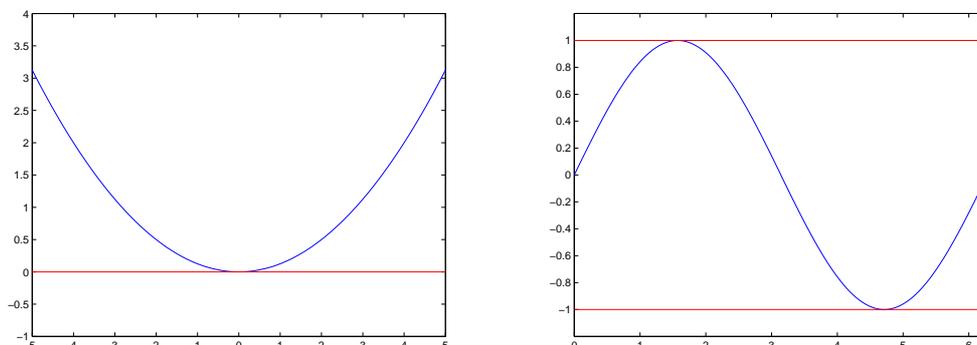


Abbildung 5.3: Illustration des Satzes von Rolle: Unter den gegebenen Voraussetzungen muss es mindestens eine Stelle mit waagrechter Tangente (also mit verschwindender Ableitung) geben. Es kann jedoch auch mehrere Stellen mit dieser Eigenschaft geben.

Speziell: Wenn $f(a) = f(b)$ gilt, sagt der Mittelwertsatz der Differentialrechnung

$$\exists \xi \in]a, b[: f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \mathbf{0} \quad (\rightarrow \text{Rolle})$$

Bild 5.4 zeigt den Mittelwertsatz der Differentialrechnung anhand des Beispiels $f(x) = x + 2 \sin x$, $x \in [0, 8]$. Die Steigung der Sekante durch $(0, f(0))$ und $(8, f(8))$ tritt an drei Stellen in $]0, 8[$ als Steigung des Graphen auf: bei $\xi_1 = \arccos(\frac{1}{8} \sin 8)$, $\xi_2 = 2\pi - \xi_1$ und $\xi_3 = 2\pi + \xi_1$. Rechnen Sie es nach!¹

Satz 5.3.4 Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, $I := [a, b]$.

- $f'(x) > 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ streng monoton wachsend auf I (\Leftrightarrow Wenn $x < y$, dann $f(x) < f(y)$).
- $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I \Leftrightarrow f$ monoton wachsend auf I (\Leftrightarrow Wenn $x < y$, dann $f(x) \leq f(y)$).
- $f'(x) < 0 \quad \forall x \in I \Rightarrow f$ streng monoton fallend auf I (\Leftrightarrow Wenn $x < y$, dann $f(x) > f(y)$).
- $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in I \Leftrightarrow f$ monoton fallend auf I (\Leftrightarrow Wenn $x < y$, dann $f(x) \geq f(y)$).

¹Die Steigung der Sekante ist $\frac{f(8)-f(0)}{8-0} = \frac{1}{8}(8 + 2 \sin 8) = 1 + \frac{1}{4} \sin 8$. Da $f'(x) = 1 + 2 \cos x$, sind also Stellen $\xi \in]0, 8[$ gesucht mit $1 + 2 \cos \xi = 1 + \frac{1}{4} \sin 8$, was äquivalent zu $\cos \xi = \frac{1}{8} \sin 8$ ist. Damit kommen $\xi_1 = \arccos(\frac{1}{8} \sin 8) \in [0, \pi]$ sowie (wegen der Symmetrie und der Periodizität des \cos) $\xi_2 = 2\pi - \xi_1$ und $\xi_3 = 2\pi + \xi_1$ in Frage.

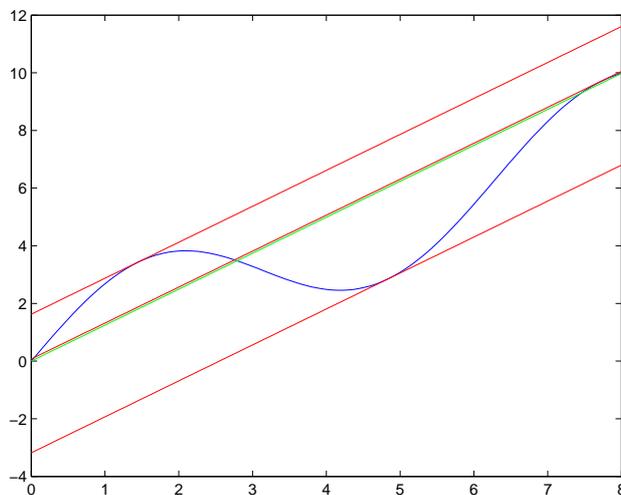


Abbildung 5.4: Illustration des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung: Die Sekante ist grün, und die Tangenten bei $(\xi_j, f(\xi_j))$ sind rot.

$$e) f'(x) = 0 \quad \forall x \in I \Leftrightarrow f \text{ konstant auf } I.$$

Zur Veranschaulichung wird auf Bild 5.5 verwiesen.

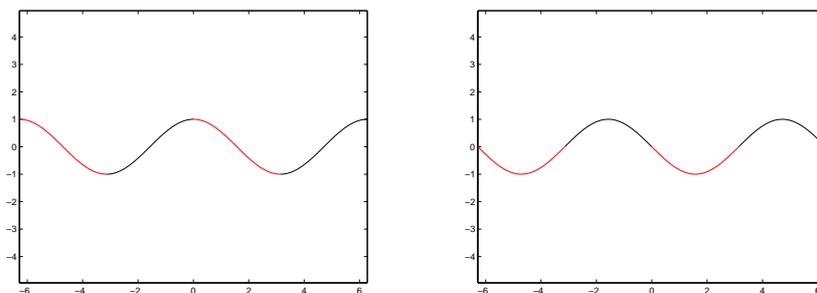


Abbildung 5.5: Links: Graph von $f(x) = \cos x$, rechts: Graph von $f'(x) = -\sin x$. Die Teilintervalle, in denen f streng monoton fällt, sind an den roten Teilgraphen erkennbar, während streng monotonen Wachstum schwarz gekennzeichnet ist. Beachten Sie das Verhalten in der Umgebung von Extremwerten.

Beachte: Bei der strengen Monotonie (a und c) ist das Kriterium nicht äquivalent (siehe Abbildung 5.6):

$f(x) = x^3$ ist streng monoton wachsend, obwohl $f'(x) = 3x^2$ in $x = 0$ verschwindet.

$g(x) = -x^3$ ist streng monoton fallend, obwohl $f'(x) = -3x^2$ in $x = 0$ verschwindet.

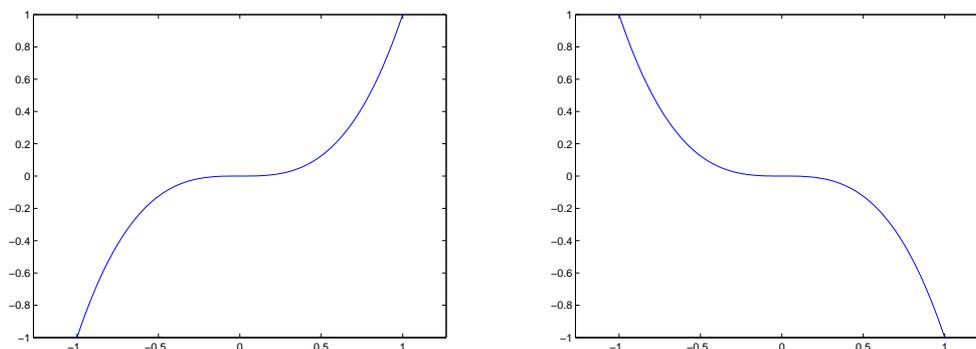


Abbildung 5.6: Die Funktionen $f(x) = x^3$ (links) und $f(x) = -x^3$ (rechts) sind streng monoton, obwohl ihre Ableitung bei $x = 0$ verschwindet.

Definition 5.3.5 Eine Funktion heißt **stetig differenzierbar**, wenn sie differenzierbar ist und ihre **Ableitung stetig** ist.

Satz 5.3.6 (Satz von Taylor) Sei $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ auf $]a, b[$ $(n + 1)$ -mal stetig differenzierbar ($n \in \mathbb{N}$), $x, y \in]a, b[$, $x \neq y$. Dann existiert (mindestens) ein ξ zwischen x und y , so dass

$$\begin{aligned} f(x) &= f(y) + \frac{f'(y)}{1!} (x - y) + \dots + \frac{f^{(n)}(y)}{n!} (x - y)^n + R_{n+1}(x, y) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(y)}{k!} (x - y)^k + R_{n+1}(x, y), \end{aligned}$$

$$\text{wobei } R_{n+1}(x, y) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x - y)^{n+1} \quad (\text{Lagrange-Darstellung des Restglieds})$$

ξ hängt von x und y ab!

Anwendung: vereinfachte Darstellung einer Funktion.

Beispiel 5.3.7

a)

$$\begin{aligned}
 f(x) &:= \log(1+x), \\
 f'(x) &= \frac{1}{1+x} \cdot 1 \curvearrowright \text{innere Ableitung} = (1+x)^{-1} \\
 f''(x) &= (-1) \cdot (1+x)^{-2} \cdot 1 \curvearrowright \text{innere Ableitung} \\
 f'''(x) &= (-1) \cdot (-2) \cdot (1+x)^{-3} \\
 f^{(4)}(x) &= (-1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (1+x)^{-4}
 \end{aligned}$$

Vermutung: $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n} \quad \forall n \geq 1$

Induktionsanfang: $n=1$: $f'(x) = (1+x)^{-1} = (-1)^0(1-1)!(1+x)^{-1} \quad \checkmark$

$n \rightarrow n+1$: Sei $f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+x)^{-n}$ für ein $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow f^{(n+1)}(x) &= (-1)^{n-1}(n-1)! \cdot (-n) \cdot (1+x)^{-n-1} \\
 &= (-1)^{n-1+1} n! (1+x)^{-(n+1)} \\
 &= (-1)^{(n+1)-1} ((n+1)-1)! (1+x)^{-(n+1)} \quad \checkmark
 \end{aligned}$$

Wähle $y=0$ als Entwicklungszentrum.

$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!(1+0)^{-n} = (-1)^{n-1}(n-1)! \quad \forall n \geq 1$$

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow f(x) &= f(0) + \sum_{n=1}^N \frac{f^{(n)}(0)}{n!} (x-0)^n + R_{N+1}(x,0) \\
 &= \underbrace{\log 1}_{=0} + \sum_{n=1}^N (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{n!} x^n + R_{N+1}(x,0) \\
 ((-1)^{n-1} = (-1)^{n+1}) \rightarrow &= - \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{1}{n} x^n + R_{N+1}(x,0) \tag{5.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{wobei } \mathbb{R}_{N+1}(x,0) &= \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} x^{N+1} = (-1)^N \frac{N!}{(N+1)!} (1+\xi)^{-(N+1)} x^{N+1} \\
 &= \frac{(-1)^N}{N+1} \cdot \left(\frac{x}{1+\xi} \right)^{N+1} \quad \text{mit (unbekanntem) } \xi \text{ zwischen } x \text{ und } 0
 \end{aligned}$$

d.h. für beispielweise $x \in]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}[$ ist

$$\log(1+x) \approx - \sum_{n=1}^3 (-1)^n \frac{1}{n} x^n = +x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3$$

mit Approximationsfehler

$$R_{3+1}(x, 0) = -\frac{1}{4} \left(\frac{x}{1+\xi} \right)^4 \quad (\xi \text{ zwischen } x \text{ und } 0)$$

$x \neq 0$ nach Voraussetzung

$$\begin{aligned} 1. \text{ Fall: } x > 0 &\Rightarrow 0 < \xi < x \Rightarrow 0 < \frac{x}{1+\xi} \leq \frac{\frac{1}{4}}{1} = \frac{1}{4} \\ 2. \text{ Fall: } x < 0 &\Rightarrow -\frac{1}{4} < x < \xi < 0 \Rightarrow \left| \frac{x}{1+\xi} \right| = \frac{|x|}{|1+\xi|} \leq \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |R_4(x, 0)| \leq \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{3} \right)^4 = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{81} = \frac{1}{324}$$

$$\Rightarrow \left| \log(1+x) - \left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \right) \right| \leq \frac{1}{324} \quad \forall x \in \left] -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \right[$$

In diesem Fall ist f sogar beliebig oft stetig differenzierbar, d.h. N in (5.1) kann beliebig groß sein. Dies führt zu einer Reihe

$$-\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} x^n$$

Wir müssen jedoch das Restglied berücksichtigen.

$$|R_{N+1}(x, 0)| = \left| \frac{(-1)^N}{N+1} \left(\frac{x}{1+\xi} \right)^{N+1} \right|$$

Sei $x \in \left] -\frac{1}{2}, 1 \right[$.

$$1. \text{ Fall: } x > 0: \quad 0 < \xi < x \Rightarrow \left| \frac{x}{1+\xi} \right| < |x| \leq 1$$

$$2. \text{ Fall: } x < 0: \quad -\frac{1}{2} \leq x < \xi < 0 \Rightarrow \left| \frac{x}{1+\xi} \right| < \frac{|x|}{|1+x|} \leq \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1.$$

\Rightarrow für jedes (feste) $x \in \left] -\frac{1}{2}, 1 \right[$ gilt: $R_{N+1}(x, 0) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0$.

$\Rightarrow \log(1+x) = -\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{n}$ **Taylor-Reihe** $\forall x \in \left] -\frac{1}{2}, 1 \right[$

insbesondere: $-\log 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ (vgl. Beispiel zum Leibniz-Kriterium)

Die Taylor-Reihe ist eine **Potenzreihe**.

Beachten Sie: Der Konvergenzkreis der Taylor-Reihe muss nicht zwingend auch der Bereich sein, in dem das Restglied gegen Null konvergiert.

- b) $f(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, $f^{(5)}(x) = \cos x$, ...
 also: $f^{(4n)}(x) = \sin x$, $f^{(4n+1)}(x) = \cos x$, $f^{(4n+2)}(x) = -\sin x$, $f^{(4n+3)}(x) = -\cos x$,
 $n \in \mathbb{N}$.

Entwicklungszentrum $y = 0$

$$f^{(4n)}(0) = 0, f^{(4n+1)}(0) = 1, f^{(4n+2)}(0) = 0, f^{(4n+3)}(0) = -1$$

Nach dem Satz von Taylor gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^N \frac{f^{(k)}(y)}{k!} (x-y)^k + R_{N+1}(x, y) \\ &= \sum_{k=0}^N \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} x^{N+1} \end{aligned}$$

für irgendein festes, unbekanntes ξ zwischen x und 0 . Da $f^{(k)}(0)$ nur für ungerade k von 0 verschieden ist, kommen wir zu ($k = 2j + 1$):

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= \underbrace{\sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \frac{f^{(2j+1)}(0)}{(2j+1)!} x^{2j+1}}_{=: T_N(x) \text{ "Taylor-Polynom"}} + \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} x^{N+1} \end{aligned}$$

Die obere Summationsgrenze kommt wie folgt zustande:

- Ist N ungerade, so wird $N = 2j + 1$ mit $j = \frac{N-1}{2}$ angenommen.
- Für gerade N muss nur bis $N - 1$ summiert werden. Das "letzte" j muss also erfüllen:
 $N - 1 = 2j + 1 \Leftrightarrow j = \frac{N-2}{2}$. Da $N - 1$ ungerade ist, ist $\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor = \frac{N-1-1}{2}$.

Die relevanten Ableitungen sind entweder 1 oder -1 . Genauer gilt

$$f^{(2j+1)}(0) = 1 \Leftrightarrow 2j + 1 = 4n + 1, n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow j \text{ gerade } (j = 2n)$$

$$f^{(2j+1)}(0) = -1 \Leftrightarrow 2j + 1 = 4n + 3 = 2(2n + 1) + 1, n \in \mathbb{N}$$

$$\Leftrightarrow j \text{ ungerade } (j = 2n + 1)$$

$$\Rightarrow f^{(2j+1)}(0) = (-1)^j$$

$$\Rightarrow T_N(x) = \sum_{j=0}^{\lfloor \frac{N-1}{2} \rfloor} \frac{(-1)^j}{(2j+1)!} x^{2j+1}$$

$$\text{und } |f(x) - T_N(x)| = \left| \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} x^{N+1} \right| = \underbrace{\left| f^{(N+1)}(\xi) \right|}_{\leq 1} \frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!}$$

(x fest)

$$\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} = \frac{|x| \cdot \dots \cdot |x|}{(N+1) \dots 1}$$

Wir wählen N hinreichend groß. Genauer soll $N \geq [|x|] + 1$ sein. Dann ist

$$\frac{|x|^{N+1}}{(N+1)!} = \underbrace{\frac{|x|}{N+1} \cdot \frac{|x|}{N} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{[|x|]+1}}_{\substack{\xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\geq 0 \text{ und } \leq \text{ Nullfolge}} \\ \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\rightarrow 0 \text{ nach Einschließungssatz}}} \cdot \underbrace{\frac{|x|}{[|x|]} \cdot \dots \cdot \frac{|x|}{1}}_{\substack{\text{fester Wert } \gamma, \\ \text{unabh. von } \mathbb{N}}}$$

$$\Rightarrow \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{0}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sin x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} \quad (\text{vgl. Definition 3.2.23}) \text{ in diesem Fall: } \forall x \in \mathbb{R}$$

◇

5.4 Extremwerte

Definition 5.4.1 Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, $x_0 \in D$. $f(x_0)$ ist

- ein **globales Maximum** (Minimum), falls $f(x_0)$ ein Maximum (Minimum) ist, d.h. $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in D$ ($f(x_0) \leq f(x) \forall x \in D$)
- ein **lokales Maximum** (Minimum), falls es ein Intervall $I := [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ ($\varepsilon > 0$) gibt, so dass $f(x_0) \geq f(x) \forall x \in D \cap I$ ($f(x_0) \leq f(x) \forall x \in D \cap I$).

Siehe dazu auch Abbildung 5.7.

(Extremum: Oberbegriff von Maximum und Minimum, Plural von -um: -a)
Globale Extrema sind damit auch lokale Extrema.

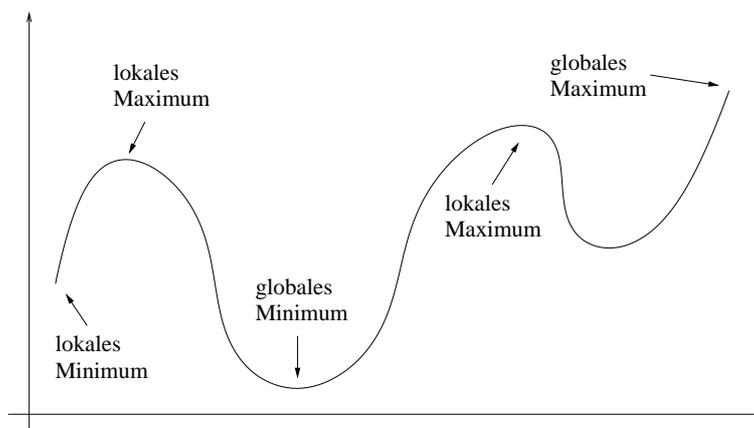


Abbildung 5.7: Das Beispiel zeigt verschiedene Arten von Extrema. Hier sind die lokalen Maxima und das globale Minimum innere Extrema, während das eingezeichnete lokale Minimum und das globale Maximum Randextrema sind.

Definition 5.4.2 Sei $D \subset \mathbb{R}$. $x_0 \in D$ heißt **innerer Punkt** von D , falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset D$.

Beispiel 5.4.3

a) $D = [0, 1]$: Alle $x_0 \in]0, 1[$ sind innere Punkte von D , z.B.

$$x_0 = \frac{1}{10}. \text{ Setze } \varepsilon = \frac{1}{20} \Rightarrow [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] = \left[\frac{1}{20}, \frac{3}{20} \right] \subset [0, 1].$$

Aber 0 und 1 sind keine inneren Punkte: z.B. 0: Egal, was für $\varepsilon > 0$ gewählt wird, $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] = \underbrace{[-\varepsilon, \varepsilon]}_{< 0} \not\subset [0, 1]$

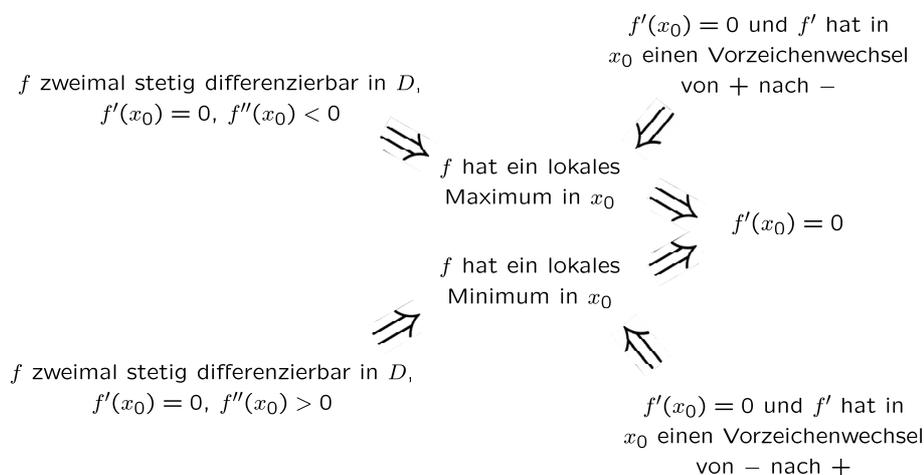
b) $D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Alle Elemente von D sind innere Punkte. Sei $x_0 \in D = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Setze $\varepsilon = \frac{|x_0|}{2}$. Da $x_0 \neq 0$ ist $\varepsilon > 0$. ✓

$$\begin{aligned} \text{Ferner: } x_0 - \frac{|x_0|}{2} &= \begin{cases} x_0 - \frac{x_0}{2}, & x_0 > 0 \\ x_0 - \frac{-x_0}{2}, & x_0 < 0 \end{cases} = \begin{cases} \frac{x_0}{2}, & x_0 > 0 \\ \frac{3}{2}x_0, & x_0 < 0 \end{cases} \\ \text{und } x_0 + \frac{|x_0|}{2} &= \begin{cases} \frac{3}{2}x_0, & x_0 > 0 \\ \frac{x_0}{2}, & x_0 < 0 \end{cases} \\ \Rightarrow [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] &= \begin{cases} \left[\frac{x_0}{2}, \frac{3}{2}x_0 \right] \subset \mathbb{R}^+, & x_0 > 0 \\ \left[\frac{3}{2}x_0, \frac{x_0}{2} \right] \subset \mathbb{R}^-, & x_0 < 0 \end{cases} \subset \mathbb{R} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

c) $D = \mathbb{R}$, $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \subset \mathbb{R} = D$ stets wahr \Rightarrow Alle Punkte in \mathbb{R} sind innere Punkte von \mathbb{R} .

◇

Satz 5.4.4 Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar in D und x_0 innerer Punkt von D . Dann gelten die folgenden Beziehungen.



Bemerkung 5.4.5 Bereiche, in denen $f'' > 0$ gilt, können als Linkskrümmung des Graphen von f interpretiert werden ($f'' > 0 \Rightarrow f'$ monoton wachsend, d.h. die Steigung des Graphen von f nimmt zu). Entsprechend liegt bei $f'' < 0$ eine Rechtskrümmung vor. Punkte des Graphen von f , in denen die Krümmung wechselt (entspricht einem Vorzeichenwechsel von f'') heißen **Wendepunkte**.

Satz 5.4.6 Sei $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ drei mal stetig differenzierbar, x_0 ein innerer Punkt von D . Wenn $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, dann hat f in x_0 einen Wendepunkt.

Beispiel 5.4.7

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 + x^2 - x - 1, \\ f'(x) &= 3x^2 + 2x - 1, \\ f''(x) &= 6x + 2, \\ f'''(x) &= 6. \quad (D = \mathbb{R}) \end{aligned}$$

Nullstellen von f' : $3x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} = 0$ gilt für

$$\begin{aligned} x_{1/2} &= -\frac{1}{3} \pm \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{3}} = -\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{4}}{3} \\ \Rightarrow \left. \begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{3} \\ x_2 &= -\frac{2}{3} = -1 \end{aligned} \right\} \text{Kandidaten für Extremalstellen} \end{aligned}$$

Einsetzen in f'' :

$$f''\left(\frac{1}{3}\right) = 6 \cdot \frac{1}{3} + 2 = 4 > 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{3} \quad \text{lokaler Minimierer}$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{27} + \frac{1}{9} - \frac{1}{3} - 1 = \frac{1 + 3 - 9 - 27}{27} = -\frac{32}{27}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{3}, -\frac{32}{27}\right) \quad \text{ist lokaler Tiefpunkt}$$

$$f''(-1) = -6 + 2 = -4 < 0 \Rightarrow x_2 = -1 \quad \text{lokaler Maximierer}$$

$$f(-1) = -1 + 1 - (-1) - 1 = 0 \Rightarrow (-1, 0) \quad \text{ist lokaler Hochpunkt}$$

Nullstellen von f'' : $f''(x) = 6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$

Einsetzen in f''' : $f'''(-\frac{1}{3}) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt in $(-\frac{1}{3}, f(-\frac{1}{3}))$.

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{27} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - 1 = \frac{-1 + 3 + 9 - 27}{27} = \frac{-16}{27}$$

(damit auch: $(f')'(-\frac{1}{3}) = 0$ und $(f')''(-\frac{1}{3}) > 0$, d.h. $-\frac{1}{3}$ ist lokaler Minimierer von f')

Alternatives Vorgehen über Vorzeichenwechsel:

Extrema:

1) Nullstellen von f' : $\frac{1}{3}$ und -1 .

2) Vorzeichen von f' in der Nähe der Kandidaten:

$$f'(x) = 3x^2 + 2x - 1.$$

zunächst $x_2 = -1$

$$f'(-2) = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 - 1 = 7.$$

$\Rightarrow f'(x) > 0$ für $x \in [-2, -1[$ (wegen des Zwischenwertsatzes (f' ist stetig!)): Gäbe es eine Stelle $y \in [-2, -1[$ mit $f'(y) < 0$, so würde eine Stelle ξ zwischen -2 und y , also auch in $[-2, -1[$, existieren, wo $f'(\xi) = 0$ gilt. Es gibt dort aber keine Nullstelle von f' .

$f'(0) = -1 \Rightarrow f'(x) < 0$ für $x \in]-1, 0]$ (analog zu oben), also Vorzeichenwechsel von f' in $x_2 = -1$ von $+$ nach $- \Rightarrow$ lokales Maximum.

Nun $x_1 = \frac{1}{3}$. Wegen $f'(0) = -1$ ist auch $f'(x) < 0$ für $x \in [0, \frac{1}{3}[$.

Ferner gilt: $f'(1) = 3 + 2 - 1 = 4 \Rightarrow f'(x) > 0$ auf $x \in]\frac{1}{3}, 1]$ (Begründung wie oben).

\Rightarrow Vorzeichenwechsel von f' in $x_1 = \frac{1}{3}$ von $-$ nach $+$ \Rightarrow lokales Minimum.

Wendepunkte: Gesucht: Vorzeichenwechsel von f'' :

$f''(x) = 6x + 2$. Es gilt: $6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$ und

$$6x + 2 \begin{cases} < 0 \Leftrightarrow 6x < -2 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{3} \\ > 0 \Leftrightarrow 6x > -2 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{3} \end{cases}$$

\Rightarrow Wendepunkt bei $(-\frac{1}{3}, f(-\frac{1}{3}))$, dort Übergang von Rechtskrümmung in Linkskrümmung. Wegen des Zwischenwertsatzes (f'' ist stetig) muss eine Nullstelle beim Vorzeichenwechsel vorliegen \Rightarrow keine weiteren Kandidaten.

Das Verhalten der Ableitungen in diesem Beispiel zeigt Abbildung 5.8. ◇

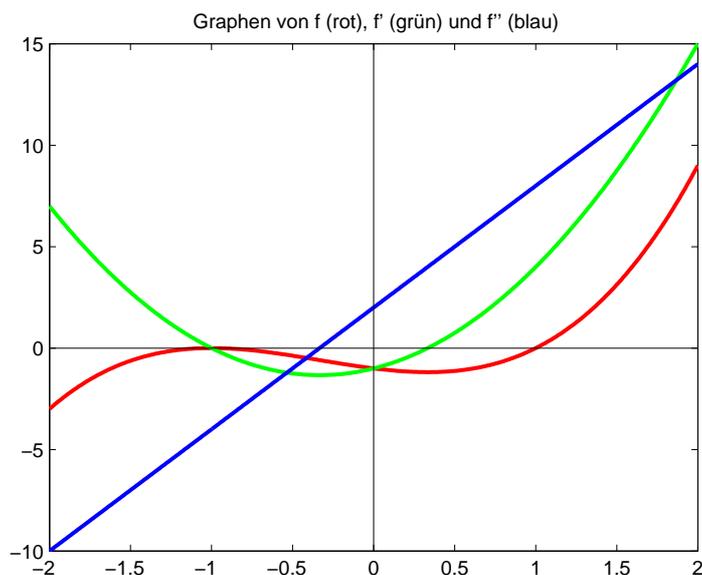


Abbildung 5.8: Darstellung der 0-ten bis 2-ten Ableitung von f .

5.5 Die Regel von De L'Hospital

Satz 5.5.1 (Regel von De L'Hospital) Die Funktionen f und g seien auf $]a, b[$ differenzierbar und $g' \neq 0$ auf $]a, b[$. Ferner gelte einer der folgenden Fälle:

$$(i) \lim_{x \rightarrow a+} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a+} g(x)$$

$$(ii) \lim_{x \rightarrow a+} f(x), \lim_{x \rightarrow a+} g(x) \in \{-\infty, +\infty\}.$$

Existiert dann $\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)}$ in $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ (d.h. Konvergenz oder bestimmte Divergenz des ganzen Bruchs), so gilt:

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Der Satz gilt auch, wenn man als Grenzprozess jeweils statt $x \rightarrow a+$ stets $x \rightarrow b-$ bzw. $x \rightarrow -\infty$ bzw. $x \rightarrow +\infty$ benutzt (in den letzten beiden Fällen entsprechend andere Differenzierbarkeitsbereiche, d.h. bei $x \rightarrow -\infty$ sollten f und g auf $] -\infty, c[$ für ein $c \in \mathbb{R}$ differenzierbar sein mit $g' \neq 0$, bei $x \rightarrow +\infty$ auf $]c, +\infty[$).

Beispiel 5.5.2

a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\log x}{x}$, "Fall $\frac{\infty}{\infty}$ " (also Fall (ii)).

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{1} = \frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0 \quad \xRightarrow{\text{De L'Hospital}} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x}$, "Fall $\frac{\infty}{\infty}$ ".

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^x}{1} = e^x \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x} = \infty$$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^2}$, "Fall $\frac{\infty}{\infty}$ ".

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^x}{2x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty \quad (\text{Bsp. b)})$$

$$\left(\text{d.h. } \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{e^x}{2} \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} \rightarrow \infty \right)$$

$$\Rightarrow \frac{e^x}{x^2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty$$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x =: f(x)}{x^n =: g(x)}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, "Fall $\frac{\infty}{\infty}$ ".

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^x}{nx^{n-1}} \quad \text{"Fall } \frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

$$\frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{e^x}{n(n-1)x^{n-2}} \quad \text{"Fall } \frac{\infty}{\infty}\text{"}$$

Mit vollständiger Induktion kann man nun zeigen, dass

$$\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)} = \frac{e^x}{n!x^0} = \frac{e^x}{n!} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty$$

$$\Rightarrow \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty \Rightarrow \frac{f^{(n-2)}(x)}{g^{(n-2)}(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} +\infty$$

$$\Rightarrow \dots \Rightarrow \frac{f'(x)}{g'(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty, \text{ d.h. } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^n}{e^x} = 0.$$

e) $\lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot \log x$, "Fall $0 \cdot (-\infty)$ ".

$x \cdot \log x = \frac{\log x =: f(x)}{\frac{1}{x} =: g(x)}$, "Fall $\frac{-\infty}{+\infty}$ " geeignet für De L'Hospital.

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -\frac{x^2}{x} = -x \xrightarrow{x \rightarrow 0+} 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0+} x \cdot \log x = 0.$$

f) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x =: f(x)}{x =: g(x)}$, "Fall $\frac{0}{0}$ ". (Zur Erinnerung: $x \rightarrow 0$ besteht aus $x \rightarrow 0+$ und $x \rightarrow 0-$).

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{\cos x}{1} = \cos x \xrightarrow{x \rightarrow 0} \cos 0 = 1 \quad (\text{da } \cos \text{ stetig})$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

◇

Kapitel 6

Integralrechnung

6.1 Das Riemann-Integral

Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion, $I := [a, b]$ (im Beispiel: $f(x) \geq 0 \forall x$). Gesucht ist der Flächeninhalt zwischen Graph und x -Achse, siehe Abbildung 6.1.

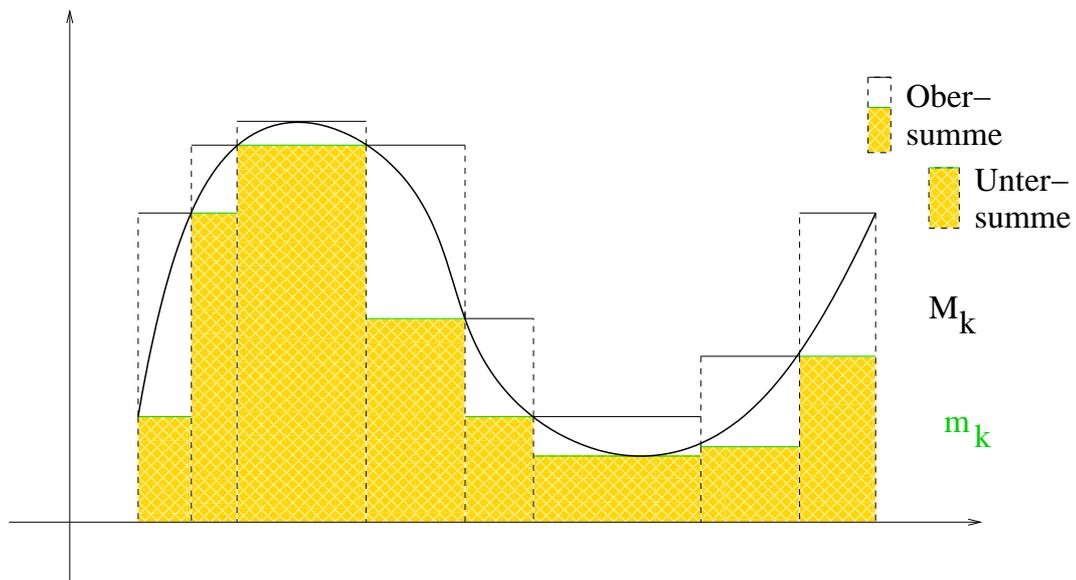


Abbildung 6.1: Illustration der Bestimmung des Flächeninhalts zwischen dem Graphen von f und der x -Achse mittels Ober- und Untersumme

Wir zerlegen das Intervall $I = [a, b]$:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$$

Dies ergibt n Teilintervalle:

$$\underbrace{[x_0, x_1]}_{=[a, x_1]}, [x_1, x_2], \dots, \underbrace{[x_{n-1}, x_n]}_{=[x_{n-1}, b]}$$

In jedem Intervall suchen wir den “kleinsten” und den “größten” Funktionswert

$$\begin{aligned} m_1 &:= \inf_{x \in [x_0, x_1]} f(x), \dots, m_n := \inf_{x \in [x_{n-1}, x_n]} f(x) \\ M_1 &:= \sup_{x \in [x_0, x_1]} f(x), \dots, M_n := \sup_{x \in [x_{n-1}, x_n]} f(x) \end{aligned}$$

Wir schätzen den Flächeninhalt von unten und von oben ab.

Von unten: Errichte auf jedem Teilintervall $[x_{k-1}, x_k]$ ein Rechteck der Höhe m_k . Dann gilt:

$$\begin{aligned} \text{gesuchte Fläche} &\geq \underbrace{(x_1 - x_0) \cdot m_1}_{\substack{\text{Breite} \\ \text{Höhe} \\ \text{1. Rechteck}}} + (x_2 - x_1) \cdot m_2 + \dots + (x_n - x_{n-1}) \cdot m_n \\ &= \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot m_k \quad \text{“Untersumme”} \end{aligned}$$

Von oben: Höhe M_k statt m_k

$$\begin{aligned} \text{gesuchte Fläche} &\leq (x_1 - x_0) \cdot M_1 + (x_2 - x_1) \cdot M_2 + \dots + (x_n - x_{n-1}) \cdot M_n \\ &= \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \cdot M_k \quad \text{“Obersumme”} \end{aligned}$$

Je nach Anzahl n der Teilintervalle und je nach Wahl der n Teilintervalle ergeben sich unterschiedliche Ober- und Untersummen. Die Obersumme ist stets \geq dem gesuchten Wert. Die Untersumme ist stets \leq dem gesuchten Wert.

Also gilt

$$\begin{aligned} s &:= \sup \left\{ \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) m_k \mid \text{alle Zerlegungen } a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \text{ alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \\ &\leq \text{gesuchter Flächeninhalt} \\ &\leq \inf \left\{ \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) M_k \mid \text{alle Zerlegungen } a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \text{ alle } n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\} \\ &=: S \end{aligned}$$

Definition 6.1.1 *Notation siehe oben.*

Gilt $s = S$, so heißt f auf $[a, b]$ **(Riemann-)integrierbar** und wir nennen

$$\int_a^b f(x) dx := s = S$$

das **(Riemann-)Integral** von f auf $[a, b]$. $f(x)$ heißt **Integrand**.

Bemerkung 6.1.2 *Will man wirklich den Flächeninhalt, so ist bei negativen Funktionswerten der Graph in diesen Bereichen an der x -Achse zu spiegeln, d.h. $\int_a^b |f(x)| dx$ ist der gesuchte Flächeninhalt. Sei zum Beispiel*

$$f(x) = \begin{cases} -1, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

Es gilt: $\int_0^2 f(x) dx = 0$.

Der Flächeninhalt ist hingegen

$$\int_0^2 |f(x)| dx = \int_0^2 1 dx = (2 - 0) \cdot 1 = 2,$$

siehe Abbildung 6.2.

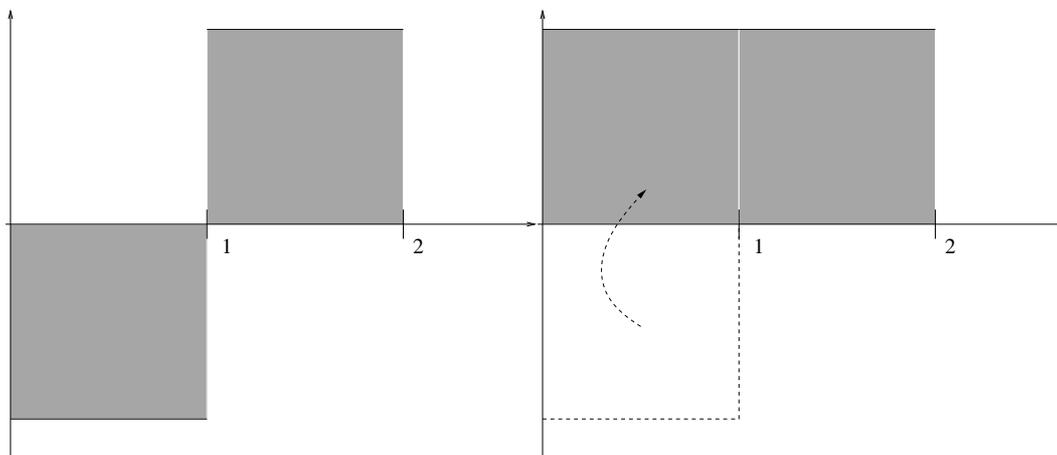


Abbildung 6.2: Graph von f (links) und von $|f|$ (rechts)

Alternativer Zugang (Newton; oben: Leibniz)

“verrichtete Arbeit = Kraft · Weg” gilt nur, wenn die Kraft konstant längs des Weges ist. Was ist bei ortsabhängiger Kraft $f(x)$?

→ Unterteile den Weg in viele kleine Teilstücke, in denen sich die Kraft nicht wesentlich ändert, also als konstant angenommen werden kann (Abbildung 6.3):

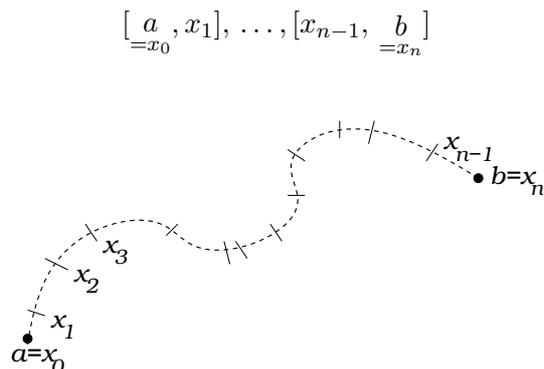


Abbildung 6.3: Unterteilung eines Weges in kleine Teilstücke

Welche konstante Kraft nimmt man für die Teilstücke an?

a) Nimm jeweils die kleinste:

$$\sum_{k=1}^n \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\substack{\text{zurückgelegte} \\ \text{Wegstrecke}}} \cdot \underbrace{\inf_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)}_{\substack{\text{als konstant ange-} \\ \text{nommene Kraft}}} \quad \text{Untersumme}$$

b) Nimm jeweils die größte:

$$\sum_{k=1}^n \underbrace{(x_k - x_{k-1})}_{\substack{\text{zurückgelegte} \\ \text{Wegstrecke}}} \cdot \underbrace{\sup_{x \in [x_{k-1}, x_k]} f(x)}_{\substack{\text{als konstant ange-} \\ \text{nommene Kraft}}} \quad \text{Obersumme}$$

Ist f (Riemann-)integrierbar, so ist $\int_a^b f(x) dx$ die verrichtete Arbeit längs des Weges $[a, b]$.

Satz 6.1.3

a) Jede auf $[a, b]$ stetige Funktion ist auf $[a, b]$ integrierbar.

b) Jede auf $[a, b]$ monotone (d.h. auf ganz $[a, b]$ monoton wachsende oder auf ganz $[a, b]$ monoton fallende) Funktion ist auf $[a, b]$ integrierbar.

Satz 6.1.4 (Integrationsregeln)

- a) (Linearität des Riemann-Integrals) f, g auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar, $\lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda f, f+g$ und $f-g$ auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar und

$$\int_a^b (\lambda f)(x) \, dx = \lambda \int_a^b f(x) \, dx,$$

$$\int_a^b f(x) \pm g(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx \pm \int_a^b g(x) \, dx$$

- b) (Additivität des Riemann-Integrals) Sei $a \leq c \leq b$. Es gilt

f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar $\Leftrightarrow f$ auf $[a, c]$ und auf $[c, b]$ Riemann-integrierbar.

In diesem Fall ist

$$\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx,$$

siehe auch Abbildung 6.4.

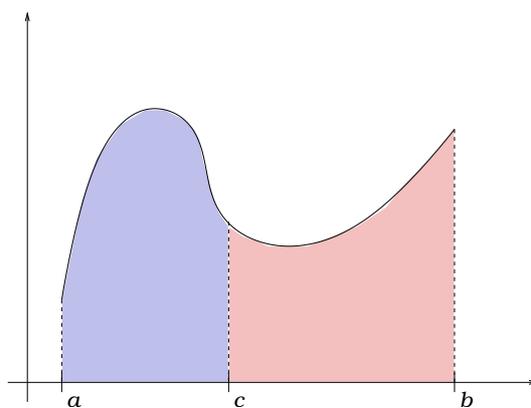


Abbildung 6.4: Das Riemann-Integral ist additiv, d.h. der Integrationsbereich kann in zwei Teile aufgeteilt werden und die einzelnen Integrale addieren sich zum ursprünglichen Integral. Dies entspricht einer Aufteilung des Flächeninhalts.

Satz 6.1.5 (Integralungleichungen)

a) Seien f, g auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar und $f(x) \leq g(x) \forall x \in [a, b]$. Dann ist

$$\int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx \quad \text{“Monotonie des Integrals”}$$

b) Sei f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar und beschränkt, d.h. es existieren m und M mit $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b]$. Dann ist

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a),$$

siehe auch Abbildung 6.5.

c) Ist f auf $[a, b]$ Riemann-integrierbar, so ist

$$\left| \int_a^b f(x) \, dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dx \quad \text{“Dreiecksungleichung für Integrale”}$$

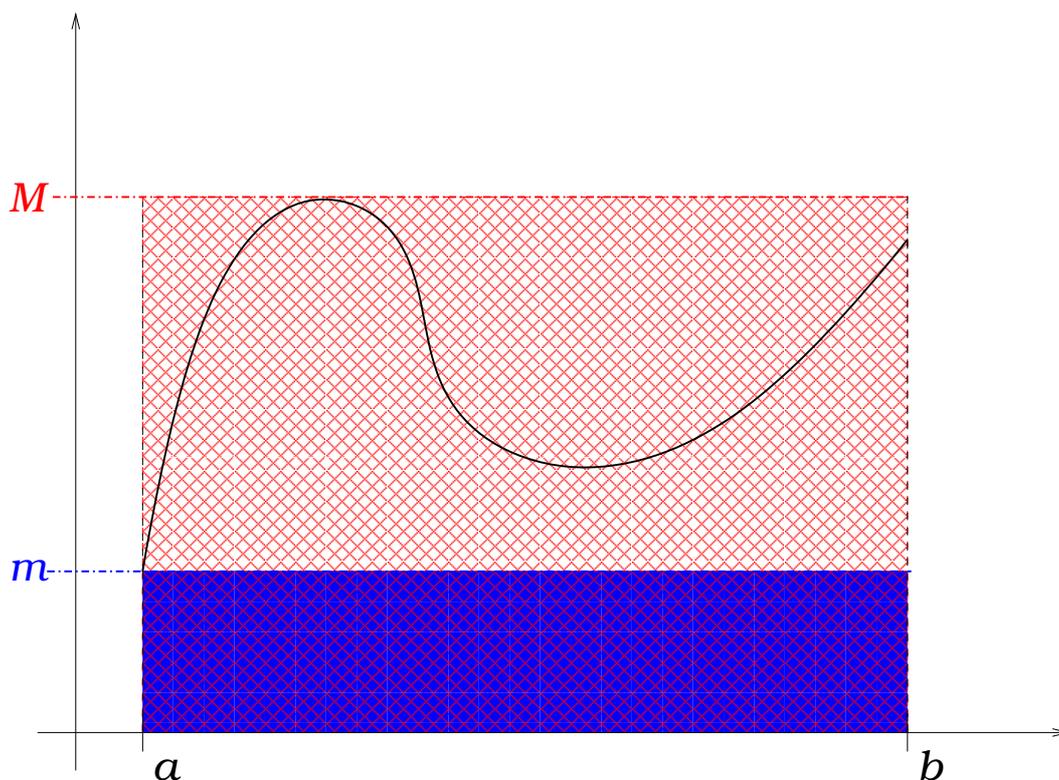


Abbildung 6.5: Veranschaulichung von Satz 6.1.5 b) anhand von Flächeninhalten

Teil b) folgt aus Teil a), wenn man folgenden offensichtlichen Fakt benutzt:

Lemma 6.1.6 *Ist f konstant auf $[a, b]$, d.h. $f(x) = c \forall x \in [a, b]$, so ist f integrierbar und $\int_a^b f(x) dx = c(b - a)$.*

Beweis: $m_k = M_k = c$ stets gültig.

Untersumme:

$$\begin{aligned}
 \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) m_k &= \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) c = c \underbrace{\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})}_{\text{Teleskopsumme}} \\
 &= (x_1 - x_0) + (x_2 - x_1) + \dots + (x_{n-1} - x_{n-2}) + (x_n - x_{n-1}) \\
 &= c(x_n - x_{1-1}) = c(b - a)
 \end{aligned}$$

Obersumme:

$$\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \underbrace{M_k}_{=c} = c(b-a)$$

\Rightarrow insbesondere: $\sup\{\text{Untersummen}\} = \inf\{\text{Obersummen}\} = c(b-a)$. ■

Bei Satz 6.1.5 b) folgt nämlich aus $m \leq f(x) \leq M \forall x \in [a, b]$ mit Teil a):

$$\begin{aligned} \int_a^b m \, dx &\leq \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b M \, dx \\ \Rightarrow \text{Lemma 6.1.6} \quad m(b-a) &\leq \int_a^b f(x) \, dx \leq M(b-a) \end{aligned}$$

Bemerkung 6.1.7

a) Ist f auf $[a, b]$ integrierbar, so schreibt man

$$\begin{aligned} \int_b^a f(x) \, dx &:= - \int_a^b f(x) \, dx \\ \left(\int_a^a f(x) \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_b^a f(x) \, dx = 0 \right) \end{aligned}$$

b) “ dx ” (oder “ dy ”, “ dz ”, “ dt ”, ...) zeigt die Variable an, bezüglich der integriert wird, und wirkt wie eine schließende Klammer, um das Ende des Integranden anzuzeigen.

Beispiel: $\int_0^1 x^2 \, dy$ bzw. $\int_0^1 y^2 \, dx$ ist die Integration einer Konstante:

$$\int_0^1 x^2 \, dy = x^2(1-0) = x^2, \quad \int_0^1 y^2 \, dx = y^2(1-0) = y^2$$

Will man $f(x) = x^2 + 2$ auf $[0, 1]$ integrieren, so ist $\int_0^1 (x^2 + 2) \, dx$ richtig und $\int_0^1 dx (x^2 + 2)$ falsch. Vielmehr wäre $\int_0^1 dx (x^2 + 2) = \int_0^1 1 \, dx (x^2 + 2) = (1 \cdot (1-0)) \cdot (x^2 + 2) = x^2 + 2$, also unsinnig.

6.2 Zentrale Sätze der Integralrechnung

Satz 6.2.1 (Mittelwertsatz der Integralrechnung) Seien $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $p: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, wobei $p(x) \geq 0 \forall x \in [a, b]$

$$\Rightarrow \exists \xi \in [a, b] \text{ mit } \int_a^b f(x)p(x) \, dx = f(\xi) \int_a^b p(x) \, dx$$

speziell: $p(x) = 1 \forall x \Rightarrow \exists \xi \in [a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = f(\xi) \cdot \int_a^b 1 dx = f(\xi) \cdot (b - a)$$

Sehen Sie hierzu auch Abbildung 6.6 an.

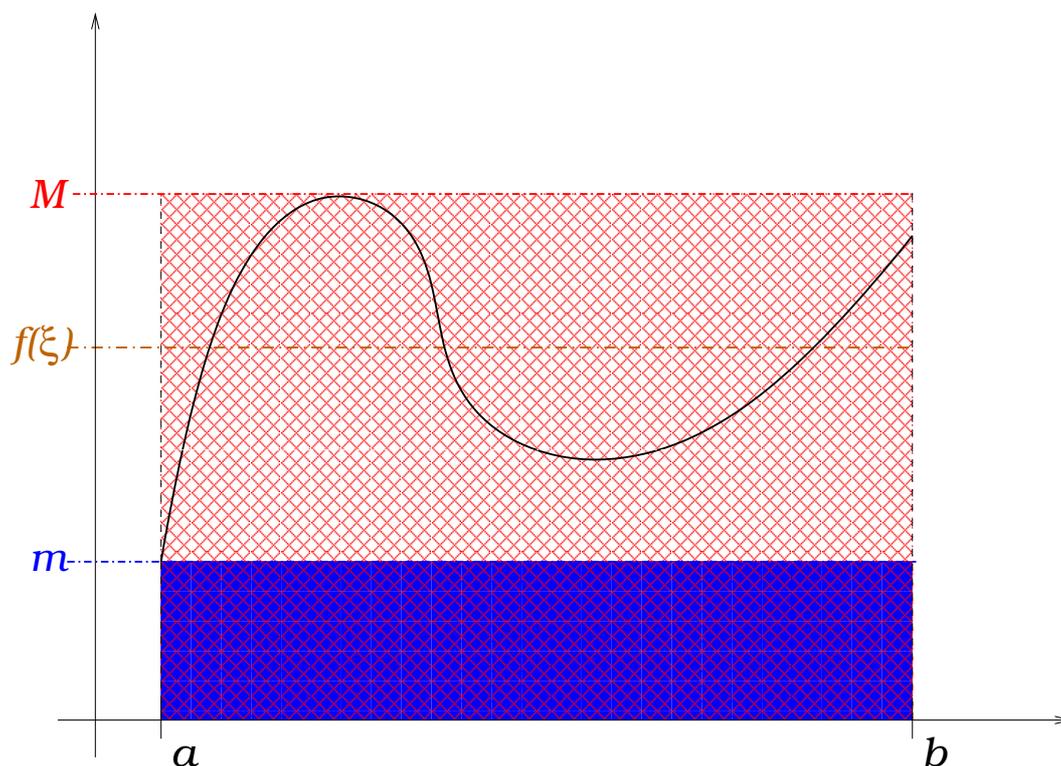


Abbildung 6.6: Vergleichen Sie mit Abbildung 6.5 zu Satz 6.1.5 b) mit $m \leq f(x) \leq M$. Nach diesem Satz kann das Integral nach oben und nach unten abgeschätzt werden durch Flächeninhalte von Rechtecken. Nach dem Mittelwertsatz gibt es sogar ein Rechteck mit einem Funktionswert als Höhe, dessen Inhalt gleich dem Integral ist (siehe obiges Bild). Die Stelle, an der dieser Funktionswert angenommen wird, muss nicht eindeutig sein.

Beispiel 6.2.2 Wir betrachten die spezifische Wärmekapazität $c(T)$ in Abhängigkeit von der Temperatur T (die Wärmekapazität ist die Energieänderung pro Temperaturänderung: spezifische Wärmekapazität = Wärmekapazität pro 1 kg). Als mittlere spezifische Wärme im Tempe-

raturbereich $T \in [T_1, T_2]$ bezeichnet man den Ausdruck

$$\bar{c} := \frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} c(T) \, dT.$$

Der Mittelwertsatz der Integralrechnung sagt nun folgendes aus:

$$\exists \hat{T} \in [T_1, T_2] : \int_{T_1}^{T_2} c(T) \, dT = (T_2 - T_1) c(\hat{T}),$$

d.h.

$$c(\hat{T}) = \bar{c}.$$

Es gibt also eine Temperatur in diesem Bereich, deren Wärmekapazität genau der mittleren spezifischen Wäre entspricht. \diamond

Satz 6.2.3 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, HDI)

1. Sei $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar und stetig in $\xi \in [a, b]$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow F(x) &:= \int_c^x f(t) \, dt, \quad c \in [a, b] \text{ fest, in } \xi \text{ differenzierbar und} \\ F'(\xi) &= f(\xi). \end{aligned}$$

(Insbesondere: f stetig auf $[a, b] \Rightarrow F$ (definiert wie oben) ist **Stammfunktion** von f : $\Leftrightarrow F$ ist differenzierbar auf $[a, b]$ und $F' = f$ auf $[a, b]$.)

2. Sei $G: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion.

$$\Rightarrow \int_a^b G'(t) \, dt = G(b) - G(a) =: G(t) \Big|_{t=a}^{t=b} =: G(t) \Big|_a^b$$

allgemein:

$$\int_c^x G'(t) \, dt = G(x) - G(c) \quad \forall x, c \in [a, b].$$

Beispiel 6.2.4

a) $\int_0^2 x \, dx = ?$ Gesucht ist eine Stammfunktion des Integranden, also G mit $G'(x) = x$.
Zum Beispiel: $G(x) = \frac{1}{2}x^2$, G stetig differenzierbar. Nach dem zweiten Teil des HDI gilt dann

$$\begin{aligned} \int_0^2 x \, dx &= \int_0^2 G'(x) \, dx = G(x) \Big|_0^2 = G(2) - G(0) \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2 = 2 \end{aligned}$$

b)

$$\int_{-1}^2 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-1}^2 = \frac{1}{3} (8 - (-1)) = \frac{9}{3} = 3$$

c)

$$\int_0^{2\pi} \sin x dx = -\cos x \Big|_0^{2\pi} = -\cos(2\pi) - (-\cos 0) = -1 + 1 = 0$$

◇

Definition 6.2.5 Die Menge aller Stammfunktionen einer Funktion f wird mit $\int f(x) dx$ bezeichnet und **unbestimmtes Integral** von f genannt.

Satz 6.2.6 Ist $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so unterscheiden sich seine Stammfunktionen nur durch eine additive Konstante.

Beweis: Seien F_1 und F_2 Stammfunktionen von f , d.h. $F_1' = F_2' = f$. Da f stetig ist, sind F_1 und F_2 stetig differenzierbar.

Sei $x \in [a, b]$ beliebig. Dann gilt nach dem 2. HDI:

$$\int_a^x f(t) dt = \int_a^x F_1'(t) dt = F_1(x) - F_1(a)$$

und

$$\begin{aligned} \int_a^x f(x) dt &= \int_a^x F_2'(t) dt = F_2(x) - F_2(a) \\ \Rightarrow F_1(x) - F_1(a) &= F_2(x) - F_2(a) \quad \forall x \in [a, b] \\ \Rightarrow F_1(x) &= F_2(x) + \underbrace{(F_1(a) - F_2(a))}_{\text{Konstante}} \quad \forall x \in [a, b] \end{aligned}$$

■

Bemerkung 6.2.7 Diese Aussage gilt nicht, wenn man sich von Intervallen $[a, b]$ löst, wie folgendes Gegenbeispiel zeigt:

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, \quad f: \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

Stammfunktion 1	Stammfunktion 2
$F_1(x) := -\frac{1}{x}, x \neq 0$	$F_2(x) := \begin{cases} -\frac{1}{x} + 2, & x > 0 \\ -\frac{1}{x}, & x < 0 \end{cases}$

$$F_1(x) - F_2(x) = \begin{cases} -2, & x > 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \text{ keine konstante Funktion.}$$

Der Einfachheit halber schreibt man aber trotzdem im Sinne von Satz 6.2.6:

$$\int F'(t) dt = F(t) + C = F(t) + \text{const},$$

zum Beispiel

$$\int t^2 dt = \frac{1}{3}t^3 + C$$

Tabelle von Stammfunktionen	
$f(x) = F'(x)$	$F(x)$ (Beispiel)
$x^n, n \neq -1$	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$
$\frac{1}{x} = x^{-1}, x \neq 0$	$\log x $
$\sin x$	$-\cos x$
$\cos x$	$\sin x$
$\sinh x$	$\cosh x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\frac{1}{\cos^2 x}, x \neq \frac{(2k+1)\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$	$\tan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in]-1, 1[$	$\arcsin x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$
$e^{\lambda x}, \lambda \in \mathbb{R} \text{ konstant}$	$\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x}$
$\frac{1}{1-x^2}, x \in]-1, 1[$	$\frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$

Beweis für letzteres:

$$F'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x}{1+x} \cdot \frac{1 \cdot (1-x) - (1+x) \cdot (-1)}{(1-x)^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1-x+1+x}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Satz 6.2.8 (partielle Integrationsregel) Seien f, g stetig differenzierbare Funktionen auf $[a, b]$.

$$\Rightarrow \int_a^b f'(x)g(x) \, dx = f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx$$

Beweis: Produktregel: $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \underbrace{\int_a^b (f \cdot g)'(x) \, dx}_{\substack{= \\ \text{2. HDI}} (f \cdot g)(x) \Big|_a^b} &= \int_a^b f'(x)g(x) \, dx + \int_a^b f(x)g'(x) \, dx \\ \Rightarrow \int_a^b f'(x)g(x) \, dx &= f(x)g(x) \Big|_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) \, dx \end{aligned}$$

■

Beispiel 6.2.9

a)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{e^x}_{f'(x)} dx &= \underbrace{e^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{x}_{g(x)} \Big|_0^1 - \int_0^1 \underbrace{e^x}_{f(x)} \cdot \underbrace{1}_{g'(x)} dx \\ &= e^1 \cdot 1 - e^0 \cdot 0 - e^x \Big|_0^1 = e - (e^1 - e^0) = e^0 = 1. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x dx &= \int \underbrace{\sin x}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{g(x)} dx = \underbrace{-\cos x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\sin x}_{g(x)} - \int \underbrace{(-\cos x)}_{f(x)} \cdot \underbrace{\cos x}_{g'(x)} dx + \text{const.} \\ &= -\cos x \sin x + \int \underbrace{\cos^2 x}_{=1-\sin^2 x} dx + \text{const.} \\ &= -\cos x \sin x + x - \int \sin^2 x dx + \text{const.} \\ &\Rightarrow 2 \int \sin^2 x dx = x - \cos x \sin x + \text{const.} \\ &\Rightarrow \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}(x - \cos x \sin x) + \text{const.} \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} \int \log x dx &= \int \underbrace{1}_{f'(x)} \cdot \underbrace{\log x}_{g(x)} dx = \underbrace{x}_{f(x)} \cdot \underbrace{\log x}_{g(x)} - \int \underbrace{x \cdot \frac{1}{x}}_{=1} dx + \text{const.} \\ &= x \cdot \log x - x + \text{const.} \end{aligned}$$

◇

Satz 6.2.10 (Substitutionsregel) Sei $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $g'(x) \neq 0$ $\forall x \in]a, b[$ und $f: \underbrace{g([a, b])}_{\text{Wertebereich von } g} \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt = \int_a^b f(g(x))g'(x) dx$$

Beweis: Sei f stetig $\Rightarrow f$ hat eine Stammfunktion F mit $F' = f$ nach dem 1. Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung. Mit der Kettenregel erhalten wir

$$(F \circ g)'(x) = \underbrace{F'}_{=f}(g(x)) \cdot g'(x) \quad (6.1)$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_a^b f(g(x))g'(x) dx &\stackrel{(6.1)}{=} \int_a^b (F \circ g)'(x) dx \stackrel{2. \text{ HDI}}{=} (F \circ g)(x) \Big|_a^b \\ &= F(g(b)) - F(g(a)) = F(t) \Big|_{g(a)}^{g(b)} \stackrel{2. \text{ HDI}}{=} \int_{g(a)}^{g(b)} \underbrace{F'}_{=f}(t) dt \end{aligned}$$

■

Also haben wir

$$\int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + \text{const.}$$

Korollar 6.2.11 Sei g stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \log |g(x)| + \text{const.}$$

Beweis:

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \int \underbrace{\frac{1}{g(x)}}_{=f(g(x)) \text{ mit } f(t)=\frac{1}{t}} g'(x) dx$$

Da $F(t) = \log |t|$ Stammfunktion von f ist, folgt aus der Substitutionsregel, dass

$$\int \frac{g'(x)}{g(x)} dx = \log |g(x)| + \text{const.}$$

■

Die Substitutionsregel kann auf 2 Arten benutzt werden:

1. Möglichkeit:

Das Integral hat die Form $\int f(g(x))g'(x) dx$:

\hookrightarrow Finde eine Stammfunktion F von f

$\hookrightarrow \int f(g(x))g'(x) dx = F(g(x)) + \text{const.}$

Beispiel 6.2.12

a) $\int e^{\sin x} \cos x \, dx$, $f(t) = e^t$, $g(x) = \sin x$, $F(t) = e^t$
 $\Rightarrow \int e^{\sin x} \cos x \, dx = e^{\sin x} + C$.

b) $\int \cos(kx + \varphi) \, dx$ ($k \neq 0$ Frequenz, φ Phase), $f(t) = \cos t$, $g(x) = kx + \varphi$.
 Es fehlt $g'(x) = k$.

Trick:

$$\int \cos(kx + \varphi) \, dx = \frac{1}{k} \int \underbrace{\cos(\underbrace{kx + \varphi}_{g(x)})}_{f(g(x))} \cdot \underbrace{k}_{g'(x)} \, dx$$

$$\stackrel{\underbrace{=}}{(F(t)=+\sin t)}}{=} \frac{1}{k} \sin(kx + \varphi) + \text{const.}$$

c) $\int \tan x \, dx = - \int \frac{-\sin x}{\cos x} \, dx \stackrel{\text{Kor. 6.2.11}}{=} -\log |\cos x| + \text{const.}$

◇

2. Möglichkeit:

Das Integral hat die Form $\int f(t) \, dt$:

\hookrightarrow Substitution $t = g(x)$, $g'(x) \neq 0$ ($\Rightarrow g$ invertierbar)

\hookrightarrow berechne $\int f(g(x))g'(x) \, dx =: h(x)$ (bis auf additive Konstante)

\hookrightarrow Rücksubstitution $x = g^{-1}(t)$ (möglich wegen Bedingung an g),

$\Rightarrow \int f(t) \, dt = h(g^{-1}(t))$

für bestimmte Integrale: $\int_c^d f(t) \, dt$ wie oben behandeln, dann Grenzen einsetzen,
oder: Substitution $t = g(x)$, $g'(x) \neq 0$

$$\int_{?}^{?} f(g(x))g'(x) \, dx = \int_c^d f(t) \, dt$$

Substitutionsregel:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x) \, dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) \, dt \quad (6.2)$$

also: finde a, b mit $g(a) = c$, $g(b) = d$ und benutze (6.2).

Beispiel 6.2.13

a) $\int \frac{e^{3t}+3}{e^t+1} dt = ?$ Mit $t = \log x =: g(x)$ und $g'(x) = \frac{1}{x} \neq 0$ kommt man zu:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\frac{e^{3t}+3}{e^t+1}}_{=f(t)} dt &= \int \frac{\overbrace{e^{3 \cdot \log x} + 3}^{=f(g(x))}}{e^{\log x} + 1} \underbrace{\frac{1}{x}}_{=g'(x)} dx \\ &= \int \frac{e^{\log(x^3)} + 3}{e^{\log x} + 1} \frac{1}{x} dx = \int \frac{x^3 + 3}{x(x+1)} dx \\ \text{Polynomdivision} \rightarrow &= \int x - 1 + \frac{x+3}{x(x+1)} dx = \frac{1}{2}x^2 - x + \int \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} dx + \text{const} \end{aligned}$$

Die Konstanten A und B bestimmen wir wie folgt:

$$\frac{A(x+1) + Bx}{x(x+1)} \stackrel{!}{=} \frac{x+3}{x(x+1)} \Rightarrow A+B=1, A=3 \Rightarrow B=-2$$

Es geht nun wie folgt weiter:

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{3t}+3}{e^t+1} dt &= \frac{1}{2}x^2 - x + \int 3 \cdot \frac{1}{x} + (-2) \cdot \frac{1}{x+1} dx + \text{const} \\ &= \frac{1}{2}x^2 - x + 3 \log|x| + (-2) \log|x+1| + \text{const} \end{aligned}$$

Rücksubstitution: $t = \log x \Leftrightarrow e^t = x$

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{3t}+3}{e^t+1} dt &= \frac{1}{2}(e^t)^2 - e^t + 3 \log e^t - 2 \cdot \log(e^t+1) + \text{const} \\ &= \frac{1}{2}e^{2t} - e^t + 3t - 2 \log(e^t+1) + \text{const} \end{aligned}$$

b) $\int \sqrt{1-t^2} dt = ?$

Wir substituieren $t = \cos x =: g(x)$, $g'(x) = -\sin x$ ($x \in [0, \pi] \Rightarrow t \in [-1, 1]$). (Schmierblattnotation: $\frac{dt}{dx} = -\sin x$, $dt = (-\sin x) dx$). Dann ist

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-t^2} dt &= \int \sqrt{1-\cos^2 x} \cdot (-\sin x) dx \\ &= -\int \sqrt{\sin^2 x} \cdot \sin x dx = -\int |\sin x| \sin x dx \\ (x \in [0, \pi] \Rightarrow \sin x \geq 0) \rightarrow &= -\int \sin^2 x dx = -\frac{1}{2}(x - \cos x \sin x) + \text{const} \end{aligned}$$

Rücksubstitution: $t = \cos x \Leftrightarrow x = \arccos t$

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-t^2} dt &= -\frac{1}{2}(\arccos t - t \cdot \sin(\arccos t)) + \text{const} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\arccos t - t\sqrt{1-\cos^2(\arccos t)} \right) + \text{const} \\ &= \frac{1}{2} \left(-\arccos t + t\sqrt{1-t^2} \right) + \text{const} \end{aligned}$$

Die Substitution von $t = \sin x$ liefert übrigens

$$\int \sqrt{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \left(\arcsin t + t\sqrt{1-t^2} \right) + \text{const}$$

Rechnen Sie es selbst nach! ¹

c)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2 x)^2 \sin x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 x)^2 \sin x dx$$

Wir substituieren $g(x) = \cos x = t$, $f(t) = (1-t^2)^2$, $g'(x) = -\sin x$, $g(0) = \cos 0 = 1$ und $g(\frac{\pi}{2}) = \cos \frac{\pi}{2} = 0$. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 x dx &= -\int_1^0 (1-t^2)^2 dt = \int_0^1 (1-t^2)^2 dt = \int_0^1 1 - 2t^2 + t^4 dt \\ &= t - \frac{2}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \Big|_0^1 = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} = \frac{15-10+3}{15} = \frac{8}{15}. \end{aligned}$$

Insbesondere gilt: $\int \sin^5 x dx = -\cos x + \frac{2}{3} \cos^3 x - \frac{1}{5} \cos^5 x + C$ (beachte obige Integralgrenzenvertauschung).

¹Wir substituieren $t = \sin x =: g(x)$, wobei $g'(x) = \cos x$. Als Definitionsbereich für g kann man beispielsweise $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ wählen, da damit für $\sqrt{1-t^2}$ der maximale Definitionsbereich $t \in [-1, 1]$ erreicht werden kann und außerdem die Bedingung $g'(x) \neq 0 \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ der Substitutionsregel erfüllt wird. Mit $\frac{dt}{dx} = \cos x \Rightarrow dt = \cos x dx$ erhalten wir dann

$$\begin{aligned} \int \sqrt{1-t^2} dt &= \int \sqrt{1-\sin^2 x} \cos x dx = \int \sqrt{\cos^2 x} \cos x dx = \int |\cos x| \cos x dx \\ &\stackrel{x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]}{=} \int \cos^2 x dx = \int 1 - \sin^2 x dx = x - \frac{1}{2}(x - \cos x \sin x) + C \\ &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin^2 x} \sin x + C \\ &= \frac{1}{2} \left(\arcsin t + \sqrt{1-t^2} t \right) + C. \end{aligned}$$

- d) $\int_{-1}^2 \sqrt{1+x^2} dx$; Substitution: $x = \sinh t =: g(t)$, $g'(t) = \cosh t$.
Einschub über Hyperbelfunktionen:

Es gilt:

$$\begin{aligned}\sinh^2 x &= \left[\frac{1}{2} (e^x - e^{-x}) \right]^2 = \frac{1}{4} (e^{2x} - 2e^{x-x} + e^{-2x}) \\ &= \frac{1}{4} (e^{2x} + e^{-2x}) - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

und

$$\cosh^2 x = \left[\frac{1}{2} (e^x + e^{-x}) \right]^2 = \frac{1}{4} (e^{2x} + e^{-2x}) + \frac{1}{2}.$$

Also gilt:

$$\sinh^2 x + 1 = \cosh^2 x \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

was äquivalent ist zu

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

im Gegensatz zu

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Außerdem kennen wir bereits die Ableitungen: $\sinh'(t) = \cosh t > 0 \quad \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \sinh$ ist streng monoton wachsend auf \mathbb{R} .

Ferner gilt:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \sinh x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\underbrace{e^x}_{\rightarrow +\infty} - \underbrace{e^{-x}}_{\rightarrow 0} \right) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \sinh x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \left(\underbrace{e^x}_{\rightarrow 0} - \underbrace{e^{-x}}_{\rightarrow -\infty} \right) = -\infty\end{aligned}$$

$\Rightarrow \sinh: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ hat eine Umkehrfunktion $\operatorname{arsinh}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, genannt **Areasinushyperbolicus**.

Wir bestimmen hiervon zunächst die Ableitung.

$$\operatorname{arsinh}(\sinh x) = x \quad \Rightarrow \quad \operatorname{arsinh}'(\sinh x) \cdot \underbrace{\sinh' x}_{=\cosh x} = 1$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow_{\cosh x \neq 0} \operatorname{arsinh}'(\sinh x) &= \frac{1}{\cosh x} \stackrel{\cosh x > 0}{=} \frac{1}{\sqrt{1 + \sinh^2 x}} \\ \Rightarrow_{y := \sinh x} \operatorname{arsinh}'(y) &= \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\int \frac{1}{\sqrt{1 + y^2}} dy = \operatorname{arsinh}(y) + \text{const.}}$$

Zurück zum Beispiel: Wir setzen $x = \sinh t = g(t)$, $-1 = g(a)$, $2 = g(b) \Rightarrow a = \operatorname{arsinh}(-1)$, $b = \operatorname{arsinh} 2$ und erhalten

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \sqrt{1 + x^2} dx &= \int_{\operatorname{arsinh}(-1)}^{\operatorname{arsinh} 2} \sqrt{1 + \sinh^2 t} \cdot \cosh t dt = \int_{\operatorname{arsinh}(-1)}^{\operatorname{arsinh} 2} \sqrt{\cosh^2 t} \cdot \cosh t dt \\ &= \int_a^b \underbrace{\cosh t}_{u(t)} \underbrace{\cosh t}_{v'(t)} dt \stackrel{\text{p. Int.}}{=} \underbrace{\cosh t}_{u(t)} \underbrace{\sinh t}_{v(t)} \Big|_a^b - \int_a^b \underbrace{\sinh^2 t}_{u'(t) \cdot v(t)} dt \\ &= \cosh t \sinh t \Big|_a^b - \int_a^b \cosh^2 t - 1 dt \\ &\Rightarrow 2 \int_a^b \cosh^2 t dt = \cosh t \sinh t \Big|_a^b + t \Big|_a^b \\ \Rightarrow \int_{-1}^2 \sqrt{1 + x^2} dx &= \frac{1}{2} (\cosh t \sinh t + t) \Big|_{\operatorname{arsinh}(-1)}^{\operatorname{arsinh} 2} \\ &= \frac{1}{2} (\cosh(\operatorname{arsinh} 2) \cdot 2 + \operatorname{arsinh} 2 \\ &\quad - \cosh(\operatorname{arsinh}(-1)) \cdot (-1) - \operatorname{arsinh}(-1)) \end{aligned}$$

bzw.

$$\int \sqrt{1 + x^2} dx = \frac{1}{2} (\sqrt{1 + x^2} \cdot x + \operatorname{arsinh} x) + \text{const.}$$

Nochmal zu den Hyperbel- und Areafunktionen:

Wir betrachten die Gleichung $x = \sinh t = \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})$. Sei $u := e^t$.

$$\begin{aligned} \Rightarrow x &= \frac{1}{2} \left(u - \frac{1}{u} \right) \Leftrightarrow_{u \neq 0} xu = \frac{1}{2} (u^2 - 1) \Leftrightarrow 0 = u^2 - 2xu - 1 \\ &\Rightarrow u_{1,2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}. \end{aligned}$$

1. Fall: $x \geq 0 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 1} > x \Rightarrow x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ (geht nicht, da $u = e^t > 0$)

2. Fall: $x < 0 \Rightarrow x - \sqrt{x^2 + 1} < 0$ (geht nicht, da $u > 0$)

\Rightarrow "–"-Variante scheidet aus.

$\Rightarrow u = x + \sqrt{x^2 + 1}$, d.h. $e^t = x + \sqrt{x^2 + 1}$

$\Rightarrow \underbrace{t}_{=\text{arsinh } x} = \log(x + \sqrt{x^2 + 1})$.

Also ist das Ergebnis

$$\sqrt{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \left(\sqrt{x^2+1} \cdot x + \log(x + \sqrt{x^2+1}) \right) + \text{const.}$$

Somit ergibt das bestimmte Integral

$$\begin{aligned} \int_{-1}^2 \sqrt{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \left(\sqrt{5} \cdot 2 + \log(2 + \sqrt{5}) - (\sqrt{2} \cdot (-1) + \log(-1 + \sqrt{2})) \right) \\ &= \sqrt{5} + \frac{1}{2} \left(\log(2 + \sqrt{5}) + \sqrt{2} - \log(-1 + \sqrt{2}) \right) \end{aligned}$$

◇

6.3 Integration rationaler Funktionen

Gegeben: $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$; P, Q Polynome.

1) Falls $\deg P \geq \deg Q$: Polynomdivision (mit Rest):

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}; \quad R, S \text{ Polynome, } \deg R < \deg Q$$

Das Integral $\int S(x) dx$ ist hierbei einfach zu berechnen.

2) Also konzentrieren wir uns auf Integrale der Form $\int \frac{R(x)}{Q(x)} dx$; R, Q Polynome, $\deg R < \deg Q$.

\hookrightarrow Nennerpolynom Q maximal in reelle polynomiale Faktoren zerlegen:

$$Q(x) = (Q_1(x))^{k_1} \cdot \dots \cdot (Q_n(x))^{k_n};$$

Q_j : verschiedene Polynome; $j = 1, \dots, n$; $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{N}$

(Beachte: Vollständige Zerlegung in Linearfaktoren ist generell nur über \mathbb{C} möglich).

3) Partialbruchzerlegung: Finde Polynome $A_{i,j}(x)$, so dass

$$\begin{aligned} \frac{R(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{1,1}(x)}{Q_1(x)} + \frac{A_{1,2}(x)}{Q_1(x)^2} + \dots + \frac{A_{1,k_1}(x)}{(Q_1(x))^{k_1}} + \frac{A_{2,1}(x)}{Q_2(x)} + \frac{A_{2,2}(x)}{(Q_2(x))^2} \\ &+ \dots + \frac{A_{2,k_2}(x)}{(Q_2(x))^{k_2}} + \dots + \frac{A_{n,1}(x)}{Q_n(x)} + \dots + \frac{A_{n,k_n}(x)}{(Q_n(x))^{k_n}} \end{aligned}$$

4) Integriere die einzelnen Summanden (soweit möglich).

Beispiel 6.3.1

a) $\int \frac{x-7}{x^2+x-6} dx = ?$

1. Zählergrad < Nennergrad ✓
2. Zerlegung des Nennerpolynoms

$$\begin{aligned} x^2 + x - 6 &= 0 \Rightarrow x_{1/2} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 6} = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} = -\frac{1}{2} \pm \frac{5}{2} \\ \Rightarrow x^2 + x - 6 &= (x-2)(x+3) \end{aligned}$$

3. Partialbruchzerlegung

Wir verwenden also folgenden Ansatz:

$$\frac{x-7}{x^2+x-6} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-2)}{(x-2)(x+3)} = \frac{(A+B)x + (3A-2B)}{x^2+x-6}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} (i) A+B=1 \Leftrightarrow A=1-B \\ (ii) 3A-2B=-7 \end{array} \right\} \Rightarrow 3-3B-2B=-7 \Rightarrow -5B=-10 \\ \Rightarrow B=2 \Rightarrow A=-1 \end{aligned}$$

4. Berechnung des Integrals

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int \frac{x-7}{x^2+x-6} dx &= \int \frac{-1}{x-2} dx + \int \frac{2}{x+3} dx = -\int \frac{1}{x-2} dx + 2 \int \frac{1}{x+3} dx \\ &\stackrel{\text{Kor.6.2.11}}{=} -\log|x-2| + 2 \log|x+3| + \text{const.} \end{aligned}$$

b) $\int \frac{4x^4+2x^3+3x^2-2x-4}{2x^3-x^2+2x-1} dx = ?$

1. Polynomdivision:

$$\begin{array}{r} (4x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x - 4) : (2x^3 - x^2 + 2x - 1) = 2x + 2 + \frac{x^2 - 4x - 2}{2x^3 - x^2 + 2x - 1} \\ \underline{-(4x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 2x)} \\ 4x^3 - x^2 + 0 - 4 \\ \underline{-(4x^3 - 2x^2 + 4x - 2)} \\ x^2 - 4x - 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \int \frac{4x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x - 4}{2x^3 - x^2 + 2x - 1} dx = \underbrace{\int 2x + 2 dx}_{=x^2+2x+\text{const.}} + \int \frac{x^2 - 4x - 2}{2x^3 - x^2 + 2x - 1} dx$$

2. Zerlege $2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 2(x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2})$
geratene Nullstelle: $\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} (x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{2}) : (x - \frac{1}{2}) &= x^2 + 1. \\ - (x^3 - \frac{1}{2}x^2) & \\ \hline 0 + x - \frac{1}{2} & \end{aligned}$$

$$\text{Also: } 2x^3 - x^2 + 2x - 1 = 2(x - \frac{1}{2})(x^2 + 1) = (2x - 1)(x^2 + 1)$$

Beachten Sie, dass $x^2 + 1$ über \mathbb{R} nicht weiter zerlegbar ist ($x^2 + 1 = (x - i)(x + i)$).

3. Partialbruchzerlegung

$$\begin{aligned} \frac{x^2 - 4x - 2}{2x^3 - x^2 + 2x - 1} &= \frac{A}{2x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + 1} = \frac{(A + 2B)x^2 + (2C - B)x + A - C}{(2x - 1)(x^2 + 1)} \\ &\Rightarrow A + 2B = 1, 2C - B = -4, \underbrace{A - C = -2}_{\Leftrightarrow A = C - 2} \\ &\Rightarrow \underbrace{C - 2 + 2B = 1}_{\Leftrightarrow C + 2B = 3}, \underbrace{2C - B = -4}_{\Leftrightarrow 2C + 4 = B} \\ &\Rightarrow C + 4C + 8 = 3 \Rightarrow 5C = -5 \Rightarrow C = -1 \\ &\Rightarrow B = -2 + 4 = 2 \Rightarrow A = -1 - 2 = -3 \\ &\Rightarrow \frac{x^2 - 4x - 2}{2x^3 - x^2 + 2x - 1} = -3 \cdot \frac{1}{2x - 1} + \frac{2x - 1}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

4. Berechnung des Integrals

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \int \frac{4x^4 + 2x^3 + 3x^2 - 2x - 4}{2x^3 - x^2 + 2x - 1} dx = \\ &= x^2 + 2x - \frac{3}{2} \cdot \int \frac{2}{2x - 1} dx + \int \frac{2x}{x^2 + 1} dx - \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + C \\ &= x^2 + 2x - \frac{3}{2} \log |2x - 1| + \log(x^2 + 1) - \arctan x + C \end{aligned}$$

c) $\int \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^3(x-2)} dx = ?$

1. Zählergrad < Nennergrad ✓
2. Nennerpolynom bereits maximal zerlegt
3. Partialbruchzerlegung: Hier ist nun der Ansatz

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)^3(x - 2)} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{(x - 1)^2} + \frac{C}{(x - 1)^3} + \frac{D}{x - 2}$$

Es ergibt sich (nach längerer, aber einfacher Rechnung):

$$\frac{x^2 + x + 1}{(x - 1)^3(x - 2)} = \frac{-7}{x - 1} + \frac{-6}{(x - 1)^2} + \frac{-3}{(x - 1)^3} + \frac{7}{x - 2}$$

4. Berechnung der Integrale:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + x + 1}{(x-1)^3(x-2)} dx &= \int \frac{-7}{x-1} + \frac{-6}{(x-1)^2} + \frac{-3}{(x-1)^3} + \frac{7}{x-2} dx \\ &= -7 \log|x-1| - 6 \cdot (-1) \cdot \frac{1}{x-1} - 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{(x-1)^2} + 7 \log|x-2| + C \\ &= -7 \log|x-1| + \frac{6}{x-1} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{(x-1)^2} + 7 \log|x-2| + C \end{aligned}$$

und beliebig kompliziertere Beispiele... ◇

Bemerkung 6.3.2 Für $\frac{x^2+x-2}{(x+3)(x+1)(x-2)}$ kennen wir den komplizierten Weg:

$$\begin{aligned} \frac{x^2 + x - 2}{(x+3)(x+1)(x-2)} &= \frac{A}{x+3} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2} \\ &= \frac{A(x+1)(x-2) + B(x+3)(x-2) + C(x+3)(x+1)}{(x+3)(x+1)(x-2)} \\ &= \frac{A(x^2 - x - 2) + B(x^2 + x - 6) + C(x^2 + 4x + 3)}{(x+3)(x+1)(x-2)} \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A + B + C = 1 \Leftrightarrow A = 1 - B - C \\ -A + B + 4C = 1 \\ -2A - 6B + 3C = -2 \end{array} \right\} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} -1 + B + C + B + 4C = 1 \\ (\Leftrightarrow 2B = 2 - 5C), \\ -2 + 2B + 2C - 6B + 3C = -2 \\ (\Leftrightarrow -4B + 5C = 0) \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} -4 + 10C + 5C = 0 \\ \Rightarrow C = \frac{4}{15} \end{array} \\ &\Rightarrow B = 1 - \frac{5}{2}C = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \Rightarrow A = 1 - \frac{1}{3} - \frac{4}{15} = \frac{15 - 5 - 4}{15} = \frac{6}{15} = \frac{2}{5} \end{aligned}$$

Einfacher ist die **“Zuhaltetechnik”** (funktioniert nur bei Linearfaktoren $(x - x_j)$, die alle verschieden sind, d.h. Vielfachheit 1 haben):

Halte den entsprechenden Linearfaktor zu und setze die zugehörige Nullstelle in den Rest ein.

$$A: \text{halte } (x+3) \text{ zu und setze } -3 \text{ ein: } A = \frac{(-3)^2 + (-3) - 2}{(-3+1)(-3-2)} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

$$B = \frac{(-1)^2 + (-1) - 2}{(-1+3)(-1-2)} = \frac{-2}{-6} = \frac{1}{3},$$

$$C = \frac{2^2 + 2 - 2}{(2+3)(2+1)} = \frac{4}{15}.$$

6.4 Uneigentliche Integrale

Definition 6.4.1

- a) Für $f: [a, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ sei $\int_a^{+\infty} f(x) dx := \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx$, falls existent (d.h. Integrale definiert und $\lim \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$)
- b) Für $f:]-\infty, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei $\int_{-\infty}^b f(x) dx := \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx$, falls existent
- c) Für $f:]a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei $\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx = \lim_{c \rightarrow a+} \int_c^b f(x) dx$, falls existent
- d) Für $f: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sei $\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx = \lim_{c \rightarrow b-} \int_a^c f(x) dx$, falls existent

Beispiel 6.4.2

a) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \log x \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \log b = +\infty$

b) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{x}\right) \Big|_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-\frac{1}{b} + 1\right) = 1$

c) allgemein:

$$\int_1^{\infty} x^{\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{\alpha} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \Big|_1^b & , \alpha \neq -1 \\ \log x \Big|_1^b & , \alpha = -1 \end{array} \right\}$$

$$= \lim_{b \rightarrow \infty} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{1}{\alpha+1} (b^{\alpha+1} - 1) & , \alpha \neq -1 \\ \log b & , \alpha = -1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{ll} +\infty & , \alpha \geq -1 \\ -\frac{1}{\alpha+1} & , \alpha < -1 \end{array} \right.$$

(z.B. $\alpha = -2$: $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{-2+1} = 1$.)

d) $\int_{-\infty}^1 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^1 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} e^x \Big|_a^1 = \lim_{a \rightarrow -\infty} (e - e^a) = e$.

e) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{a \rightarrow 0+} \int_a^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = \lim_{a \rightarrow 0+} 2 \cdot x^{\frac{1}{2}} \Big|_a^1 = 2$.

f) allgemein:

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^\alpha dx &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \int_a^1 x^\alpha dx = \lim_{a \rightarrow 0^+} \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1} \Big|_a^1, & \alpha \neq -1 \\ \log x \Big|_a^1, & \alpha = -1 \end{cases} \\ &= \lim_{a \rightarrow 0^+} \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1} (1 - a^{\alpha+1}), & \alpha \neq -1 \\ 0 - \log a, & \alpha = -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\alpha+1}, & \alpha > -1 \\ +\infty, & \alpha \leq -1 (\Leftrightarrow \alpha + 1 \leq 0) \end{cases} \end{aligned}$$

(für $\alpha \geq 0$ gar kein uneigentliches Integral), siehe auch Abbildung 6.7.

◇

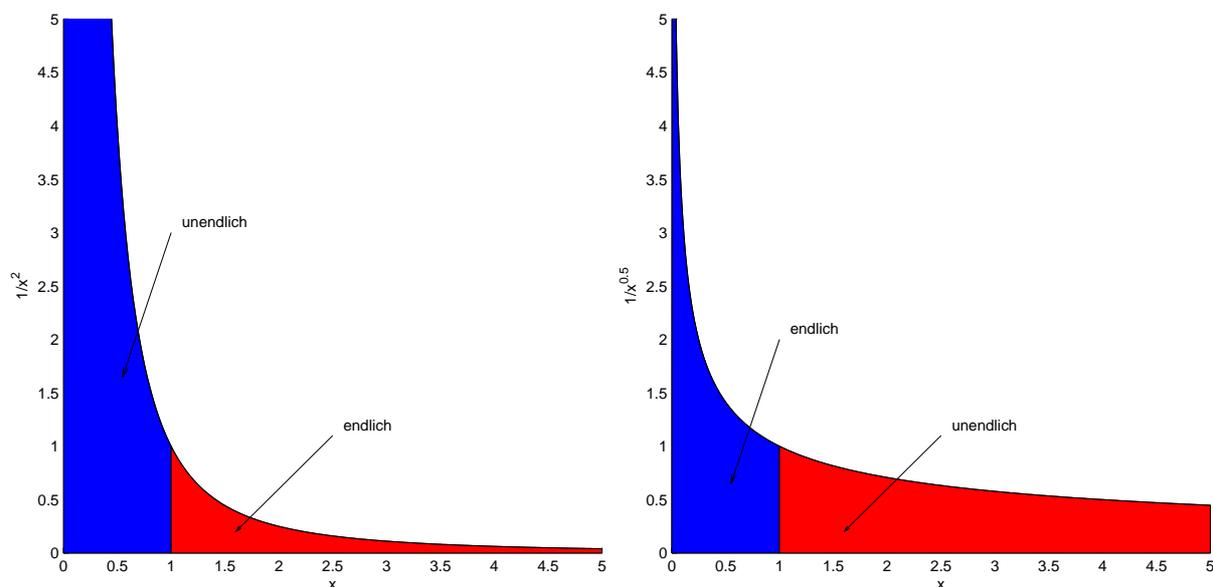


Abbildung 6.7: Illustration von $\int_0^1 x^\alpha dx$ (blau) und $\int_1^{+\infty} x^\alpha dx$ (rot) für $\alpha = -2$ (links) und $\alpha = -\frac{1}{2}$ (rechts).

Definition 6.4.3

a) Für $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx := \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b f(x) dx$, falls existent.

b) Für $f: [a, b] \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < x_0 < b$) sei

$$\int_a^b f(x) dx := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_a^{x_0 - \varepsilon} f(x) dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{x_0 + \varepsilon}^b f(x) dx,$$

falls die rechte Seite existiert, also jeweils zwei getrennte Grenzwerte betrachten.

Beispiel 6.4.4

a)

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx &= \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \int_a^b \frac{1}{1+x^2} dx = \lim_{\substack{a \rightarrow -\infty \\ b \rightarrow +\infty}} \arctan x \Big|_a^b \\ &= \lim_{b \rightarrow \infty} \arctan b - \lim_{a \rightarrow -\infty} \arctan a = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi. \end{aligned}$$

b) $\int_0^3 \frac{1}{x^2-2} dx = ?$ Hier wird über eine Nullstelle des Nenners ($\sqrt{2}$) hinweg integriert.

Substitution: $x = \sqrt{2}t =: g(t)$, $g'(t) = \sqrt{2} \neq 0$, d.h. $dx = \sqrt{2} dt$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2-2} dx &= \int \frac{1}{2t^2-2} \cdot \sqrt{2} dt \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \int \frac{1}{t^2-1} dt = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} \log \left| \frac{1+t}{1-t} \right| \right) + C \\ &= \frac{\sqrt{2}}{4} \log \left| \frac{1-t}{1+t} \right| + C = \frac{\sqrt{2}}{4} \log \left| \frac{1 - \frac{x}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{x}{\sqrt{2}}} \right| + C \\ \Rightarrow \int_0^3 \frac{1}{x^2-2} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{\sqrt{2}-\varepsilon} \frac{1}{x^2-2} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\sqrt{2}+\varepsilon}^3 \frac{1}{x^2-2} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \log \left| \frac{1 - \frac{\sqrt{2}-\varepsilon}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{\sqrt{2}-\varepsilon}{\sqrt{2}}} \right| - \frac{\sqrt{2}}{4} \log \left| \frac{1 - \frac{0}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{0}{\sqrt{2}}} \right| \right) \\ &\quad + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\frac{\sqrt{2}}{4} \log \left| \frac{1 - \frac{3}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{3}{\sqrt{2}}} \right| - \frac{\sqrt{2}}{4} \log \left| \frac{1 - \frac{\sqrt{2}+\varepsilon}{\sqrt{2}}}{1 + \frac{\sqrt{2}+\varepsilon}{\sqrt{2}}} \right| \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \log \frac{1 - 1 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}}{1 + 1 - \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{2}}{4} \log 1 \right)}_{=-\infty} \end{aligned}$$

$$+ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \underbrace{\left(\frac{\sqrt{2}}{4} \log \frac{\left| 1 - \frac{3}{\sqrt{2}} \right|}{1 + \frac{3}{\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{2}}{4} \log \frac{\left| -\frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \right|}{2 + \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}} \right)}_{\text{endlich}}}_{=+\infty}$$

$\Rightarrow \int_0^3 \frac{1}{x^2-2} dx$ existiert nicht.

c)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{x^2} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-1}^{0-\varepsilon} \frac{1}{x^2} dx + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{0+\varepsilon}^1 \frac{1}{x^2} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(-\frac{1}{x} \right) \Big|_{\varepsilon}^1 = \left(\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \right) - 1 + (-1) + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} \\ &= +\infty. \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \log |x| \Big|_{-1}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \log |x| \Big|_{\varepsilon}^1 \\ &= \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \log \varepsilon}_{=-\infty} - \underbrace{\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \log \varepsilon}_{=+\infty} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx$ existiert nicht.

Falsch wäre

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_{-1}^{-\varepsilon} \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{x} dx \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} (\log \varepsilon - \log 1 + \log 1 - \log \varepsilon) = 0.$$

◇

Definition 6.4.5 Für $f: [a, b] \setminus \{x_0\} \rightarrow \mathbb{R}$ ($a < x_0 < b$) sei der **Cauchy'sche Hauptwert** definiert durch

$$\begin{aligned} \text{CHW-} \int_a^b f(x) dx &:= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x) dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x) dx \right) \\ &\left(=: \text{C.p.v.-} \int_a^b f(x) \quad \text{“Cauchy principal value”} \right) \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass hierbei “-” nur ein Bindestrich und kein Minus ist.

Beispiel 6.4.6

$$\text{CHW-} \int_{-1}^1 \frac{1}{x} dx = 0.$$

◇

Satz 6.4.7 (Integralkriterium) Sei $f: [p, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ ($p \in \mathbb{Z}$) nicht-negativ und monoton fallend. Dann haben die Reihe und das unbestimmte Integral bezüglich f dasselbe Konvergenzverhalten. Genauer gilt:

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} f(n) \leq \int_p^{\infty} f(x) dx \leq \sum_{n=p}^{\infty} f(n)$$

Beweis: Da f monoton fallend ist, gilt für alle $x \in [n, n+1]$, $n \geq p$:

$$f(n) \geq f(x) \geq f(n+1),$$

siehe auch Abbildung 6.8. Durch Integration wird daraus mit der Monotonie von Integralen:

$$\underbrace{\int_n^{n+1} \underbrace{f(n)}_{\text{konstant}} dx}_{=(n+1-n)f(n)} \geq \int_n^{n+1} f(x) dx \geq \underbrace{\int_n^{n+1} \underbrace{f(n+1)}_{\text{konstant}} dx}_{=(n+1-n)f(n+1)}$$

Also ist für alle $n \geq p$:

$$f(n) \geq \int_n^{n+1} f(x) dx \geq f(n+1)$$

und somit

$$\sum_{n=p}^{\infty} f(n) \geq \sum_{n=p}^{\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx \geq \sum_{n=p}^{\infty} f(n+1).$$

In der Mitte erkennen wir das uneigentliche Integral (wegen der Monotonie), und rechts machen wir eine Indexverschiebung:

$$\sum_{n=p}^{\infty} f(n) \geq \int_p^{+\infty} f(x) dx \geq \sum_{n=p+1}^{\infty} f(n)$$

Das war zu zeigen. ■

Beispiel 6.4.8 Aus der Betrachtung von $\int_1^{+\infty} x^\alpha dx$ entnehmen wir, dass $\sum_{n=1}^{\infty} n^\alpha$ nur für $\alpha < -1$ konvergiert. ◇

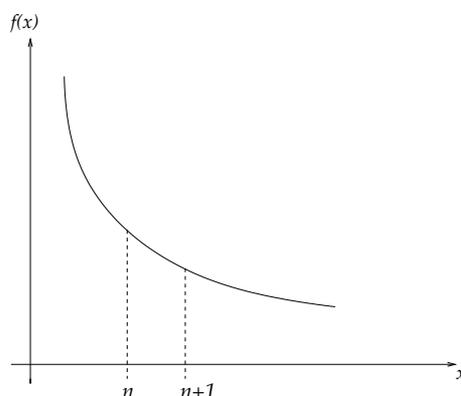


Abbildung 6.8: Monoton fallende Funktion

6.5 Integration komplexwertiger Funktionen

Definition 6.5.1 Eine Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{C}$ heißt integrierbar, wenn $\operatorname{Re} f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und $\operatorname{Im} f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ integrierbar sind. In diesem Fall setzt man

$$\int_a^b f(x) dx := \int_a^b \operatorname{Re} f(x) dx + i \int_a^b \operatorname{Im} f(x) dx$$

Beispiel 6.5.2

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} e^{it} dt &= \int_0^{2\pi} \cos t + i \sin t dt = \int_0^{2\pi} \cos t dt + i \int_0^{2\pi} \sin t dt \\ &= \sin t \Big|_0^{2\pi} + i(-\cos t) \Big|_0^{2\pi} = 0 + i(-1 - (-1)) = 0. \end{aligned}$$

◇

Uneigentliche Integrale bieten auch eine Möglichkeit, über die Konvergenz von Reihen zu entscheiden.

6.6 Ein kurzer Einblick in gewöhnliche Differentialgleichungen

Beispiel 6.6.1 Die Gleichung

$$y''(x) + ay'(x) + by(x) = f(x)$$

heißt Schwingungsgleichung. Hierbei ist y eine unbekannte Funktion (Schwingung). Man interpretiert $ay'(x)$ als Dämpfungsterm und $f(x)$ als Motor. ◇

Definition 6.6.2 Sei $f: \mathbb{R}^{n+2} \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Eine Gleichung

$$f(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0$$

für eine unbekannte Funktion y (von einer Variablen x) heißt **gewöhnliche Differentialgleichung**. Die höchste Ableitungsordnung (hier n) von y heißt **Ordnung** der Differentialgleichung.

Die einfachste Form einer Differentialgleichung ist

$$y'(x) = h(x)$$

Es gilt

$$y(x) = \int h(x) dx$$

Die Lösung ist also nicht eindeutig! Mit der Anfangsbedingung $y(a) = y_0$ erhält man

$$y(x) = \int_a^x h(t) dt + y_0$$

(Test:

$$\begin{aligned} y'(x) &= h(x) \quad (\text{HDI}) \\ y(a) &= \int_a^a f(t) dt + y_0 \\ &= y_0 \end{aligned}$$

Wir betrachten hier nur Differentialgleichungen 1. Ordnung, die separabel sind, d.h.

$$g(y(x)) \cdot y'(x) = h(x)$$

Man verwendet hier den **Lösungsansatz der "Separation der Variablen"**:

$$\begin{aligned} \int g(y(x)) y'(x) dx &= \int h(x) dx \\ \Rightarrow_{\text{Subst. } z=y(x)} \int g(z) dz \Big|_{z=y(x)} &= \int h(x) dx \end{aligned}$$

ausrechnen, nach $y(x)$ auflösen.

Für Anfangswertprobleme: $g(y(x)) \cdot y'(x) = h(x)$, $y(a) = y_0$.

$$\begin{aligned} \int_a^x g(y(t)) y'(t) dt &= \int_a^x h(t) dt \\ \Rightarrow_{z=y(t)} \int_{y_0}^{y(x)} g(z) dz &= \int_a^x h(t) dt \end{aligned}$$

ausrechnen, nach $y(x)$ auflösen.

Die Probleme bei diesem Ansatz sind folgende:

- Implikation “ \Rightarrow ” in die falsche Richtung: Damit $y(x) = \dots$ eine Lösung ist, muss $y(x) = \dots \Rightarrow$ Differentialgleichung gelten (vgl. $x = -x \Rightarrow x^2 = x^2$. Die rechte Seite $x^2 = x^2$ ist für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt, aber $x = -x$ gilt nur für $x = 0$).
- Die Substitutionsregel erfordert, dass y' keine Nullstelle hat.

Daher muss ein Ergebnis nicht zwangsläufig Lösung der Differentialgleichung sein. Deshalb muss immer eine Probe im Anschluss durchgeführt werden!

Ferner können Lösungen (wegen der Voraussetzung der Substitutionsregel) übersehen werden.

Beispiel 6.6.3

a) $y'(x) = \lambda y(x)$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ fest

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{1}{y(x)}}_{=g(y(x)), g(z)=\frac{1}{z}} \cdot y'(x) = \underbrace{\lambda}_{h(x) \text{ (konst.)}} \quad (\text{sofern } y(x) \neq 0)$$

$$\int \frac{y'(x)}{y(x)} dx = \int \lambda dx$$

Substitutionsschritt nicht nötig, benutze Korollar 6.2.11

$$\begin{aligned} \log |y(x)| &= \lambda x + C_1 \quad (C_j : \text{Konstanten}) \\ \Rightarrow |y(x)| &= e^{\lambda x + C_1} = e^{\lambda x} \underbrace{e^{C_1}}_{=: C_2} \end{aligned}$$

Da y differenzierbar sein sollte, ist y insbesondere stetig. Ferner hat $x \mapsto e^{\lambda x}$ keine Nullstelle. Nach dem Zwischenwertsatz hat y damit konstantes Vorzeichen.

$$\Rightarrow_{C_3 := (\text{sgn } y) \cdot C_2} y(x) = C_3 \cdot e^{\lambda x}$$

Test:

$$y'(x) = C_3 \cdot \lambda e^{\lambda x} = \lambda y(x) \quad \checkmark$$

b) $y' = xy^2$, d.h. $y'(x) = xy^2(x)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{y'(x)}{y^2(x)} = x &\Rightarrow \int \frac{y'(x)}{y^2(x)} dx = \int x dx \\ \Rightarrow \int_{z=y(x)} \frac{1}{z^2} dz \Big|_{z=y(x)} &= \frac{1}{2} x^2 + C_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow -\frac{1}{z} \Big|_{z=y(x)} + C_2 &= \frac{1}{2} x^2 + C_1 \\ \Rightarrow -\frac{1}{y(x)} &= \frac{1}{2} x^2 + C_1 - C_2 \\ \Rightarrow y(x) &= -\frac{1}{\frac{1}{2} x^2 + C_3} \quad (C_3 := C_1 - C_2) \end{aligned}$$

Mit der Schmierblattnotation kann man hier auch nach dem Prinzip “alles mit y auf die eine Seite und alles mit x auf die andere Seite” verfahren. Aus der Differentialgleichung

$$\frac{dy}{dx} = xy^2$$

wird dann

$$\frac{1}{y^2} dy = x dx$$

und schließlich

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{y^2} dy &= \int x dx \\ \Rightarrow -\frac{1}{y} &= \frac{1}{2} x^2 + C \\ \Rightarrow y(x) &= -\frac{1}{\frac{1}{2} x^2 + C} \end{aligned}$$

Probe:

$$y'(x) = -\frac{0 - 1 \cdot x}{\left(\frac{1}{2} x^2 + C_3\right)^2} = \frac{x}{\left(\frac{1}{2} x^2 + C_3\right)^2} = x \cdot (y(x))^2$$

aber: auch $y(x) = 0 \forall x$ ist eine Lösung.

c) $y' = e^y \sin x$, $y(0) = 1$

$$\frac{y'(x)}{e^{y(x)}} = \sin x \Rightarrow \int_0^x e^{-y(\xi)} \cdot y'(\xi) d\xi = \int_0^x \sin \xi d\xi \quad (6.3)$$

Wir verwenden die Substitutionsregel mit $f(t) = e^{-t}$ und erhalten für die linke Seite

$$\int_0^x e^{-y(\xi)} y'(\xi) d\xi = \int_{y(0)}^{y(x)} e^{-t} dt = -e^{-t} \Big|_{y(0)}^{y(x)} \stackrel{y(0)=1}{=} -e^{-y(x)} + e^{-1}$$

In (6.3) erhält man dann

$$-e^{-y(x)} + e^{-1} = -\cos x - (-\cos 0)$$

$$\Rightarrow e^{-y(x)} = \frac{1}{e} - 1 + \cos x \Rightarrow y(x) = -\log\left(\frac{1}{e} - 1 + \cos x\right)$$

Probe:

$$\begin{aligned}y'(x) &= -\frac{1}{\frac{1}{e} - 1 + \cos x} \cdot (-\sin x) \\&= \sin x \cdot \exp\left(\log\left(\frac{1}{\frac{1}{e} - 1 + \cos x}\right)\right) \\&= \sin x \cdot \exp\left(-\log\left(\frac{1}{e} - 1 + \cos x\right)\right) \\&= \sin x \cdot e^{y(x)} \quad \checkmark\end{aligned}$$

$$y(0) = -\log\left(\frac{1}{e} - 1 + \underbrace{\cos 0}_{=1}\right) = -\log\left(\frac{1}{e}\right) = -(-1) = 1 \quad \checkmark$$

◇

Teil II

Kapitel 7

Differentialrechnung für Funktionen mehrerer Veränderlicher

7.1 Skalar- und Vektorfelder

Definition 7.1.1 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ ($n > 1$).

a) Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **skalare Funktion** oder **Skalarfeld**. Die Menge

$$G_f := \{ (x, z) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x \in D, z = f(x) \}$$

heißt **Graph** von f . Zu $c \in \mathbb{R}$ heißt

$$N_c(f) := \{ x \in D \subset \mathbb{R}^n \mid f(x) = c \}$$

Niveaumenge (Niveaufläche, level set) von f zum Niveau c .

b) Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($m > 1$) heißt **vektorwertige Funktion** oder **Vektorfeld**.

Beispiel 7.1.2

a) Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \langle x, Ax \rangle$. f ist eine quadratische Form, deren Niveauflächen schon zuvor behandelt wurden.

b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := x^2 + y^2 = \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^2, \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ (oder } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{)}.$$

Sein Graph ist ein Paraboloid (vgl. Satellitenschüssel). Die Niveauflächen sind gegeben durch

$$x^2 + y^2 = c \Leftrightarrow \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{c},$$

d.h. $y = \pm\sqrt{c-x^2}$, $x \in [-\sqrt{c}, \sqrt{c}]$, siehe Abbildung 7.1. Offensichtlich gibt es nur für $c \geq 0$ Niveauflächen, wobei bei $c = 0$ nur ein Punkt vorliegt (entartete Niveaufläche). Auch dieses f ist übrigens eine quadratische Form:

$$f(x, y) = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle.$$

c) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) := e^{-x^2-y^2} = \exp\left(-\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^2\right)$$

Offensichtlich ist das Maximum bei $f(0, 0) = e^{-0^2} = 1$. Der Graph und die Niveauflächen von f sind in Abbildung 7.2 dargestellt. Die Niveauflächen lassen sich bestimmen, indem man $\exp(-x^2 - y^2) = c$ wie folgt beispielsweise nach y auflöst (offensichtlich muss $c > 0$ gelten):

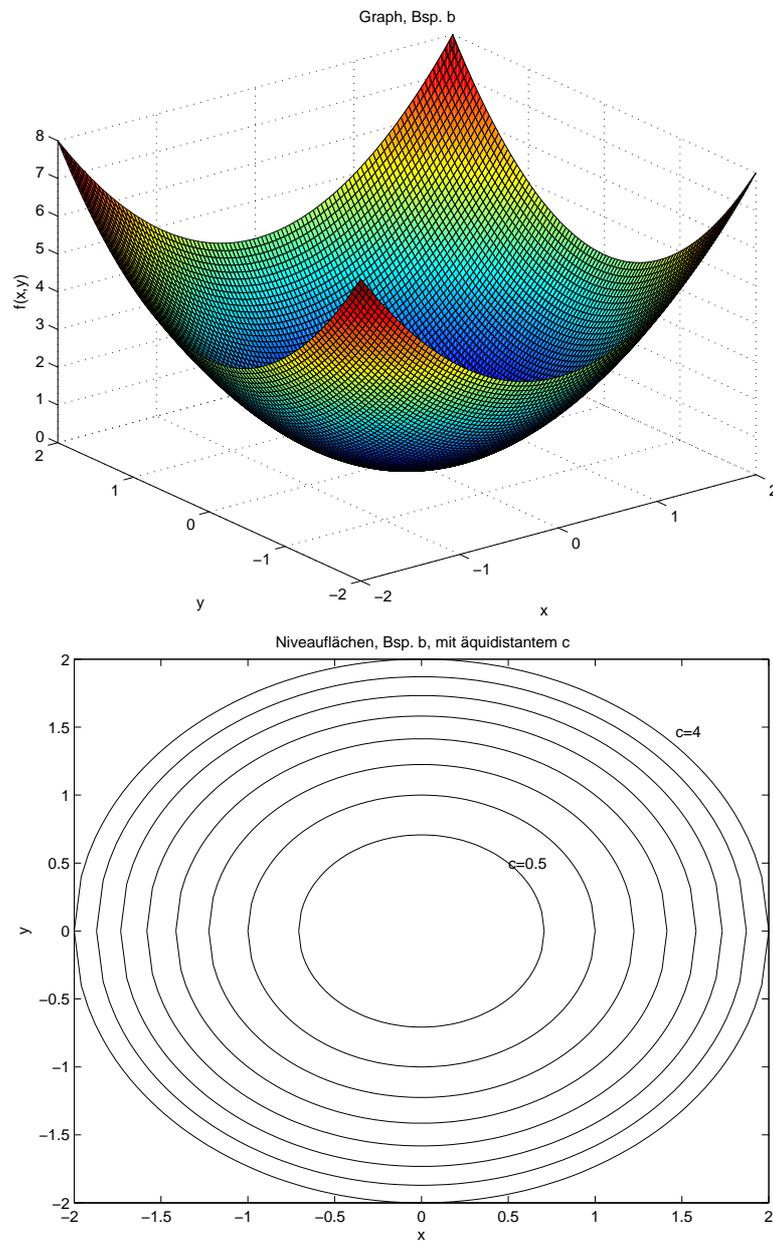
$$\begin{aligned} \exp(-x^2 - y^2) &= c \\ \Leftrightarrow \exp(-y^2) &= \exp(x^2) c \\ \Leftrightarrow -y^2 &= \ln(\exp(x^2) c) \\ \Leftrightarrow y^2 &= -\ln \exp(x^2) - \ln c \\ \Leftrightarrow y^2 &= -x^2 - \ln c \\ \Leftrightarrow y &= \pm \sqrt{\ln \frac{1}{c} - x^2} \end{aligned}$$

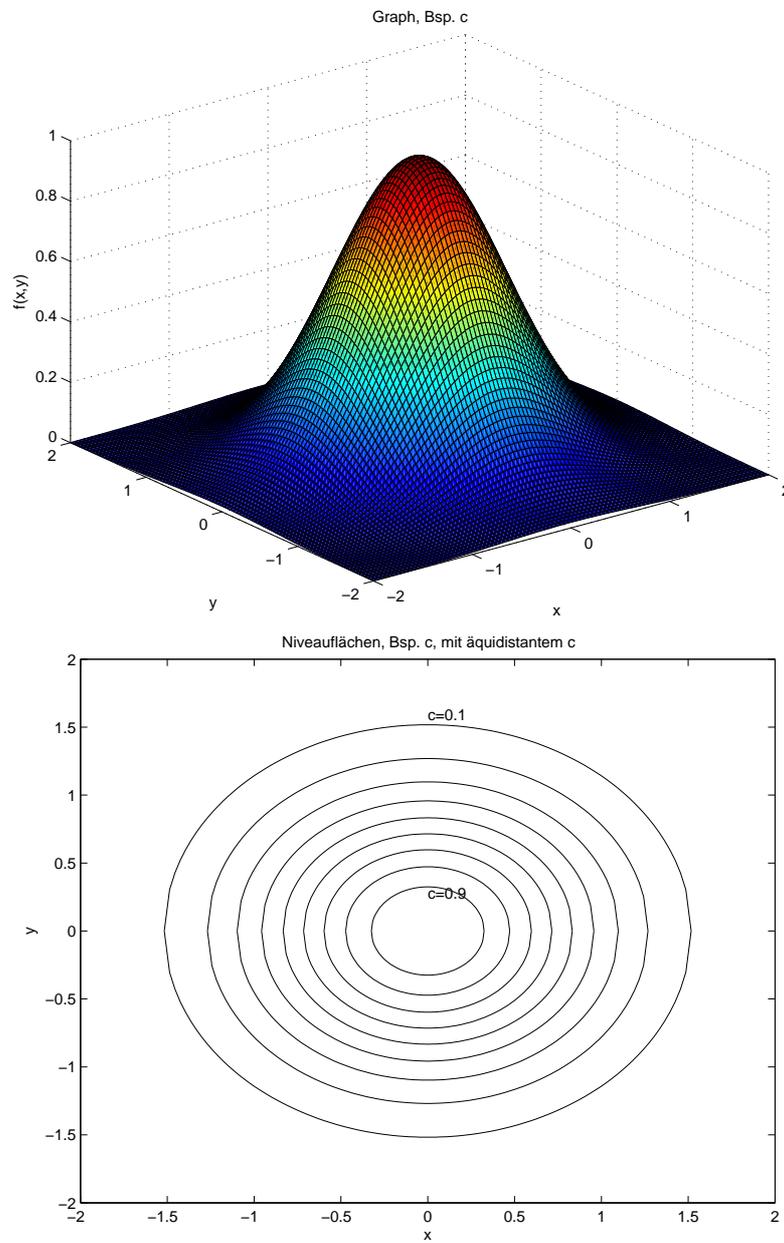
Damit es überhaupt eine Niveaufläche gibt, muss $\ln \frac{1}{c} = -\ln c$ nicht-negativ sein, also $(0 <) c \leq 1$ gelten. Ferner ist, bei gegebenem $0 < c \leq 1$ der Bereich für x gegeben durch $x \in [-\sqrt{-\ln c}, \sqrt{-\ln c}]$.

d) Auf dem abgeschlossenen Kreis mit Radius 1 und Zentrum $(0, 0)$

$$\overline{K}_1(0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \|(x, y) - (0, 0)\| \leq 1\}$$

sei das Skalarfeld $f : \overline{K}_1(0) \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x, y) := \sqrt{1-x^2-y^2} = \sqrt{1-\|(x, y)\|^2}$. Ihr Graph und ihre Niveauflächen sind in Abbildung 7.3 dargestellt. Der Graph stellt

Abbildung 7.1: Graph (oben) und Niveauflächen von $f(x,y) = x^2 + y^2$

Abbildung 7.2: Graph (oben) und Niveauflächen von $f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2)$

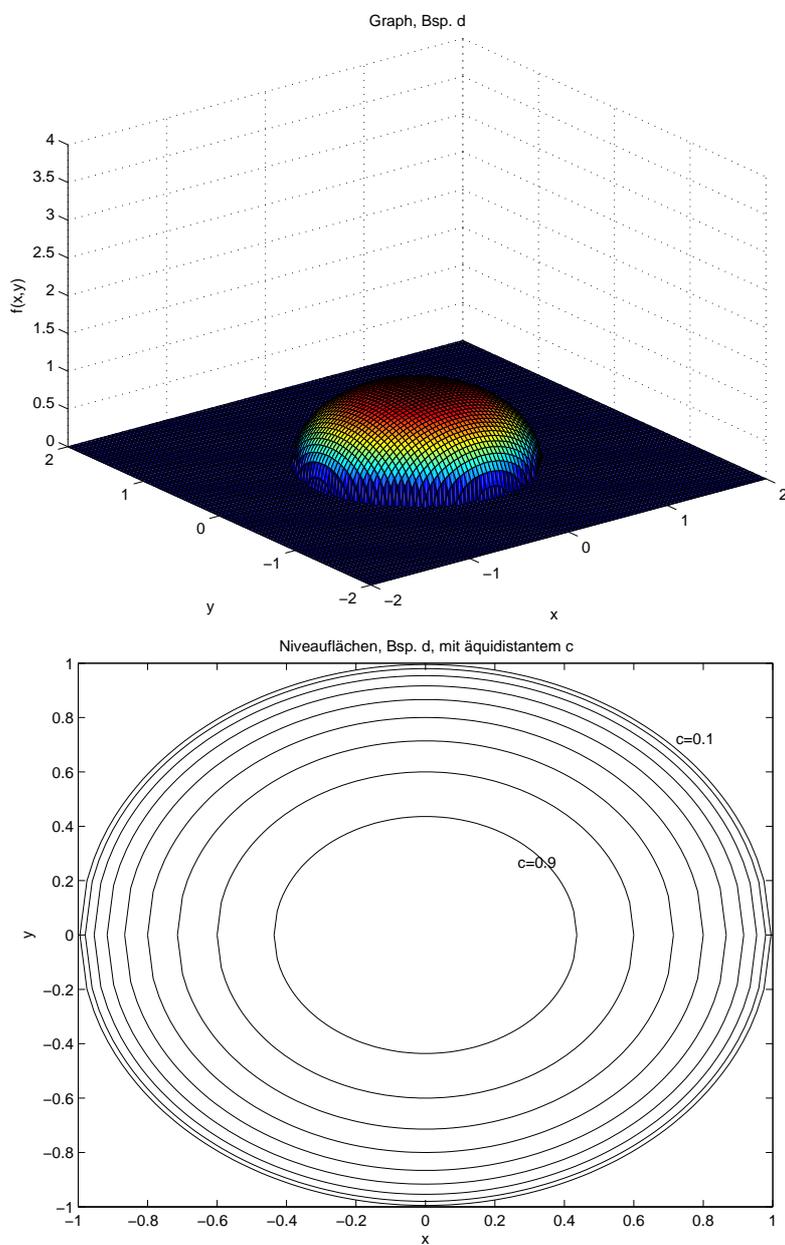


Abbildung 7.3: Graph (oben) und Niveaulflächen von $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$

hierbei eine obere Halbkugel dar (da mit $z = f(x, y)$ gilt: $z \geq 0$ und $x^2 + y^2 + z^2 = x^2 + y^2 + (1 - x^2 - y^2) = 1$). Die Niveauflächen bestimmt man wie folgt (auch hier machen nur nicht-negative Niveaus c Sinn):

$$\begin{aligned} f(x, y) &= c \\ \Leftrightarrow 1 - x^2 - y^2 &= c^2 \\ \Leftrightarrow y^2 &= 1 - x^2 - c^2 \\ \Leftrightarrow y &= \pm\sqrt{1 - x^2 - c^2} \end{aligned}$$

Die Äquivalenzen sind übrigens nur unter der Prämisse $c \geq 0$ gültig. Warum?¹ Die Einschränkungen für x und c ergeben sich hierbei dadurch, dass der Radikand (also der Wert unter der Wurzel) nicht-negativ sein muss: $1 - x^2 - c^2 \geq 0$ ist äquivalent zu $1 - c^2 \geq x^2$, so dass $|x| \leq \sqrt{1 - c^2}$ gelten muss. Ferner ist $(0 \leq)c \leq 1$ erforderlich, da sonst kein Wert mehr für x möglich wäre.

- e) Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x, y) := x^3 - y^2$ hat Niveauflächen, die gegeben sind durch

$$x^3 - y^2 = c \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{x^3 - c},$$

wobei $x^3 \geq c$ die Werte von x einschränkt. Hier sind nun alle $c \in \mathbb{R}$ als Niveaus möglich. Der Graph und die Niveauflächen von f sind in Abbildung 7.4 dargestellt.

- f) Die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^3$ mit

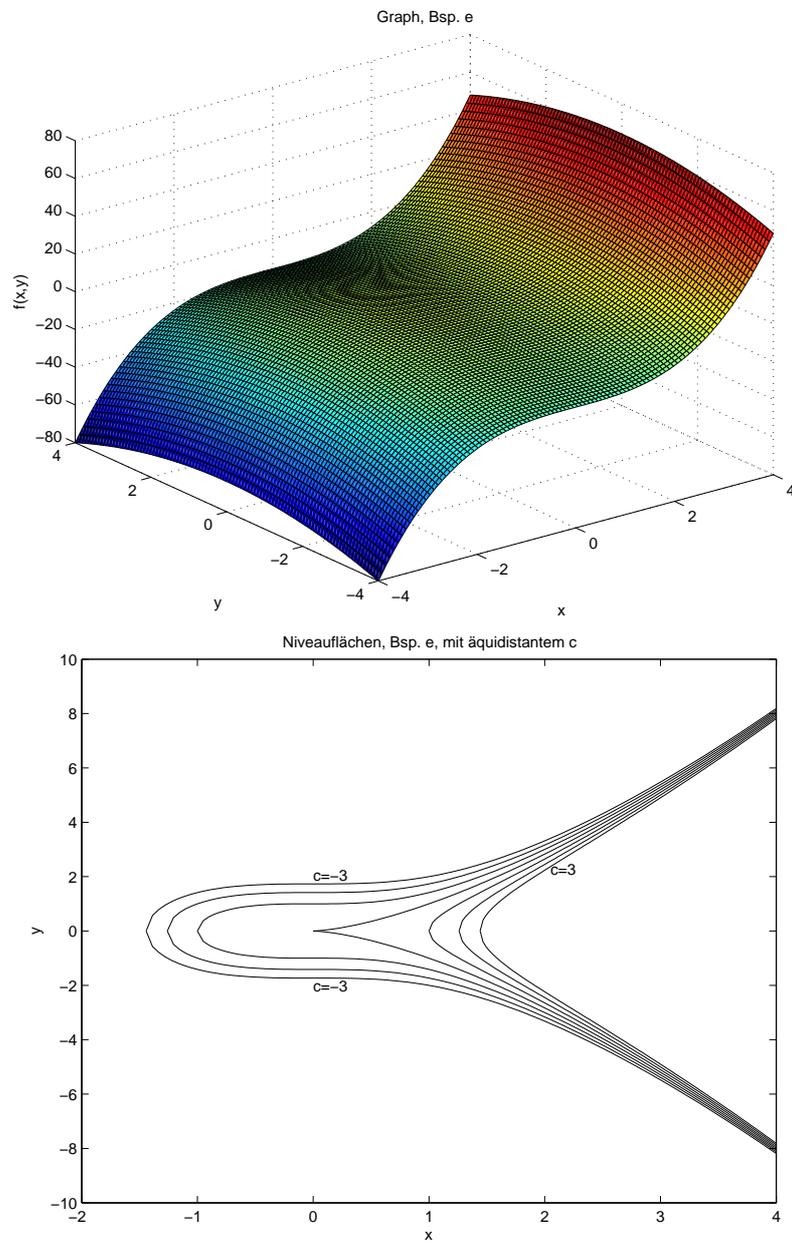
$$f(x) := \underbrace{-\gamma m M}_{\text{konstant}} \cdot \frac{1}{\|x\|^3} \cdot x,$$

die die Gravitationskraft beschreibt, die ein (großer) Körper der Masse M mit Schwerpunkt im Nullpunkt auf einen (kleinen) Körper der Masse m am Ort $x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ausübt (siehe auch Abbildung 7.5), ist ein Beispiel für ein Vektorfeld (Kraftfeld).

- g) Die Corioliskraft und die Coulombkraft sind weitere Beispiele für Vektorfelder.
 h) Die lokalen Orthonormalsysteme e^r, e^φ, e^t , die wir schon kennen gelernt haben, sind ebenfalls Beispiele für Vektorfelder.

◇

¹Das Quadrieren der Anfangsgleichung ist im Allgemeinen keine Äquivalenzumformung. Nur weil beide Seiten vor dem Quadrieren nicht-negativ sind, ist dies erlaubt. Das Endresultat würde das Einsetzen von negativen c erlauben, jedoch wäre für diese die Gleichung $f(x, y) = c$ falsch.

Abbildung 7.4: Graph (oben) und Niveauflächen von $f(x, y) = x^3 - y^2$

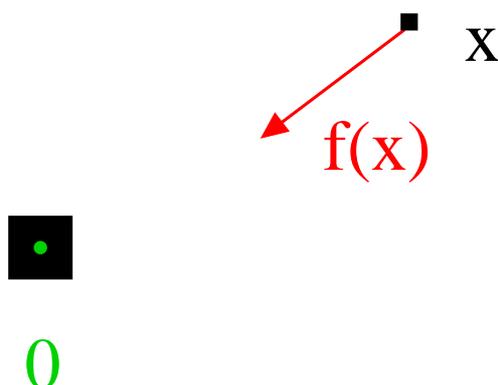


Abbildung 7.5: (Qualitative) Veranschaulichung der Gravitationskraft: Die Kraft wirkt entgegengesetzt des Ortsvektors, d.h. $f(x)$ zeigt in Richtung von $(-x)$.

7.2 Konvergenz und Stetigkeit

Definition 7.2.1 Sei $(x^{(k)})_k$ eine Folge im \mathbb{R}^n , d.h. $x^{(k)} \in \mathbb{R}^n$ für alle $k \in \mathbb{N}$. Die Folge heißt **konvergent** gegen den Vektor $\xi \in \mathbb{R}^n$, wenn folgendes gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|x^{(k)} - \xi\| = 0.$$

Eine Folge von Vektoren konvergiert also gegen einen Vektor, wenn der Abstand der Folgeglieder zum Limes-Vektor gegen Null geht. Damit ist die Konvergenz von vektoriellen Folgen auf die Konvergenz von skalaren Folgen zurückgeführt worden. Das folgende Kriterium stellt eine weitere, sehr hilfreiche Beziehung her.

Satz 7.2.2 Eine Folge $(x^{(k)})_k$ im \mathbb{R}^n konvergiert genau dann gegen $\xi \in \mathbb{R}^n$, wenn alle Komponenten von $x^{(k)}$ gegen die von ξ konvergieren. Kurz:

$$x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \xi \quad \Leftrightarrow \quad x_j^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \xi_j \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Beispiel 7.2.3 Es gilt

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{k+1} \\ e^{-k^2} \\ \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \end{pmatrix} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ e \end{pmatrix},$$

da $\frac{1}{k+1} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, $e^{-k^2} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$, $\left(1 + \frac{1}{k}\right)^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} e$. ◇

Definition 7.2.4 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ und $x \in D$. Eine Funktion $f : D \rightarrow \mathbb{R}^k$ heißt **stetig** in x , wenn $\lim_{y \rightarrow x} f(y) = f(x)$ gilt. f heißt **stetig**, wenn f stetig in allen $x \in D$ ist.

Das ist formal genau die gleiche Definition wie im skalaren Fall der Stetigkeit, nur dass nun Vektoren konvergieren. Was das bedeutet, haben wir gerade zuvor kennen gelernt. Beachten Sie, dass nicht nur bei $f(y) \rightarrow f(x)$ eine vektorielle Konvergenz vorliegt, sondern auch bei $y \rightarrow x$. Das macht einen enormen Unterschied gegenüber einem eindimensionalen Grenzübergang $y \rightarrow x$, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 7.2.5 Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Der Graph ist in Abbildung 7.6 dargestellt. Außerhalb von $(0, 0)$ ist die Funktion offensichtlich

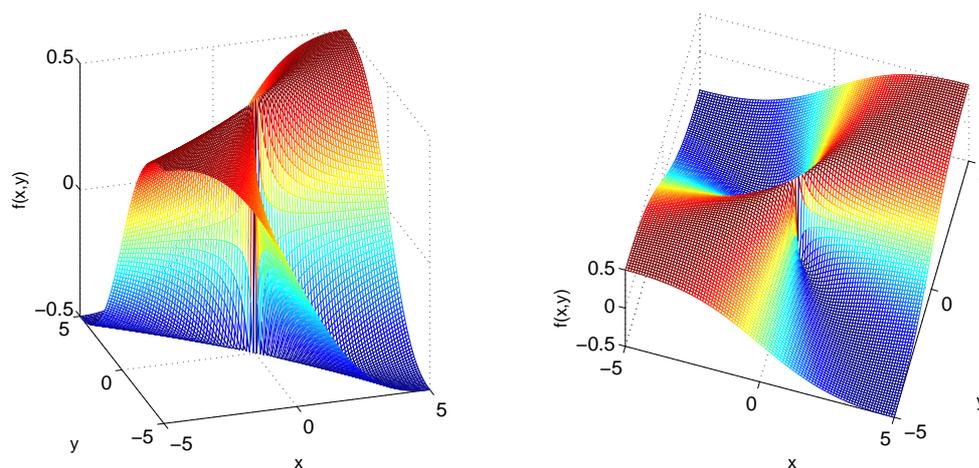


Abbildung 7.6: Graph einer Funktion (aus zwei verschiedenen Perspektiven), die in $(0, 0)$ unstetig ist

stetig. Doch was ist der Fall im Nullpunkt? Wir nähern uns zunächst auf zwei Arten:

- auf der y -Achse: Für die Werte $f(0, y)$ gilt: $f(0, y) = 0 \xrightarrow{y \rightarrow 0} 0$.
- auf der x -Achse: Für die Werte $f(x, 0)$ gilt: $f(x, 0) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$.

Das sind aber noch lange nicht alle Möglichkeiten, wie (x, y) gegen $(0, 0)$ streben kann. Beispielsweise kann man auch auf der Diagonalen (t, t) mit $t \rightarrow 0$ dem Nullpunkt näher kommen. Dann gilt jedoch:

$$f(t, t) = \frac{t^2}{t^2 + t^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2}.$$

Also existiert der Grenzwert $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ gar nicht, da nicht bei allen erdenklichen Annäherungen das gleiche Resultat entsteht (siehe auch Abbildung 7.7). Übrigens bekommt man auf den Wegen $(-t, t)$ mit $t \rightarrow 0$ bzw. $(t, 2t)$ mit $t \rightarrow 0$ noch weitere andere Resultate. Welche?²

Somit ist f unstetig in $(0, 0)$. ◇

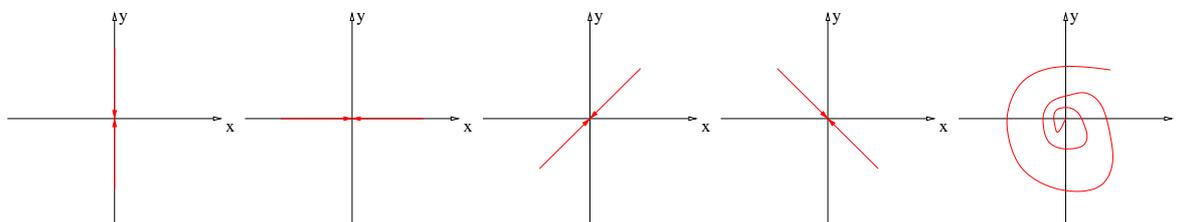


Abbildung 7.7: Im Grenzübergang $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ müssen alle Möglichkeiten, sich dem Nullpunkt zu nähern, berücksichtigt werden, so z.B. (von links nach rechts) $(0, y)$ mit $y \rightarrow 0$, $(x, 0)$ mit $x \rightarrow 0$, (t, t) mit $t \rightarrow 0$ und $(-t, t)$ mit $t \rightarrow 0$ sowie jede andere erdenkliche Art (z.B. ganz rechts)

Satz 7.2.6 *Folgende Funktionen sind stetig in ihrem Definitionsbereich:*

- a) *Vektorfelder, deren Komponenten alle stetig sind (also $f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)$ stetig $\Rightarrow f(x_1, \dots, x_n)$ stetig)*
- b) *Polynome*
- c) *Zusammensetzungen stetiger Funktionen*
- d) $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \|x\|$

Also sind z.B. die folgenden Funktionen stetig:

- $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3 x_2^2 + x_1^2 + x_2^3 x_3^4 + x_1 x_2 x_3$, da Polynom in x_1, x_2, x_3

² Man erhält $\frac{5}{2}$ bzw. $\frac{1}{2}$.

- $f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ e^{x_2} \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \end{pmatrix}$ wegen a), b) und d)
- $f(x, y) = \sin(x^2 + y^2) \left(= \sin \left(\left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^2 \right) \right),$
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{stetig wegen d}} \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\| \xrightarrow{\text{stetig wegen c}} \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^2 \xrightarrow{\text{stetig wegen c}} \sin \left\| \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\|^2$
 oder: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{stetig wegen b}} x^2 + y^2 \xrightarrow{\text{stetig wegen c}} \sin(x^2 + y^2)$

Definition 7.2.7 (topologische Grundbegriffe) Sei $M \subset \mathbb{R}^n$.

- a) M heißt **abgeschlossen**, wenn gilt: Ist $(x^{(k)})_k$ eine Folge in M , die gegen $\xi \in \mathbb{R}^n$ konvergiert, so ist $\xi \in M$ (d.h. Grenzwerte von Folgen in M können nicht außerhalb von M liegen).
- b) M heißt **beschränkt**, wenn es ein $R > 0$ gibt, so dass

$$M \subset K_R(0) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| < R\}$$

(d.h. $\forall x \in M : \|x\| < R$).

- c) M heißt **offen**, wenn zu jedem $x \in M$ eine Kugel $K_\varepsilon(x)$ existiert, die ganz in M liegt ($\varepsilon > 0$), wobei

$$K_\varepsilon(x) := \{y \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < \varepsilon\}.$$

Beispiel 7.2.8

- a) $K_R(y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < R\}$ "offene Kugel mit Radius R und Zentrum y ". Diese Menge ist

– **beschränkt**: $K_R(y) \subset K_{R+\|y\|}(0)$. Beweis: Sei $x \in M := K_R(y) \Rightarrow \|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\| < R + \|y\|$.

– **nicht abgeschlossen**: z.B. $x^{(k)} := y + R \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in M (k \geq 1)$, da

$$\|x^{(k)} - y\| = \left\| R \begin{pmatrix} 1 - \frac{1}{k} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = R \left(1 - \frac{1}{k}\right) < R,$$

aber

$$x^{(k)} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} y + R \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =: \xi$$

und

$$\|\xi - y\| = \left\| R \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = R \Rightarrow \xi = \lim_{k \rightarrow \infty} x^{(k)} \notin M.$$

- **offen:** Zu $x \in M$ sei $\varepsilon(x) := \frac{R - \|x - y\|}{2} \Rightarrow K_{\varepsilon(x)}(x) \subset M$, denn: Wenn $z \in K_{\varepsilon(x)}(x)$, dann gilt

$$\|z - y\| \leq \|z - x\| + \|x - y\| \leq \frac{R}{2} - \frac{\|x - y\|}{2} + \|x - y\| = \frac{R + \overbrace{\|x - y\|}^{< R}}{2} < R$$

$$\Rightarrow z \in K_R(y) = M$$

- b) $\overline{K}_R(y) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| \leq R\}$ “abgeschlossene Kugel mit Radius R und Zentrum y ”. Diese Menge ist

- **beschränkt:** Es gilt $\overline{K}_R(y) \subset K_{R + \|y\| + 1}(0)$ (Hauptsache etwas Positives zu $R + \|y\|$ addieren), denn $x \in \overline{K}_R(y) \Rightarrow \|x\| \leq R + \|y\| < R + \|y\| + 1$
- **abgeschlossen:** Sei $x^{(k)} \rightarrow \xi$ mit $x^{(k)} \in \overline{K}_R(y)$, zu zeigen: $\xi \in \overline{K}_R(y)$. Dies geht wie folgt:

$$\|\xi - y\| = \left\| \xi - x^{(k)} + x^{(k)} - y \right\| \leq \left\| \xi - x^{(k)} \right\| + \left\| x^{(k)} - y \right\| \leq \left\| \xi - x^{(k)} \right\| + R,$$

da $x^{(k)} \in \overline{K}_R(y)$

(auf beiden Seiten) $k \rightarrow \infty$:

$$\|\xi - y\| \leq 0 + R \Rightarrow \xi \in \overline{K}_R(y)$$

- **nicht offen:** z.B. $y + Re^1 \in \overline{K}_R(y)$ $\left(\|y + Re^1 - y\| = \left\| \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\| = R \right)$,

aber $K_\varepsilon(y + Re^1) \not\subset \overline{K}_R(y) \forall \varepsilon > 0$

c) Sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\}$ eine Gerade im \mathbb{R}^2 . Diese Menge ist

– **unbeschränkt:**

$$\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{(1+2\lambda)^2 + (\lambda \cdot 1)^2} \geq \sqrt{(2\lambda)^2 + \lambda^2} = \sqrt{5} \cdot |\lambda|$$

kann beliebig groß werden, da $\lambda \in \mathbb{R}$ frei gewählt werden kann.

– **abgeschlossen:** Sei $(x^{(n)})_n$ eine Folge in M , d.h. jedes $x^{(n)}$ hat die Form

$$x^{(n)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_n \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

mit geeignetem λ_n .

Gilt: $x^{(n)} \rightarrow \xi$, so gilt komponentenweise $1+2\lambda_n \rightarrow \xi_1$, $\lambda_n \rightarrow \xi_2$ ($\Rightarrow (\lambda_n)$ konvergent)

$$\underbrace{\quad}_{\text{Grenzwertsätze}} \quad \xi_1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (1+2\lambda_n) = 1 + 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_n = 1 + 2\xi_2$$

Grenzwertsätze

$$\Rightarrow \xi = \begin{pmatrix} 1+2\xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in M.$$

◇

Satz 7.2.9 Sei $M \subset \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und beschränkt (\Leftrightarrow **kompakt**) und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetiges Skalarfeld. Dann gilt:

- Das Bild $f(M) \subset \mathbb{R}$ ist beschränkt, d.h. $\exists R > 0$, so dass $f(M) \subset K_R(0) =]-R, R[$, d.h. $-R < f(x) < R \forall x \in M$.
- f nimmt Minimum und Maximum auf M an:

$$\exists y, z \in M : f(y) \leq f(x) \leq f(z) \quad \forall x \in M.$$

7.3 Partielle und totale Ableitung

Definition 7.3.1 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. f heißt im Punkt $x^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0) \in D$ nach x_j ($j \in \{1, \dots, n\}$ fest) **partiell differenzierbar**, falls der Grenzwert

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1^0, \dots, x_{j-1}^0, x_j^0 + h, x_{j+1}^0, \dots, x_n^0) - f(x_1^0, \dots, x_j^0, \dots, x_n^0)}{h}$$

$$=: \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) =: \frac{\partial}{\partial x_j} f(x^0) =: f_{x_j}(x^0)$$

existiert. Der Ausdruck $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0)$ heißt **partielle Ableitung** von f nach x_j im Punkt x^0 . (Also: alle anderen Variablen festhalten und nur nach x_j ableiten wie im 1D-Fall.)

Entsprechend höhere Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} := \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right) =: f_{x_j x_i} \left(= (f_{x_j})_{x_i} \right)$$

Wenn f in ganz D partiell nach x_j differenzierbar ist, entsteht eine neue Funktion: $\frac{\partial f}{\partial x_j} : D \rightarrow \mathbb{R}$.

Wenn Sie die Definition der partiellen Ableitung, also der Ableitung nach einer Variablen, mit der Ableitung im eindimensionalen Fall (Definition 5.1.1) vergleichen, dann werden Sie feststellen, dass man im Grunde einfach so tut, als wären alle anderen Variablen konstant und die Funktion hänge nur von der einen Variablen ab. Damit funktioniert partielles Differenzieren nach x_j so, dass man alle Variablen, die nicht x_j sind, als konstant behandelt und dann schlichtweg eine 1D-Ableitung bzgl. der Variablen x_j berechnet. Sehen wir uns hierzu ein paar Beispiele an.

Beispiel 7.3.2 Wir berechnen einige partielle Ableitungen.

a) Sei $f(x_1, x_2, x_3) := x_1^2 x_2 + x_1 \sin x_3 + x_2^{x_3}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) &= 2x_1 x_2 + \sin x_3 + 0, \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, x_2, x_3) &= x_1^2 + 0 + x_3 x_2^{x_3-1} \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(x_1, x_2, x_3) &= 0 + x_1 \cos x_3 + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(e^{x_3 \ln x_2} \right) \\ &= x_1 \cos x_3 + e^{x_3 \ln x_2} \ln x_2 \\ &= x_1 \cos x_3 + x_2^{x_3} \ln x_2, \end{aligned}$$

wobei $x_3 x_2^{x_3-1} := 0$ für $x_3 = x_2 = 0$ gesetzt wird.

b) Sei $f(x, y) := \frac{x}{y}$ für $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(\tilde{x}, 0) \mid \tilde{x} \in \mathbb{R}\}$ (d.h. die x -Achse wird herausgenommen). Dann gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \frac{1}{y}, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= -\frac{x}{y^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{y} \right) = 0, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{x}{y^2} \right) = -\frac{1}{y^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{y} \right) = -\frac{1}{y^2}, \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{x}{y^2} \right) = 2 \frac{x}{y^3}. \end{aligned}$$

◇

Definition 7.3.3 Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, in $x^0 \in D$ nach allen Variablen (d.h. in allen Kombinationen) zweimal differenzierbar. Dann heißt die Matrix

$$\mathbf{H}_f(x^0) := \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x^0) \right)_{i,j=1,\dots,n}$$

Hesse-Matrix (engl.: Hessian) von f in x^0 .

Die Hesse-Matrix besteht also aus allen n^2 Ableitungen zweiter Ordnung der Funktion f .

Beispiel 7.3.4 Aus dem vorherigen Beispiel lesen wir ab, dass die Hesse-Matrix von $f(x, y) := \frac{x}{y}$ gegeben ist durch

$$\mathbf{H}_f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{y^2} \\ -\frac{1}{y^2} & 2\frac{x}{y^3} \end{pmatrix}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

◇

In diesem Beispiel scheint es egal zu sein, ob man zuerst nach x und dann y ableitet oder ob man in der umgekehrten Reihenfolge differenziert. In der Tat gilt dies immer, zumindest wenn die Funktion zweimal stetig differenzierbar ist.

Definition 7.3.5 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt in D nach x_j **stetig differenzierbar**, wenn $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ in ganz D existiert und stetig ist.

$$\begin{aligned} C^{(k)}(D) &:= \left\{ f : D \rightarrow \mathbb{R} \mid \begin{array}{l} f \text{ in ganz } D \text{ nach allen Variablen} \\ \text{in allen Kombinationen (mindestens)} \\ k\text{-mal stetig differenzierbar.} \end{array} \right\} \\ C(D) &:= C^{(0)}(D) := \{ f : D \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ stetig} \} \end{aligned}$$

Satz 7.3.6 (Satz von Schwarz) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^{(2)}(D)$. Dann sind die Differenzierungsreihenfolgen vertauschbar, d.h.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad \text{in } D$$

d.h. \mathbf{H}_f ist symmetrisch.

Für die Definition der totalen Ableitung brauchen wir erst noch eine Notation.

Definition 7.3.7 (Landau-Symbol) Seien $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$ Funktionen und $x^0 \in D$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Man schreibt

$$"f(x) = g(x) + o(h(x)) \text{ für } x \rightarrow x^0" \quad (\text{kleines } o)$$

wenn

$$\lim_{x \rightarrow x^0} \frac{f(x) - g(x)}{h(x)} = 0 \quad (\text{Null})$$

(d.h. g approximiert f mit einem Fehler höchstens der Ordnung $h(x)$ in der Nähe von x^0).

Beispiel 7.3.8 Es gilt $\sin x = x + o(x^2)$ für $x \rightarrow 0$ (hier: $n = 1$). Um dies nachzuweisen, müssen wir den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2}$$

berechnen. Dies geht mit der Regel von de l'Hospital:

$$\frac{\cos x - 1}{2x} \rightarrow 0,$$

noch mal:

$$\frac{-\sin x}{2} \rightarrow 0$$

also

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0,$$

daher:

$$\sin x = x + o(x^2) \text{ für } x \rightarrow 0.$$

Denken Sie an die Potenzreihe des Sinus:

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - + \dots$$

◇

Definition 7.3.9 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x^0 \in D$. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt in x^0 **total differenzierbar** (differenzierbar, linear approximierbar), falls ein Vektor $a \in \mathbb{R}^n$ existiert (der von x^0 abhängt), so dass

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + \langle a, h \rangle + o(\|h\|) \quad \text{für } h \rightarrow 0$$

gilt. Wir schreiben $Df(x^0) := f'(x^0) := a$ und nennen dies die **totale Ableitung/das totale Differential** von f in x^0 .

Der folgende Satz liefert grundlegende Zusammenhänge zwischen Stetigkeit sowie partieller und totaler Differenzierbarkeit.

Satz 7.3.10 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ in $x^0 \in D$ total differenzierbar. Dann gilt:

a) f ist in x^0 stetig.

b) f ist in x^0 nach allen Variablen partiell differenzierbar und

$$f'(x^0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \right) =: \text{grad } f(x^0) =: \nabla f(x^0) \quad \text{“nabla”}$$

Man nennt $\text{grad } f(x^0)$ den **Gradienten** von f in x^0 .

Beispiel 7.3.11 Die Funktion $f(x, y, z) := e^{x+y^2} - z = e^x \cdot e^{y^2} - z$ hat die totale Ableitung

$$f'(x, y, z) = (e^{x+y^2}, 2ye^{x+y^2}, -1).$$

◇

Bemerkung 7.3.12

a) Für $n = 1$ ist dies altbekannt:

$$f'(x^0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + h) - f(x^0)}{h}.$$

Damit gilt:

$$\frac{f(x^0 + h) - f(x^0) - f'(x^0)h}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

und folglich

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + f'(x^0)h + o(h) \quad \text{für } h \rightarrow 0 \text{ (} h \rightarrow 0 \Leftrightarrow |h| \rightarrow 0 \text{)}.$$

Denken Sie daran, dass

$$y = f(x^0) + f'(x^0)(x - x^0)$$

die Tangente an den Graphen in $(x^0, f(x^0))$ beschreibt, siehe Abbildung 7.8.

b) Sehen wir uns nun den Fall $n = 2$ an. Grob ausgedrückt gilt:

$$f(x^0 + h) \approx f(x^0) + \langle f'(x^0), h \rangle \quad \text{für } h \text{ nahe bei } 0$$

Die rechte Seite beschreibt hier die Tangentialebene an den Graphen von f in $(x^0, f(x^0))$:

$$z = f(x^0) + \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) \cdot h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0) \cdot h_2$$

Die Parameterdarstellung dieser Ebene ist

$$\begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ f(x^0) \end{pmatrix} + h_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0) \end{pmatrix} + h_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x^0) \end{pmatrix},$$

siehe Abbildung 7.8. Der Approximationsfehler, d.h. der Abstand der Ebene vom Graphen, ist dabei (punktweise) höchstens von der Ordnung

$$\sqrt{h_1^2 + h_2^2}.$$

Man kann bei der Darstellung der Tangentialebene auch $h_j = x - x_j^0$, $j = 1, 2$, schreiben.

Definition 7.3.13

a) Vektorwertige Funktionen werden komponentenweise **partiell differenziert**, d.h. für f :

$$D \rightarrow \mathbb{R}^m, \left(x \rightarrow \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix} \right), D \subset \mathbb{R}^n \text{ offen, ist}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(x^0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(x^0) \end{pmatrix},$$

falls die einzelnen m skalaren Ableitungen existieren.

b) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $x^0 \in D$. $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist in x^0 **total differenzierbar**, wenn eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ existiert, so dass

$$\|f(x^0 + h) - (f(x^0) + Ah)\| = o(\|h\|) \quad \text{für } h \rightarrow 0$$

gilt. Beachten Sie, dass Ah eine Matrix-Vektor-Multiplikation ist. Man schreibt

$$f'(x^0) := A =: Df(x^0).$$

Satz 7.3.14 (Variante von Satz 7.3.10 für vektorwertige Funktionen) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ in $x^0 \in D$ total differenzierbar. Dann gilt:

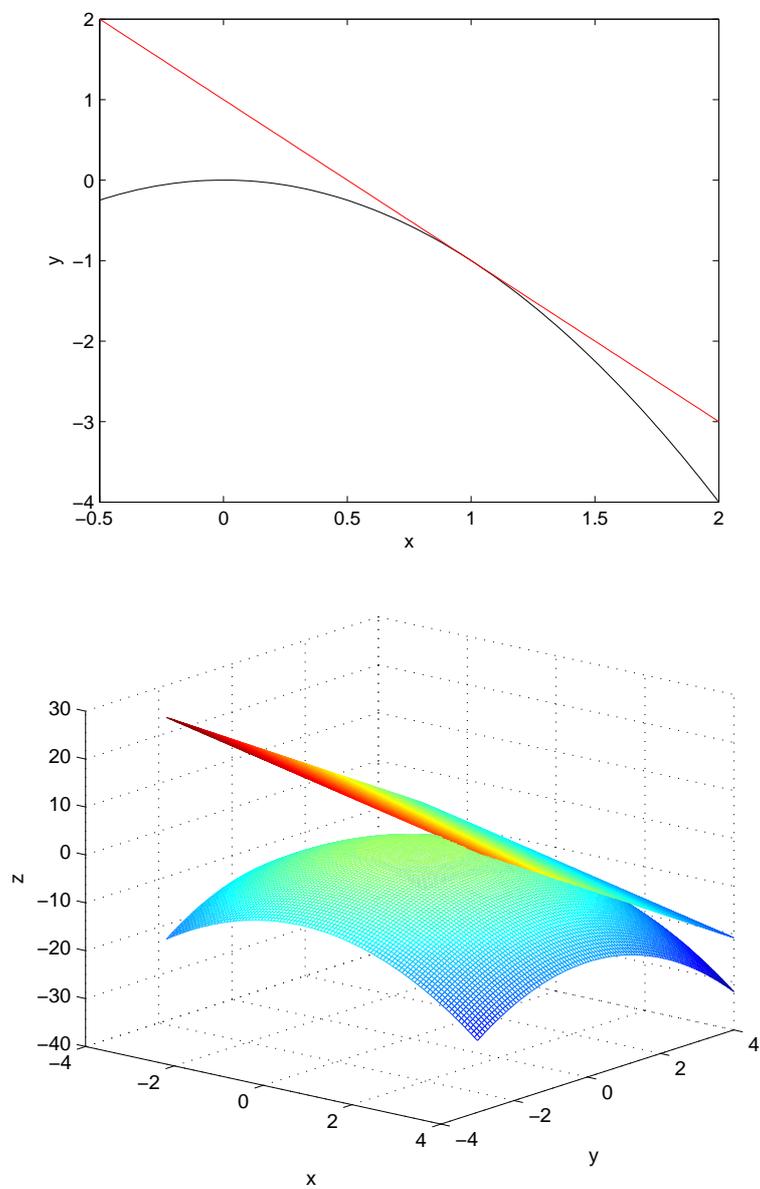


Abbildung 7.8: Tangente an den Graphen von $f(x) = -x^2$ in $x^0 = 1$ (oben) und Tangentialebene an den Graphen von $f(x, y) = -x^2 - y^2$ in $(x^0, y^0) = (1, 2.5)$ (unten).

a) f ist in x^0 stetig.

b) f ist in x^0 nach allen Variablen partiell differenzierbar und

$$\begin{aligned} f'(x^0) &= \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x^0) \right)_{\substack{i=1,\dots,m \\ j=1,\dots,n}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x^0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x^0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x^0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x^0) \end{pmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x^0), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x^0) \right) = \begin{pmatrix} \text{grad } f_1(x^0) \\ \vdots \\ \text{grad } f_m(x^0) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Man nennt diese Matrix die **Jacobi-Matrix** (engl.: *Jacobian matrix*).

Beispiel 7.3.15 Die Beziehung zwischen kartesischen Koordinaten und Polarkoordinaten stellt ein Vektorfeld dar:

$$f(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

Die zugehörige Jacobi-Matrix ist:

$$f'(r, \vartheta, \varphi) = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix}$$

Für später berechnen wir noch die Determinante der Jacobi-Matrix (Jacobi-Determinante, engl.: *Jacobian*):

$$\begin{aligned} \det f'(r, \vartheta, \varphi) &= -r \sin \vartheta \sin \varphi \cdot (-r \sin^2 \vartheta \sin \varphi - r \cos^2 \vartheta \sin \varphi) \\ &\quad - r \sin \vartheta \cos \varphi \cdot (-r \sin^2 \vartheta \cos \varphi - r \cos^2 \vartheta \cos \varphi) \\ &= -r \sin \vartheta (\sin \varphi \cdot (-r \sin \varphi) + \cos \varphi \cdot (-r \cos \varphi)) \\ &= \mathbf{r^2 \sin \vartheta} \end{aligned}$$

Anwendung: mehrdimensionale Substitutionsregel

z.B.: Integration über Kugelvolumen

$$\gamma \int_{\text{Erde}} \frac{\varrho(x)}{|x-y|} dx \quad \text{Newton'sches Gravitationspotential}$$

◇

Definition 7.3.16 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $k \in \mathbb{N}$.

$$C^{(k)}(D, \mathbb{R}^m) := \left\{ f : D \rightarrow \mathbb{R}^m \mid \text{alle Komponenten } f_i \in C^{(k)}(D) \ (i = 1, \dots, m) \right\}$$

(beachte: $C^{(k)}(D, \mathbb{R}) =: C^{(k)}(D)$)

Satz 7.3.17 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Ist $f \in C^{(1)}(D, \mathbb{R}^m)$, so ist f total differenzierbar.

Satz 7.3.18 (Kettenregel) Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $f \in C^{(1)}(D, \mathbb{R}^m)$, $g \in C^{(1)}(f(D), \mathbb{R}^p)$, $f(D)$ offen in \mathbb{R}^m und $x^0 \in D$. Dann ist $g \circ f : D \rightarrow \mathbb{R}^p$ in x^0 differenzierbar und

$$D(g \circ f)(x^0) = (g \circ f)'(x^0) = g'(f(x^0)) \cdot f'(x^0)$$

Beachten Sie: Hier liegt die Multiplikation zweier Jacobi-Matrizen vor!!

$$\begin{aligned} g'(f(x^0)) &: p \times m \\ f'(x^0) &: m \times n \end{aligned}$$

Beispiel 7.3.19

a) Sei $g(x, y, z) := e^{-x^2-y^2-z^2}$, $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix} =: f(r, \vartheta, \varphi)$ (Polarkoordinaten),

$$g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^1, f : D \rightarrow \mathbb{R}^3, D = \mathbb{R}^+ \times]0, \pi[\times]0, 2\pi[.$$

Ableitung in kartesischen Koordinaten:

$$g'(x, y, z) = e^{-x^2-y^2-z^2}(-2x, -2y, -2z)$$

Ableitung in Polarkoordinaten, d.h. Ableitung von

$$g(x(r, \vartheta, \varphi), y(r, \vartheta, \varphi), z(r, \vartheta, \varphi)) = (g \circ f)(r, \vartheta, \varphi) =: h(r, \vartheta, \varphi) :$$

1. Weg: Kettenregel

$$\begin{aligned} h'(r, \vartheta, \varphi) &= g'(x(r, \vartheta, \varphi), y(r, \vartheta, \varphi), z(r, \vartheta, \varphi)) \cdot f'(r, \vartheta, \varphi) \\ &= \underbrace{\left(e^{-x^2-y^2-z^2}(-2x, -2y, -2z) \right)}_{= e^{-r^2}(-2r \sin \vartheta \cos \varphi, -2r \sin \vartheta \sin \varphi, -2r \cos \vartheta)} \cdot \begin{pmatrix} x(r, \vartheta, \varphi) \\ y(r, \vartheta, \varphi) \\ z(r, \vartheta, \varphi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi & r \cos \vartheta \cos \varphi & -r \sin \vartheta \sin \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi & r \cos \vartheta \sin \varphi & r \sin \vartheta \cos \varphi \\ \cos \vartheta & -r \sin \vartheta & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= e^{-r^2} (-2r \sin^2 \vartheta \cos^2 \varphi - 2r \sin^2 \vartheta \sin^2 \varphi - 2r \cos^2 \vartheta, \\
&\quad -2r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \cos^2 \varphi - 2r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta \sin^2 \varphi + 2r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta, \\
&\quad +2r^2 \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi - 2r^2 \sin^2 \vartheta \sin \varphi \cos \varphi) \\
&= e^{-r^2} (-2r, 0, 0)
\end{aligned}$$

2. Weg: Zuerst neue Koordinaten einsetzen, dann differenzieren.

$$(g \circ f)(r, \vartheta, \varphi) = e^{-r^2}, \quad (g \circ f)'(r, \vartheta, \varphi) = (e^{-r^2} \cdot (-2r), 0, 0)$$

Dies ist in diesem Beispiel einfacher.

b) Gegeben seien ein Kraftfeld

$$g(x) = -\gamma \frac{m}{\|x - y\|^3} (x - y), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{y\}$$

(Gravitationskraft der Punktmasse m in y) und eine Flugbahn $x(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix}$; y muss hierbei so liegen, dass $x(t) \neq y \forall t$ (sonst ist $g(x(t))$ nicht definiert). Dann ist

$$\frac{d}{dt} g(x(t)) = g'(x(t)) \cdot x'(t)$$

die Ableitung längs der Bahn.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= ? \\
g_i(x) &= -\gamma \frac{m}{\|x - y\|^3} \cdot (x_i - y_i) \\
&= -\gamma m \left(\sum_{k=1}^3 (x_k - y_k)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} (x_i - y_i) \\
\Rightarrow \frac{\partial g_i}{\partial x_j}(x) &= -\gamma m \cdot \underbrace{\left(-\frac{3}{2} \right) \cdot \left(\sum_{k=1}^3 (x_k - y_k)^2 \right)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2(x_j - y_j) \cdot (x_i - y_i)}_{= \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{k=1}^3 (x_k - y_k)^2 \right)^{-\frac{3}{2}}} \\
&\quad - \gamma m \left(\sum_{k=1}^3 (x_k - y_k)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \underbrace{\frac{\partial}{\partial x_j} (x_i - y_i)}_{= \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j \\ 1, & i = j \end{cases}} \\
&\qquad\qquad\qquad \text{Kronecker-Delta (vgl. Def. 2.4.14)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow g'(x) = 3\gamma m \|x - y\|^{-5} (x - y)(x - y)^T - \gamma m \|x - y\|^{-3} E_3$$

(x und y als Spaltenvektoren).

Ferner ist

$$x'(t) = \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Also erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g(x(t)) &= \left[3\gamma m \left\| \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} - y \right\|^{-5} \left(\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} - y \right) \left(\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} - y \right)^T \right. \\ &\quad \left. - \gamma m \left\| \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} - y \right\|^{-3} E_3 \right] \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 3\gamma m \left\| \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} - y \right\|^{-5} \left(\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} - y \right) \\ &\quad \left(-\cos t \sin t + \sin t \cos t + t - \left\langle y, \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \right) \\ &\quad - \gamma m \left\| \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ t \end{pmatrix} - y \right\|^{-3} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

◇

Definition 7.3.20 Seien $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x^0 \in D$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$. $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ heißt in x^0 in Richtung v differenzierbar, falls

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ (t \in \mathbb{R})}} \frac{f(x^0 + tv) - f(x^0)}{t} =: \frac{\partial f}{\partial v}(x^0)$$

existiert. $\frac{\partial f}{\partial v}$ heißt **Richtungsableitung** von f in Richtung v .

$\frac{\partial f}{\partial v}(x^0)$ ist die Änderung der Funktionswerte von f bei x^0 in Richtung v . $\frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0)$ ist hierbei der Spezialfall $v = e^j$ (Änderung in kartesischer Koordinatenrichtung).

Eigentlich ist das nur die Ableitung einer verketteten Funktion: Sei $g(t) := f(x^0 + tv)$ mit $g : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(0+h) - g(0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x^0 + (0+h)v) - f(x^0 + 0 \cdot v)}{h} \\ &= \frac{\partial f}{\partial v}(x^0) \end{aligned}$$

Mit der Kettenregel erhält man somit folgendes:

$$g'(t) = f'(x^0 + tv) \cdot \frac{d}{dt}(x^0 + tv)$$

Nebenrechnung:

$$\begin{aligned} G(t) &:= x^0 + tv; \\ G_i(t) &= x_i^0 + tv_i \text{ (Skalarfeld!)} \Rightarrow \frac{dG_i}{dt}(t) = v_i \\ \Rightarrow \frac{d}{dt} G(t) &= \begin{pmatrix} \frac{d}{dt} G_1(t) \\ \vdots \\ \frac{d}{dt} G_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = v \\ \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial v}(x^0) &= g'(0) = (f'(x^0 + tv) \cdot v) \Big|_{t=0} = f'(x^0) \cdot v \end{aligned}$$

Satz 7.3.21 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x^0 \in D$ und $v \in \mathbb{R}^n$ mit $\|v\| = 1$ sowie $f \in C^{(1)}(D)$. Dann existiert $\frac{\partial f}{\partial v}(x^0)$ und es gilt $\frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = \langle \text{grad } f(x^0), v \rangle$.

Bemerkung 7.3.22 Aus einer Eigenschaft des Euklidischen Skalarprodukts leitet man her, dass

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x^0) = \|\text{grad } f(x^0)\| \cdot \|v\| \cdot \cos \angle(\text{grad } f(x^0), v),$$

d.h. unter allen Einheitsvektoren v wird $\frac{\partial f}{\partial v}(x^0)$ am größten, wenn

$$\angle(\text{grad } f(x^0), v) = 0, \quad \text{d.h. } v = \frac{\text{grad } f(x^0)}{\|\text{grad } f(x^0)\|}.$$

Der Gradient gibt also stets die **Richtung des steilsten Anstiegs der Funktionswerte** an. Sehen Sie sich hierzu auch Abbildung 7.9 an.

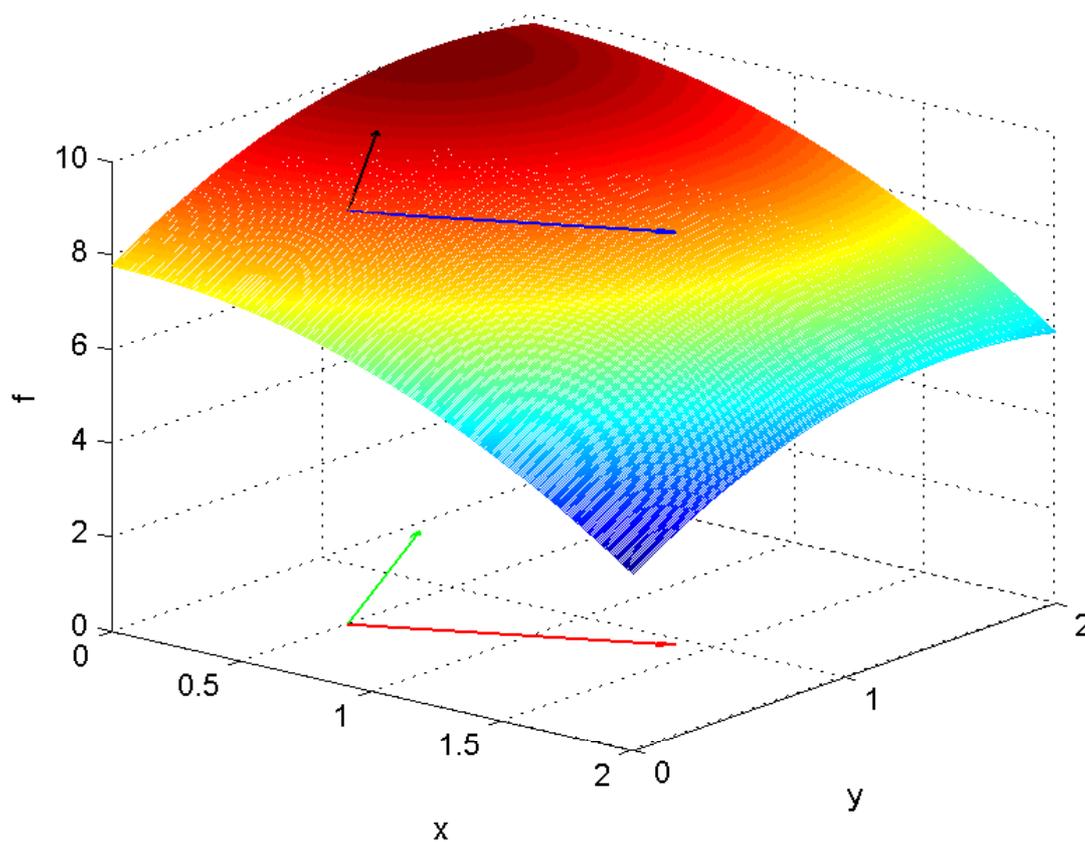


Abbildung 7.9: Die Abbildung zeigt den Graphen der Funktion $f(x, y) := 10 - x^2 - (y - 1.5)^2$ und zwei Richtungsvektoren in der x - y -Ebene: $v = \text{grad } f(0.5, 0.5) / \|\text{grad } f(0.5, 0.5)\| = \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, 2)$ (grün) und $w = \frac{1}{\sqrt{5}}(2, 1)$ (rot). Der schwarze und der blaue Pfeile gehen aus v bzw. w hervor, indem eine z -Komponente so ergänzt wird, dass die Vektoren tangential an den Graphen liegen (Projektionen auf die Tangentialebene). Man sieht hierbei, dass im Punkt $(x, y, z) = (0.5, 0.5, f(0.5, 0.5))$ einerseits v in die Richtung des steilsten Anstiegs zeigt und sich andererseits die Funktionswerte in Richtung w nicht ändern (es ist $\frac{\partial f}{\partial w}(0.5, 0.5) = 0$).

7.4 Tangential-(hyper-)ebenen

1. Explizite Darstellung einer Fläche

Zunächst: (\mathbb{R}^3)

$z = f(x, y)$, f differenzierbar. $\mathcal{F} := \{(x, y, f(x, y)) | (x, y) \in D\}$ Graph von f , $D \subset \mathbb{R}^2$
 Definitionsbereich von f .

Tangentialebene in $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$:

$$z = f(x_0, y_0) + \langle \text{grad } f(x_0, y_0), (x - x_0, y - y_0) \rangle$$

Parameterdarstellung:

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ f(x_0, y_0) \end{pmatrix} + h_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix} + h_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \quad (\text{siehe oben})$$

$(h_1 = x - x_0, h_2 = y - y_0)$

Normalenvektor: Es gilt

$$n = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix},$$

denn

$$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

Denken Sie daran, dass $\nabla f(x_0, y_0)$ die Richtung des steilsten Anstiegs ist.

Für \mathbb{R}^n :

$z = f(x)$, $x \in D \subset \mathbb{R}^{n-1}$, f differenzierbar. $\mathcal{F} := \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^n | x \in D\}$,

Tangentialebene in $(x^0, f(x^0))$:

$$z = f(x^0) + \langle \text{grad } f(x^0), x - x^0 \rangle, \quad x \in \mathbb{R}^{n-1}.$$

Parameterdarstellung:

$$\begin{array}{l} n-1 \text{ Komp.} \\ 1 \text{ Komp.} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} \left(\begin{array}{c} x^0 \\ f(x^0) \end{array} \right) \\ \left(\begin{array}{c} x^0 \\ f(x^0) \end{array} \right) \end{array} \right\} + \sum_{j=1}^{n-1} h_j \left(\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) \end{array} \right) \leftarrow j\text{-te Komponente}$$

$(n-1)$ -dimensionale Hyperebene in \mathbb{R}^n .

Normalenvektor:

$$n = \left(\begin{array}{c} (\nabla f(x^0))^T \\ -1 \end{array} \right) \in \mathbb{R}^n$$

2. Implizite Darstellung

Zunächst: \mathbb{R}^3

$f(x, y, z) = 0$, f differenzierbar, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^3$

$$\mathcal{F} := \{(x, y, z) \in D \mid f(x, y, z) = 0\}$$

z.B. Äquipotentialfläche: $P: D \rightarrow \mathbb{R}$ Potentialfeld, $c \in \mathbb{R}$ fester Potentialwert.

$$\underbrace{P(x, y, z)}_{=f(x, y, z)} - c = 0$$

(vgl. Niveaumengen)

Wir wählen einen festen Punkt $(x_0, y_0, z_0) \in \mathcal{F}$. Angenommen, die Gleichung $f(x, y, z) = 0$ lässt sich (zunächst in der Nähe von (x_0, y_0, z_0)) nach z auflösen, d.h. $z = g(x, y)$ für (x, y, z) nahe bei (x_0, y_0, z_0) .

Dann spannen nach Teil 1 die Vektoren $\left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \end{array} \right), \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \end{array} \right)$ die Tangential-

ebene auf.

Also gilt

$$f(x, y, g(x, y)) = 0,$$

das heißt

$$(x, y) \xrightarrow{h} f(x, y, g(x, y))$$

ist konstant.

$$\Rightarrow \text{grad } h(x, y) = 0 \stackrel{\text{Kettenregel}}{\Rightarrow} f'(x, y, g(x, y)) \cdot D \left(\begin{array}{c} x \\ y \\ g(x, y) \end{array} \right) = 0$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \underbrace{f'(x, y, g(x, y))}_{=\left(\frac{\partial f}{\partial x}f, \frac{\partial f}{\partial y}f, \frac{\partial f}{\partial z}f\right)\Big|_{(x, y, g(x, y))}} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = 0 \\
&\Rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, g(x, y)) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial x}(x, y), \right. \\
&\quad \left. \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, g(x, y)) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, g(x, y)) \frac{\partial g}{\partial y}(x, y) \right) = 0 \tag{7.1}
\end{aligned}$$

Normalenvektor der Tangentialebene: $\begin{pmatrix} (\nabla g(x_0, y_0))^T \\ -1 \end{pmatrix} =: n$

aus (7.1) mit $x = x_0, y = y_0$ ($\Rightarrow g(x_0, y_0) = z_0$):

(i)

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) &= \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \\
\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}
\end{aligned}$$

(wenn $\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$)

(ii)

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) &= \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) \\
\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) &= -\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow n = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \\ \frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \end{pmatrix} = \gamma (\text{grad } f(x_0, y_0, z_0))^T$$

$$\gamma = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \text{ konstant .}$$

$\Rightarrow \text{grad } f(x_0, y_0, z_0)$ Normalenvektor der Tangentialebene (unter gewissen Voraussetzungen).

Für \mathbb{R}^n : Entsprechend $f(x) = 0, x \in \mathbb{R}^n$; sei x^0 Lösung, d.h. $f(x^0) = 0$. $\text{grad } f(x^0)$ Normalenvektor zur Tangentialebene in x^0 .

7.5 Der Satz von Taylor für Skalarfelder

Definition 7.5.1 Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **konvex**, wenn gilt: Zu zwei beliebigen Elementen $x, y \in M$ ist $x + t(y - x) \in M \forall t \in [0, 1]$ (dabei ist $x + t(y - x)$ die Strecke von x nach y).

Satz 7.5.2 (Satz von Taylor) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ konvex und offen, $x \in D$ und $f \in C^{(3)}(D, \mathbb{R})$. Dann gilt für alle $h \in \mathbb{R}^n$ (für die $\|h\|$ hinreichend klein ist, so dass $x + h \in D$) folgende Identität:

$$\begin{aligned} f(x+h) &= f(x) + \langle \text{grad } f(x), h \rangle + \frac{1}{2} \langle h, \mathbf{H}_f(x)h \rangle + o(\|h\|^2) \\ &= f(x) + (\text{grad } f(x))h + \frac{1}{2} h^T \mathbf{H}_f(x)h + o(\|h\|^2) \quad \text{für } \|h\| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Bemerkung 7.5.3

a) Der Satz existiert auch für höhere Ordnungen.

b) Es gilt:

$$f(x+h) = f(x) + \langle \text{grad } f(x), h \rangle + o(\|h\|) \quad \text{für } \|h\| \rightarrow 0 \quad (7.2)$$

(vgl. Definition der totalen Ableitung). (7.2) ist eine Approximation 1. Grades (affin-lineare Approximation) an f in der Umgebung von x , d.h. für h in der Umgebung von 0 .

c) Man nennt

$$f(x+h) = f(x) + \langle \text{grad } f(x), h \rangle + \frac{1}{2} \langle h, \mathbf{H}_f(x)h \rangle + o(\|h\|^2) \quad \text{für } \|h\| \rightarrow 0$$

eine Approximation 2. Grades (quadratische Approximation) an f in der Umgebung von x .

Zu Erinnerung: $h \mapsto \langle h, \mathbf{H}_f(x)h \rangle$ ist eine quadratische Form.

d) Darstellung des Fehlers bei 1.-gradiger Approximation:

gegeben: Voraussetzungen wie in Satz 7.5.2, wobei $f \in C^{(2)}$ reicht, h fest.

Dann folgt daraus: Es existiert ein $\tau \in [0, 1]$, so dass gilt:

$$f(x+h) = f(x) + \langle \text{grad } f(x), h \rangle + \frac{1}{2} h^T \mathbf{H}_f(x + \tau h)h$$

(vgl. 1D-Fall).

Beispiel 7.5.4

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sin(x + y^2) \\ \text{grad } f(x, y) &= \cos(x + y^2) \cdot (1, 2y) = (\cos(x + y^2), \cos(x + y^2) \cdot 2y) \\ H_f(x, y) &= -\sin(x + y^2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2y \\ 2y & 4y^2 \end{pmatrix} + \cos(x + y^2) \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Zum Beispiel Approximation bei $(x, y) = (0, 0)$:

$$\begin{aligned} f(h_1, h_2) &\approx 0 + 1 \cdot (1, 0) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} (h_1, h_2) \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \\ &= h_1 + h_2^2 \quad \text{für } h_1, h_2 \text{ nahe bei } 0. \end{aligned}$$

Bei $(x, y) = (\frac{\pi}{2}, 0)$:

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{2} + h_1, h_2\right) &\approx 1 + 0 + \frac{1}{2} \left(-1 \cdot h^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} h + 0\right) \\ &= 1 - \frac{1}{2} h_1^2 \quad \text{für } h_1, h_2 \text{ nahe bei } 0, \end{aligned}$$

anders ausgedrückt:

$$\sin(x + y^2) \approx 1 - \frac{1}{2} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \quad \text{für } x \text{ nahe bei } \frac{\pi}{2} \text{ und } y \text{ nahe bei } 0.$$

◇

Satz 7.5.5 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x^0 \in D$ und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Ist $f(x^0) > 0$, so existiert eine Kugel $K_R(x^0)$ mit Radius $R > 0$, auf der f positiv ist:

$$f(x) > 0 \quad \forall x \in K_R(x^0)$$

Beweis: Angenommen, die Behauptung

$$“\exists K_R(x^0) \text{ mit } R > 0 : \quad \forall x \in K_R(x^0) : f(x) > 0” \quad (7.3)$$

ist falsch, d.h.

$$“\forall K_R(x^0) \text{ mit } R > 0 : \quad \exists x \in K_R(x^0), f(x) \leq 0” \quad (\text{anderes } R, \text{ anderes } x \text{ im Allgemeinen})$$

Insbesondere, wenn $R = \frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ gewählt wird, gilt somit

$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad \exists \underbrace{x^{(n)} \in K_{\frac{1}{n}}(x^0)}_{\|x^{(n)} - x^0\| < \frac{1}{n}} : f(x_n) \leq 0$$

$$\Rightarrow x^{(n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} x^0$$

Da f stetig ist, gilt folglich:

$$\underbrace{f(x^n)}_{\leq 0} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \underbrace{f(x^0)}_{> 0}$$

Die Vorzeichen führen zu einem Widerspruch! Also gilt (7.3) doch! ■

7.6 Extrema ohne Nebenbedingungen

Gegeben seien $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x^0 \in D$. Angenommen, f ist stetig differenzierbar und hat ein lokales Extremum (Maximum oder Minimum) bei x^0 , d.h. es existiert eine Kugel $K_R(x^0)$ ($R > 0$), so dass

$$f(x^0) \geq f(x) \quad \forall x \in K_R(x^0)$$

(oder $f(x^0) \leq f(x) \quad \forall x \in K_R(x^0)$).

Sei $g(t) := f(t, x_2^0, \dots, x_n^0)$ eine 1D-Funktion. Daraus folgt, dass g ein lokales Extremum bei x_1^0 hat.

$$\xrightarrow{\text{Mathe I}} \underbrace{g'(x_1^0)}_{= \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)} = 0$$

und so weiter für die anderen Komponenten. Also gilt:

Satz 7.6.1 (notwendiges Kriterium, Fermat-Kriterium) Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und lokal maximal oder minimal in x^0 und $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Dann gilt

$$\text{grad } f(x^0) = 0.$$

Sei nun $f \in C^{(2)}(D, \mathbb{R})$, $\text{grad } f(x^0) = 0$.

Taylor: Sei $h \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ hinreichend nahe beim Nullvektor. Dann existiert $\tau \in [0, 1]$, so dass

$$f(x^0 + h) = f(x^0) + \underbrace{\langle \text{grad } f(x^0), h \rangle}_{=0} + \frac{1}{2} \underbrace{\langle h, H_f(x^0 + \tau h) h \rangle}_{\text{quadr. Form}}$$

Die Funktion $g: t \mapsto \langle h, H_f(x^0 + th) h \rangle$ ist stetig, da $f \in C^{(2)}$, wodurch H_f stetig ist. Angenommen, $H_f(x^0)$ ist positiv definit, dann folgt daraus

$$g(0) = \langle h, H_f(x^0) h \rangle > 0$$

Nach Satz 7.5.5 gilt: Es existiert eine Umgebung ($:=$ Kugel) um 0, wo g positiv ist, d.h.

$$\langle h, H_f(x^0 + th)h \rangle > 0,$$

wenn $\|th\|$ hinreichend nahe bei 0 ist. D.h. wenn $\|h\|$ hinreichend klein gewählt wird, dann ist auch

$$\langle h, H_f(x^0 + \tau h)h \rangle > 0$$

(denn τ ist zwar unbekannt, aber in $[0, 1]$).

Somit gilt: Es gibt eine Kugel $K_R(x^0)$, $R > 0$, so dass für alle $y \in K_R(x^0)$ ($\Leftrightarrow y = x^0 + h$, $\|h\| < R$) gilt:

$$f(y) = f(x^0) + \text{“positiver Term”} \Leftrightarrow f(y) > f(x^0) \quad (\text{für } y \neq x^0)$$

also: f ist in x^0 lokal minimal.

Satz 7.6.2 (hinreichendes Kriterium) Sei $f \in C^{(2)}(D, \mathbb{R})$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $x^0 \in D$ und $\text{grad } f(x^0) = 0$ (\Leftrightarrow : x^0 **stationärer Punkt** von f). Dann gilt:

- a) Ist $H_f(x^0)$ positiv definit, so ist f in x^0 lokal minimal.
- b) Ist $H_f(x^0)$ negativ definit, so ist f in x^0 lokal maximal.
- c) Ist $H_f(x^0)$ indefinit, so hat f in x^0 kein Extremum, sondern einen Sattelpunkt.

In allen anderen Fällen kann keine allgemeine Aussage gemacht werden.

Beispiel 7.6.3

a) Sei

$$f(x, y) := x^2 + y^2,$$

dann ist

$$\text{grad } f(x, y) = (2x, 2y) \stackrel{!}{=} (0, 0),$$

was genau dann gilt, wenn

$$x = y = 0,$$

also ist $(0, 0)$ der einzige Kandidat. Wir berechnen die Hesse-Matrix:

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ist positiv definit (Eigenwerte: 2 und 2)}$$

Daraus folgt, dass f ein Minimum bei $(0, 0)$ hat.

b) Sei $f(x) := \|x\|^2$, $x \in \mathbb{R}^n$ ($n = 2$ siehe oben, $n = 1$: Mathe I). Es gilt also

$$f(x) = \sum_{j=1}^n x_j^2,$$

so dass

$$\begin{aligned} \text{grad } f(x) &= (2x_1, 2x_2, \dots, 2x_n) \stackrel{!}{=} 0 \ (\in \mathbb{R}^n) \\ &\Leftrightarrow x = 0. \end{aligned}$$

Die Hesse-Matrix

$$H_f(x) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & 2 & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ist positiv definit, insbesondere bei $x = 0 \Rightarrow$ Minimum bei $x = 0$.

c) Sei $f(x) := e^{-x^2-y^2}$, dann gilt

$$\begin{aligned} \text{grad } f(x, y) &= \left(-2x \cdot e^{-x^2-y^2}, -2y \cdot e^{-x^2-y^2} \right) \stackrel{!}{=} (0, 0) \\ &\Leftrightarrow \underbrace{(-2x, -2y)}_{e^{-x^2-y^2} \neq 0} = (0, 0) \Leftrightarrow x = y = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_f(x, y) &= \begin{pmatrix} -2e^{-x^2-y^2} + (-2x)^2 e^{-x^2-y^2} & (-2x) \cdot (-2y) e^{-x^2-y^2} \\ (-2x)(-2y) e^{-x^2-y^2} & -2e^{-x^2-y^2} + (-2y)^2 e^{-x^2-y^2} \end{pmatrix} \\ H_f(0, 0) &= \begin{pmatrix} -2 \cdot 1 + 0 & 0 \\ 0 & -2 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

negativ definit (Eigenwerte -2 und -2) \Rightarrow Maximum

d) Sei $f(x) := x^3 y^2 - x$, dann gilt

$$\text{grad } f(x, y) = (3x^2 y^2 - 1, x^3 \cdot 2y) \stackrel{!}{=} (0, 0)$$

Nach der 2. Gleichung ist $x^3 \cdot 2y = 0 \Leftrightarrow x = 0$ oder $y = 0$, woraus nach der 1. Gleichung $0 - 1 = 0$ (aus $x = 0$ bzw. $y = 0$) folgt, was zum Widerspruch führt. Es existiert also kein Extremum.

e) Sei $f(x, y) := x^3 + y^2 - x + y$, dann gilt

$$\text{grad } f(x, y) = (3x^2 - 1, 2y + 1) \stackrel{!}{=} (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{1}{3}}, \quad y = -\frac{1}{2}$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$H_f\left(\sqrt{\frac{1}{3}}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 6 \cdot \sqrt{\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ positiv definit} \Rightarrow \text{Minimum}$$

$$H_f\left(-\sqrt{\frac{1}{3}}, -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} -6\sqrt{\frac{1}{3}} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ indefinit} \Rightarrow \text{Sattelpunkt}$$

(Matrix A indefinit $\Leftrightarrow \exists$ positive und negative Eigenwerte).

f) (i) $f(x, y) := x^4 - y^2$

$$\nabla f(x, y) = (4x^3, -2y) \stackrel{!}{=} (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow x = y = 0$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad H_f(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ negativ semidefinit}$$

(ii) $g(x, y) := x^4 + y^2$

$$\nabla g(x, y) = (4x^3, 2y) \stackrel{!}{=} (0, 0)$$

$$\Leftrightarrow x = y = 0$$

$$H_f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x^2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad H_f(0, 0) \text{ positiv semidefinit}$$

In beiden Fällen stellen wir fest: Das hinreichende Kriterium hilft nicht weiter! D.h. es sind andere Überlegungen nötig.

Wir wissen jeweils: Wenn es ein Extremum gibt, dann ist es in $(0, 0)$.

Z.B.:

$$g: g(x, y) = x^4 + y^2 \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad g(0, 0) = 0 \leq g(x, y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R} \\ \Rightarrow g \text{ hat ein Minimum in } (0, 0) \text{ (sogar ein globales Minimum).}$$

f : Betrachte $(x, y) = (0, 0)$: $f(0, 0) = 0$.

Sei $K_\varepsilon(0, 0)$ eine beliebig kleine Kugel um $(0, 0)$, d.h. $\varepsilon > 0$ sei beliebig klein. Dann gilt:

$$\left(\frac{\varepsilon}{2}, 0\right) \in K_\varepsilon(0, 0) \text{ und } f\left(\frac{\varepsilon}{2}, 0\right) = \frac{\varepsilon^4}{16} > 0 = f(0, 0)$$

$$\left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \in K_\varepsilon(0, 0) \text{ und } f\left(0, \frac{\varepsilon}{2}\right) = -\frac{\varepsilon^2}{4} < 0 = f(0, 0)$$

Das bedeutet: In jeder noch so kleinen Umgebung von $(0, 0)$ gibt es sowohl Werte, die größer als $f(0, 0)$ sind als auch Werte, die kleiner sind.

\Rightarrow Weder Maximum noch Minimum.

Also: Im semidefiniten Fall gibt es kein allgemeines Kriterium!

g) linear-quadratisches Problem (LQP)

$$f(x) := \frac{1}{2}\langle x, Ax \rangle + \langle b, x \rangle + c, \quad x \in \mathbb{R}^n, A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ symmetrisch, } b \in \mathbb{R}^n, c \in \mathbb{R}.$$

Wir erhalten durch komponentenweise Darstellung

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i (Ax)_i + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^n b_i x_i + c. \end{aligned}$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} x_i \right) x_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \frac{\partial}{\partial x_k} x_j + \sum_{i=1}^n b_i \frac{\partial}{\partial x_k} x_i + 0 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \delta_{ik} x_j + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i \delta_{jk} + \sum_{i=1}^n b_i \delta_{ik} \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j}_{=(Ax)_k} + \frac{1}{2} \underbrace{\sum_{i=1}^n a_{ik} x_i}_{=(Ax)_k} + b_k = (Ax)_k + b_k \end{aligned}$$

Also ist der Gradient von f gegeben durch

$$(\nabla f)(x) = Ax + b$$

Für die Hesse-Matrix erhalten wir schließlich

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x_l \partial x_k}(x) &= \frac{\partial}{\partial x_l} \left(\sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + b_k \right) \\ &= \sum_{j=1}^n a_{kj} \delta_{jl} + 0 = a_{kl} = a_{lk} \quad (\text{wegen der Symmetrie}) \\ &\Rightarrow H_f(x) = A \end{aligned}$$

Also gilt: $\text{grad } f(x) = 0 \Leftrightarrow Ax + b = 0$.

Ist A invertierbar, so ist $x = -A^{-1}b$ einziger Kandidat, sonst ist $\{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = -b\}$ eine Teilmenge voller Kandidaten.

Hesse-Matrix: Ist A positiv definit ($\Rightarrow A$ invertierbar): $x = -A^{-1}b$ Minimierer.

Ist A negativ definit ($\Rightarrow A$ invertierbar): $x = -A^{-1}b$ Maximierer.

Ist A indefinit und invertierbar: Sattelpunkt bei $x = -A^{-1}b$;

sonst: keine Aussage möglich.

◇

7.7 Der Satz über implizite Funktionen

Problem: Gleichung $f(x, y) = 0$ gegeben, Auflösen nach y . Allgemein: $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$, $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$. m Gleichungen

$$\begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0 \\ &\vdots \\ f_m(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m) &= 0 \end{aligned}$$

für m Unbekannte $y_1, \dots, y_m \rightarrow$ nichtlineares Gleichungssystem.

Beispiel 7.7.1

- a) $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (Gleichung der Einheitskreislinie) (hier: $n = m = 1$) nicht global auflösbar, d.h. es gibt keine eindeutige Funktion g , so dass $y = g(x)$ alle Lösungen beschreibt, denn $y = \sqrt{1 - x^2}$ und $y = -\sqrt{1 - x^2}$ ist möglich. Dennoch ist die Gleichung zumindest lokal auflösbar, d.h. für Halbkreise.

b) $\|x\|^2 = 1$ (Einheitssphäre im \mathbb{R}^d),

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{d-1}^2 + x_d^2 = 1$$

Dem x in obiger Darstellung entspricht hier der Vektor (x_1, \dots, x_{d-1}) , y entspricht x_d ($n = d - 1$, $m = 1$)

$$x_d = \pm \sqrt{1 - x_1^2 - x_2^2 - \dots - x_{d-1}^2}$$

c)

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + y_1^2 - \sin y_2 &= 0 \\ x_1 \cdot x_2 e^{x_3} - y_1 \cdot \sqrt{y_2} &= 0 \end{aligned}$$

($n = 3$, $m = 2$); auflösbar nach y ? $y_1 = \dots?$ $y_2 = \dots?$

◇

Zunächst: $n = m = 1$.

Satz 7.7.2 (Satz über implizite Funktionen I) Sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $f \in C^{(1)}(D, \mathbb{R}^1)$. Ferner sei die Lösungsmenge (Niveaumenge) $N_0 = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) = 0\}$ nicht-leer. Ist $(x_0, y_0) \in N_0$ und

$$\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0,}$$

dann gibt es (offene) Intervalle $I \subset \mathbb{R}$ (mit Mittelpunkt x_0) und $K \subset \mathbb{R}$ (mit Mittelpunkt y_0) mit $I \times K \subset D$, so dass gilt:

1. Schränkt man die Gleichung $f(x, y) = 0$ auf $x \in I$, $y \in K$ ein, so gibt es eine eindeutige $C^{(1)}$ -Auflösung, d.h. es gibt eine $C^{(1)}$ -Funktion $g: I \rightarrow K$, so dass $y = g(x)$ alle Lösungen in $I \times K$ beschreibt:

$$f(x, y) = 0, x \in I, y \in K \Leftrightarrow y = g(x), x \in I$$

2. $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \neq 0 \forall (x, y) \in I \times K$

3. $g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))} \quad \forall x \in I$

Bemerkung 7.7.3

- a) “ $f(x, y) = 0$ ” ist eine **implizite** Darstellung von N_0 , “ $y = g(x)$ ” ist eine **lokale explizite** Darstellung von N_0 (besser: eines Teils von N_0).
- b) Dies ist nur ein hinreichendes Kriterium!

Beispiel 7.7.4 $x^2 + y^2 = 1$ Einheitskreisrand

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y$$

Also: Lösungen (x, y) mit $y = 0$, d.h. $(1, 0)$ und $(-1, 0)$ erfüllen nicht die Voraussetzungen! (\Rightarrow in diesem Fall keine Aussage möglich).

Also: Sei $y \neq 0$: Ist (x_0, y_0) mit $y_0 \neq 0$ Punkt der Kreislinie, so gibt es (nach Satz 7.7.2) eine lokale explizite Darstellung $y = g(x)$, nämlich:

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{1 - x^2}, & \text{wenn } y_0 > 0 \\ g(x) &= -\sqrt{1 - x^2}, & \text{wenn } y_0 < 0. \end{aligned}$$

Dies ist aber nur lokal möglich.

Z.B.: $(x_0, y_0) = (\frac{\sqrt{15}}{4}, \frac{1}{4})$

$$y = \sqrt{1 - x^2} \quad \text{für } y \in \left]0, \frac{1}{2}\right[= K$$

Wir bestimmen ein zugehöriges I .

$$0 < y < \frac{1}{2} \stackrel{(y>0)}{\Leftrightarrow} 0 < y^2 < \frac{1}{4}$$

$$\Leftrightarrow 0 > -y^2 > -\frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 > 1 - y^2 > \frac{3}{4} \stackrel{x \geq 0}{\Leftrightarrow} 1 > x > \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Das Intervall sollte laut Satz $x_0 = \frac{\sqrt{15}}{4}$ als Zentrum haben.

Z.B.: $I =]2 \cdot \frac{\sqrt{15}}{4} - 1, 1[$ ($\frac{\sqrt{15}}{2} - 1 > \frac{\sqrt{3}}{2}$).

Für $x \in I$ ist $g(x) \in K$. Somit gilt $f(x, y) = 0$ für $x \in]\frac{\sqrt{15}}{2} - 1, 1[$ und $y \in]0, \frac{1}{2}[$ genau dann, wenn $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Ferner gilt:

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 - x^2}} \cdot (-2x) = -\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (\text{beachte: } x \in I)$$

$$\text{vergleiche 3): } -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))} = -\frac{2x}{2y} \Big|_{(x, g(x))} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \checkmark$$

◇

Beachte auch: $\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0$ für $x \in I$

hier: $2y \neq 0$, d.h. $2 \cdot \sqrt{1-x^2} \neq 0$ für $x \in]\frac{\sqrt{15}}{2} - 1, 1[$.

Bemerkung 7.7.5 Beweis der Formel für g' :

$$f(x, g(x)) = 0 \quad \forall x \in I, \text{ da } y = g(x) \text{ auf } I \times K$$

d.h. $x \mapsto f(x, g(x))$ ist konstant auf I .

Mit Hilfe der Kettenregel folgt daher

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x)) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \cdot g'(x) = 0 \quad \forall x \in I$$

und da $\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \neq 0 \quad \forall x \in I$, ergibt sich daraus

$$g'(x) = -\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}{\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x))}$$

Satz 7.7.6 (Satz über implizite Funktionen II) Sei $D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ offen und $f \in C^{(1)}(D, \mathbb{R}^m)$. Ist $(x^0, y^0) \in D$ (d.h. insbesondere $x^0 \in \mathbb{R}^n$, $y^0 \in \mathbb{R}^m$) Lösung von $f(x^0, y^0) = 0$ und

$$\underbrace{\frac{\partial f}{\partial y}(x^0, y^0)}_{(m \times m\text{-Jacobi-Matrix})} \text{ invertierbar,}$$

dann existieren offene Kugeln $U := K_{r_1}(x^0) \subset \mathbb{R}^n$ und $V := K_{r_2}(y^0) \subset \mathbb{R}^m$, so dass $f(x, y) = 0$ für $(x, y) \in U \times V$ eindeutig nach y auflösbar ist. Genauer: Es existiert eine $C^{(1)}$ -Funktion $g: U \rightarrow V$, so dass gilt:

$$f(x, y) = 0, \quad x \in U, y \in V \Leftrightarrow y = g(x), x \in U$$

Ferner ist $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ eine reguläre Matrix für $x \in U$, $y = g(x)$, und

$$\underbrace{g'(x)}_{m \times n\text{-Jacobi-Matrix}} = - \underbrace{\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, g(x)) \right)^{-1}}_{\text{inverse } m \times m\text{-Jacobi-Matrix}} \cdot \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}(x, g(x))}_{m \times n\text{-Jacobi-Matrix}}$$

Beispiel 7.7.7

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + 4y^2 + z^2 = 5 \\ xy = 1 \end{array} \right\} \text{ nach } (y, z) \text{ auflösbar? } \begin{array}{l} y = \dots(x) \\ z = \dots(x) \end{array} ?$$

(Lösung zum Beispiel $(x, y, z) = (1, 1, 0)$); d.h.

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + 4y^2 + z^2 - 5 \\ xy - 1 \end{pmatrix}$$

hier	Satz
(y, z)	y
x	x

hinreichende Bedingung:

$$\frac{\partial f}{\partial (y, z)}(x, y, z) \text{ regulär (d.h. invertierbar)}$$

In diesem Beispiel ist

$$\frac{\partial f}{\partial (y, z)}(x, y, z) = \begin{pmatrix} 8y & 2z \\ x & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det \frac{\partial f}{\partial (y, z)}(x, y, z) = 0 - x \cdot 2z$$

Also: für alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, die Lösungen von $f(x, y, z) = 0$ sind, mit $x \neq 0$ und $z \neq 0$ ist das Gleichungssystem sicher lokal eindeutig nach (y, z) auflösbar. In den anderen Fällen ($x = 0$ oder $z = 0$) liefert der Satz keine Aussage.

$$\left(\text{hier: für } x > 0 : y = \frac{1}{x}, z = \pm \sqrt{5 - x^2 - 4y^2} = \pm \sqrt{5 - x^2 - \frac{4}{x^2}} \right).$$

↑ nur lokal eindeutig

◇

7.8 Extrema mit Nebenbedingungen

Beispiel 7.8.1

$$f(x, y, z) = xe^z - xy^2$$

Extrema ohne Nebenbedingungen: Suche $(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$, so dass es eine Kugel $K_\varepsilon(x_0, y_0, z_0)$ gibt, so dass

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0, z_0) &\leq f(x, y, z) \forall (x, y, z) \in K_\varepsilon(x_0, y_0, z_0) \\ (\text{bzw. } f(x_0, y_0, z_0) &\geq f(x, y, z) \forall (x, y, z) \in K_\varepsilon(x_0, y_0, z_0)). \end{aligned}$$

Extrema mit Nebenbedingungen: Vergleiche nicht alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, sondern nur die (x, y, z) , für die $g(x, y, z) = 0$ gilt. Z.B. suche Minimum $f(x, y, z)$ unter allen (x, y, z) auf der Einheitskugel, d.h.

$$g(x, y, z) := x^2 + y^2 + z^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0$$

Ansatz(?): Löse $g(x, y, z) = 0$ nach z auf (wenn möglich): $z = h(x, y)$ (\rightarrow Satz über implizite Funktionen)

(im Beispiel: $z = \pm\sqrt{1-x^2-y^2}$, also nur lokal);

minimiere $f(x, y, h(x, y))$ unter allen (x, y) (für die $h(x, y)$ definiert ist);

im Beispiel: minimiere $xe^{\sqrt{1-x^2-y^2}} - xy^2$ bzw. $xe^{-\sqrt{1-x^2-y^2}} - xy^2$ als Extremwertproblem (in nur zwei Variablen) ohne Nebenbedingungen

\rightarrow Problem wegen nicht eindeutiger Auflösung

\rightarrow Extrema im Übergangsbereich ($z = 0$) würden im Beispiel eventuell nicht erkannt oder fälschlicherweise erkannt

\rightarrow also anderer Weg gefragt! ◇

Satz 7.8.2 (Lagrange-Multiplikator-Regel) Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, $g \in C^{(1)}(D, \mathbb{R}^m)$, $m < n$ (weniger Bedingungen als Variablen) und $f \in C^{(1)}(D, \mathbb{R})$. Wenn gilt:

- f ist ein $x^0 \in D$ lokal minimal (oder maximal) unter den Nebenbedingungen (Nb) $g(x^0) = 0$ (m Gleichungen!), d.h.

Es existiert eine Kugel $K_\varepsilon(x^0) \subset D$, $\varepsilon > 0$, so dass $f(x) \geq f(x^0)$
(bzw. $f(x) \leq f(x^0)$) für alle $x \in \underbrace{K_\varepsilon(x^0) \cap \{\xi \in D \mid g(\xi) = 0\}}$

d.h. nur Vergleich mit den Lösungen von $g = 0$

und

- $g'(x^0)$ hat den (maximalen) Rang m ,

dann gilt:

Es existiert ein Vektor $\lambda^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_m^0) \in \mathbb{R}^m$ (genannt **Lagrange-Multiplikator**) derart, dass die **Lagrange-Funktion**

$$L(x, \lambda) := f(x) + \langle \lambda, g(x) \rangle = f(x) + \sum_{j=1}^m \lambda_j g_j(x)$$

in (x^0, λ^0) stationär ist, d.h.

$$\text{grad } L(x^0, \lambda^0) = 0,$$

d.h.

$$\frac{\partial L}{\partial x_j}(x^0, \lambda^0) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, n \quad \text{und} \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda_j}(x^0, \lambda^0) = 0 \quad \forall j = 1, \dots, m$$

Beispiel 7.8.3

$$\text{a) } f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \left(= x^T \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} x \right)$$

(i) freies Extremwertproblem (d.h. Extremwertproblem ohne Nebenbedingungen):

$$\text{grad } f(x_1, x_2) = 0 \Leftrightarrow (4x_1 + 2x_2, 2x_1 + 2x_2) = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = 0$$

$$H_f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Hauptminoren

$$1. \quad 4 > 0$$

$$2. \quad 4 \cdot 2 - 2 \cdot 2 > 0 \Rightarrow H_f(0, 0) \text{ ist positiv definit} \Rightarrow (0, 0) \text{ lokaler Minimierer von } f.$$

Es gibt kein weiteres freies Extremum, insbesondere kein Maximum.

(ii) Extremum unter der Nebenbedingung $x_1^2 + x_2^2 = 1$ (also: $m = 1$)

$$g(x_1, x_2) := x_1^2 + x_2^2 - 1; \quad g'(x) = (2x_1, 2x_2)$$

Es gilt:

$$\text{rk } g'(x) = 1 \Leftrightarrow x_1 = 0 \text{ oder } x_2 = 0$$

Lagrangefunktion:

$$L(x, \lambda) := 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + \lambda(x_1^2 + x_2^2 - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1}(x, \lambda) = 4x_1 + 2x_2 + 2\lambda x_1 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow (2 + \lambda)x_1 + x_2 = 0 \quad (7.4)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2}(x, \lambda) = 2x_1 + 2x_2 + 2\lambda x_2 \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow x_1 = -(1 + \lambda)x_2 \quad (7.5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 - 1 \stackrel{!}{=} 0 \quad (\text{Das ist die Nebenbedingung!}) \quad (7.6)$$

(7.5) in (7.4):

$$(2 + \lambda)[-(1 + \lambda)x_2] + x_2 = 0 \Leftrightarrow -(2 + \lambda)(1 + \lambda)x_2 + x_2 = 0$$

1. Möglichkeit: $x_2 = 0 \xrightarrow{(7.5)} x_1 = 0 \Rightarrow$ Widerspruch zu (7.6) (und zu $\text{rk } g'(x) = 1$)

also nur: 2. Möglichkeit: $(2 + \lambda)(1 + \lambda) = 1 \Leftrightarrow 2 + 3\lambda + \lambda^2 = 1$

$$\lambda_{1/2} = -\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{4}{4}} = -\frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$$

Zurück zu (7.5):

$$x_1 = -(1 + \lambda)x_2 \Rightarrow x_1^2 = (1 + \lambda)^2 x_2^2 \Leftrightarrow x_1^2 = x_2^2 + 2\lambda x_2^2 + \lambda^2 x_2^2$$

Beachten Sie, dass bei dem “ \Rightarrow ”-Schritt keine Äquivalenz vorliegt.

Mit (7.6) ($x_1^2 = 1 - x_2^2$):

$$\begin{aligned} 1 - x_2^2 &= x_2^2 + 2\lambda x_2^2 + \lambda^2 x_2^2 \\ &\Leftrightarrow \underbrace{(2 + 2\lambda + \lambda^2)}_{=1+(1+\lambda)^2 > 0} x_2^2 = 1 \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} x_2 &= \pm (1 + (1 + \lambda)^2)^{-\frac{1}{2}} \\ \stackrel{(7.5)}{\Rightarrow} x_1 &= \mp \frac{1 + \lambda}{(1 + (1 + \lambda)^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

Es gibt somit 4 Kandidaten:

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{1 + \lambda_1}{(1 + (1 + \lambda_1)^2)^{\frac{1}{2}}}, (1 + (1 + \lambda_1)^2)^{-\frac{1}{2}} \right), \left(\frac{1 + \lambda_1}{(1 + (1 + \lambda_1)^2)^{\frac{1}{2}}}, -(1 + (1 + \lambda_1)^2)^{-\frac{1}{2}} \right) \\ &\left(-\frac{1 + \lambda_2}{(1 + (1 + \lambda_2)^2)^{\frac{1}{2}}}, (1 + (1 + \lambda_2)^2)^{-\frac{1}{2}} \right), \left(\frac{1 + \lambda_2}{(1 + (1 + \lambda_2)^2)^{\frac{1}{2}}}, -(1 + (1 + \lambda_2)^2)^{-\frac{1}{2}} \right) \end{aligned}$$

Wegen obigem nicht-äquivalenten Schritts ist ein Test notwendig, d.h. setze alle (x_1, x_2) -Paare in (7.4) - (7.6) ein. Ergebnis: alle vier sind in Ordnung. \Rightarrow 4 Kandidaten für Extrema mit Nebenbedingung. Wir berechnen nun die Funktionswerte.

1. Sowohl für

$$(x_1, x_2) = \left(-\frac{1 + \lambda_1}{(1 + (1 + \lambda_1)^2)^{\frac{1}{2}}}, (1 + (1 + \lambda_1)^2)^{-\frac{1}{2}} \right)$$

als auch für

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{1 + \lambda_1}{(1 + (1 + \lambda_1)^2)^{\frac{1}{2}}}, -(1 + (1 + \lambda_1)^2)^{-\frac{1}{2}} \right)$$

hat f den gleichen Wert (wie man f leicht ansieht). Es gilt

$$f(x_1, x_2) \approx 2,17$$

2. Analog hat f für

$$(x_1, x_2) = \left(-\frac{1 + \lambda_2}{(1 + (1 + \lambda_2)^2)^{\frac{1}{2}}}, (1 + (1 + \lambda_2)^2)^{-\frac{1}{2}} \right)$$

und

$$(x_1, x_2) = \left(\frac{1 + \lambda_2}{(1 + (1 + \lambda_2)^2)^{\frac{1}{2}}}, -(1 + (1 + \lambda_2)^2)^{-\frac{1}{2}} \right)$$

den gleichen Wert. Es ist

$$f(x_1, x_2) \approx 2,62$$

siehe Satz 7.2.9 (!): Kreis $K := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g(x) = 0\}$ kompakt, f stetig $\Rightarrow f$ hat Maximum und Minimum auf K . \Rightarrow Das müssen sie sein!!!

- b) allgemein: $f(x) := x^T A x$, $x \in \mathbb{R}^n$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch. Nebenbedingung: $g(x) := 1 - \|x\|^2 \stackrel{!}{=} 0$ (also $m = 1$). (Anwendung: z.B. $n^T S n$, $\|n\| = 1$, Normalspannung eines elastisch belasteten Körpers, S Spannungstensor, in welche Richtung n ist die Normalspannung maximal/minimal?)

$$g(x) = 1 - \sum_{j=1}^n x_j^2 \Rightarrow \frac{\partial g}{\partial x_k}(x) = -2x_k \Rightarrow g'(x) = -2x$$

Rg $g'(x) = 1 \Leftrightarrow$ mindestens eine Komponente von x ist $\neq 0$. Dies ist auf der Lösungsmenge, d.h. für x mit $\|x\| = 1$, stets erfüllt.

Lagrange-Funktion: $L(x, \lambda) := x^T A x + \lambda \cdot (1 - \|x\|^2)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_j}(x, \lambda) &= 2(Ax)_j + \lambda \cdot (-2x_j) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x, \lambda) &= 1 - \|x\|^2 \end{aligned}$$

d.h.

$$\text{grad}_{(x,\lambda)} L(x, \lambda) = \left(\underbrace{2(Ax)^T - 2\lambda x^T}_{n \text{ Komponenten}}, \underbrace{1 - \|x\|^2}_{n+1 \text{ Komponenten}} \right) \stackrel{!}{=} (\underbrace{0, \dots, 0}_{n+1 \text{ Komponenten}})$$

Hierbei bedeutet $\text{grad}_{(x,\lambda)}$, dass betont werden soll, dass bezüglich x und bezüglich λ abgeleitet wird.

erste n Gleichungen: $Ax = \lambda x$ Eigenwertproblem!

$(n+1)$ -te Gleichung: $\|x\| = 1$.

Also: Die Kandidaten sind genau die Eigenvektoren mit Norm 1 ("normierter Eigenvektor"). Die zugehörigen Eigenwerte sind die entsprechenden Lagrangemultiplikatoren. (Zur

Anwendung: Die Eigenvektoren sind die Hauptspannungsrichtungen von S .)

Hauptachsentransformation: Es existiert eine ONB von Eigenvektoren v_1, \dots, v_n ; zugehörige Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ (da A symmetrisch).

Sei v ein normierter Eigenvektor zum Eigenwert λ . Dann gilt

$$f(v) = v^T A v = v^T (\lambda v) = \lambda v^T v = \lambda \|v\|^2 = \lambda.$$

Da die Einheitssphäre im \mathbb{R}^n ($\{x \mid g(x) = 0\}$) kompakt ist und f stetig ist, folgt nach Satz 7.2.9: Es existiert ein Maximum und ein Minimum. Daraus folgt: Normierte Eigenvektoren zum größten Eigenwert liefern ein Maximum unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$. Normierte Eigenvektoren zum kleinsten Eigenwert liefern ein Minimum unter der Nebenbedingung $g(x) = 0$.

◇

Bemerkung 7.8.4 Ist $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist $N_0 := \{x \in \mathbb{R}^n \mid g(x) = 0\}$ abgeschlossen, d.h. ist N_0 beschränkt, so ist N_0 kompakt.

(Z.B. Einheitssphäre: $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1$.)

7.9 div, grad, rot & Co KG

Definition 7.9.1 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ (gleiche Dimension!) in $x^0 \in D$ differenzierbar. Dann heißt

$$\operatorname{div} f(x^0) := \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_j}(x^0) \quad (= \operatorname{Spur} f'(x^0))$$

Divergenz von f in x^0 .

Definition 7.9.2 Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen und $f : D \rightarrow \mathbb{R}^3$ (auf beiden Seiten \mathbb{R}^3 !) in $x^0 \in D$ differenzierbar. Dann heißt

$$\operatorname{rot} f(x^0) := \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2} f_3(x^0) - \frac{\partial}{\partial x_3} f_2(x^0) \\ \frac{\partial}{\partial x_3} f_1(x^0) - \frac{\partial}{\partial x_1} f_3(x^0) \\ \frac{\partial}{\partial x_1} f_2(x^0) - \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(x^0) \end{pmatrix}$$

Rotation von f in x^0 (englisch: curl f).

Definition 7.9.3 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ in $x^0 \in D$ zweimal differenzierbar. Dann sei

$$\Delta F(x^0) := \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} F(x^0) \quad (= \text{Spur } H_F(x^0)).$$

Δ heißt **Laplace-Operator**.

Für Vektorfelder $f : D \rightarrow \mathbb{R}^m$ (in x^0 zweimal differenzierbar) definieren wir komponentenweise:

$$\Delta f(x^0) := \begin{pmatrix} \Delta f_1(x^0) \\ \vdots \\ \Delta f_m(x^0) \end{pmatrix}$$

Wir kennen schon: $F : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, in $x^0 \in D$ differenzierbar,

$$\text{grad } F := \left(\frac{\partial}{\partial x_1} F, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} F \right)$$

heißt **Gradient** von F .

Bemerkung 7.9.4 (Nabla-Notation) Wir schreiben

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix} \quad (\text{d.h. hier ist } \nabla F \text{ ein Spaltenvektor})$$

Somit gilt:

$$\nabla F = (\text{grad } f)^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} F \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_n} F \end{pmatrix}$$

Formal kann man die folgenden Abkürzungen einführen (F, f jeweils passend):

$$\text{div } f = \langle \nabla, f \rangle = \nabla \cdot f = \frac{\partial}{\partial x_1} f_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} f_n$$

(als Schreibweise für das Skalarprodukt)

$$\begin{aligned} \text{rot } f &= \nabla \times f \\ \Delta F &= \nabla \cdot \nabla F = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial}{\partial x_n} \right) F \end{aligned}$$

Beispiel 7.9.5

$$F(x, y, z) = xe^y - zx^2$$

$$\text{grad } F(x, y, z) = (e^y - 2zx, xe^y, -x^2) =: f(x, y, z)$$

$$\begin{aligned} \text{div } f(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} (e^y - 2zx) + \frac{\partial}{\partial y} (xe^y) + \frac{\partial}{\partial z} (-x^2) \\ &= -2z + xe^y + 0 \end{aligned}$$

$$\text{rot } f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ -2x - (-2x) \\ e^y - e^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Delta F(x, y, z) &= \frac{\partial}{\partial x} (e^y - 2zx) + \frac{\partial}{\partial y} (xe^y) + \frac{\partial}{\partial z} (-x^2) \\ &= \text{div } f(x, y, z) = -2z + xe^y. \end{aligned}$$

◇

Anwendung: z.B. Maxwellgleichungen für elektrische Feldstärke $E(x, t)$, Magnetfeld $B(x, t)$ bzw. $H(x, t)$, Stromdichte $j(x, t)$, dielektrische Verschiebung $D(x, t)$ und Ladungsdichte $\varrho(x, t)$:

$$\text{rot } H = \frac{\partial D}{\partial t} + j, \quad \text{rot } E = -\frac{\partial B}{\partial t}, \quad \text{div } D = \varrho, \quad \text{div } B = 0$$

Satz 7.9.6 Seien $D \subset \mathbb{R}^3$ und $E \subset \mathbb{R}^n$ offen und $f \in C^{(2)}(D, \mathbb{R}^3)$, $F \in C^{(2)}(D, \mathbb{R})$, $g \in C^{(2)}(E, \mathbb{R}^n)$, $G \in C^{(2)}(E, \mathbb{R})$. Dann gilt:

a) $\text{rot grad } F = 0$ "Gradientenfelder sind wirbelfrei"

b) $\text{div rot } f = 0$ "Rotationsfelder sind quelfrei"

c) $\Delta G = \text{div grad } G$

d) $\Delta f = \text{grad div } f - \text{rot rot } f$

e) $\text{div}(Gg) = \langle \text{grad } G, g \rangle + G \text{div } g$

f) $\text{rot}(Ff) = (\text{grad } F) \times f + F \text{rot } f$

Beweis:

a)

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} F = \operatorname{rot} \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial F}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{nach dem Satz von Schwarz}$$

c)

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} G = \operatorname{div} \begin{pmatrix} \frac{\partial G}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial G}{\partial x_n} \end{pmatrix}^T = \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial G}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial}{\partial x_n} \frac{\partial G}{\partial x_n} = \Delta G$$

b,d,e,f: wird als Übung überlassen. ■

Definition 7.9.7 Ein Vektorfeld $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, heißt **Gradientenfeld** (konservatives Feld, Potentialfeld), falls ein differenzierbares Skalarfeld $F : D \rightarrow \mathbb{R}$ existiert, so dass

$$f = \operatorname{grad} F \quad \text{auf } D \quad (\text{genauer: } f = (\operatorname{grad} F)^T)$$

gilt. F heißt **Stammfunktion** von f und $-F$ **Potential** von f .

Aus Satz 7.9.6 a) folgt unmittelbar:

Satz 7.9.8 Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ offen, $f \in C^{(1)}(D, \mathbb{R}^3)$ Gradientenfeld $\Rightarrow \operatorname{rot} f = 0$.

Und allgemein gilt:

Satz 7.9.9 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen ($n \geq 2$) und $f \in C^{(1)}(D, \mathbb{R}^n)$ ein Gradientenfeld. Dann gilt:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\} \quad (\text{Integrabilitätsbedingung}),$$

kurz

$$f' = (f')^T \quad (\text{d.h. die Jacobimatrix von } f \text{ ist symmetrisch})$$

(im \mathbb{R}^3 heißt das genau: $\operatorname{rot} f = 0$ (\rightarrow nachprüfen!))

Beweis: Sei f ein Gradientenfeld $\Rightarrow \exists F : D \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $f = \nabla F$, d.h. $f_i = \frac{\partial}{\partial x_i} F \quad \forall i = 1 \dots n$

$$\Rightarrow \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} F \right) \stackrel{\substack{\text{Satz von Schwarz} \\ (f \in C^1) \Rightarrow F \in C^2)}}{=} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} F = \frac{\partial}{\partial x_i} f_j$$

■

Die Umkehrung gilt i.a.R. nicht!

Beispiel 7.9.10 Sei $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) := \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ (Magnetfeld eines stromdurchflossenen Leiters).

Integrabilitätsbedingung: $\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \forall i, j \in \{1; 2\}$. Fall $i = j$ trivial, also nur relevant:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial f_1}{\partial y} \stackrel{?}{=} \frac{\partial f_2}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} \stackrel{?}{=} \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{array} \right\} \text{gleiche Bedingung, also nur eine!}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_1}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2+y^2} \right) = \frac{-1 \cdot (x^2+y^2) + y \cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2+y^2} \right) = \frac{1 \cdot (x^2+y^2) - x \cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}$$

Aber: Es gibt kein Potential für f . (\rightarrow später)

◇

Ein positives Beispiel:

Beispiel 7.9.11 Gravitationskraft eines Massenpunkts y

$$g(x) = \gamma \frac{m_1 m_2}{\|y-x\|^3} (y-x), \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{y\}$$

Wir sparen uns die konstanten Faktoren $\gamma m_1 m_2$.

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{1}{\|y-x\|^3} (y-x) = \left(\sum_{j=1}^3 (y_j - x_j)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} (y_i - x_i)_{i=1,2,3} \\ \frac{\partial f_i}{\partial x_k} &= -\frac{3}{2} \left(\sum_{j=1}^3 (y_j - x_j)^2 \right)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2(y_k - x_k) \cdot (-1) \cdot (y_i - x_i) \\ &\quad + \left(\sum_{j=1}^3 (y_j - x_j)^2 \right)^{-\frac{3}{2}} \cdot \underbrace{\delta_{ik} \cdot (-1)}_{= \frac{\partial}{\partial x_k} (y_i - x_i)} \\ &= 3 \|y-x\|^{-5} (y_k - x_k) (y_i - x_i) - \|y-x\|^{-3} \delta_{ik} \end{aligned}$$

Durch Vertauschen von i mit k erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_k}{\partial x_i} &= 3\|y-x\|^{-5}(y_i-x_i)(y_k-x_k) - \|y-x\|^{-3}\delta_{ki} \\ &= \frac{\partial f_i}{\partial x_k} \quad \forall i, k\end{aligned}$$

In der Tat gibt es ein Potential:

$$\begin{aligned}F(x) &= -\frac{1}{\|y-x\|} = -\left(\sum_{j=1}^3 (y_j-x_j)^2\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial F}{\partial x_k}(x) &= -\left(-\frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{j=1}^3 (y_j-x_j)^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2(y_k-x_k) \cdot (-1)\right) \\ &= -\|y-x\|^{-3} \cdot (y-x) = -f_k(x) \\ &\Rightarrow \text{grad}(-F) = f\end{aligned}$$

d.h. $G(x) := -\gamma \frac{m_1 m_2}{\|y-x\|}$ ist ein Potential von g . ◇

Folgendes erscheint klar:

Satz 7.9.12 *Ist $g \in C^{(1)}(D, \mathbb{R}^n)$, $D \subset \mathbb{R}^n$ offen, ein Potentialfeld, so ist das zugehörige Potential eindeutig bis auf konstante Summanden.*

$$g = \nabla G_1 = \nabla G_2 \Leftrightarrow G_1 - G_2 = \text{const.}$$

Wie berechnet man ein Potential?

Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Potentialfeld ($D \subset \mathbb{R}^n$ offen), d.h. es gibt ein $F : D \rightarrow \mathbb{R}$, so dass $f = \text{grad } F$ ist, d.h. $f_k = \frac{\partial}{\partial x_k} F \quad \forall k = 1, \dots, n$.

Es gilt also

$$f_k(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) = \frac{\partial}{\partial x_k} F(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 6.2.3) folgt:

$$\underbrace{\int f_k(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) dx_k}_{\text{d.h. alle anderen Variablen ignorieren}} = F(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n) + \text{const.}$$

Für jede Wahl der anderen Variablen $(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)$ gibt es (eventuell) eine andere Konstante, d.h.

$$\int f_k(x) dx_k = F(x) + C_k(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n) \quad (7.7)$$

Man geht also wie folgt vor:

1. (7.7) für alle k ausrechnen,
2. alle C_k vergleichen.

Beispiel 7.9.13

a) Sei $f(x, y, z) := \begin{pmatrix} y^2 \cos x \\ 2y \sin x + e^{2z} \\ 2ye^{2z} \end{pmatrix}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Es gilt: $\operatorname{rot} f = 0$.

Wir suchen eine Stammfunktion F .

$$\begin{aligned} \int f_1(x, y, z) dx &= \int y^2 \cos x dx = y^2 \int \cos x dx = y^2 \sin x + C_1(y, z) \\ \int f_2(x, y, z) dy &= \int 2y \sin x + e^{2z} dy = y^2 \sin x + e^{2z} y + C_2(x, z) \\ \int f_3(x, y, z) dz &= \int 2y \cdot e^{2z} dz = 2y \cdot \frac{1}{2} e^{2z} + C_3(x, y). \end{aligned}$$

Es muss

$$F(x, y, z) = y^2 \sin x + C_1(y, z) = y^2 \sin x + e^{2z} y + C_2(x, z) = ye^{2z} + C_3(x, y)$$

gelten, sonst gibt es keine Stammfunktion.

Es geht $C_1(y, z) = ye^{2z} + C$, $C_2(x, z) = C$, $C_3(x, y) = y^2 \sin x + C$, $C \in \mathbb{R}$ echte Konstante.

$$\Rightarrow F(x, y, z) = y^2 \sin x + ye^{2z} + C \quad \text{ist eine Stammfunktion}$$

b) Noch mal das Gegenbeispiel 7.9.10

Wir wissen schon: $f(x, y) := \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$ erfüllt die Integrabilitätsbedingung. Noch zu zeigen ist: f ist kein Gradientenfeld!

Wenn es eine Stammfunktion F gäbe, so könnte man sie wie folgt bestimmen:

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int -\frac{y}{x^2+y^2} dx = -y \int \frac{1}{x^2+y^2} dx \stackrel{x=y \cdot \xi}{=} -y \int \frac{1}{y^2 \xi^2 + y^2} y d\xi \\ &= -y \int \frac{1}{\xi^2 + 1} \frac{y}{y^2} d\xi = -1 \cdot \arctan \xi + C_1(y) \\ &= -\arctan \left(\frac{x}{y} \right) + C_1(y) \end{aligned}$$

und

$$F(x, y) = \int \frac{x}{x^2 + y^2} dy = x \int \frac{1}{x^2 + y^2} dy \stackrel{\substack{\uparrow \\ \text{“vertauschte} \\ \text{Rollen”}}}{=} + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + C_2(x)$$

Das ist nicht in Einklang zu bringen! Daraus folgt: f ist kein Potentialfeld.

◇

Es fehlt uns noch eine hinreichende Bedingung!

Definition 7.9.14 Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^n$ heißt **sternförmig**, wenn es einen Punkt $x^0 \in M$ gibt, so dass für jeden Punkt $x \in M$ die Verbindungsstrecke $\overline{x^0 x} := \{tx + (1-t)x^0 \mid 0 \leq t \leq 1\}$ ganz in M liegt.

Satz 7.9.15 Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und sternförmig und $f \in C^{(1)}(D, \mathbb{R}^n)$. Genügt f der Integrierbarkeitsbedingung, so ist f ein Gradientenfeld.

Beispiel 7.9.16

a) \mathbb{R}^3 ist natürlich sternförmig. Ist die Integrierbarkeitsbedingung erfüllt ($\operatorname{rot} f = 0$), so existiert ein Potential.

b) Sei $f(x, y, z) := \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \underbrace{\{(0, 0, \zeta) \mid \zeta \in \mathbb{R}\}}_{z\text{-Achse}} =: D$. Es gilt: $\operatorname{rot} f = 0$.

Es existiert aber kein Potential (wie oben im 2D-Fall).

Dies ist kein Widerspruch zu Satz 7.9.15, denn D ist nicht sternförmig: Angenommen $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ wäre der “zentrale Punkt”. Dann ist die Strecke von $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ nach $(-\tilde{x}, -\tilde{y}, \tilde{z})$ nicht in D : Mit $t = \frac{1}{2}$ ist

$$t(-\tilde{x}, -\tilde{y}, \tilde{z}) + (1-t)(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = \frac{1}{2}(-\tilde{x}, -\tilde{y}, \tilde{z}) + \frac{1}{2}(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}) = (0, 0, \tilde{z}) \notin D.$$

◇

7.10 Fehlerfortpflanzung

Beispiel 7.10.1 Bestimmung der Höhe aus der für den Fall benötigten Zeit

$$s = \frac{g}{2} t^2$$

gemessen: t mit Messfehler,
 gesucht: s .

Wir schätzen, dass sich die theoretische, exakte Zeit von der gemessenen um höchstens einen bestimmten Wert ε unterscheidet.

Betrachten wir z.B. den Eiffelturm; $300 \text{ m} = s$, $t = \sqrt{\frac{2s}{g}} = \sqrt{\frac{600}{9,81}} \approx 7,82 \text{ [s]}$. Messungenauigkeit: $0,782$ (d.h. 10%). Wir messen also etwas in $[7,038; 8,602]$.

Im schlimmsten Fall (worst case):

$$t_{\text{mess}} = 8,602 \Rightarrow s = \frac{g}{2} t^2 \approx 362,94 \text{ [m]}$$

$$\text{bzw. } t_{\text{mess}} = 7,038 \Rightarrow s = 242,96 \text{ [m]}.$$

Also: Ein Messfehler von 10% verursacht im Ergebnis Abweichungen von etwa 20% .

◇

Allgemein: Sei x die zu messende Größe und $f(x)$ die daraus berechnete Größe ($f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$). Ist die Funktion f differenzierbar, so wissen wir, dass

$$f(x) = f(x^0) + \langle \text{grad } f(x^0), x - x^0 \rangle + o(\|x - x^0\|)$$

für $x \rightarrow x^0$ gilt. Daraus folgt

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x^0)| &= |\langle \text{grad } f(x^0), x - x^0 \rangle + o(\|x - x^0\|)| \\ &= \left| \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) \cdot (x_j - x_j^0) + o(\|x - x^0\|) \right| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \text{Dreiecks-} & \underbrace{|f(x) - f(x^0)|}_{\text{Auswirkung}} \leq \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) \right| \underbrace{|x_j - x_j^0|}_{\text{komponentenweiser}} + o(\|x - x^0\|) \\ \text{ungleichung} & \text{des Messfehlers} \qquad \qquad \qquad \text{Messfehler} \end{aligned}$$

für $x \rightarrow x^0$. Gilt also $|x_j - x_j^0| \leq \varepsilon_j \forall j$, so folgt:

$$|f(x) - f(x^0)| \underset{\substack{\lesssim \\ \text{"ungefähr } \leq"}}}{\lesssim} \sum_{j=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_j}(x^0) \right| \varepsilon_j$$

Im Beispiel: $n = 1$, $f(x) = \frac{g}{2} x^2$, $\varepsilon_1 = \varepsilon = 0,782$.

Messen wir $x_0 = 8,602$, so wissen wir, dass der Fehler ungefähr nach oben durch $|f'(x_0)| \cdot \varepsilon = g x_0 \cdot \varepsilon = 9,81 \cdot 8,602 \cdot 0,782 \approx 66 \text{ [m]}$ abgeschätzt werden kann (vgl. tatsächlichen Fehler).

Beispiel 7.10.2 Elastizitätsmodul eines Stabes mit quadratischem Querschnitt:

$$E = 4 F l^3 h^{-1} a^{-4}$$

Größe	Messung	Genauigkeit
F	130 N	0,5%
l	0,5 m	1%
h	2 mm	3%
a	2 cm	1%

- a : Kantenlänge des Querschnitts
 l : Länge des undeformierten Stabes
 h : Auslenkung des Stabes aus der Ruhestellung
 F : auslenkende Kraft

$$\text{grad } E(F, l, h, a) = (4l^3h^{-1}a^{-4}, 12Fl^2h^{-1}a^{-4}, -4Fl^3h^{-2}a^{-4}, -16Fl^3h^{-1}a^{-5})$$

geschätzte Ungenauigkeit des Elastizitätsmoduls:

$$|\Delta E| = |E(\underbrace{F, l, h, a}_{\substack{\text{unbekannte} \\ \text{reale} \\ \text{Größen}}} - E(\underbrace{F_0, l_0, h_0, a_0}_{\text{Messungen}})| \leq ?$$

Interessant ist vor allem die relative Abweichung.

$$\frac{|\Delta E|}{E} \lesssim \left| \frac{1}{F_0} (F - F_0) \right| + \left| 3 \frac{1}{l_0} (l - l_0) \right| + \left| -\frac{1}{h_0} (h - h_0) \right| + \left| -4 \frac{1}{a_0} (a - a_0) \right|$$

Beachte die Einheiten!

$$\begin{aligned}
 F_0 &= 130 \text{ N} = 130 \text{ kg } \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \\
 l_0 &= 0,5 \text{ m}, \\
 h_0 &= 0,002 \text{ m}, \\
 a_0 &= 0,02 \text{ m}
 \end{aligned}$$

Hierbei ist

$$\begin{aligned}
 \frac{|F - F_0|}{|F_0|} &\leq 0,005, \\
 \frac{|l - l_0|}{|l_0|} &\leq 0,01 \quad \text{usw.}
 \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}
 \frac{|\Delta E|}{E} &\lesssim 0,005 + 3 \cdot 0,01 + 0,03 + 4 \cdot 0,01 \\
 &= 0,105,
 \end{aligned}$$

d.h. der Wert $E = 4 F_0 l_0^3 h_0^{-1} a_0^{-4} = 2,03125 \cdot 10^{11} [\frac{\text{N}}{\text{m}^2}]$ ($= 2,03125 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$) hat eine Genauigkeit von etwa 10,5%, anders ausgedrückt:

$$E = 203,125 \pm 21,328 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}.$$

◇

Kapitel 8

Kurven- und Wegintegrale

8.1 Kurven und Wege

Definition 8.1.1 Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Eine stetig differenzierbare Abbildung $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ heißt **Weg** und ihr Bild $\varphi([a, b])$ **Kurve (Spur)**. Ist zusätzlich $\dot{\varphi}(t) := \frac{d}{dt} \varphi(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$, so heißt φ **regulärer Weg** und $\varphi([a, b])$ entsprechend **reguläre Kurve**. Ist die Einschränkung $\varphi|_{]a, b[}$ injektiv und φ ein Weg, so heißt φ **Jordan'scher Weg** und $\varphi([a, b])$ **Jordankurve**. Ein Weg $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(a) = \varphi(b)$ heißt **geschlossener Weg** und $\varphi([a, b])$ **geschlossene Kurve**.

Teilchenbahnen sind Beispiele für Kurven. Durch die Parametrisierung $t \mapsto \varphi(t)$, wobei beispielsweise t die Zeit ist, wird auch eine Durchlauf-Richtung vorgegeben.

Beachten Sie, dass φ und damit auch $\dot{\varphi}$ vektorielle Funktionen sind, so dass $\dot{\varphi}(t) = 0$ bedeutet, dass alle Komponenten verschwinden.

Beispiel 8.1.2

a) Mit

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

erhält man einen geschlossenen, regulären Jordan'schen Weg, der einen Kreis darstellt, der im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen wird, während bei

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

der Kreis im Uhrzeigersinn durchlaufen wird.

b) Der nicht-geschlossene, reguläre Jordan'sche Weg

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ ct \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b], \quad r, c \in \mathbb{R}^+ \text{ konstant,}$$

beschreibt eine Schraubenbewegung mit Radius r nach oben.

c) Mit

$$\begin{aligned} \varphi(t) &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ -\cos t \end{pmatrix}, & t \in [0, 2\pi], \\ \varphi(t) &:= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}, & t \in]2\pi, 4\pi], \end{aligned}$$

erhält man einen geschlossenen, regulären, Jordan'schen Weg, der eine Acht beschreibt. Hätte man die gleiche Kurve so parametrisiert, dass man nicht in $(0, 0)$ startet, wäre der Weg kein Jordan'scher Weg.

d) Der Weg

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 \end{pmatrix}, \quad t \in [-1, 1],$$

ist nicht-regulär, da $\dot{\varphi}(0) = 0$.

◇

8.2 Kurvenintegrale

Kurvenintegrale dienen dazu, **Skalarfelder längs einer Kurve zu integrieren**.

Definition 8.2.1 Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg und $f : \varphi([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetiges Skalarfeld. Dann heißt

$$\int_{\varphi} f \, ds := \int_{\varphi} f(x) \, ds := \int_a^b f(\varphi(t)) |\dot{\varphi}(t)| \, dt$$

Kurvenintegral von f längs φ . Bei geschlossenen Wegen kann man auch

$$\oint_{\varphi} f \, ds$$

schreiben.

Satz 8.2.2 (Eigenschaften des Kurvenintegrals)

- a) Seien $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\psi : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei Jordan'sche Wege mit $\varphi([a, b]) = \psi([c, d]) =: \gamma$ und $f : \gamma \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetiges Skalarfeld. Dann gilt

$$\int_{\varphi} f \, ds = \int_{\psi} f \, ds.$$

- b) Sei $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein Weg und $a < c < b$. Ist $f : \varphi([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so ist

$$\int_{\varphi} f \, ds = \int_{\varphi|_{[a,c]}} f \, ds + \int_{\varphi|_{[c,b]}} f \, ds,$$

d.h. Kurvenintegrale können in einzelne Wegstücke unterteilt werden.

Beispiel 8.2.3

- a) Ein (sehr dünner) Ring mit Radius R [cm] habe die Ladungsverteilung

$$\varrho(x, y) = (2x^2 + y^2) \cdot y \left[\frac{\text{Cb}}{\text{cm}} \right],$$

wobei der Mittelpunkt des Rings in $(x, y) = (0, 0)$ liegt. Wie ist die **Gesamtladung**?
Gesucht ist also $\int_{\varphi} \varrho \, ds$, wenn φ den Kreis beschreibt.

- (i) Parametrisierung der Kurve:

Nach Satz 8.2.2 a) wissen wir, dass die Wahl der Parametrisierung nicht das Resultat beeinflusst. Wir wählen hier

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

- (ii) Berechnung von $|\dot{\varphi}|$:

Es gilt:

$$\dot{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix} \Rightarrow |\dot{\varphi}(t)| = \sqrt{R^2 \sin^2 t + R^2 \cos^2 t} = R.$$

- (iii) Einsetzen in das Integral:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} \varrho \, ds &= \int_0^{2\pi} (2R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t) \cdot R \sin t \cdot R \, dt \\ &= R^4 \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 t) \cdot \sin t \, dt \end{aligned}$$

Es bietet sich eine Substitution $\tau := \cos t$ an, jedoch ist die Voraussetzung $\frac{d\tau}{dt} \neq 0$ der Substitutionsregel (Satz 6.2.10) verletzt. Wir müssen daher das Integral aufteilen:

$$\int_{\varphi} \varrho \, ds = R^4 \int_0^{\pi} (1 + \cos^2 t) \sin t \, dt + R^4 \int_{\pi}^{2\pi} (1 + \cos^2 t) \sin t \, dt.$$

Mit $t = \arccos \tau$ (erster Teil) und $t = 2\pi - \arccos \tau$ (zweiter Teil) erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} \varrho \, ds &= -R^4 \int_1^{-1} (1 + \tau^2) \, d\tau - R^4 \int_{-1}^1 (1 + \tau^2) \, d\tau \\ &= 0. \end{aligned}$$

b) Die **Länge eines Wegs** φ ist stets

$$\int_{\varphi} 1 \, ds.$$

Für einen Kreis

$$x = R \cos t, \quad y = R \sin t, \quad t \in [0, 2\pi],$$

mit Radius $R > 0$ erhält man somit

$$\int_{\varphi} 1 \, ds = \int_0^{2\pi} \left| \begin{pmatrix} -R \sin t \\ R \cos t \end{pmatrix} \right| dt = \int_0^{2\pi} R \, dt = 2\pi R.$$

c) Die **Trägheitsmomente** einer Kurve (z.B. eines Drahts) mit Dichte ϱ sind

$$M_x := \int_{\varphi} x^2 \varrho(x, y, z) \, ds,$$

$$M_y := \int_{\varphi} y^2 \varrho(x, y, z) \, ds,$$

$$M_z := \int_{\varphi} z^2 \varrho(x, y, z) \, ds.$$

Für ein Parabelstück $y = x^2$, $z = 0$, $x \in [0, 2]$ mit konstanter Dichte $\bar{\varrho}$ bestimmt man also die Trägheitsmomente wie folgt:

(i) Parametrisierung der Kurve:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2]$$

(ii) Berechnung von $|\dot{\varphi}|$:

$$\dot{\varphi}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow |\dot{\varphi}(t)| = \sqrt{1 + 4t^2}$$

(iii) Einsetzen in das Integral:

$$M_x = \bar{\varrho} \int_0^2 t^2 \sqrt{1 + 4t^2} dt, \quad M_y = \bar{\varrho} \int_0^2 t^4 \sqrt{1 + 4t^2} dt, \quad M_z = 0.$$

Das Berechnen der Integrale sparen wir uns hier ausnahmsweise.

◇

8.3 Wegintegrale

Mit Wegintegralen berechnet man **Integrale von Vektorfeldern längs einer Kurve** und zwar keineswegs komponentenweise sondern so, dass man eine reelle Zahl als Ergebnis bekommt. Ein typisches Beispiel ist die Arbeit. Die Formel “Arbeit = Kraft · Weg” gilt nämlich nur, wenn die Kraft konstant längs des Weges ist. Allgemein ist die Arbeit jedoch das Wegintegral der Kraft längs des Weges.

Definition 8.3.1 Ist $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein regulärer Weg und $f : \varphi([a, b]) \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld, so nennt man

$$\int_{\varphi} f \cdot dx := \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) dt \quad (8.1)$$

das **Wegintegral** (das **Arbeitsintegral**, die **Zirkulation**) von f längs φ . Auch hier kann

$$\oint_{\varphi} f \cdot dx$$

bei geschlossenen Wegen geschrieben werden.

Bemerkung 8.3.2

a) In (8.1) steht “ \cdot ” für das euklidische Skalarprodukt, wobei dies auf der linken Seite nur formal zu verstehen ist. Man schreibt manchmal sogar

$$\int_{\varphi} f \cdot dx =: \int_{\varphi} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n.$$

- b) Die begriffliche Unterscheidung zwischen Kurven- und Wegintegral wird (genauso wie die Unterscheidung zwischen Kurve und Weg) nicht immer durchgeführt. Wichtig ist, dass man darauf achtet, ob man ein Skalar- oder ein Vektorfeld integriert.
- c) Der Name "Arbeitsintegral" wird verwendet, wenn f ein Kraftfeld ist, während "Zirkulation" bei der Integration eines Geschwindigkeitsfelds gebräuchlich ist.
- d) Ist ein Weg nicht regulär, weil an endlich vielen Stellen die Ableitung verschwindet, so kann das Arbeitsintegral stückweise zusammengesetzt werden. Hat z.B. $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Eigenschaft $\dot{\varphi}(t) = 0 \Leftrightarrow t = c$ mit $a < c < b$, so setzt man

$$\int_{\varphi} f \cdot dx := \int_{\varphi|_{[a,c]}} f \cdot dx + \int_{\varphi|_{[c,b]}} f \cdot dx.$$

Dass hierbei $\dot{\varphi}$ an jeweils einem Rand der Intervalle $[a, c]$ und $[c, b]$ verschwindet, ist unproblematisch.

Ein Vergleich mit dem Kurvenintegral bringt Beziehungen und entscheidende Unterschiede hervor.

Satz 8.3.3 Seien $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein regulärer Weg mit Kurve $\varphi([a, b]) =: \gamma$ und $f, g : \gamma \rightarrow \mathbb{R}^n$ stetige Vektorfelder. Ferner bezeichne $T(\varphi(t)) := \frac{\dot{\varphi}(t)}{|\dot{\varphi}(t)|}$, $t \in [a, b]$, die Einheitstangentenvektoren (in Laufrichtung) an den Weg. Dann gilt:

1.

$$\int_{\varphi} f \cdot dx = \int_{\varphi} (f \cdot T) ds$$

2.

$$\int_{\varphi} (\lambda f + \mu g) \cdot dx = \lambda \int_{\varphi} f \cdot dx + \mu \int_{\varphi} g \cdot dx \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

3. Ist $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein zu φ umgekehrter Durchlauf von γ (d.h. $\psi(t) := \varphi(a + b - t)$ $\forall t \in [a, b]$), so gilt

$$\int_{\psi} f \cdot dx = - \int_{\varphi} f \cdot dx$$

Beweis: Teil 1 folgt sehr einfach aus den folgenden Überlegungen:

$$\int_{\varphi} f \cdot dx = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) dt = \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \underbrace{\frac{\dot{\varphi}(t)}{|\dot{\varphi}(t)|}}_{=T(\varphi(t))} |\dot{\varphi}(t)| dt = \int_{\varphi} f \cdot T ds.$$

Teil 2 folgt aus der Linearität des Riemann-Integrals (Satz 6.1.4), und Teil 3 folgt mit der Substitutionsregel (Satz 6.2.10), denn $\dot{\psi}(t) = -\dot{\varphi}(a+b-t)$ und $\tau := a+b-t$ ergeben

$$\begin{aligned} \int_{\psi} f \cdot dx &= \int_a^b f(\psi(t)) \cdot \dot{\psi}(t) dt \\ &= - \int_a^b f(\varphi(a+b-t)) \cdot \dot{\varphi}(a+b-t) dt \\ &= - \int_b^a f(\varphi(\tau)) \cdot \dot{\varphi}(\tau) \cdot (-1) d\tau \\ &= - \int_a^b f(\varphi(\tau)) \cdot \dot{\varphi}(\tau) d\tau \\ &= - \int_{\varphi} f \cdot dx \end{aligned}$$

■

Teil 1 besagt also, dass ein Wegintegral nichts anderes als ein Kurvenintegral der Tangentialkomponente ist. Teil 3 gibt uns einen Hinweis darauf, dass das Wegintegral im Gegensatz zum Kurvenintegral (siehe Teil a von Satz 8.2.2) nicht unabhängig von der Parametrisierung ist.

Beispiel 8.3.4

- a) Wir fangen mit einer konstanten Kraft $f \equiv \begin{pmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ und einem geraden Wegstück an:

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b].$$

Dann ist die verrichtete Arbeit

$$\int_{\varphi} f \cdot dx = \int_a^b f \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} dt = F_1(b-a).$$

Dies ist die bekannte Formel "Arbeit = Kraft · Weg(-länge)".

- b) Ein Teilchen fliegt auf einer Parabelbahn

$$\varphi(t) := \begin{pmatrix} t \\ t^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 1]$$

in der Ebene $z = 1$ und spürt die Kraft

$$f(x, y, z) = \begin{pmatrix} xy^3 \\ ye^z \\ e^x \end{pmatrix}.$$

Gesucht ist die verrichtete Arbeit. Gesucht ist also

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} f \cdot d(x, y, z) &= \int_0^1 \begin{pmatrix} t \cdot t^6 \\ t^2 \cdot e^1 \\ e^t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^1 t^7 + 2et^3 dt \\ &= \left(\frac{1}{8} t^8 + \frac{e}{2} t^4 \right) \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{8} + \frac{e}{2}. \end{aligned}$$

Fliegt das Teilchen den umgekehrten Weg, so ist die Arbeit $-\frac{1}{8} - \frac{e}{2}$.

c) Wir betrachten zwei geschlossene Wege, die in $(1, 0)$ beginnen und enden:

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad \psi(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Wir integrieren

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_2 \\ 2x_1 \end{pmatrix}, \quad g(x_1, x_2) = \frac{1}{x_1^2 + x_2^2} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \oint_{\varphi} f \cdot dx &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} -\sin^2 t + 2 \cos^2 t dt \\ &= \int_0^{2\pi} -1 + 3 \cos^2 t dt \\ &= \left[-t + \frac{3}{2}(t + \sin t \cos t) \right] \Big|_0^{2\pi} \\ &= \pi, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\oint_{\psi} f \cdot dx &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 2 \sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} dt \\
&= 2 \int_0^{2\pi} -\sin^2 t + 2 \cos^2 t dt \\
&= 2\pi,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\oint_{\varphi} g \cdot dx &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} dt = 0, \\
\oint_{\psi} g \cdot dx &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{\cos^2 t + 4 \sin^2 t} \begin{pmatrix} \cos t \\ 2 \sin t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} dt \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{3 \sin t \cos t}{1 + 3 \sin^2 t} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \frac{6 \sin t \cos t}{1 + 3 \sin^2 t} dt \\
&= \frac{1}{2} \ln |1 + 3 \sin^2 t| \Big|_0^{2\pi} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

◇

Teil c des Beispiels zeigt, dass Wegintegrale nicht wegunabhängig sind (daher auch der Name: Sie hängen vom Weg, also der Parametrisierung, ab und nicht nur von der Kurve, also dem Bild $\varphi([a, b])$, wie es bei den Kurvenintegralen der Fall ist). Widerspricht das nicht der Tatsache, dass Wegintegrale als Kurvenintegrale aufgefasst werden können?¹ Jedoch gilt dies nicht für alle Vektorfelder, wie das Beispiel auch zeigt. Es gibt hier einen Zusammenhang zu einem bereits behandelten Thema.

Definition 8.3.5 Eine Menge $G \subset \mathbb{R}^n$ nennt man

- a) **zusammenhängend**, wenn es zu je zwei Punkten $x, y \in G$ eine reguläre Kurve $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ mit $\varphi(a) = x$ und $\varphi(b) = y$ gibt, so dass φ ganz in G bleibt, d.h. $\varphi(t) \in G \forall t \in [a, b]$.
- b) ein **Gebiet**, wenn G offen und zusammenhängend ist.

Satz 8.3.6 Sei $f : G \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein stetiges Vektorfeld und $G \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.

1. f ist ein Gradientenfeld.

¹Nein, weil die Tangentialvektoren auch von der Parametrisierung abhängen.

2. Alle Wegintegrale von f längs Wegen in G sind wegunabhängig.

3. Für alle geschlossenen regulären Wege φ in G gilt:

$$\oint_{\varphi} f \cdot dx = 0.$$

Zu 1. und 2. gilt genauer: Ist $f = \nabla F$ und $\varphi : [a, b] \rightarrow G$ ein beliebiger regulärer Weg in G , so gilt

$$\int_{\varphi} f \cdot dx = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)). \quad (8.2)$$

Satz 8.3.6 und vor allem (8.2) ist so etwas wie eine mehrdimensionale Entsprechung des Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung (Satz 6.2.3).

Sehen Sie sich noch einmal die bisherigen Beispiele zu Gradientenfeldern und zu geschlossenen Wegintegralen an und prüfen Sie diesen Satz nach.

Kapitel 9

Flächenintegrale

9.1 Integrale über ebene Flächen

Wir befassen uns zunächst damit, wie wir einen Flächeninhalt messen können und orientieren uns dabei an der einfachen Formel “Höhe mal Breite” für ein Rechteck. Wir decken hierzu eine Fläche $M \subset \mathbb{R}^2$ mit einem Gitter ab (siehe Abbildung 9.1). Dieses Gitter wird so konstruiert,

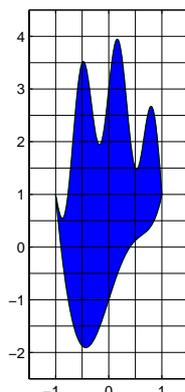


Abbildung 9.1: Abdeckung einer ebenen Fläche mit einem regelmäßigen Gitter

dass die Linien einen Abstand von 2^{-k} für ein festes k haben. Wir können damit den gesuchten Flächeninhalt wie folgt abschätzen: Die Fläche M kann mit den Quadraten aus dem Gitter abgedeckt werden, die einen nicht-leeren Schnitt mit M haben. Die Summe der Flächeninhalte dieser Quadrate muss mindestens so groß wie der Flächeninhalt von M sein. Nimmt man andererseits

nur die Quadrate, die vollständig in M enthalten sind, so summiert man einen Inhalt auf, der höchstens so groß wie der von M ist (siehe Abbildung 9.2). Der Ansatz ähnelt der Konstruktion des Riemann-Integrals.

Definition 9.1.1 Sei $M \subset \mathbb{R}^2$. Für jedes feste $k \in \mathbb{N}$ definieren wir folgendes:

a) $Q_{k,n,m}$ bezeichne das Quadrat

$$Q_{k,n,m} := \left[n2^{-k}, (n+1)2^{-k} \right] \times \left[m2^{-k}, (m+1)2^{-k} \right],$$

$n, m \in \mathbb{Z}$. Mit $F(Q_{k,n,m}) := 2^{-k} \cdot 2^{-k} = 2^{-2k}$ werde der Flächeninhalt von $Q_{k,n,m}$ bezeichnet.

b) $S_k(M)$ sei die Summe aller $F(Q_{k,n,m})$, für die $Q_{k,n,m} \cap M \neq \emptyset$ gilt, und $s_k(M)$ sei die Summe aller $F(Q_{k,n,m})$, für die $Q_{k,n,m} \cap M = Q_{k,n,m}$ gilt, jeweils für festes (!) k .

c) Ferner sei $F_i(M) := \lim_{k \rightarrow \infty} s_k(M)$ der **innere Inhalt** von M und $F_a(M) := \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(M)$ der **äußere Inhalt** von M . Ist $F_i(M) = F_a(M)$, wobei auch $F_i(M) = F_a(M) = +\infty$ erlaubt ist, so heißt $F(M) = F_i(M)$ der **Inhalt** von M und M heißt **Riemann-messbar**.

Definition 9.1.2 Eine Riemann-messbare Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ mit $F(M) = 0$ heißt (Riemann-) **Nullmenge**.

Beispiel 9.1.3 Jede endliche Menge und jede reguläre Kurve ist eine Nullmenge. ◇

Definition 9.1.4 Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ eine Riemann-messbare Menge und $f : M \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion. Man sagt, dass f eine Eigenschaft **fast überall** erfüllt, wenn es eine Nullmenge $N \subset \mathbb{R}^2$ gibt, so dass die Einschränkung $f|_{M \setminus N} : M \setminus N \rightarrow \mathbb{R}^n$ die Eigenschaft erfüllt.

Beispiel 9.1.5 Die Funktion $f : [-1, 1] \times [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) := \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

ist fast überall stetig, da sie nur auf der regulären Kurve

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix}, \quad t \in [-1, 1],$$

unstetig ist. ◇

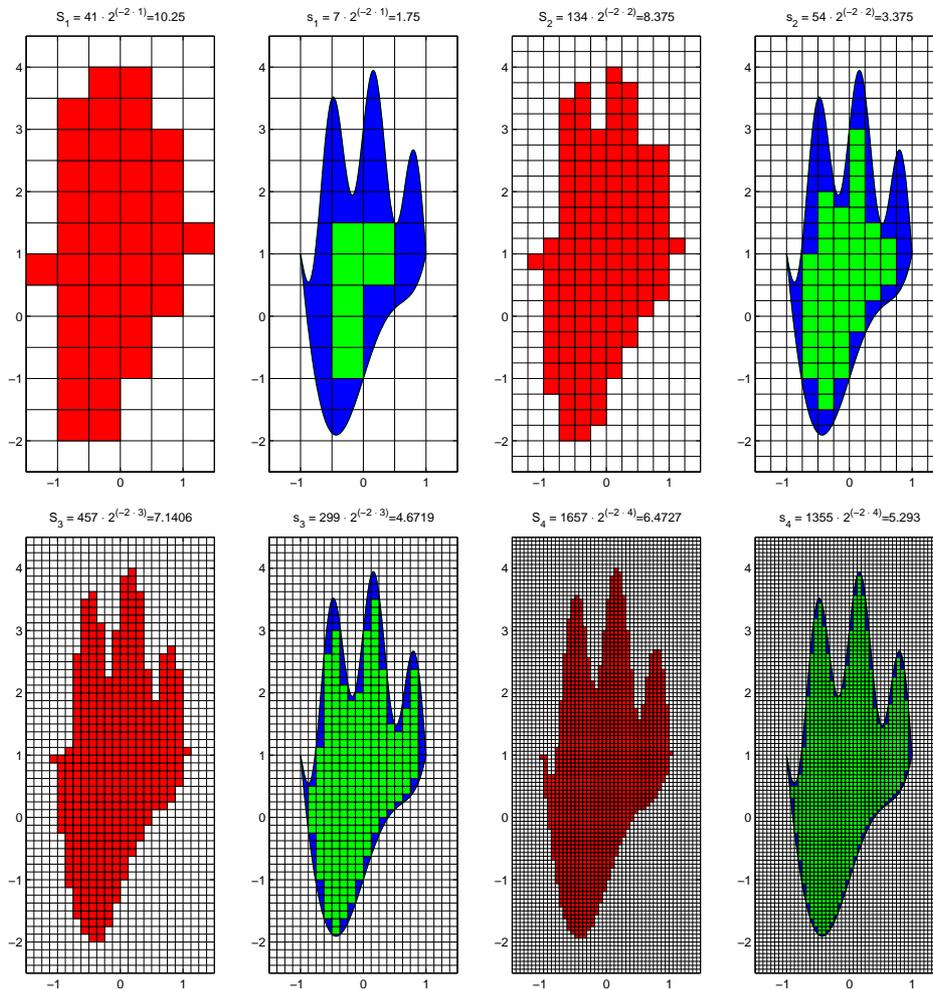


Abbildung 9.2: Darstellung der Riemann-Obersummen $S_k(M)$ und -Untersummen $s_k(M)$

Definition 9.1.6 Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^2$ heißt **regulär**, wenn folgendes gilt:

- Der **Rand** von M , der mit ∂M bezeichnet wird, besteht aus endlich vielen regulären Kurven.
- Das Innere $M \setminus \partial M$ ist ein nicht-leeres, beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^2 .
- M ist abgeschlossen, d.h. $\partial M \subset M$.

Satz 9.1.7 Jede reguläre Menge ist Riemann-messbar und hat einen endlichen Flächeninhalt.

Definition 9.1.8 Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ eine reguläre Menge und $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die beschränkt und fast überall stetig ist. Unter einer Zerlegung von M verstehen wir ein Zerschneiden von M mittels regulärer Kurven in endlich viele paarweise disjunkte Teilmengen (d.h. es gibt M_1, \dots, M_n mit $M_i \cap M_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und $M = \bigcup_{i=1}^n M_i$).

Für jede Zerlegung Z (mit $Z = \{M_1, \dots, M_n\}$, n beliebig) sei

$$s(Z) := \sum_{i=1}^n \left(\inf_{(x,y) \in M_i} f(x,y) \right) \cdot F(M_i),$$

$$S(Z) := \sum_{i=1}^n \left(\sup_{(x,y) \in M_i} f(x,y) \right) \cdot F(M_i),$$

wobei $F(M_i)$ der Flächeninhalt von M_i ist. Ist

$$\sup\{s(Z) \mid Z \text{ Zerlegung}\} = \inf\{S(Z) \mid Z \text{ Zerlegung}\}$$

so heißt f **Riemann-integrierbar** auf M . Außerdem wird

$$\int_M f(x,y) \, d(x,y) := \inf\{S(Z) \mid Z \text{ Zerlegung}\}$$

Integral (Flächenintegral, Gebietsintegral) von f auf M genannt. Alternative Notationen sind

$$\iint_M f(x,y) \, d(x,y), \iint_M f(x,y) \, dF, \iint_M f \, dF, \int_M f(x,y) \, dF, \int_M f(x,y) \, dF(x,y).$$

Hierbei wird $\iint_M \dots$ auch **Doppelintegral** genannt und das Symbol dF **Flächenelement** genannt.

Satz 9.1.9

- Unter den Voraussetzungen der Definition 9.1.8 ist f stets Riemann-integrierbar.
- Ist N eine Nullmenge und sind M, f wie oben, so gilt:

$$\iint_M f(x,y) \, d(x,y) = \iint_{M \setminus N} f(x,y) \, d(x,y).$$

Satz 9.1.10 (Rechenregeln für Flächenintegrale) Seien $B \subset \mathbb{R}^n$ regulär und $f, g : B \rightarrow \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Dann gilt:

a) (Linearität) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist

$$\iint_B (\lambda f + \mu g) \, dF = \lambda \iint_B f \, dF + \mu \iint_B g \, dF.$$

b) (Monotonie) Ist $f(x, y) \leq g(x, y)$ für alle $(x, y) \in B$, so gilt

$$\iint_B f \, dF \leq \iint_B g \, dF.$$

c) (Additivität) Seien B_1, B_2 reguläre Mengen mit $B_1 \cap B_2 = \emptyset$ und $B_1 \cup B_2 = B$. Dann gilt

$$\iint_B f \, dF = \iint_{B_1} f \, dF + \iint_{B_2} f \, dF.$$

Satz 9.1.11 (Mittelwertsatz für Flächenintegrale) Sei $B \subset \mathbb{R}^2$ zusammenhängend und regulär und $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann existiert ein Punkt $(x^*, y^*) \in B$, so dass

$$\iint_B f \, dF = f(x^*, y^*) \cdot F(B).$$

Für die folgenden Mengen lässt sich das Doppelintegral auf 1D-Integrale zurückführen.

Definition 9.1.12 Sei $M \subset \mathbb{R}^2$. Gibt es ein Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und Funktionen $g, h \in C^{(1)}[a, b]$ mit $g(t) \leq h(t)$ für alle $t \in [a, b]$, so dass M darstellbar ist als

a) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq h(x)\}$, so heißt M **Normalbereich bezüglich y** , bzw.

b) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq y \leq b, g(y) \leq x \leq h(y)\}$, so heißt M **Normalbereich bezüglich x** .

Satz 9.1.13 (Flächenintegrale über Normalbereichen) Ist $f : B \rightarrow \mathbb{R}$ stetig und $B \subset \mathbb{R}^2$ ein Normalbereich bezüglich y oder x (mit Funktionen g und h , die die Grenzen beschreiben), so gilt

$$\int_B f(x, y) \, d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x, y) \, dy \right) dx$$

bzw.

$$\int_B f(x, y) \, d(x, y) = \int_a^b \left(\int_{g(y)}^{h(y)} f(x, y) \, dx \right) dy.$$

Beispiel 9.1.14

- a) Den Flächeninhalt einer Riemann-messbaren Menge M erhält man mit

$$F(M) = \int_M 1 \, dF.$$

In Abbildung 9.2 ist die Fläche durch die Grenzen

$$-1 \leq x \leq 1, g(x) := -1 + 2x^4 + \sin(\pi x) \leq y \leq 3 - 2x^2 + \sin(3\pi x) =: h(x)$$

definiert. Ihr Inhalt ist somit

$$\begin{aligned} F(M) &= \int_{-1}^1 \left(\int_{g(x)}^{h(x)} 1 \, dy \right) dx \\ &= \int_{-1}^1 (h(x) - g(x)) dx \\ &= \int_{-1}^1 [4 - 2x^2 - 2x^4 + \sin(3\pi x) - \sin(\pi x)] dx \\ &= \left[4x - \frac{2}{3}x^3 - \frac{2}{5}x^5 - \frac{1}{3\pi} \cos(3\pi x) + \frac{1}{\pi} \cos(\pi x) \right] \Big|_{-1}^1 \\ &= 8 - \frac{4}{3} - \frac{4}{5} = 5 \frac{13}{15} \approx 5,87. \end{aligned}$$

Vergleichen Sie das Ergebnis mit den Näherungen in Abbildung 9.2.

- b) Wir berechnen den Flächeninhalt eines Kreises um $(0,0)$ mit dem Radius R . Dieser ist ein Normalbereich bzgl. y mit

$$-R \leq x \leq R, -\sqrt{R^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{R^2 - x^2}$$

und ein Normalbereich bzgl. x mit

$$-R \leq y \leq R, -\sqrt{R^2 - y^2} \leq x \leq \sqrt{R^2 - y^2}.$$

Der Flächeninhalt kann somit beispielsweise wie folgt berechnet werden:

$$\int_{-R}^R \left(\int_{-\sqrt{R^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - y^2}} 1 \, dx \right) dy = \int_{-R}^R 2\sqrt{R^2 - y^2} \, dy.$$

Mit der Substitution $y = R \sin t$ erhält man

$$\begin{aligned}
 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - y^2} \, dy &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{R^2 - R^2 \sin^2 t} R \cos t \, dt \\
 &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R \sqrt{\cos^2 t} R \cos t \, dt \\
 &= 2R^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt \\
 &= R^2 (t + \sin t \cos t) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\
 &= R^2 \pi.
 \end{aligned}$$

- c) Ähnlich wie man Gesamtmassen oder -ladungen und Momente von Kurven ausrechnen kann, geht dies auch bei Flächen. Als Beispiel betrachten wir ein Trapez T , das definiert ist durch

$$-2 \leq y \leq 1, \quad -2 - y \leq x \leq 4 + y$$

und die Massendichte

$$\varrho(x, y) = e^x + y^2$$

besitzt. Seine Gesamtmasse ist

$$\begin{aligned}
 M &= \int_T \varrho(x, y) \, d(x, y) \\
 &= \int_{-2}^1 \left(\int_{-2-y}^{4+y} e^x + y^2 \, dx \right) dy \\
 &= \int_{-2}^1 (e^x + y^2 x) \Big|_{x=-2-y}^{x=4+y} dy \\
 &= \int_{-2}^1 [e^{4+y} + y^2(4+y) - e^{-2-y} - y^2(-2-y)] dy \\
 &= \int_{-2}^1 (e^{4+y} - e^{-2-y} + 6y^2 + 2y^3) dy \\
 &= \left(e^{4+y} + e^{-2-y} + 2y^3 + \frac{1}{2} y^4 \right) \Big|_{-2}^1 \\
 &= e^5 + e^{-3} + 2 + \frac{1}{2} - e^2 - 1 + 16 - 8 \\
 &= e^5 - e^2 + e^{-3} + 9,5.
 \end{aligned}$$

Sein Schwerpunkt hat die Koordinaten

$$\begin{aligned}
 x_S &= \frac{1}{M} \int_T x \varrho(x, y) \, d(x, y) \\
 &= \frac{1}{M} \int_{-2}^1 \left(\int_{-2-y}^{4+y} x e^x + x y^2 \, dx \right) dy \\
 &= \frac{1}{M} \int_{-2}^1 \left(x e^x \Big|_{-2-y}^{4+y} - \int_{-2-y}^{4+y} e^x \, dx + \frac{1}{2} x^2 y^2 \Big|_{x=-2-y}^{x=4+y} \right) dy \\
 &= \dots,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 y_S &= \frac{1}{M} \int_T y \varrho(x, y) \, d(x, y) \\
 &= \frac{1}{M} \int_{-2}^1 \left(\int_{-2-y}^{4+y} e^x y + y^3 \, dx \right) dy \\
 &= \dots
 \end{aligned}$$

- d) Wir berechnen den Schwerpunkt eines gleichseitigen Dreiecks D mit homogener Massenverteilung $\bar{\varrho}$. Wir setzen unser Koordinatensystem so, dass $0 \leq x \leq 1$ eine Grundseite definiert. Die anderen Seiten sitzen darüber. Wegen der gleichen Seitenlänge muss für die Höhe h nach Pythagoras

$$1^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

also

$$h = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

gelten. Die anderen beiden Seiten gehen also von $(0, 0)$ zu $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ bzw. von $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$ zu $(1, 0)$. Mit $y = ax + b$, wobei $0 = a \cdot 0 + b$, $\frac{\sqrt{3}}{2} = a \cdot \frac{1}{2} + b$, erhält man $y = \sqrt{3}x$. Analog führt $y = ax + b$ mit $\frac{\sqrt{3}}{2} = a \cdot \frac{1}{2} + b$, $0 = a \cdot 1 + b$ zu $y = -\sqrt{3}x + \sqrt{3}$. Das Trapez ist somit definiert durch

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq \begin{cases} \sqrt{3}x, & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ -\sqrt{3}x + \sqrt{3}, & \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}.$$

Die Masse ist

$$\begin{aligned}
 M &= \int_D \bar{\varrho} \, d(x, y) \\
 &= \bar{\varrho} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\sqrt{3}x} 1 \, dy \, dx + \bar{\varrho} \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{-\sqrt{3}x+\sqrt{3}} 1 \, dy \, dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \bar{\rho} \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{3}x \, dx + \bar{\rho} \int_{\frac{1}{2}}^1 -\sqrt{3}x + \sqrt{3} \, dx \\
&= \bar{\rho} \frac{\sqrt{3}}{2} x^2 \Big|_0^{\frac{1}{2}} + \bar{\rho} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} x^2 + \sqrt{3}x \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \bar{\rho} \left(\frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{8} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\
&= \frac{\sqrt{3}}{4} \bar{\rho}.
\end{aligned}$$

Die Schwerpunkt-Koordinaten sind dann

$$\begin{aligned}
x_S &= \frac{1}{M} \int_D x \bar{\rho} \, d(x, y) \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\sqrt{3}x} x \, dy \, dx + \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{-\sqrt{3}x+\sqrt{3}} x \, dy \, dx \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{3}x^2 \, dx + \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{\frac{1}{2}}^1 -\sqrt{3}x^2 + \sqrt{3}x \, dx \\
&= \frac{4}{3} x^3 \Big|_0^{\frac{1}{2}} + 4 \left(-\frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \frac{1}{6} + 4 \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{24} - \frac{1}{8} \right) \\
&= \frac{1 - 8 + 12 + 1 - 3}{6} \\
&= \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y_S &= \frac{1}{M} \int_D y \bar{\rho} \, d(x, y) \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{1}{2}} \int_0^{\sqrt{3}x} y \, dy \, dx + \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \int_0^{-\sqrt{3}x+\sqrt{3}} y \, dy \, dx \\
&= \frac{4}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^{\sqrt{3}x} \, dx + \frac{4}{\sqrt{3}} \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{1}{2} y^2 \Big|_0^{-\sqrt{3}x+\sqrt{3}} \, dx \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \int_0^{\frac{1}{2}} 3x^2 \, dx + \frac{2}{\sqrt{3}} \int_{\frac{1}{2}}^1 3(1-x)^2 \, dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x^3 \Big|_0^{\frac{1}{2}} - (1-x)^3 \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{8} - 0 + \frac{1}{8} \right) \\
&= \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(= \frac{1}{3} h \right).
\end{aligned}$$

◇

Die folgenden Sätze spielen eine wichtige Rolle in vielen Anwendungen.

Satz 9.1.15 (Satz von Green) Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ eine reguläre Menge, wobei der Rand ∂M aus endlich vielen geschlossenen, regulären Wegen besteht, die alle so parametrisiert sind, dass in Durchlaufrichtung links die Menge M liegt (siehe Abbildung 9.3). Ferner sei $D \subset \mathbb{R}^2$ offen und $M \subset D$. Ist $f : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar, dann gilt

$$\int_{\partial M} f_1 dx + f_2 dy = \iint_M \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) d(x, y)$$

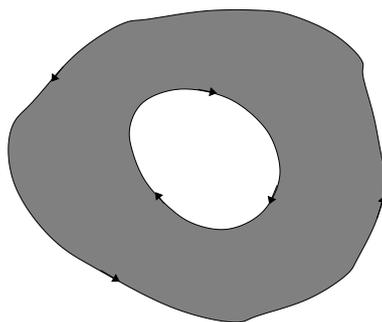


Abbildung 9.3: Beispiel einer Menge, die die Voraussetzungen des Satzes von Green erfüllt.

Hierbei können die Kurven von ∂M aus separaten Stücken bestehen. $\int_{\partial M} \dots$ bezeichnet dann die Summe der Integrale über die Einzelstücke.

Satz 9.1.16 (Satz von Gauß, ebene Version I) Seien M und D wie in Satz 9.1.15 gegeben. Ist $g \in C^{(2)}(D, \mathbb{R})$, so gilt:

$$\iint_M \Delta g d(x, y) = \int_{\partial M} -\frac{\partial g}{\partial y} dx + \frac{\partial g}{\partial x} dy = \int_{\partial M} \frac{\partial g}{\partial n} ds,$$

wobei $n(x, y)$ der Normalenvektor an $(x, y) \in \partial M$ ist, der nach außen zeigt und die Norm 1 hat ("äußere Einheitsnormale"). Man erhält ihn, indem man ∂M mit der Bogenlänge s

parametrisiert:

$$s \mapsto \begin{pmatrix} x(s) \\ y(s) \end{pmatrix}.$$

Es ist dann

$$n(x(s), y(s)) = \begin{pmatrix} \dot{y}(s) \\ -\dot{x}(s) \end{pmatrix}.$$

Ferner steht Δ für den Laplace-Operator:

$$\Delta g = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}.$$

Beweis: Der Satz von Gauß folgt aus dem Satz von Green, wenn man $f_1 := -\frac{\partial g}{\partial y}$, $f_2 := \frac{\partial g}{\partial x}$ setzt: Es gilt dann

$$\begin{aligned} \iint_M \Delta g \, d(x, y) &= \iint_M \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right) d(x, y) \\ &= \int_{\partial M} f_1 \, dx + f_2 \, dy. \end{aligned}$$

Bei einer beliebigen Parametrisierung $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ($(x, y) = \varphi(t)$) ist die Bogenlänge des Stücks $\varphi|_{[a, t]}$ mit $a \leq t \leq b$ gegeben durch

$$s(t) = \int_a^t |\dot{\varphi}(\tau)| \, d\tau.$$

Nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (Satz 6.2.3) ist somit

$$\frac{ds}{dt} = |\dot{\varphi}(t)| > 0.$$

Somit ist auch eine Umkehrung $t(s)$ möglich (siehe Satz 5.3.4). In der Parametrisierung mit der Bogenlänge $s \mapsto (x(t(s)), y(t(s)))^T$ ist dann (siehe Satz 5.2.6)

$$\frac{d}{ds} x(t(s)) = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dt}{ds} = \frac{dx}{dt} \cdot \left(\frac{ds}{dt} \right)^{-1} = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{1}{|\dot{\varphi}(t(s))|}$$

Analoges gilt für y , so dass für die Bogenlängen-Parametrisierung stets $(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds})^T$ ein Einheitsvektor ist, genau so wie $(\frac{dy}{ds}, -\frac{dx}{ds})$. Mit Satz 8.3.3 erhält man

$$\begin{aligned} \int_{\partial M} f_1 \, dx + f_2 \, dy &= \int_{\partial M} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} ds \\ &= \int_{\partial M} -\frac{\partial g}{\partial y} \dot{x} + \frac{\partial g}{\partial x} \dot{y} \, ds \\ &= \int_{\partial M} (\nabla g) \cdot \begin{pmatrix} \dot{y} \\ -\dot{x} \end{pmatrix} ds \end{aligned}$$



Beispiel 9.1.17 Über der Ellipse

$$E := \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \right\}$$

integrieren wir verschiedene Funktionen. Der Rand kann parametrisiert werden mit

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Beachten Sie, dass dies die “richtige” Umlaufrichtung liefert.

a) Sei

$$f(x, y) := \begin{pmatrix} x \\ xy \end{pmatrix}.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \oint_{\partial E} f_1 dx + f_2 dy &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} a \cos t \\ ab \sin t \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix} dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-a^2 \sin t \cos t) + ab^2 \sin t \cos^2 t dt \\ &= \dots = 0. \end{aligned}$$

Übrigens ist f kein Gradientenfeld, denn $\frac{\partial f_2}{\partial x} = y$ und $\frac{\partial f_1}{\partial y} = 0$. Dieses Beispiel zeigt somit auch, dass für Gradientenfelder alle geschlossenen Wegintegrale verschwinden müssen. Nach dem Satz von Green kann man obiges Integral auch wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \iint_E (y - 0) d(x, y) &= \int_{-a}^a \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} y dy dx \\ &= \int_{-a}^a 0 dy dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

b) Wir setzen $g(x, y) := x^2 + y^2$ und erhalten

$$\begin{aligned} \iint_E \Delta g d(x, y) &= \int_E 4 d(x, y) \\ &= 4 \int_{-a}^a \int_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} 1 dy dx \\ &= 8b \int_{-a}^a \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} dx. \end{aligned}$$

Die Substitution $x = a \sin t$ führt zu

$$\begin{aligned} \iint_E \Delta g \, d(x, y) &= 8b \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \sin^2 t} \, a \cos t \, dt \\ &= 8ab \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt \\ &= 4ab (t + \sin t \cos t) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 4\pi ab. \end{aligned}$$

Mit dem Satz von Gauß gleicht dies dem Wegintegral

$$\begin{aligned} \oint_{\partial E} (-2y) \, dx + 2x \, dy &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -2b \sin t \\ 2a \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix} \, dt \\ &= 2ab \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt \\ &= 2ab \cdot \int_0^{2\pi} 1 \, dt \\ &= 4\pi ab. \end{aligned}$$

◇

Bei den Sätzen von Green und Gauß ist mal die eine Seite, mal die andere einfacher zu berechnen. Den Satz von Gauß kennt man auch in der folgenden Form, die man auch den Divergenzsatz von Gauß nennt.

Satz 9.1.18 (Satz von Gauß, ebene Version II) Seien M und D wie in Satz 9.1.15 gegeben. Ist $f \in C^{(1)}(D, \mathbb{R}^2)$, so gilt:

$$\iint_M \operatorname{div} f \, dF = \int_{\partial M} f \cdot n \, ds,$$

wobei n die äußere Einheitsnormale an ∂M ist.

Setzt man $f = \operatorname{grad} g$, so erhält man Satz 9.1.16. Überhaupt sagen die beiden Versionen des Satzes von Gauß und der Satz von Green im Grunde das gleiche aus.

Wir schauen uns die Bogenlängen-Parametrisierung noch mal genauer an.

Beispiel 9.1.19

a) Wir betrachten zunächst den Kreis

$$\varphi(t) = \begin{pmatrix} R \cos t \\ R \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Die Bogenlänge des Teilstücks $\varphi|_{[a,\tau]}$ ist

$$s(\tau) = \int_0^\tau |\dot{\varphi}(t)| dt = \int_0^\tau R dt = R\tau.$$

Beim Einheitskreis ist also der Parameter t , der ja nichts anderes als der zurückgelegte Winkel ist, bereits die Bogenlänge. In den anderen Fällen führen wir die Bogenlänge $s := Rt$ als Parameter ein. Dann ist der Kreis parametrisiert durch

$$x = R \cos\left(\frac{1}{R}s\right), \quad y = R \sin\left(\frac{1}{R}s\right), \quad s \in [0, 2\pi R].$$

Der Einheitstangentenvektor in Umlaufrichtung ist somit

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{ds} \\ \frac{dy}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -R \cdot \frac{1}{R} \sin\left(\frac{1}{R}s\right) \\ R \cdot \frac{1}{R} \cos\left(\frac{1}{R}s\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{1}{R}s\right) \\ \cos\left(\frac{1}{R}s\right) \end{pmatrix}$$

und die äußere Einheitsnormale ist

$$\begin{pmatrix} \frac{dy}{ds} \\ -\frac{dx}{ds} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{1}{R}s\right) \\ \sin\left(\frac{1}{R}s\right) \end{pmatrix}.$$

Dies sind genau die Vektoren e^φ und e^r , die wir bereits kennen.

b) Verallgemeinern wir dies zu einer Ellipse

$$x = a \cos t, \quad y = b \sin t, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Als Bogenlänge erhalten wir

$$\begin{aligned} s(\tau) &= \int_0^\tau \left| \begin{pmatrix} -a \sin t \\ b \cos t \end{pmatrix} \right| dt \\ &= \int_0^\tau \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} dt. \end{aligned}$$

Nehmen wir an, es liegt kein Kreis vor und $a > b$ gilt ($b > a$ geht analog). Wir setzen $b^2 = a^2 - \varepsilon^2$, $\varepsilon > 0$. ε nennt man hierbei die Exzentrizität der Ellipse. Dann ist

$$\begin{aligned} s(\tau) &= \int_0^\tau \sqrt{a^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) - \varepsilon^2 \cos^2 t} dt \\ &= \int_0^\tau \sqrt{a^2 - \varepsilon^2 \cos^2 t} dt. \end{aligned}$$

Dieses Integral besitzt keine geschlossene Darstellung, d.h. man kann es nicht mittels elementarer Funktionen in τ darstellen. Es gehört zu einer Klasse nicht auflösbarer Integrale, die man aufgrund dieses Beispiels **elliptische Integrale** nennt.



Ein wichtiger Satz fehlt noch:

Satz 9.1.20 (Satz von Fubini) Ist $D \subset \mathbb{R}^2$ ein Rechteck, d.h.

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

und $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, dann gilt:

$$\iint_D f(x, y) \, d(x, y) = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dy \, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) \, dx \, dy.$$

Dieser Satz folgt direkt aus der Tatsache, dass D ein Normalbereich bzgl. x und bzgl. y ist.

9.2 Integrale über Flächen im Raum

Definition 9.2.1 Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet und $D \subset G$ regulär. Ferner sei $\Phi \in C^{(1)}(G, \mathbb{R}^3)$ eine gegebene Funktion mit den Variablen u und v und den Eigenschaften

1. Φ ist injektiv auf D , d.h. $\Phi(u_1, v_1) \neq \Phi(u_2, v_2)$ für alle $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in D$ mit $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$.
2. Die Jacobimatrix von Φ auf D hat den maximalen Rang, d.h. den Rang 2.

Dann nennt man die Einschränkung $\Phi|_D$ eine **Parameterdarstellung (Parametrisierung)** des **regulären Flächenstücks** $\Phi(D)$. D heißt **Parameterbereich**. Ferner nennt man $\Phi(\partial D)$ den Rand des Flächenstücks.

Bedingung 2 ist äquivalent dazu, dass die zwei Spalten der Jacobimatrix, also $\frac{\partial \Phi}{\partial u}$ und $\frac{\partial \Phi}{\partial v}$, linear unabhängig sind. Hierzu äquivalent ist ferner die Forderung, dass das Kreuzprodukt der beiden Vektoren nicht der Nullvektor ist:

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) (u, v) \neq 0 \quad \forall (u, v) \in D.$$

Definition 9.2.2 Ist Φ die Parameterdarstellung eines regulären Flächenstücks, so führt man die folgenden Abkürzungen ein:

$$\Phi_u := \frac{\partial \Phi}{\partial u}, \quad \Phi_v := \frac{\partial \Phi}{\partial v},$$

$$E := |\Phi_u|^2,$$

$$F := \Phi_u \cdot \Phi_v,$$

$$G := |\Phi_v|^2.$$

Hierbei nennt man E , F und G die **metrischen Fundamentalgrößen**.

Satz 9.2.3 Sei Φ die Parametrisierung eines regulären Flächenstücks und $(x^*, y^*, z^*)^T = \Phi(u^*, v^*)$ ein Punkt des Flächenstücks $((u^*, v^*) \in D)$. Dann gilt:

- a) Die **Tangentialebene** an die Fläche in (x^*, y^*, z^*) wird beschrieben durch die Parameterdarstellung

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \Phi(u^*, v^*) + \lambda \Phi_u(u^*, v^*) + \mu \Phi_v(u^*, v^*); \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R};$$

und hat den **Einheitsnormalenvektor (Flächennormale)**

$$n := |(\Phi_u \times \Phi_v)(u^*, v^*)|^{-1} (\Phi_u \times \Phi_v)(u^*, v^*),$$

wobei

$$|\Phi_u \times \Phi_v| = \sqrt{EG - F^2}.$$

- b) Setzt man einen regulären Weg

$$t \mapsto \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}, \quad t \in [a, b],$$

in den Parameterbereich D ein, so erhält man einen regulären Weg im \mathbb{R}^3 durch

$$t \mapsto \Phi(u(t), v(t)) =: \varphi(t), \quad t \in [a, b].$$

Ein (nicht unbedingt normierter) Tangentialvektor bei $t \in [a, b]$ ist (nach der Kettenregel)

$$\dot{\varphi}(t) = \Phi_u(u(t), v(t)) \dot{u}(t) + \Phi_v(u(t), v(t)) \dot{v}(t),$$

kurz

$$\dot{\varphi} = \Phi_u \dot{u} + \Phi_v \dot{v}.$$

Beispiel 9.2.4 Wir betrachten eine Kugel um den Nullpunkt mit Radius $R > 0$. Eine Parametrisierung hiervon ist

$$\Phi(\varphi, \vartheta) = \begin{pmatrix} R \sin \vartheta \cos \varphi \\ R \sin \vartheta \sin \varphi \\ R \cos \vartheta \end{pmatrix},$$

wobei $\varphi \in [0, 2\pi[$ der Längengrad und $\vartheta \in]0, \pi[$ der Breitengrad ist. Beachten Sie, dass wegen der Forderung der Injektivität nicht sowohl $\varphi = 0$ als auch $\varphi = 2\pi$ genommen werden kann und

außerdem die Randwerte für ϑ auch nicht verwendet werden können. Für diese Parametrisierung erhält man

$$\Phi_\varphi = \begin{pmatrix} -R \sin \vartheta \sin \varphi \\ R \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\Phi_\vartheta = \begin{pmatrix} R \cos \vartheta \cos \varphi \\ R \cos \vartheta \sin \varphi \\ -R \sin \vartheta \end{pmatrix}.$$

Hier sieht man auch, warum $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ ausgenommen werden muss, da sonst $\Phi_\varphi = 0$ gelten würde. Wir erhalten also eine Kugel ohne die beiden Pole. In der Praxis braucht man aber auch die Pole. Es gelten jedoch einige Aussagen nicht, wenn man sie einschließt. Mit den Ableitungen erhält man die Tangentialebene in $(\xi, \eta, \zeta)^T = \Phi(\varphi, \vartheta)$, die gegeben ist durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \sin \vartheta \cos \varphi \\ R \sin \vartheta \sin \varphi \\ R \cos \vartheta \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -R \sin \vartheta \sin \varphi \\ R \sin \vartheta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} R \cos \vartheta \cos \varphi \\ R \cos \vartheta \sin \varphi \\ -R \sin \vartheta \end{pmatrix}; \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Beispielsweise in $(1, 0, 0)^T = \Phi(0, \frac{\pi}{2})$ ist die Tangentialebene an die Einheitskugel beschrieben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Ferner ist allgemein

$$\begin{aligned} E &= |\Phi_\varphi|^2 = R^2 \sin^2 \vartheta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) = R^2 \sin^2 \vartheta, \\ F &= \Phi_\varphi \cdot \Phi_\vartheta = R^2 (-\sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + \sin \vartheta \cos \vartheta \sin \varphi \cos \varphi + 0) = 0, \\ G &= |\Phi_\vartheta|^2 = R^2 \cos^2 \vartheta (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) + R^2 \sin^2 \vartheta = R^2, \end{aligned}$$

so dass

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{R^2 \sin^2 \vartheta \cdot R^2 - 0} = R^2 \sin \vartheta,$$

da $\sin \vartheta \geq 0$ für $\vartheta \in [0, \pi]$. Wir erhalten damit die Flächennormale an $(\xi, \eta, \zeta)^T = \Phi(\varphi, \vartheta)$ durch

$$n = \frac{1}{R^2 \sin \vartheta} \begin{pmatrix} -R^2 \sin^2 \vartheta \cos \varphi - 0 \\ 0 - R^2 \sin^2 \vartheta \sin \varphi \\ -R^2 \sin \vartheta \cos \vartheta (\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \vartheta \cos \varphi \\ -\sin \vartheta \sin \varphi \\ -\cos \vartheta \end{pmatrix} = \frac{1}{R} \begin{pmatrix} -\xi \\ -\eta \\ -\zeta \end{pmatrix}.$$

Beachten Sie folgendes: Das Vertauschen der Parameter in ihrer Reihenfolge ändert das Vorzeichen der Flächennormalen:

$$\Phi_\varphi \times \Phi_\vartheta = -\Phi_\vartheta \times \Phi_\varphi.$$

Die Richtung der Flächennormalen ist übrigens nicht verblüffend: Bei einer Kugel um den Nullpunkt ist der Ortsvektor eines Punktes automatisch auch normal zur Tangentialebene an diesem Punkt. \diamond

Es wird Zeit zu integrieren.

Definition 9.2.5 Sei $S \subset \mathbb{R}^3$ ein reguläres Flächenstück mit der Parametrisierung $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^3$, $D \subset \mathbb{R}^2$, und $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ ein stetiges Skalarfeld. Dann wird

$$\iint_S f(x, y, z) \, dO(x, y, z) := \iint_D f(\Phi_1(u, v), \Phi_2(u, v), \Phi_3(u, v)) |\Phi_u(u, v) \times \Phi_v(u, v)| \, d(u, v)$$

oder kurz

$$\iint_S f \, dO := \iint_D (f \circ \Phi) \cdot \sqrt{EG - F^2} \, dF$$

das **Oberflächenintegral** von f über S genannt. Auch hier reicht ein einfaches Integralzeichen anstatt eines doppelten. Statt dO ist außerdem auch $d\omega$ gebräuchlich.

Ist eine Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ eine Vereinigung endlich vieler regulärer paarweise disjunkter Flächenstücke S_1, \dots, S_n und $f : S \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, so setzen wir

$$\iint_S f \, dO := \sum_{j=1}^n \iint_{S_j} f \, dO.$$

Beispiel 9.2.6

- a) Den Inhalt einer Oberfläche erhält man, analog zu den bisherigen Integralen, durch Integration der Eins. Der Inhalt einer Kugel $S_R(0)$ mit Radius R und Zentrum 0 ist somit

$$\begin{aligned} \iint_{S_R(0)} 1 \, dO &= \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 1 \cdot R^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \\ &= \int_0^\pi 2\pi R^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \\ &= 2\pi R^2 (-\cos \vartheta) \Big|_0^\pi \\ &= 4\pi R^2. \end{aligned}$$

- b) Ist eine Fläche $S \subset \mathbb{R}^3$ mit der Ladungsdichte ϱ geladen, so ist das elektrostatische Potential in $y \in \mathbb{R}^3 \setminus S$ gegeben durch

$$U(y) = \iint_S \frac{\varrho(x)}{|x - y|} \, dO(x).$$

Z.B. sei ein Zylinder

$$Z := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x_3 \leq h, x_1^2 + x_2^2 \leq R^2\}$$

an seiner Oberfläche mit

$$\varrho(x) = x_1^2 + x_2^2 + \frac{x_3^2}{4}$$

geladen. Zur Berechnung des Potentials teilen wir ∂Z ein in drei Teile: S_1 ist der obere "Deckel"

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r \in]0, R], \varphi \in [0, 2\pi[,$$

($r = 0$ ist wegen des "Nullmengen-Arguments" egal), S_2 der untere "Deckel"

$$x = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r \in]0, R], \varphi \in [0, 2\pi[,$$

und S_3 der Zylindermantel

$$x = \begin{pmatrix} R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \\ z \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi[, z \in [0, h].$$

Wir rechnen das Potential im Zentrum $y = (0, 0, \frac{h}{2})^T$ aus. Dort ist

$$|x - y| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \left(x_3 - \frac{h}{2}\right)^2}.$$

Das Potential ist somit

$$U(y) = \iint_{S_1} \frac{\varrho(x)}{|x - y|} dO(x) + \iint_{S_2} \frac{\varrho(x)}{|x - y|} dO(x) + \iint_{S_3} \frac{\varrho(x)}{|x - y|} dO(x).$$

Fangen wir mit S_1 an. Hier ist

$$\Phi_r = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_\varphi = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ -r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

so dass

$$\begin{aligned} E &= |\Phi_r|^2 = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1, \\ F &= \Phi_r \cdot \Phi_\varphi = r \sin \varphi \cos \varphi - r \sin \varphi \cos \varphi = 0, \\ G &= |\Phi_\varphi|^2 = r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = r^2, \\ \sqrt{EG - F^2} &= \sqrt{r^2 - 0} = r. \end{aligned}$$

Folglich errechnet sich das Integral wie folgt:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \frac{\varrho(x)}{|x-y|} dO(x) &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi + \frac{h^2}{4}}{\sqrt{r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi + \frac{h^2}{4}}} \cdot r d\varphi dr \\ &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}} \cdot r d\varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^R \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}} \cdot r dr. \end{aligned}$$

Es gilt (mit $s := r^2 + \frac{h^2}{4}$)

$$\int \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}} \cdot 2r dr = \int \sqrt{s} ds = \frac{2}{3} s^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \left(r^2 + \frac{h^2}{4} \right)^{\frac{3}{2}},$$

so dass

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \frac{\varrho(x)}{|x-y|} dO(x) &= \pi \cdot \frac{2}{3} \left(r^2 + \frac{h^2}{4} \right)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^R \\ &= \frac{2\pi}{3} \left(R^2 + \frac{h^2}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi h^3}{12}. \end{aligned}$$

Für S_2 erhalten wir (**STOPP! Probieren Sie es zunächst selbst!**)

$$\Phi_r = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_\varphi = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ -r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} E &= |\Phi_r|^2 = 1, \\ F &= 0, \\ G &= |\Phi_\varphi|^2 = r^2, \\ \sqrt{EG - F^2} &= r \end{aligned}$$

und folglich (ähnlich wie bei S_1)

$$\iint_{S_2} \frac{\varrho}{|x-y|} dO(x) = \int_0^R \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}}} \cdot r d\varphi dr$$

$$\begin{aligned}
&= 2\pi \int_0^R \left(\frac{r^2 + \frac{h^2}{4}}{\sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}}} - \frac{\frac{h^2}{4}}{\sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}}} \right) r \, dr \\
&= 2\pi \int_0^R \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}} r \, dr - \frac{\pi h^2}{2} \int_0^R \frac{r}{\sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}}} \, dr.
\end{aligned}$$

Mit $s := r^2 + \frac{h^2}{4}$ ist

$$\int \frac{r}{\sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}}} \, dr = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{s}} \, ds = \sqrt{s} = \sqrt{r^2 + \frac{h^2}{4}}.$$

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\iint_{S_2} \frac{\varrho(x)}{|x-y|} \, dO(x) &= \frac{2\pi}{3} \left(R^2 + \frac{h^2}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi h^3}{12} - \frac{\pi h^2}{2} \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4}} + \frac{\pi h^3}{4} \\
&= \frac{2\pi}{3} \left(R^2 + \frac{h^2}{4} \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{\pi h^2}{2} \left(R^2 + \frac{h^2}{4} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{\pi h^3}{6}.
\end{aligned}$$

Schließlich gilt für S_3 (**STOPP! Auch hier sollten Sie es erst selbst versuchen!**):

$$\Phi_\varphi = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ -R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
E &= |\Phi_\varphi|^2 = R^2, \\
F &= 0, \\
G &= |\Phi_z|^2 = 1, \\
\sqrt{EG - F^2} &= R.
\end{aligned}$$

Folglich gilt:

$$\begin{aligned}
\iint_{S_3} \frac{\varrho(x)}{|x-y|} \, dO(x) &= \int_0^{2\pi} \int_0^h \frac{R^2 + \frac{z^2}{4}}{\sqrt{R^2 + (z - \frac{h}{2})^2}} R \, dz \, d\varphi \\
&= 2\pi R \int_0^h \frac{R^2 + \frac{z^2}{4}}{\sqrt{R^2 + (z - \frac{h}{2})^2}} \, dz.
\end{aligned}$$

Mit $t := z - \frac{h}{2}$ erhalten wir

$$\begin{aligned} \int \frac{R^2 + \frac{z^2}{4}}{\sqrt{R^2 + \left(z - \frac{h}{2}\right)^2}} dz &= \int \frac{R^2 + \frac{1}{4} \left(t^2 + th + \frac{h^2}{4}\right)}{\sqrt{R^2 + t^2}} dt \\ &= \frac{1}{4} \int \frac{R^2 + t^2}{\sqrt{R^2 + t^2}} dt + \frac{h}{4} \int \frac{t}{\sqrt{R^2 + t^2}} dt + \frac{12R^2 + h^2}{16} \int \frac{1}{\sqrt{R^2 + t^2}} dt \\ &= \frac{1}{4} \int \sqrt{R^2 + t^2} dt + \frac{h}{4} \sqrt{R^2 + t^2} + \frac{12R^2 + h^2}{16} \frac{1}{R} \int \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{t}{R}\right)^2}} dt. \end{aligned}$$

Hierbei gilt ($\tau := \frac{t}{R}$)

$$\frac{1}{R} \int \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{t}{R}\right)^2}} dt = \frac{1}{R} \int \frac{1}{\sqrt{1 + \tau^2}} R d\tau = \operatorname{arsinh} \tau = \operatorname{arsinh} \frac{t}{R}$$

und

$$\begin{aligned} \int 1 \cdot \sqrt{R^2 + t^2} dt &= t\sqrt{R^2 + t^2} - \int \frac{t^2}{\sqrt{R^2 + t^2}} dt \\ &= t\sqrt{R^2 + t^2} - \int \sqrt{R^2 + t^2} dt + R^2 \int \frac{1}{\sqrt{R^2 + t^2}} dt \\ \Rightarrow \int \sqrt{R^2 + t^2} dt &= \frac{1}{2} \left(t\sqrt{R^2 + t^2} + R^2 \int \frac{1}{\sqrt{R^2 + t^2}} dt \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(t\sqrt{R^2 + t^2} + R^2 \operatorname{arsinh} \frac{t}{R} \right). \end{aligned}$$

Der Rest ist nur noch Einsetzen.

◇

9.3 Die Substitutionsregel für Flächenintegrale

Es ist manchmal hilfreich, das Koordinatensystem zu wechseln, um das Integral einfacher berechnen zu können.

Satz 9.3.1 (Substitutionsregel für Flächenintegrale) Sei $M \subset \mathbb{R}^2$ eine reguläre Menge und $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit $D \subset \mathbb{R}^2$ eine Parameterdarstellung (**Koordinatentransformation**), d.h. $(x, y) = \Phi(u, v)$, wobei

1. $M = \Phi(D)$,

2. $\Phi \in C^{(1)}(D, \mathbb{R}^2)$,
3. Φ injektiv (auf D) ist,
4. für die **Jacobi-Determinante (Funktionaldeterminante)** von Φ gilt:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} := \det \Phi'(u, v) \neq 0 \quad \forall (u, v) \in D.$$

Dann gilt für jedes stetige Skalarfeld $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, dass

$$\iint_M f(x, y) \, d(x, y) = \iint_D f(\Phi(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \, d(u, v).$$

Beispiel 9.3.2 Auf dem Kreisring

$$M := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4\}$$

integrieren wir

$$f(x, y) := \frac{\ln(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Für den Kreisring sind Polarkoordinaten die erste Wahl:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad r \in [1, 2], \quad \varphi \in [0, 2\pi[.$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \iint_M \frac{\ln(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \, d(x, y) &= \int_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{\ln r^2}{r^3} \left| \det \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \right| \, d\varphi \, dr \\ &= 2 \int_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{\ln r}{r^3} |r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi| \, d\varphi \, dr \\ &= 2 \int_1^2 \int_0^{2\pi} \frac{\ln r}{r^3} r \, d\varphi \, dr \\ &= 4\pi \int_1^2 \frac{\ln r}{r^2} \, dr \\ &= 4\pi \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot \int_1^2 \frac{\ln r}{r^2} \, dr \\ &= -4\pi \int_1^2 \frac{\ln \frac{1}{r}}{r^2} \, dr \\ &= 4\pi \int_1^{\frac{1}{2}} \ln t \, dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -4\pi(t \ln t - t) \Big|_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= 4\pi + 2\pi \ln \frac{1}{2} - 2\pi \\
&= 2\pi(1 - \ln 2).
\end{aligned}$$

◇

Bemerkung 9.3.3 Die Substitutionsregel ergibt sich, indem man die ebene Fläche in den \mathbb{R}^3 "einbettet":

$$M \ni \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Phi_1(u, v) \\ \Phi_2(u, v) \\ 0 \end{pmatrix} =: \tilde{\Phi}(u, v) \in \mathbb{R}^3, (u, v) \in D,$$

$$\tilde{f}(x, y, 0) := f(x, y).$$

Es ist dann

$$\tilde{\Phi}_u = \begin{pmatrix} (\Phi_1)_u \\ (\Phi_2)_u \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Phi}_v = \begin{pmatrix} (\Phi_1)_v \\ (\Phi_2)_v \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$E = |\Phi_u|^2, \quad F = \Phi_u \cdot \Phi_v, \quad G = |\Phi_v|^2.$$

Folglich gilt nach Definition 9.2.5, dass

$$\iint_M \tilde{f}(x, y, z) \, dO = \iint_D f(\Phi(u, v)) \cdot \sqrt{EG - F^2} \, d(u, v),$$

wobei

$$\begin{aligned}
EG - F^2 &= \left[\left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \right] \left[\left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 \right] - \left(\frac{\partial x}{\partial u} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 \\
&= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \right)^2 \left(\frac{\partial y}{\partial v} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \left(\frac{\partial x}{\partial v} \right)^2 - 2 \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} \\
&= \left(\frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u} \right)^2 \\
&= \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}^2.
\end{aligned}$$

9.4 Oberflächenintegrale von Vektorfeldern

Definition 9.4.1 Sei Φ die Parametrisierung des regulären Flächenstücks $S = \Phi(D) \subset \mathbb{R}^3$ mit Flächennormalen $n := (EG - F^2)^{-\frac{1}{2}}(\Phi_u \times \Phi_v)$. Ist $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein stetiges Vektorfeld, dann nennt man

$$\iint_S f \cdot dO := \iint_S (f \cdot n) dO = \iint_D \det(f, \Phi_u, \Phi_v) d(u, v)$$

den **Fluss** von f durch S .

Hierbei steht “ \cdot ” wie bei dem Arbeitsintegral symbolisch für das Euklidische Skalarprodukt. Ferner stellt (f, Φ_u, Φ_v) die Matrix mit den Spalten f, Φ_u und Φ_v dar. Der Normalenvektor gibt hierbei an, in welche Richtung etwas durch die Fläche fließt.

Beispiel 9.4.2 Eine Punktladung q im Nullpunkt hat das elektrische Feld

$$E(x) = \frac{cq}{|x|^3} x, \quad x \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\},$$

wobei c eine Konstante ist.

Wir berechnen den Fluss dieses Feldes durch die Sphäre $S_R(0)$ um 0 mit Radius $R > 0$ und zwar von innen nach außen. Also ist

$$n(x) = \frac{1}{R} x, \quad x \in S_R(0).$$

Der Fluss ist somit

$$\begin{aligned} \iint_{S_R(0)} E \cdot dO &= \iint_{S_R(0)} E(x) \cdot n(x) dO(x) \\ &= \iint_{S_R(0)} \frac{cq}{|x|^3} x \cdot \frac{x}{R} dO(x) \\ &= \frac{cq}{R^2} \iint_{S_R(0)} 1 dO \\ &= \frac{cq}{R^2} \cdot 4\pi R^2 \\ &= 4\pi cq. \end{aligned}$$

Der Fluss von außen nach innen wäre $-4\pi cq$. ◇

In den Kanon der Sätze von Gauß und Green gehört auch der folgende.

Satz 9.4.3 (Satz von Stokes) Sei $S \subset U \subset \mathbb{R}^3$ (U offen) ein reguläres Flächenstück mit Flächennormale n und überschneidungsfreier und geschlossener Randkurve ∂S . Hierbei sei ∂S

so parametrisiert, dass in Durchlaufrichtung S links liegt und die Flächennormale im Gegenuhrzeigersinn umfahren wird. Ist $f \in C^1(U, \mathbb{R}^3)$ ein gegebenes Vektorfeld, so gilt

$$\int_S (\operatorname{rot} f) \cdot d\mathbf{O} = \oint_{\partial S} f \cdot dx.$$

Beispiel 9.4.4 Auf der oberen Hemisphäre

$$H := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = R^2, z \geq 0\}$$

sei

$$f(x, y, z) := \begin{pmatrix} x \\ y \\ e^z - \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \end{pmatrix}$$

gegeben. Es gilt

$$(\operatorname{rot} f)(x, y, z) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} - 0 \\ 0 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1}} \\ 0 - 0 \end{pmatrix}.$$

Mit der schon zuvor benutzten Parametrisierung ist

$$\begin{aligned} \iint_H (\operatorname{rot} f) \cdot d\mathbf{O} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\frac{R \sin \vartheta \sin \varphi}{\sqrt{R^2 \sin^2 \vartheta + 1}} \\ \frac{R \sin \vartheta \cos \varphi}{\sqrt{R^2 \sin^2 \vartheta + 1}} \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix} R^2 \sin \vartheta \, d\varphi \, d\vartheta \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} 0 \, d\varphi \, d\vartheta \\ &= 0. \end{aligned}$$

Wir sehen uns nun an:

$$\oint_{\partial H} f \cdot dx.$$

Der Rand ist der folgende Kreis

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \varphi \in [0, 2\pi[.$$

Beachten Sie, dass der Umlauf so erfolgt, dass die Hemisphäre immer links liegt und die Normalenvektoren auf H

$$\begin{pmatrix} \sin \vartheta \cos \varphi \\ \sin \vartheta \sin \varphi \\ \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

im Gegenuhrzeigersinn umrundet werden. Damit gilt

$$\begin{aligned} \oint_{\partial H} f \cdot dx &= \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} R \cos \varphi \\ R \sin \varphi \\ 1 - \sqrt{R^2 + 1} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -R \sin \varphi \\ R \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} d\varphi \\ &= 0. \end{aligned}$$

◇

Für Gradientenfelder $f = \text{grad } F$ ergibt sich übrigens eine bereits bekannte Tatsache:

$$\oint_{\partial S} (\text{grad } F) \cdot dx = 0$$

und

$$\text{rot grad } F = 0 \Rightarrow \iint_S (\text{rot grad } F) \cdot dO = 0.$$

9.5 Ein Integral aus Statistik und Stochastik

In der Statistik und Stochastik spielt das Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx$$

eine wichtige Rolle, z.B. bei der Gauß'schen Normalverteilung. Obwohl es keine Stammfunktion mit geschlossener Darstellung gibt, kann man es doch berechnen. Dies geht interessanterweise durch einen Umweg in 2D. Zunächst eine Überlegung vorweg: Wir betrachten

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d(x, y) := \lim_{a, b, c, d \rightarrow \infty} \int_{-a}^b \int_{-c}^d e^{-x^2-y^2} d(x, y).$$

Nach dem Satz von Fubini gilt dann

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d(x, y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} e^{-y^2} dy \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-x^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) dx \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right) \\ &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx \right)^2. \end{aligned}$$

Nun wenden wir uns dem Integral über den \mathbb{R}^2 zu, das man auch wie folgt berechnen kann:

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d(x, y) = \lim_{R \rightarrow \infty} \iint_{K_R(0)} e^{-x^2-y^2} d(x, y).$$

Mit Polarkoordinaten erhält man

$$\begin{aligned} \iint_{K_R(0)} e^{-x^2-y^2} d(x, y) &= \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r d\varphi dr \\ &= 2\pi \int_0^R e^{-r^2} r dr \\ &= \pi \int_0^{R^2} e^{-t} dt \\ &= \pi \left(-e^{-R^2} + 1 \right). \end{aligned}$$

Also gilt

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} d(x, y) = \pi$$

und folglich

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Kapitel 10

Volumenintegrale

10.1 Definition und Eigenschaften

Die Definition des Volumens und des Integrals geht analog zum Integral auf $[a, b]$ und dem Integral über ebene Flächen. Statt eine Teilmenge des \mathbb{R}^2 mit Quadraten der Kantenlänge 2^{-k} zu überdecken, überdecken wir nun eine Teilmenge M des \mathbb{R}^3 mit Würfeln der Kantenlänge 2^{-k} . Analog summieren wir bei $S_k(M)$ die Volumina der Würfel, die einen nicht-leeren Schnitt mit M haben und bei $s_k(M)$ nur die, die ganz in M enthalten sind. Gilt

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_k(M) = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(M) \quad (=: V(M) =: \text{Vol}(M)),$$

so nennen wir M **Riemann-messbar** und $V(M)$ des Volumen von M .

Definition 10.1.1 *Riemann-messbare Mengen $N \subset \mathbb{R}^3$ mit $V(N) = 0$ heißen **Nullmengen** (im \mathbb{R}^3).*

Satz 10.1.2 *Im \mathbb{R}^3 sind endliche Mengen, reguläre Kurven und reguläre Flächenstücke Nullmengen.*

Definition 10.1.3 *Eine Menge $M \subset \mathbb{R}^3$ heißt **regulär**, wenn folgendes gilt:*

1. Die Oberfläche ∂M besteht aus endlich vielen regulären Flächenstücken.
2. Das Innere $M \setminus \partial M$ ist ein nicht-leeres und beschränktes Gebiet im \mathbb{R}^3 .
3. M ist abgeschlossen, d.h. $\partial M \subset M$.

Satz 10.1.4 *Jede reguläre Menge im \mathbb{R}^3 ist Riemann-messbar mit positivem Volumen.*

Ein Intervall $[a, b]$ haben wir für die Definition des Riemann-Integrals in kleine Teilintervalle zerlegt. Bei ebenen Flächen haben wir eine Zerlegung durch Zerschneiden mittels regulärer Kurven durchgeführt. Für reguläre Mengen M im \mathbb{R}^3 wird die Zerlegung nun mittels zerschneidenden regulären Flächenstücken umgesetzt. Die Unter- und Obersummen werden für stetige Skalarfelder $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ analog definiert. Stimmen das Supremum über alle Untersummen und das Infimum über alle Obersummen überein (was bei stetigen Funktionen stets gilt), so haben wir das **Volumenintegral** (Dreifachintegral)

$$\iiint_M f(x, y, z) \, dV(x, y, z),$$

das man auch schreiben kann als

$$\iiint_M f \, dV, \quad \iiint_M f \, dV(x, y, z), \quad \int_M f(x, y, z) \, dV(x, y, z), \quad \int_M f \, dV(x, y, z).$$

Statt $dV(x, y, z)$ kann auch einfach $d(x, y, z)$ geschrieben werden. Wir sehen uns ein paar Eigenschaften an.

Satz 10.1.5 *Seien $M \subset \mathbb{R}^3$ regulär und $f, g : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gilt:*

a) *(Linearität) Für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist*

$$\iiint_M (\lambda f + \mu g) \, d(x, y, z) = \lambda \iiint_M f \, d(x, y, z) + \mu \iiint_M g \, d(x, y, z).$$

b) *(Monotonie) Ist $f(x, y, z) \leq g(x, y, z)$ für alle $(x, y, z) \in M$, so gilt*

$$\iiint_M f \, d(x, y, z) \leq \iiint_M g \, d(x, y, z).$$

c) *(Additivität) Sind $M_1, \dots, M_n \subset \mathbb{R}^3$ paarweise disjunkte reguläre Mengen mit $M = \bigcup_{i=1}^n M_i$, so ist*

$$\iiint_M f \, d(x, y, z) = \sum_{i=1}^n \iiint_{M_i} f \, d(x, y, z).$$

d) *Ist $N \subset M$ eine Nullmenge im \mathbb{R}^3 und $M \setminus N$ regulär, so ist*

$$\iiint_M f \, d(x, y, z) = \iiint_{M \setminus N} f \, d(x, y, z).$$

Satz 10.1.6 *Sei $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Für die folgenden Spezialfälle regulärer Mengen M können die Volumenintegrale umgeschrieben werden:*

a) Gilt

$$M = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in D, g(x, y) \leq z \leq h(x, y) \},$$

wobei $D \subset \mathbb{R}^2$ regulär ist und $g, h \in C^1(D)$ mit $g \leq h$ gilt, so ist

$$\iiint_M f \, d(x, y, z) = \iint_D \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right) d(x, y).$$

Analoge Aussagen gelten für $\tilde{g}(x, z) \leq y \leq \tilde{h}(x, z)$ bzw. $\hat{g}(y, z) \leq x \leq \hat{h}(y, z)$.

b) Gilt

$$M = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid a \leq x \leq b, c(x) \leq y \leq d(x), g(x, y) \leq z \leq h(x, y) \},$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $c, d \in C^1[a, b]$, $c \leq d$, $g, h \in C^1$, $g \leq h$, so ist

$$\iiint_M f \, d(x, y, z) = \int_a^b \left(\int_{c(x)}^{d(x)} \left(\int_{g(x,y)}^{h(x,y)} f(x, y, z) \, dz \right) dy \right) dx.$$

Auch hier gelten die Aussagen auch mit vertauschten Variablen.

Fall b) ist ein Spezialfall von a), wobei D ein Normalbereich (bzgl. y) ist.

Satz 10.1.7 (Satz von Fubini) Sei $f : Q \rightarrow \mathbb{R}$ stetig auf dem Quader

$$Q := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \xi_1 \leq x \leq \xi_2, \eta_1 \leq y \leq \eta_2, \zeta_1 \leq z \leq \zeta_2 \}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \iiint_Q f \, d(x, y, z) &= \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy \\ &= \int_{\zeta_1}^{\zeta_2} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \int_{\xi_1}^{\xi_2} f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \\ &= \dots, \end{aligned}$$

d.h. die Integrationsreihenfolge ist beliebig.

Satz 10.1.8 Für reguläre Mengen $M \subset \mathbb{R}^3$ gilt

$$V(M) = \iiint_M 1 \, dV.$$

Beispiel 10.1.9

a) Sei $Q = [0, \pi] \times [-1, 1] \times [0, 2]$ ein Quader. Wir definieren

$$f(x, y, z) := e^x + \frac{1}{y+2} - z \cos x.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \iiint_Q f \, d(x, y, z) &= \int_0^\pi \int_{-1}^1 \int_0^2 e^x + \frac{1}{y+2} - z \cos x \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^\pi \int_{-1}^1 e^x z + \frac{z}{y+2} - \frac{1}{2} z^2 \cos x \Big|_0^2 \, dy \, dx \\ &= \int_0^\pi \int_{-1}^1 2e^x + \frac{2}{y+2} - 2 \cos x \, dy \, dx \\ &= \int_0^\pi 2e^x y + 2 \ln |y+2| - 2y \cos x \Big|_{-1}^1 \, dx \\ &= \int_0^\pi 4e^x + 2 \ln 3 - 4 \cos x \, dx \\ &= (4e^x + (\ln 9)x - 4 \sin x) \Big|_0^\pi \\ &= 4e^\pi + (\ln 9)\pi - 4. \end{aligned}$$

Sie können selbst als Übung andere Integrationsreihenfolgen ausprobieren.

b) Wir bestimmen das Volumen einer Kugel

$$K_R(0) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}.$$

Es gilt

$$-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \leq z \leq \sqrt{R^2 - x^2 - y^2},$$

wobei (x, y) im Kreis $C_R(0)$ um 0 mit Radius R liegen muss. Also gilt nach Satz 10.1.6 a):

$$\begin{aligned} \iiint_{K_R(0)} 1 \, d(x, y, z) &= \iint_{C_R(0)} \int_{-\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}}^{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} 1 \, dz \, d(x, y) \\ &= \iint_{C_R(0)} 2\sqrt{R^2 - x^2 - y^2} \, d(x, y). \end{aligned}$$

Das verbleibende Integral können wir mit der Substitutionsregel für Flächenintegrale bewältigen, siehe Satz 9.3.1: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $r \in]0, R]$, $\varphi \in [0, 2\pi[$ ergibt

$$\text{Vol}(K_R(0)) = \int_0^{2\pi} \int_0^R 2\sqrt{R^2 - r^2} r \, dr \, d\varphi$$

$$\begin{aligned}
&= - \int_0^{2\pi} \int_{R^2}^0 \sqrt{t} dt d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \left. \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \right|_0^{R^2} d\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{2}{3} R^3 d\varphi \\
&= \frac{4\pi}{3} R^3.
\end{aligned}$$

- c) Ähnlich wie wir es bereits bei Kurven und Flächen kennengelernt haben, kann man Momente und Schwerpunkte berechnen. Als Beispiel betrachten wir ein Objekt

$$B := \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq x^2, -xy^2 \leq z \leq x^2y \}$$

mit der Massenverteilung

$$\varrho(x, y, z) := x + y + z.$$

Die Gesamtmasse ist

$$\begin{aligned}
M &= \iiint_B \varrho dV \\
&= \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_{-xy^2}^{x^2y} (x + y + z) dz dy dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{x^2} \left[(x + y)z + \frac{1}{2}z^2 \right] \Big|_{z=-xy^2}^{z=x^2y} dy dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{x^2} \left(x^3y + 2x^2y^2 + \frac{1}{2}x^4y^2 + xy^3 - \frac{1}{2}x^2y^4 \right) dy dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^3y^2 + \left(2x^2 + \frac{1}{2}x^4 \right) \frac{1}{3}y^3 + \frac{x}{4}y^4 - \frac{x^2}{10}y^5 \right) \Big|_{y=0}^{y=x^2} dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2}x^7 + \frac{2}{3}x^8 + \frac{1}{6}x^{10} + \frac{1}{4}x^9 - \frac{1}{10}x^{12} \right) dx \\
&= \frac{1}{16} + \frac{2}{27} + \frac{1}{66} + \frac{1}{40} - \frac{1}{130} \approx 0,169.
\end{aligned}$$

Die Schwerpunktkoordinaten sind dann

$$\begin{aligned}
x_S &= \frac{1}{M} \iiint_B x \varrho(x, y, z) dV(x, y, z) \\
&= \frac{1}{M} \int_0^1 \int_0^{x^2} \int_{-xy^2}^{x^2y} (x^2 + xy + xz) dz dy dx,
\end{aligned}$$

$$y_S = \frac{1}{M} \iiint_B y \varrho(x, y, z) \, dV(x, y, z),$$

$$z_S = \frac{1}{M} \iiint_B z \varrho(x, y, z) \, dV(x, y, z).$$

Die Berechnung wird als private Übungsaufgabe überlassen.

◇

Satz 10.1.10 (Substitutionsregel für Volumenintegrale) Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ eine reguläre Menge und $\Phi : U \rightarrow B$ eine **Koordinatentransformation** “ $(x, y, z) = \Phi(u, v, w)$ ”, d.h. Φ erfüllt die folgenden Bedingungen:

1. $\Phi(U) = B$ und $U \subset \mathbb{R}^3$ ist regulär,
2. Φ ist injektiv,
3. $\Phi \in C^{(1)}(U, B)$,
4. Für die Jacobi-Determinante von Φ gilt:

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \neq 0 \quad \text{auf } U.$$

Dann gilt für jedes stetige Skalarfeld $f : B \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\iiint_B f(x, y, z) \, d(x, y, z) = \iiint_U f(\Phi(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \, d(u, v, w).$$

Beispiel 10.1.11

- a) Wir rechnen noch einmal das Volumen einer Kugel $K_R(0)$ aus, diesmal in **Polarkoordinaten**:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \sin \vartheta \cos \varphi \\ r \sin \vartheta \sin \varphi \\ r \cos \vartheta \end{pmatrix}, \quad r \in]0, R], \quad \varphi \in [0, 2\pi[, \quad \vartheta \in]0, \pi[.$$

Der hier ausgenommene Bereich (der Schnitt der z -Achse mit der Kugel) ist eine Nullmenge und folglich irrelevant. Die Jacobi-Determinante haben wir schon im Beispiel 7.3.15 ausgerechnet:

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \vartheta)} \right| = r^2 \sin \vartheta.$$

Hier sieht man noch mal, warum $r > 0$ und $0 < \vartheta < \pi$ gelten muss. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
 \text{Vol}(K_R(0)) &= \iiint_{K_R(0)} 1 \, dV \\
 &= \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi 1 \cdot r^2 \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, dr \\
 &= \int_0^R \int_0^{2\pi} (-r^2 \cos \vartheta) \Big|_0^\pi \, d\varphi \, dr \\
 &= \int_0^R \int_0^{2\pi} 2r^2 \, d\varphi \, dr \\
 &= 4\pi \int_0^R r^2 \, dr \\
 &= \frac{4}{3} \pi R^3.
 \end{aligned}$$

b) Auf dem Zylinder

$$Z_{4,3} := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 16, 0 \leq z \leq 3\}$$

soll

$$f(x, y, z) := \frac{z}{x^2 + y^2 + 1}$$

integriert werden. Wir verwenden hierfür **Zylinderkoordinaten**:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}; \quad r \in]0, 4], \quad z \in [0, 3], \quad \varphi \in [0, 2\pi[.$$

Die Jacobi-Determinante hierzu ist

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r.$$

Also gilt nach Satz 10.1.10:

$$\begin{aligned}
 \iiint_{Z_{4,3}} f \, dV &= \int_0^4 \int_0^3 \int_0^{2\pi} \frac{z \cdot r}{r^2 + 1} \, d\varphi \, dz \, dr \\
 &= 2\pi \int_0^4 \int_0^3 \frac{z \cdot r}{r^2 + 1} \, dz \, dr
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \pi \int_0^4 \frac{z^2 r}{r^2 + 1} \Big|_{z=0}^{z=3} dr \\
&= 9\pi \int_0^4 \frac{r}{r^2 + 1} dr \\
&= \frac{9}{2} \pi \ln(r^2 + 1) \Big|_0^4 \\
&= \frac{9}{2} \pi \ln 17.
\end{aligned}$$

◇

10.2 Der Satz von Gauß und die Green'schen Formeln

Satz 10.2.1 (Satz von Gauß) Sei $B \subset \mathbb{R}^3$ regulär, wobei die Oberfläche ∂B aus endlich vielen, geschlossenen, stückweise regulären Flächen S_k besteht, deren Schnitt höchstens Randpunkte enthält. Ferner sei der Umlaufsinn über die Kanten $S_k \cap S_j$ hinweg stetig fortgesetzt ("zweiseitige Fläche"). Ist $D \supset B$ offen und $f \in C^{(1)}(D, \mathbb{R}^3)$ ein gegebenes Vektorfeld, so gilt:

$$\iiint_B \operatorname{div} f \, dV = \iint_{\partial B} f \cdot n \, dO,$$

wobei n die äußere Einheitsnormale zu ∂B ist.

Beispiel 10.2.2 Statt den Fluss des Geschwindigkeitsfeldes

$$v(x, y, z) = \begin{pmatrix} x - ye^{-z^2} \\ x \tan \frac{1}{z^2+1} + 2y \\ z - \sin \sqrt{x^2 + y^2 + 1} \end{pmatrix}$$

durch die Sphäre $\partial K_R(0)$ um 0 mit Radius $R > 0$ zu berechnen, geht dies viel einfacher mit dem Satz von Gauß:

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial K_R(0)} v \cdot dO &= \iiint_{K_R(0)} \operatorname{div} v \, dV \\
&= \iiint_{K_R(0)} 4 \, dV \\
&= \frac{16}{3} \pi R^3.
\end{aligned}$$

Aus dem Satz von Gauß folgen die Green'schen Formeln. Wie? ¹

◇

¹Die erste Formel folgt mit $f = V\nabla U$. Die zweite folgt aus der ersten, indem man dort U und V vertauscht und die "vertauschte Gleichung" von der alten subtrahiert.

Satz 10.2.3 $B \subset \mathbb{R}^3$ erfülle die Voraussetzungen des Satzes 10.2.1. Sind $U, V \in C^{(2)}(D, \mathbb{R})$ gegebene Skalarfelder, so gelten die

1. Green'sche Formel

$$\iiint_B V \Delta U + (\nabla U) \cdot (\nabla V) \, d(x, y, z) = \iint_{\partial B} V \frac{\partial U}{\partial n} \, dO(x, y, z)$$

und die **2. Green'sche Formel**

$$\iiint_B V \Delta U - U \Delta V \, d(x, y, z) = \iint_{\partial B} V \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial V}{\partial n} \, dO(x, y, z),$$

wobei n die äußere Einheitsnormale zu ∂B ist.

Eine Anwendung findet man (als Ausblick auf Teil 3 dieser Vorlesung) bei der Laplace-Gleichung, die beispielsweise bei dem elektrostatischen Potential und bei dem Gravitationspotential auftritt. Wir betrachten 4 Varianten von Randwertproblemen. Stets sei B eine beschränkte Menge wie in Satz 10.2.1 und stets sei eine Funktion $F \in C(\partial B)$ gegeben. Außerdem sei E eine offene Menge, die $\mathbb{R}^3 \setminus B$ und ∂B enthält. n ist wieder die äußere Einheitsnormale.

(IDP) Inneres Dirichlet-Problem

Finde $U \in C^{(2)}(D)$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} \Delta U &= 0 \text{ in } B \setminus \partial B, \\ U &= F \text{ auf } \partial B. \end{aligned}$$

(INP) Inneres Neumann-Problem

Finde $U \in C^{(2)}(D)$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} \Delta U &= 0 \text{ in } B \setminus \partial B, \\ \frac{\partial U}{\partial n} &= F \text{ auf } \partial B. \end{aligned}$$

(EDP) Äußeres Dirichlet-Problem

Finde $U \in C^{(2)}(E)$, so dass gilt:

$$\begin{aligned} \Delta U &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus B, \\ U &= F \text{ auf } \partial B, \\ U(x) &= O\left(\frac{1}{|x|}\right), \quad |\nabla U(x)| = O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \text{ für } |x| \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

(“ U ist regulär im Unendlichen”).

(wobei $f(x) = O(g(x))$ für $|x| \rightarrow \infty \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)}$ beschränkt für $|x| \rightarrow \infty$. Dies ist auch ein **Landau-Symbol**.)

(ENP) Äußeres Neumann-Problem

Finde $U \in C^{(2)}(E)$, so dass gilt:

$$\begin{aligned}\Delta U &= 0 \text{ in } \mathbb{R}^3 \setminus B, \\ \frac{\partial U}{\partial n} &= F \text{ auf } \partial B,\end{aligned}$$

U regulär im Unendlichen.

Wir untersuchen die Frage, ob eine Lösung, wenn man sie gefunden hat, denn eindeutig ist. Betrachten wir die inneren Probleme. Seien U und V zwei Lösungen, d.h. $\Delta U = \Delta V = 0$ in $B \setminus \partial B$. Wir setzen $H := U - V$. Setzt man H für beide Funktionen in der 1. Green'schen Formel ein, so gilt

$$\iiint_B H \underbrace{\Delta H}_{=0} + |\nabla H|^2 \, d(x, y, z) = \iint_{\partial B} H \frac{\partial H}{\partial n} \, dO(x, y, z).$$

Egal, ob man das Dirichlet- oder das Neumann-Problem behandelt, in beiden Fällen verschwindet die rechte Seite, da

$$H|_{\partial B} = U|_{\partial B} - V|_{\partial B} = F - F = 0 \text{ im Dirichlet-Fall}$$

und

$$\frac{\partial H}{\partial n} \Big|_{\partial B} = \frac{\partial U}{\partial n} \Big|_{\partial B} - \frac{\partial V}{\partial n} \Big|_{\partial B} = F - F = 0 \text{ im Neumann-Fall}$$

gilt. Es folgt

$$\int_B |\nabla H|^2 \, d(x, y, z) = 0.$$

Da ∇H stetig ist und $|\nabla H| \geq 0$ gilt, muss somit $\nabla H = 0$ auf ganz B gelten. Also ist H konstant. Somit gilt:

- bei (INP): U und V unterscheiden sich nur durch einen konstanten Summanden.
- bei (IDP): Der konstante Summand muss wegen $U|_{\partial B} = V|_{\partial B} (= F)$ gleich Null sein. Also ist $U \equiv V$. Es kann nicht mehr als eine Lösung geben.

Für die äußeren Probleme integriert man über $(\mathbb{R}^3 \setminus B) \cap K_R(0)$, wobei die Kugel $K_R(0)$ so gewählt ist, dass $B \subset K_R(0)$ (d.h. R muss hinreichend groß sein). Man hat also $\partial K_R(0)$ als zusätzlichen Rand. Mit etwas mehr Arbeit führt der Grenzübergang $R \rightarrow \infty$ schließlich zum Resultat, dass (EDP) und (ENP) jeweils nicht mehr als eine Lösung haben können.

Teil III

Kapitel 11

Grundlagen der Fouriertheorie

11.1 Ein bisschen Funktionalanalysis

Wir haben schon in Abschnitt 2.2 gesehen, dass die Begriffe des Skalarprodukts und der Norm allgemeiner aufgefasst werden können statt nur als Euklidisches Skalarprodukt und Euklidische Norm im \mathbb{R}^n . Da die Norm als Länge eines Vektors und $\|x - y\|$ entsprechend als Abstand der beiden Vektoren x und y interpretiert werden kann, ist es möglich, eine Norm zu benutzen, um beispielsweise Konvergenz zu definieren (beachten Sie, dass ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ stets eine Norm “induziert”: $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$, siehe Satz 2.2.10).

Definition 11.1.1 Sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter \mathbb{K} -Vektorraum ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$). Eine Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Vektoren $x_n \in V$ heißt

a) **konvergent** gegen den Vektor $\xi \in V$, wenn gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n - \xi\| = 0. \quad (11.1)$$

b) **Cauchyfolge**, wenn gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \forall n, m \geq n_0 \|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Beachten Sie, dass $\|x\| \in \mathbb{R} \forall x \in V$ gilt. Somit steht “ $\lim_{n \rightarrow \infty}$ ” in (11.1) für den altbekannten Limes einer **reellen** Zahlenfolge.

Im Folgenden steht \mathbb{K} immer für die Wahlmöglichkeit zwischen \mathbb{R} und \mathbb{C} .

Definition 11.1.2 Ein normierter Vektorraum, in dem alle Cauchyfolgen konvergent sind, heißt **vollständig** oder auch **Banachraum**. Ein Banachraum, dessen Norm von einem Skalarprodukt induziert ist, heißt außerdem **Hilbertraum**.

Neben dem (langweiligen) Beispiel des \mathbb{R}^n gibt es noch ein weiteres (für Ingenieure wichtiges) Beispiel, das wir bereits teilweise untersucht haben.

Definition 11.1.3 (L^p -Räume) Sei $1 \leq p < +\infty$ und sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine Menge, auf der Integrale definiert sind. In der Menge $L^p(D, \mathbb{K})$ seien dann all die Funktionen $F : D \rightarrow \mathbb{K}$ zusammengefasst, für die

$$\int_D |F(x)|^p dx < +\infty$$

gilt, wobei man Funktionen $F_1, F_2 : D \rightarrow \mathbb{K}$ als gleich ansieht, wenn sie fast überall gleich sind, d.h. wenn

$$\int_D |F_1(x) - F_2(x)|^p dx = 0$$

gilt. Auf $L^p(D, \mathbb{K})$ definiert man die Norm

$$\|F\|_p := \|F\|_{L^p(D, \mathbb{K})} := \left(\int_D |F(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad F \in L^p(D, \mathbb{K}).$$

Im Spezialfall $p = 2$ definiert man außerdem das Skalarprodukt

$$\langle F, G \rangle_2 := \langle F, G \rangle_{L^2(D, \mathbb{K})} := \int_D F(x) \overline{G(x)} dx; \quad F, G \in L^2(D, \mathbb{K}).$$

Hierbei steht $\overline{G(x)}$ für die komplexe Konjugation von $G(x)$. Im Fall $G(x) \in \mathbb{R}$ ist damit $\overline{G(x)} = G(x)$. Im Folgenden sei $L^p(D) := L^p(D, \mathbb{C})$.

Beachten Sie, dass $\|\cdot\|_2$ eine induzierte Norm ist: $\|F\|_2 = \sqrt{\langle F, F \rangle_2}$. Warum muss bei der Norm die p -te Wurzel gezogen werden? ¹ Warum müssen Funktionen als gleich angesehen werden, die fast überall gleich sind? ²

Satz 11.1.4 Für die in Definition 11.1.3 definierten Räume gilt: $L^p(D)$ ist stets ein Banachraum und $L^2(D)$ ist stets ein Hilbertraum.

Sehen wir uns ein paar Beispiele an:

Beispiel 11.1.5

a) Wir betrachten $L^1(\mathbb{R})$ und $F(x) := 1$, $G(x) := e^{-x^2}$. Offensichtlich gilt

$$\int_{\mathbb{R}} |F(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} 1 dx = +\infty.$$

¹ Weil sonst beispielsweise die Homogenität-Bedingung verletzt wäre.

² Wegen der positiven Definitheit: alle Funktionen F , für die $F = 0$ fast überall gilt, erfüllen $\|F\|_p = 0$, deswegen darf man sie nicht von der Nullfunktion unterscheiden können.

Dagegen ist (siehe Abschnitt 9.5)

$$\int_{\mathbb{R}} |G(x)| \, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} \, dx = \sqrt{\pi} < +\infty.$$

Somit gilt $F \notin L^1(\mathbb{R})$ und $G \in L^1(\mathbb{R})$.

- b) Sehen wir uns $F(x) := x^\alpha$, $x \in \mathbb{R}^+$, für ein festes $\alpha \in \mathbb{R}$ an und untersuchen, für welche p die Aussage $F \in L^p([1, +\infty[)$ gilt:

$$\begin{aligned} \int_1^{+\infty} |F(x)|^p \, dx &= \int_1^{+\infty} x^{\alpha p} \, dx = \lim_{M \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{1}{\alpha p + 1} x^{\alpha p + 1} \Big|_1^M, & \text{falls } \alpha p \neq -1 \\ \ln x \Big|_1^M, & \text{falls } \alpha p = -1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} +\infty, & \text{falls } \alpha p + 1 \geq 0 \\ -\frac{1}{\alpha p + 1}, & \text{falls } \alpha p + 1 < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Also gilt $F \in L^p([1, +\infty[)$ für alle p mit $\alpha p + 1 < 0$. Da dies nur für negative α geht, gilt (stets mit $1 \leq p < +\infty$)

$$\begin{aligned} F &\notin L^p([1, +\infty[) \text{ für alle } p, \text{ falls } \alpha \geq 0 \\ F &\in L^p([1, +\infty[) \Leftrightarrow p > -\frac{1}{\alpha}, \text{ falls } \alpha < 0. \end{aligned}$$

Z.B. ist also $F(x) := x^{-\frac{1}{2}}$ in allen $L^p([1, +\infty[)$ mit $p > 2$, aber beispielsweise nicht in $L^2([1, +\infty[)$.

◇

Wir haben in Teil I gesehen, wie man in endlich-dimensionalen Vektorräumen mit einem Orthonormalsystem eine Basisdarstellung gewinnt (siehe Abschnitt 2.2 und insbesondere Definition 2.2.14 und Satz 2.2.16). Wir werden nun sehen, wie dies allgemein aussieht, wenn die Räume nicht zwingend endlich-dimensional sind.

Definition 11.1.6 Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum. Ein Orthonormalsystem (ONS) $M \subset H$ (d.h. für alle $x, y \in M$ mit $x \neq y$ gilt $\langle x, y \rangle = 0$ und für alle $x \in M$ ist $\|x\| = 1$) heißt **vollständig**, wenn folgendes gilt:

Existiert ein $z \in H$, so dass $\langle z, x \rangle = 0$ für alle $x \in M$, so ist $z = 0$.

Ein vollständiges ONS wird auch **Orthonormalbasis** (ONB) genannt.

Nur der Nullvektor ist also orthogonal zu einem vollständigen ONS. Wir sehen uns zwei Beispiele an.

Beispiel 11.1.7

a) Das Funktionensystem $\{F_{n,j}\}_{n=1,2,\dots; j=1,2}$ mit

$$F_{n,1}(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt), \quad F_{n,2}(t) := \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt), \quad t \in [0, 2\pi],$$

ist zwar orthonormal in $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$, wie man als einfache Integrationsübung nachprüfen kann:

$$\langle F_{n,j}, F_{m,k} \rangle_{L^2([0,2\pi])} = \delta_{nm} \delta_{jk} \quad \forall n, m = 1, 2, \dots; \forall j = 1, 2.$$

Jedoch ist es nicht vollständig, denn jede konstante Funktion ist orthogonal zu diesem ONS:

$$\int_0^{2\pi} c \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt) dt = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} c \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt) dt = 0 \quad \forall n = 1, 2, \dots \quad \forall c \in \mathbb{R}.$$

Mit größerem mathematischen Aufwand kann man zeigen, dass man durch Ergänzung der konstanten Funktion

$$F_{0,1}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad t \in [0, 2\pi],$$

in der Tat ein vollständiges Orthonormalsystem in $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ erhält.

b) Die Funktionen

$$G_n(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{int}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad n \in \mathbb{Z},$$

bilden ein ONS in $L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$, denn

$$\begin{aligned} \langle G_n, G_m \rangle_{L^2([0,2\pi], \mathbb{C})} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} \overline{e^{imt}} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{int} e^{-imt} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \frac{1}{i(n-m)} e^{i(n-m)t} \Big|_0^{2\pi}, & \text{falls } n \neq m \\ t \Big|_0^{2\pi}, & \text{falls } n = m \end{cases} \\ &= \frac{1}{2\pi} \begin{cases} \frac{1}{i(n-m)} (1 - 1), & \text{falls } n \neq m \\ 2\pi - 0, & \text{falls } n = m \end{cases} \\ &= \delta_{nm}. \end{aligned}$$

Auch hier kann man mit größerem mathematischen Aufwand nachweisen, dass $\{G_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ auch vollständig ist. Interessant ist übrigens hier der Zusammenhang zum Teil a) dieses Beispiels über die Euler'sche Formel:

$$e^{int} = \cos(nt) + i \sin(nt).$$

Für andere Zeitintervalle $[0, T]$, $T > 0$, kann übrigens

$$G_n(t) := \frac{1}{\sqrt{T}} e^{in \frac{2\pi}{T} t}, \quad t \in [0, T], \quad n \in \mathbb{Z},$$

als ONB von $L^2([0, T], \mathbb{C})$ verwendet werden, wie eine einfache Substitution zeigt. \diamond

Satz 11.1.8 (Hauptsatz für Orthonormalbasen) Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ein (unendliches) Orthonormalsystem in H . Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

1. $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist vollständig.
2. Jedes $y \in H$ lässt sich in eine **Fourierreihe** entwickeln:

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \langle y, x_n \rangle x_n.$$

3. Es gelten die **Parseval-Identitäten**: Für alle $y, z \in H$ ist

$$\langle y, z \rangle = \sum_{n=0}^{\infty} \langle y, x_n \rangle \overline{\langle z, x_n \rangle}$$

und insbesondere

$$\|y\|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |\langle y, x_n \rangle|^2.$$

11.2 Diskrete Fouriertransformation

Aus dem vorherigen Beispiel wissen wir somit aufgrund des Satzes 11.1.8, dass jedes $F \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ darstellbar ist als Fourierreihe

$$F = \langle F, F_{0,1} \rangle_2 F_{0,1} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \langle F, F_{n,j} \rangle_2 F_{n,j},$$

d.h. genauer gesagt als

$$F(t) = \int_0^{2\pi} F(s) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} ds \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_0^{2\pi} F(s) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(ns) ds \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nt) + \int_0^{2\pi} F(s) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(ns) ds \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin(nt) \right], \quad t \in [0, 2\pi]. \quad (11.2)$$

Übrigens kann man, wegen der Definition der L^p -Räume, nur davon ausgehen, dass F und seine Fourierreihe *fast überall* gleich sind. Das ist aber im Folgenden von untergeordneter Bedeutung.

Da man die Funktionen $\sin(nt)$ und $\cos(nt)$ als Wellen unterschiedlicher Frequenzen ansehen kann, bedeutet (11.2) eine Zerlegung des "Signals" F in einzelne Wellen. Die Koeffizienten $\langle F, F_{n,j} \rangle_2$ entsprechen dann den Amplituden. Dieses so genannte **Fourierspektrum** erlaubt eine Analyse von F . Man erfährt beispielsweise, ob vor allem hoch- oder niedrigfrequente Anteile in F enthalten sind.

Analoges gilt für $F \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})$:

$$F = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \langle F, G_n \rangle_{L^2([0, 2\pi], \mathbb{C})} G_n,$$

d.h.

$$F(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_0^{2\pi} F(s) e^{-ins} ds e^{int}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

Die Folge aller Koeffizienten $(\langle F, F_{n,j} \rangle)_{n,j}$ bzw. $(\langle F, G_n \rangle)_n$ einer Funktion F nennt man die **diskrete Fourier-Transformierte** von F . Die Zuordnung $F \mapsto (\langle F, F_{n,j} \rangle)_{n,j}$ bzw. $F \mapsto (\langle F, G_n \rangle)_n$ heißt **diskrete Fourier-Transformation**. Im Englischen wird dies namentlich nicht unterschieden, beides heißt **discrete Fourier transform**. Die Transformation ist injektiv, da F mittels der Fourierreihe aus der Transformierten wieder rekonstruiert werden kann. Es geht also beim Transformieren keine Information verloren. Ein Beispiel zeigt Abbildung 11.1.

Da sich die diskrete Fourier-Transformation auf Funktionen auf $[0, 2\pi]$ bezieht, wird sie für 2π -periodische Funktionen verwendet, also für Funktionen f mit $f(x) = f(x + 2\pi) \forall x$.

In der Praxis stellt sich die Frage, wie man die diskrete Fouriertransformation effizient berechnen kann, wenn man f nur auf einem **Punktgitter** $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 2\pi$ gegeben hat. Hierfür schreiben wir die Fourierreihe von $f \in L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ ein wenig um:

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)), \quad x \in [0, 2\pi],$$

wobei

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt, \quad k = 0, 1, \dots$$

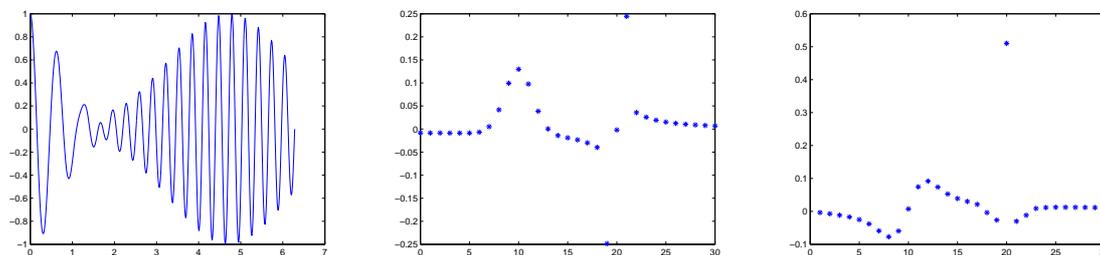


Abbildung 11.1: Diskrete Fouriertransformierte der Funktion $f(x) = \cos(10x)e^{-x^2} + \sin(20x)e^{-0.25(x-1.5\pi)^2}$ (links): das mittlere Bild zeigt die Koeffizienten $a_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt$, und das rechte Bild zeigt die Koeffizienten $b_k := \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt$. Die Koeffizienten spiegeln die dominanten Anteile von $\cos(10x)$ und $\sin(20x)$ und ihre unterschiedliche Amplitudenmodulation wider.

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad k = 1, 2, \dots$$

Ferner beschränken wir uns auf den Fall eines äquidistanten Gitters, d.h. $x_j = jh$; $j = 0, \dots, N$; mit $h := \frac{2\pi}{N}$ (Schrittweite). In diesem Fall können die a_k und b_k mit einem Algorithmus sehr effizient berechnet werden, den man die **schnelle Fouriertransformation** (fast Fourier transform, FFT) nennt (siehe beispielsweise [8, S. 330ff]).

11.3 Die (kontinuierliche) Fourier-Transformation

Definition 11.3.1 Für Funktionen $f \in L^1(\mathbb{R})$ wird die **Fourier-Transformation** $\mathcal{F} : f \mapsto F$ wie folgt definiert:

$$F(\omega) := \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{R}.$$

F heißt **Fourier-Transformierte** von f . In den Ingenieurwissenschaften ist es üblich (wie hier), die Originalfunktion mit einem kleinen Buchstaben zu bezeichnen (hier f) und die Transformierte mit dem entsprechenden Großbuchstaben (hier F). Weitere bei Ingenieuren übliche Notationen sind $F(\omega) = \mathcal{F}\{f(t)\}$ und die so genannte **F-Korrespondenz**:

$$f(t) \circ \longrightarrow F(\omega).$$

Die Fourier-Transformation ist in der Tat für alle $F \in L^1(\mathbb{R})$ definierbar, denn die Dreiecksungleichung für Integrale liefert

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| |e^{-i\omega t}| dt$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$$

für alle $\omega \in \mathbb{R}$.

Beispiel 11.3.2 Sei

$$f(t) := \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad a > 0.$$

Die Fourier-Transformierte hiervon ist

$$\begin{aligned} F(\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-at}e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{-(a+i\omega)} e^{-(a+i\omega)t} \Big|_0^M \\ &= -\frac{1}{a+i\omega} \left[\lim_{M \rightarrow \infty} (e^{-i\omega M} e^{-aM}) - 1 \right] \end{aligned}$$

Da $|e^{-i\omega M}| = 1$ gilt, folgt somit

$$F(\omega) = \frac{1}{a+i\omega},$$

d.h.

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad a > 0 \quad \circ \longrightarrow \bullet \quad F(\omega) = \frac{1}{a+i\omega}.$$

◇

Es gibt verschiedene Rechenregeln, die es erlauben, die Fourier-Transformierte komplizierter Funktionen auf die Transformation einfacher Funktionen zurückzuführen.

Satz 11.3.3 Seien $f, g \in L^1(\mathbb{R})$ und F, G die zugehörigen Fourier-Transformierten, sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $a, \Omega \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

- a) **Linearität:** $\alpha f(t) + \beta g(t) \circ \longrightarrow \bullet \alpha F(\omega) + \beta G(\omega)$
- b) **Konjugation:** $\overline{f(t)} \circ \longrightarrow \bullet \overline{F(-\omega)}$
- c) **Streckung:** $f(\gamma t) \circ \longrightarrow \bullet \frac{1}{|\gamma|} F\left(\frac{\omega}{\gamma}\right)$
- d) **Translation in der Zeit:** $f(t-a) \circ \longrightarrow \bullet e^{-i\omega a} F(\omega)$

e) **Translation in der Frequenz:** $e^{i\Omega t} f(t) \circ \longrightarrow F(\omega - \Omega)$

f) **Symmetrien:** f gerade $\Leftrightarrow F$ gerade

f ungerade $\Leftrightarrow F$ ungerade

(zur Erinnerung: f gerade $:\Leftrightarrow f(-x) = f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ (z.B. $f(x) = \cos x$), f ungerade $:\Leftrightarrow f(-x) = -f(x) \forall x \in \mathbb{R}$ (z.B. $f(x) = \sin x$))

Beispiel 11.3.4 Wir betrachten eine gedämpfte Schwingung (Amplitudenmodulation) der Form $f(t) = e^{-a|t|} \cos \Omega t$ für einen festen Parameter $a > 0$ und eine feste Frequenz $\Omega \in \mathbb{R}$. Da

$$\cos \Omega t = \operatorname{Re} e^{i\Omega t} = \frac{1}{2} (e^{i\Omega t} + e^{-i\Omega t})$$

gilt, können wir f schreiben als

$$f(t) = \frac{1}{2} e^{-a|t|} e^{i\Omega t} + \frac{1}{2} e^{-a|t|} e^{i(-\Omega)t}, \quad t \in \mathbb{R},$$

und Satz 11.3.3 e) verwenden. Hierzu benötigen wir

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(e^{-a|t|}) &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a|t|} e^{-i\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 e^{(a-i\omega)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-(a+i\omega)t} dt \\ &= \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{a-i\omega} e^{(a-i\omega)t} \Big|_{-M}^0 + \lim_{M \rightarrow \infty} \frac{1}{-(a+i\omega)} e^{-(a+i\omega)t} \Big|_0^M \\ &= \frac{1}{a-i\omega} + \frac{1}{a+i\omega} = \frac{a+i\omega + (a-i\omega)}{a^2 + \omega^2} = \frac{2a}{a^2 + \omega^2}. \end{aligned}$$

Mit Satz 11.3.3 a) und e) ist damit

$$F(\omega) = \frac{a}{a^2 + (\omega - \Omega)^2} + \frac{a}{a^2 + (\omega + \Omega)^2}.$$

◇

Ein weiterer interessanter Zusammenhang ergibt sich für differenzierbare Funktionen.

Satz 11.3.5 Sei $f \in L^1(\mathbb{R}) \cap C^1(\mathbb{R})$, so dass $f' \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$f'(t) \circ \longrightarrow i\omega F(\omega).$$

Die Fourier-Transformation macht also aus einer Ableitung eine Multiplikation.

Beweis: Partielle Integration liefert

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(t)e^{-i\omega t} dt &= \lim_{a,b \rightarrow \infty} \int_{-a}^b f'(t)e^{-i\omega t} dt \\ &= \lim_{a,b \rightarrow \infty} \left(f(t)e^{-i\omega t} \Big|_{-a}^b - \int_{-a}^b f(t)(-i\omega)e^{-i\omega t} dt \right). \end{aligned}$$

Da $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < +\infty$, muss $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} f(t) = 0$ gelten. Folglich erhält man (wegen $|e^{-i\omega t}| = 1 \forall \omega, t \in \mathbb{R}$)

$$\mathcal{F}(f') = i\omega \mathcal{F}(f).$$

■

Korollar 11.3.6 Sei $f \in C^{(n)}(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$, so dass $f', \dots, f^{(n)} \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt:

$$f^{(n)}(t) \circ \bullet (i\omega)^n F(\omega).$$

Der Beweis ist eine einfache vollständige Induktion, da $f^{(n)} = (f^{(n-1)})'$, also

$$f^{(n)}(t) \circ \bullet i\omega \mathcal{F} \left\{ f^{(n-1)}(t) \right\}.$$

Satz 11.3.7 Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ auf \mathbb{R} stetig differenzierbar bis auf die Unstetigkeitsstellen τ_1, \dots, τ_n . Ist $f' \in L^1(\mathbb{R})$, so gilt

$$f'(t) \circ \bullet i\omega F(\omega) - \sum_{k=1}^n [f(\tau_k+) - f(\tau_k-)] e^{-i\omega\tau_k},$$

wobei

$$f(\tau_k+) := \lim_{h \rightarrow 0+} f(\tau_k + h), \quad f(\tau_k-) := \lim_{h \rightarrow 0+} f(\tau_k - h).$$

Beispiel 11.3.8

a) Wir wissen bereits, dass

$$f(t) = \begin{cases} e^{-at}, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, \quad a > 0 \circ \bullet F(\omega) = \frac{1}{a + i\omega}.$$

Also erhalten wir ($\tau = 0$ ist die einzige Unstetigkeitsstelle)

$$\begin{aligned} f'(t) = \begin{cases} -ae^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases} \circ \bullet F(\omega) &= \frac{i\omega}{a + i\omega} - (e^{-a \cdot 0} - 0) e^{-i\omega \cdot 0} = \frac{i\omega}{a + i\omega} - 1 \\ &= -\frac{a}{a + i\omega}. \end{aligned}$$

Dies hätte man für dieses Beispiel natürlich auch mit der Linearität ermitteln können.

b) Die partielle Differentialgleichung

$$\Delta_x f(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} f(x, t) = 0,$$

wobei $c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ eine Konstante ist und $\Delta_x = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ der Laplace-Operator ist, beschreibt Wellenphänomene und wird daher **Wellengleichung** genannt. Man kann sie etwas vereinfachen, indem man die Zeitableitung durch eine Fouriertransformation (bzgl. t , bei festem x) beseitigt:

$$\Delta_x F(x, \omega) - \frac{1}{c^2} (i\omega)^2 F(x, \omega) = 0,$$

d.h.

$$\Delta_x F(x, \omega) + \frac{\omega^2}{c^2} F(x, \omega) = 0.$$

Die erhaltene Gleichung heißt **Helmholtzgleichung**.

◇

Es gibt drei weitere Sätze, die zu den grundlegenden Eigenschaften der Fourier-Transformation zählen.

Satz 11.3.9 (Parseval-Plancherel-Gleichung, Energiegleichung) Für alle $f \in L^1(\mathbb{R})$ und ihre zugehörigen Fourier-Transformierten F gilt

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |F(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt,$$

d.h. $\|F\|_{L^2(\mathbb{R})} = \sqrt{2\pi} \|f\|_{L^2(\mathbb{R})}$.

Satz 11.3.10 (Inverse Fourier-Transformation) Alle Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, die die folgenden Eigenschaften haben

- $f \in L^1(\mathbb{R})$,
- in jedem Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ($a, b \in \mathbb{R}$) ist f (bis auf höchstens endlich viele Ausnahmestellen) differenzierbar,
- für alle $t \in \mathbb{R}$ ist $f(t) = \frac{1}{2}(f(t-) + f(t+))$,

können aus ihrer Fourier-Transformierten F rekonstruiert werden:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{i\omega t} d\omega =: \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Hierzu noch drei Anmerkungen:

- Voraussetzung b) bedeutet beispielsweise, dass es nicht erlaubt ist, dass f nur auf $\mathbb{R} \setminus \{\frac{1}{n} \mid n = 1, 2, \dots\}$ differenzierbar ist, da z.B. $[0, 1]$ (und jedes andere Intervall der Form $[0, b]$, $b > 0$) unendlich viele Ausnahmestellen beinhalten würde.
- Voraussetzung c) wird u.a. von allen stetigen Funktionen f erfüllt, da für diese an allen $t \in \mathbb{R}$ gilt: $f(t+) = f(t-) = f(t)$.
- Beachten Sie, dass

$$\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2\pi} F(-\omega)\right\}$$

gilt.

Der folgende Satz wird im Deutschen auch (Nyquist-Shannon'scher) Abtastatz genannt.

Satz 11.3.11 (Nyquist-Shannon Sampling Theorem) Sei $f \in L^1(\mathbb{R})$ gegeben, so dass für die Fourier-Transformierte F gilt: $F(\omega) = 0$ für alle $\omega \in \mathbb{R} \setminus [-\Omega, \Omega]$ mit $\Omega > 0$. Ferner sei F (mit höchstens endlich vielen Ausnahmestellen) stetig auf \mathbb{R} . Ist nun eine Schrittweite h gegeben, die hinreichend klein ist, so dass $\frac{2\pi}{h} > 2\Omega$ gilt, so ist f allein durch die Werte an den Stellen $f(kh)$, $k \in \mathbb{Z}$, gegeben:

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kh) \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{h} (t - kh) \right] \quad \forall t \in \mathbb{R}, \quad (11.3)$$

wobei

$$\operatorname{sinc} x := \operatorname{si} x := \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{falls } x \neq 0 \\ 1, & \text{falls } x = 0 \end{cases}$$

die so genannte Spaltfunktion ist.

Den Wert $(\omega_S :=) \frac{2\pi}{h}$ nennt man hierbei auch die **Abtastfrequenz**.

Was der Abtastatz bedeutet, wird klar, wenn man überlegt, was passiert, wenn man f nicht fein genug misst, wenn also die Abtastfrequenz zu klein ist: $\omega_S < 2\Omega$ (d.h. wenn die Messabstände h zu groß sind). Dann muss f nicht mit der rechten Seite in (11.3) übereinstimmen, die wir hier mal $\tilde{f}(t)$ nennen. Es gilt dann an den Messpunkten $\{jh\}_{j \in \mathbb{Z}}$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(jh) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kh) \operatorname{sinc} \left[\frac{\pi}{h} (jh - kh) \right] \\ &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(kh) \underbrace{\operatorname{sinc} [\pi(j - k)]}_{=\delta_{jk}} \\ &= f(jh). \end{aligned}$$

Somit sind f und \tilde{f} allein aufgrund der Messwerte nicht unterscheidbar. Wir wissen also zu wenig über die gemessene Funktion. Sehen wir uns die Fourier-Transformierten F und \tilde{F} von f und \tilde{f} genauer an. Man kann zeigen, dass

$$\text{sinc } t \circ \bullet \begin{cases} \pi, & \text{falls } |\omega| < 1 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{falls } |\omega| = 1 \\ 0, & \text{falls } |\omega| > 1 \end{cases}$$

gilt, so dass nach Satz 11.3.3 d) gilt:

$$\text{sinc}(t - k\pi) \circ \bullet e^{-i\omega k\pi} \begin{cases} \pi, & \text{falls } |\omega| < 1 \\ \frac{\pi}{2}, & \text{falls } |\omega| = 1 \\ 0, & \text{falls } |\omega| > 1 \end{cases} .$$

Mit Satz 11.3.3 c) erhält man dann

$$\text{sinc} \left[\frac{\pi}{h}(t - kh) \right] = \text{sinc} \left(\frac{\pi}{h}t - k\pi \right) \circ \bullet \frac{h}{\pi} e^{-i\omega kh} \begin{cases} \pi, & \text{falls } |\omega| < \frac{\pi}{h} \\ \frac{\pi}{2}, & \text{falls } |\omega| = \frac{\pi}{h} \\ 0, & \text{falls } |\omega| > \frac{\pi}{h} \end{cases} .$$

Damit ist klar, dass $\tilde{F}(\omega) = 0$ für $|\omega| > \frac{\pi}{h} = \frac{1}{2}\omega_S$ gilt. Unsere nur scheinbare Darstellung \tilde{f} von f hat also ein Frequenzspektrum, das auch für $\frac{1}{2}\omega_S < |\omega| \leq \Omega$ verschwindet und nicht nur (wie bei f) für $|\omega| > \Omega$. Die Frequenzanteile (die ‘Energie’), die f in diesem Bereich hat, werden bei der falschen Darstellung \tilde{f} in den Frequenzbereich $[-\frac{\omega_S}{2}, \frac{\omega_S}{2}]$ verlagert. Es handelt sich also wirklich um zwei verschiedene Funktionen, die durch die Messungen nicht unterscheidbar sind. Dieses Phänomen wird als **Aliasing** bezeichnet (siehe Abbildung 11.2).

Fazit: Ein Signal, das keine Frequenzen oberhalb Ω hat (bandlimitiertes Signal), kann aus diskreten Werten rekonstruiert werden, solange in Zeitabständen kleiner als $\frac{\pi}{\Omega}$ gemessen wird (und zwar theoretisch unendlich lang). Längere Abstände können zu Fehlinterpretationen führen. Bei einer Fouriertransformation (FT) bezüglich des Orts anstatt der Zeit wird oft k statt ω als Variable der Transformierten geschrieben, also

$$F(k) = \mathcal{F}\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ikx} dx$$

und

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}\{F(k)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(k)e^{ikx} dk.$$

Zum Abschluss sei noch auf Tabelle 11.1 verwiesen, wo verschiedene Fouriertransformierte aufgeführt sind.

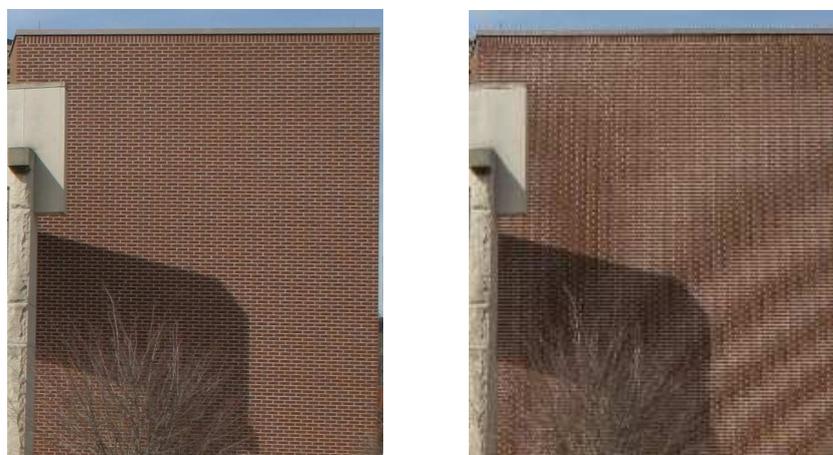


Abbildung 11.2: Beispiel für ein Aliasing: Beide Bilder zeigen eine Ziegelwand, jedoch mit unterschiedlichen Abtastfrequenzen, d.h. Pixeln pro Längeneinheit. Die Struktur der Wand ist periodisch, so dass nach dem Abtastatz eine korrekte Wiedergabe zwar möglich ist, hierfür jedoch eine gewisse Mindest-Abtastfrequenz erforderlich ist, was im linken Bild erfüllt wird. Rechts sind die Abtastpunkte jedoch zu weit voneinander entfernt, wodurch ein falscher Eindruck entsteht. Ein Anteil mit einer niedrigeren Frequenz, also einer größeren Wellenlänge, entsteht. (Bildquelle: Wikipedia)

$f(t)$	$F(\omega)$
$\begin{cases} e^{-at}, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}, a > 0$	$\frac{1}{a+i\omega}$
$e^{-a t }, a > 0$	$\frac{2a}{\omega^2+a^2}$
$\frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \exp\left(-\frac{t^2}{4a}\right), a > 0$	$e^{-a\omega^2}$
$\frac{1}{t^2+a^2}, a > 0$	$\frac{\pi}{a} e^{-a \omega }$
$\frac{t}{t^2+a^2}, a > 0$	$-i\pi e^{-a \omega } \text{sign } \omega$
$\sin(at^2), a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(\frac{\omega^2}{4a} + \frac{\pi}{4}\right)$
$\cos(at^2), a > 0$	$\sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(\frac{\omega^2}{4a} - \frac{\pi}{4}\right)$
$\begin{cases} 1, & t < a \\ 0, & t > a \end{cases}, a > 0$	$2a \text{sinc}(a\omega)$

Tabelle 11.1: Auswahl verschiedener Fourier-Transformierter.

Kapitel 12

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Wir haben bereits in Abschnitt 6.6 separable gewöhnliche Differentialgleichungen behandelt. Sie sollten diesen Abschnitt noch einmal wiederholen, bevor wir fortfahren.

12.1 Lineare Differentialgleichungen 1. Ordnung

Eine lineare Differentialgleichung 1. Ordnung hat die Form

$$y' + a(x)y = f(x) \quad (12.1)$$

(genauer: $y'(x) + a(x)y(x) = f(x)$), wobei a und f gegebene Funktionen sind und die Funktion y gesucht ist. Im Fall $f \equiv 0$ nennt man die Differentialgleichung **homogen**, ansonsten inhomogen. Der homogene Fall lässt sich als separable Differentialgleichung behandeln:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= -a(x)y, \\ \frac{1}{y} dy &= -a(x) dx, \\ \int \frac{1}{y} dy &= - \int a(x) dx, \\ \ln |y| + C_1 &= - \int a(x) dx \\ y(x) &= C_2 \exp \left(- \int a(x) dx \right). \end{aligned}$$

Es lässt sich leicht nachprüfen, dass dies in der Tat eine Lösung der homogenen Gleichung ist:

$$\begin{aligned} y'(x) &= C_2 \exp \left(- \int a(x) dx \right) \cdot \frac{d}{dx} \left[- \int a(x) dx \right] \\ &= y(x) \cdot [-a(x)]. \end{aligned}$$

Satz 12.1.1 Die allgemeine Lösung von $y' + a(x)y = 0$ mit stetigem a ist

$$y(x) = C \exp\left(-\int a(x) dx\right), \quad C \in \mathbb{R} \text{ konstant.}$$

Beispiel 12.1.2 Wir betrachten die Gleichung

$$y' + \frac{x}{1+x^2} y = 0.$$

Die allgemeine Lösung ist:

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 \exp\left(-\int \frac{x}{1+x^2} dx\right) \\ &= C_1 \exp\left(-\frac{1}{2} \int \frac{2x}{1+x^2} dx\right) \\ &= C_1 \exp\left(-\frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C_2\right) \\ &= C_3 \exp \ln(1+x^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= C_3 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}. \end{aligned}$$

Eine Probe ist nicht notwendig, kann aber nie schaden:

$$\begin{aligned} y'(x) &= C_3 \left(-\frac{1}{2}\right) (1+x^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x \\ &= -C_3 \frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \underbrace{C_3 \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}}_{=y(x)} \cdot \left(-\frac{x}{1+x^2}\right). \end{aligned}$$

Inhomogene lineare Differentialgleichungen löst man mit einem Prinzip, das man **Variation der Konstanten** nennt:

1. Bestimme zunächst die allgemeine Lösung y_h des homogenen Problems (nach Satz 12.1.1).
2. Betrachte die Konstante C in y_h nun als Funktion $C(x)$ und setze die veränderte Lösung in die inhomogene Gleichung ein.
3. Bestimme ein $C(x)$, das die neue Gleichung löst, und damit eine spezielle (“**partikuläre**”) inhomogene Lösung

$$y_p = C(x) \exp\left(-\int a(x) dx\right).$$

4. Die allgemeine inhomogene Lösung hat die Form

$$y_h + y_p,$$

also “allgemeine homogene Lösung + partikuläre inhomogene Lösung” (vgl. lineare Gleichungssysteme).

◇

Beispiel 12.1.3 Sehen wir uns

$$y' + \frac{x}{1+x^2} y = x$$

an. Wir kennen bereits die allgemeine homogene Lösung:

$$y_h(x) = C \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Der Ansatz der Variation der Konstanten ist nun

$$y(x) = C(x) \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}.$$

Wir setzen den Ansatz in die inhomogene Gleichung ein:

$$\begin{aligned} C'(x) \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C(x) \left(-\frac{x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \right) + \frac{x}{1+x^2} \frac{C(x)}{\sqrt{1+x^2}} &= x \\ \Leftrightarrow C'(x) &= x\sqrt{1+x^2}. \end{aligned}$$

Es gilt ($1+x^2 =: t$)

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{1+x^2} dx &= \frac{1}{2} \int 2x\sqrt{1+x^2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sqrt{t} dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} + \text{const} \\ &= \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}} + \text{const}. \end{aligned}$$

Der Zusatz “+ const” muss uns nicht interessieren, da wir nur eine Lösung brauchen. Wir wählen

$$C(x) = \frac{1}{3} (1+x^2)^{\frac{3}{2}}$$

und somit die partikuläre Lösung

$$y_p(x) = \frac{1}{3}(1 + x^2).$$

Also ist die allgemeine inhomogene Lösung:

$$y(x) = C \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \frac{1}{3}(1+x^2), \quad C \in \mathbb{R} \text{ konstant.}$$

◇

12.2 Exakte Differentialgleichungen

Sei V beispielsweise ein Potential im \mathbb{R}^2 (z.B. ein elektrisches Potential). Dann gibt es Linien (Äquipotentiallinien), längs denen $V(x, y) = \text{const}$ gilt (siehe z.B. Abbildung 12.1).

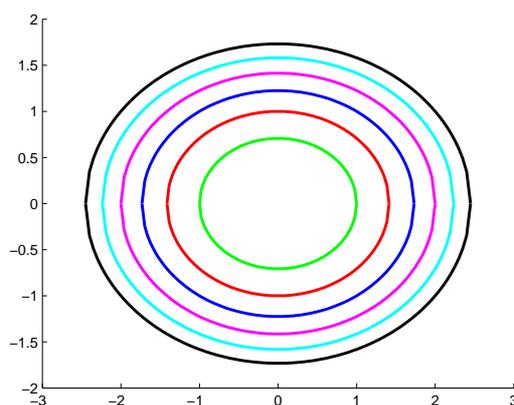


Abbildung 12.1: Einige Äquipotentiallinien des Potentials $V(x, y) = x^2 + 2y^2$.

Stellt man eine Linie oder zumindest ein Stück davon als Graph $y(x)$ dar, so gilt

$$V(x, y(x)) = \text{const}$$

und damit nach der Kettenregel

$$\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y} \right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial x} \\ \frac{\partial y(x)}{\partial x} \end{pmatrix} = 0,$$

also

$$\frac{\partial V(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{\partial y(x)}{\partial x} = 0. \quad (12.2)$$

Eine Differentialgleichung der Form (12.2) nennt man **exakt**. Es stellt sich die Frage, wie man einer Gleichung

$$A(x, y) + B(x, y)y' = 0 \quad (12.3)$$

ansieht, ob sie exakt ist. Dies ist ein Problem, das wir bereits in Mathe II gelöst haben, denn wir suchen eine Stammfunktion V , die $A = \frac{\partial V}{\partial x}$ und $B = \frac{\partial V}{\partial y}$ erfüllt. Also muss die Integrabilitätsbedingung (siehe Satz 7.9.9 und Satz 7.9.15) gelten:

$$\frac{\partial A}{\partial y} = \frac{\partial B}{\partial x}.$$

Bei einer Gleichung der Form (12.3) wird nun wie folgt vorgegangen:

1. Prüfe auf Exaktheit mit Hilfe der Integrabilitätsbedingung und fahre bei positivem Ergebnis fort.
2. Bestimme eine Stammfunktion V (wie gehabt).
3. Löse $V(x, y) = \text{const}$ (sofern möglich) nach y auf.

Beispiel 12.2.1

a) Betrachten wir das Anfangswertproblem

$$2x \sin y + x^2 \cos y y' = 0, \quad y(1) = \frac{\pi}{4}.$$

Also ist $A(x, y) = 2x \sin y$ und $B(x, y) = x^2 \cos y$. Da

$$\frac{\partial A}{\partial y} = 2x \cos y, \quad \frac{\partial B}{\partial x} = 2x \cos y,$$

ist die Integrabilitätsbedingung erfüllt. Ferner sind A und B auf dem ganzen \mathbb{R}^2 , der sternförmig ist, definiert. Also gibt es eine Stammfunktion. Wir bestimmen sie:

$$\begin{aligned} V(x, y) &= \int 2x \sin y \, dx = x^2 \sin y + C_1(y), \\ V(x, y) &= \int x^2 \cos y \, dy = x^2 \sin y + C_2(x). \end{aligned}$$

Somit ist

$$V(x, y) = x^2 \sin y$$

eine Stammfunktion ($-V$ wäre das Potential). Wir suchen Lösungen mit dem Ansatz

$$x^2 \sin y(x) = C, \quad C \in \mathbb{R} \text{ konstant.} \quad (12.4)$$

Dies ergibt

$$\sin y(x) = \frac{C}{x^2} \quad (x \neq 0)$$

und schließlich

$$y(x) = \arcsin \frac{C}{x^2}, \quad x \neq 0.$$

Mit der Anfangsbedingung $y(1) = \frac{\pi}{4}$, also $\arcsin C = \frac{\pi}{4}$, erhalten wir $C = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Also ist

$$y(x) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}x^2}.$$

Zu klären ist noch der Definitionsbereich. Da $\sin \varphi \in [-1, 1] \forall \varphi \in \mathbb{R}$ gilt, ist der arcsin nur auf $[-1, 1]$ definiert. Also muss

$$\frac{1}{\sqrt{2}x^2} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{2}x^2 \geq 1 \Leftrightarrow x^2 \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |x| \geq \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$$

gelten. Da die Anfangsbedingung eine Lösung für positives x fordert, erhalten wir somit

$$y(x) = \arcsin \frac{1}{\sqrt{2}x^2}, \quad x \geq \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

Übrigens hätte man die Anfangsbedingung bereits in (12.4) einbauen können und wäre zum gleichen Ergebnis gekommen. Rechnen Sie es selbst nach! ¹

b) Die Gleichung

$$x^2 e^y + 2x e^y y' = 0$$

ist nicht exakt, denn

$$\frac{\partial}{\partial y} (x^2 e^y) = x^2 e^y, \quad \frac{\partial}{\partial x} (2x e^y) = 2e^y.$$

c) Die Gleichung

$$e^x \sin x + e^y (\cos y) y' = 0$$

ist exakt, da

$$\frac{\partial}{\partial y} (e^x \sin x) = 0 = \frac{\partial}{\partial x} (e^y \cos y).$$

¹Aus (12.4) wird mit der Anfangsbedingung $y(1) = \frac{\pi}{4}$ die Gleichung $x^2 \sin y(x) = 1^2 \sin \frac{\pi}{4}$ (wir kennen praktisch einen Punkt auf der Äquipotentiallinie), also $x^2 \sin y(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Das Auflösen führt zum gleichen Ergebnis.

Als Stammfunktionen kann man hier

$$V(x, y) = \frac{\sin x - \cos x}{2} e^x + \frac{\sin y + \cos y}{2} e^y$$

ermitteln, jedoch ist ein Auflösen von $V(x, y) = \text{const}$ nach y (oder x) ein hoffnungsloses Unterfangen.

◇

In manchen Fällen ist eine Auflösung $y(x)$ nicht möglich, jedoch eine Notlösung $x(y)$.

12.3 Lineare Differentialgleichungen 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten

Wir betrachten hier Gleichungen der Form

$$y'' + ay' + by = f(x), \quad (12.5)$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ gegebene Konstanten sind und f eine gegebene Funktion ist. Es gelten hierfür die folgenden Aussagen:

Satz 12.3.1 (Superpositionsprinzip) Für (12.5) gilt im homogenen Fall ($f \equiv 0$): Linearkombinationen beliebiger Lösungen sind wieder eine Lösung.

Satz 12.3.2 Ist (12.5) homogen, so ist die Lösungsmenge stets zweidimensional. Zwei Funktionen y_1, y_2 , für die gilt, dass

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R} \text{ beliebig,}$$

alle Lösungen von $y'' + ay' + by = 0$ beschreibt, nennt man ein **Fundamentalsystem** der Gleichung.

Satz 12.3.3 Die allgemeine Lösung der inhomogenen Differentialgleichung (12.5) hat die Form
allgemeine homogene Lösung + partikuläre inhomogene Lösung.

Die Vorgehensweise ähnelt also der bei linearen Differentialgleichungen 1. Ordnung. Jedoch wird die allgemeine homogene Lösung anders bestimmt. Hierfür verwendet man den Ansatz $y(x) = e^{\lambda x}$ mit noch zu bestimmender Konstante λ . Aus

$$y'' + ay' + by = 0 \quad (12.6)$$

wird dann

$$\lambda^2 e^{\lambda x} + a\lambda e^{\lambda x} + b e^{\lambda x} = 0$$

und somit

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (12.7)$$

Man nennt die linke Seite von (12.7) das **charakteristische Polynom** der Differentialgleichung. Wir wissen alle, dass es hierfür verschiedene Arten von Lösungen geben kann. Davon hängt auch die Lösung von (12.6) ab.

Satz 12.3.4 *Je nach der Art der Lösungen λ_1 und λ_2 von (12.7) ergeben sich die folgenden Fundamentalsysteme für (12.6):*

- a) *Ist $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$, so sind $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ und $y_2(x) = e^{\lambda_2 x}$.*
- b) *Ist $\lambda_1 = \lambda_2$ (und damit zwangsläufig auch $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$), so sind $y_1(x) = e^{\lambda_1 x}$ und $y_2(x) = x e^{\lambda_1 x}$.*
- c) *Ist $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, also $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$; $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, so sind $y_1(x) = e^{\alpha x} \cos(\beta x)$ und $y_2(x) = e^{\alpha x} \sin(\beta x)$.*

Stellen Sie die drei Fälle mit Hilfe von a und b dar! ²

Beispiel 12.3.5 Wir betrachten einen **Schwingkreis**, d.h. einen Schaltkreis mit einer Spule der Induktivität L , einem Kondensator mit der Kapazität C und einem Ohm'schen Widerstand R (siehe Abbildung 12.2).

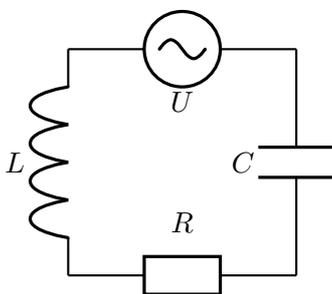


Abbildung 12.2: Schwingkreis

Hierfür gilt (U : angelegte Spannung, Q : Ladung):

$$L\ddot{Q} + R\dot{Q} + \frac{1}{C}Q = U,$$

²Wegen $\lambda_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$ gilt: Fall a) $\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} > b$, Fall b) $\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} = b$, Fall c) $\Leftrightarrow \frac{a^2}{4} < b$ (dann ist $\alpha = -\frac{a}{2}$, $\beta = \sqrt{b - \frac{a^2}{4}}$).

also

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = \frac{U}{L}.$$

Wir untersuchen zunächst den homogenen Fall. Sei also $U = 0$ und ferner $Q(0) \neq 0$ (die Spannung wird abgeklemmt, und ein Kurzschluss wird erzeugt). Das charakteristische Polynom ist

$$\lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC}.$$

Die Nullstellen sind

$$\lambda_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}}.$$

Wichtig für die Wahl des Fundamentalsystems ist die **Diskriminante** $D := \frac{R^2}{L^2} - \frac{4}{LC}$. Es liegt somit keine Schwingung vor, wenn

$$\begin{aligned} D \geq 0 &\iff \frac{R^2}{L^2} \geq \frac{4}{LC} \\ &\iff R^2 \geq 4 \frac{L}{C} \\ &\iff R \geq 2 \sqrt{\frac{L}{C}} \end{aligned}$$

gilt. Dies nennt man den "Kriechfall", der Widerstand ist zu groß. Es gilt:

$$\begin{aligned} Q(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 e^{\lambda_2 t}, \text{ falls } D > 0, \\ Q(t) &= C_1 e^{\lambda_1 t} + C_2 t e^{\lambda_1 t}, \text{ falls } D = 0. \end{aligned}$$

Beachten Sie, dass $\lambda_1, \lambda_2 < 0$ gilt. Die Ladungen nehmen also exponentiell ab. Der Strom kommt sehr schnell zum Erliegen.

Eine Schwingung liegt aber bei $D < 0$ vor. Dann gilt:

$$Q(t) = e^{-\frac{R}{2L} t} (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t)$$

mit der Kreisfrequenz

$$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}}.$$

Dies ist die **Eigenfrequenz** des Schwingkreises. Interessant ist auch der Spezialfall ohne Ohm'schen Widerstand (supraleitender Schwingkreis). Dann gilt:

$$Q(t) = C_1 \cos(\omega t) + C_2 \sin(\omega t), \quad \omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}.$$

Ein Ohm'scher Widerstand senkt also die Frequenz. Da für die Schwingungsdauer T gilt (f : Frequenz)

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{1}{T},$$

ergibt sich

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \iff T = 2\pi\sqrt{LC} \quad \textbf{Thomson-Gleichung}$$

◇

Eine partikuläre inhomogene Lösung kann man auf verschiedene Arten bestimmen. Ein Weg ist folgender: Für bestimmte rechte Seiten wählt man bestimmte Ansatzfunktionen. Dies geht wie folgt:

Verfahren 12.3.6 (Ansatz vom Typ der rechten Seite) Für die Differentialgleichung

$$y'' + ay' + by = f(x)$$

mit charakteristischem Polynom $\chi(\lambda) := \lambda^2 + a\lambda + b$ wählt man die folgenden Ansatzfunktionen in Abhängigkeit der vorliegenden rechten Seite f :

- a) Ist $f(x) = p(x)e^{\gamma x}$, wobei p ein (komplexes) Polynom vom Grad $\leq m$ ist und $\gamma \in \mathbb{C}$ konstant ist, so setzt man

$$y_p(x) = x^k P(x)e^{\gamma x}$$

an, wenn γ eine k -fache Nullstelle von χ ist ($k \in \{0, 1, 2\}$), wobei P ein zu bestimmendes Polynom vom Grad $\leq m$ ist.

- b) Ist $f(x) = e^{\gamma x}(p(x) \cos(\sigma x) + q(x) \sin(\sigma x))$ für Konstanten $\gamma, \sigma \in \mathbb{R}$ und reelle Polynome p und q vom Grad $\leq m$, so wird

$$y_p(x) = \operatorname{Re} \left(x^k P(x) e^{(\gamma + i\sigma)x} \right)$$

als Ansatz verwendet. Hier ist wieder P ein zu bestimmendes (komplexes) Polynom vom Grad $\leq m$ und k die Vielfachheit von $\gamma + i\sigma$ als Nullstelle von χ .

Beispiel 12.3.7 Wir betrachten den inhomogenen Fall beim Schwingkreis mit einer angelegten Spannungsquelle:

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = \frac{U_0}{L} \cos(\tilde{\omega}t), \quad \tilde{\omega} > 0 \text{ konstant.} \quad (12.8)$$

Man spricht hierbei auch von einer "erzwungenen Schwingung".

Das charakteristische Polynom ist

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 + \frac{R}{L} \lambda + \frac{1}{LC}$$

In der Notation von Verfahren 12.3.6 b) ist

$$\gamma = 0, \quad p \equiv \frac{U_0}{L}, \quad \sigma = \tilde{\omega}, \quad q \equiv 0.$$

Wir untersuchen zunächst den Sonderfall $\chi(i\tilde{\omega}) = 0$, d.h. $-\tilde{\omega}^2 + \frac{R}{L}i\tilde{\omega} + \frac{1}{LC} = 0 \Leftrightarrow R = 0$ und $\tilde{\omega}^2 = \frac{1}{LC}$, also im Fall ohne Ohm'schen Widerstand, wenn mit der Eigenfrequenz selbst angeregt wird ($\omega = \tilde{\omega}$).

Wir verwenden nun den Ansatz

$$Q_p(t) = \operatorname{Re} \left(t^1 P e^{(0+i\tilde{\omega})t} \right), \quad P \in \mathbb{R} \text{ konstant.}$$

Da die Einschränkung auf den Realteil unpraktisch ist, führt man eine so genannte **Komplexifizierung** der Gleichung durch:

$$\begin{aligned} \text{aus } f(x) &= e^{\gamma x} (p(x) \cos(\sigma x) + q(x) \sin(\sigma x)) \\ \text{wird } \tilde{f}(x) &= (p(x) - iq(x)) e^{(\gamma+i\sigma)x}. \end{aligned}$$

In unserem Fall heißt das, wir versuchen, die Differentialgleichung

$$\ddot{Q} + \frac{1}{LC} Q = \frac{U_0}{L} e^{i\tilde{\omega}t}$$

mit dem Ansatz

$$Q_p(t) = t P e^{i\tilde{\omega}t}$$

zu lösen. Einsetzen ergibt

$$\begin{aligned} 2Pi\tilde{\omega}e^{i\tilde{\omega}t} + tP(i\tilde{\omega})^2 e^{i\tilde{\omega}t} + \frac{1}{LC} tP e^{i\tilde{\omega}t} &= \frac{U_0}{L} e^{i\tilde{\omega}t} \\ \Leftrightarrow tP \underbrace{\left[-\tilde{\omega}^2 + \frac{1}{LC} \right]}_{=0} + 2Pi\tilde{\omega} &= \frac{U_0}{L} \\ \Leftrightarrow P &= \frac{U_0}{2i\tilde{\omega}L}. \end{aligned}$$

Somit kommen wir auf die reelle Lösung ($\tilde{\omega} = \omega$)

$$\begin{aligned} Q_p(t) &= \operatorname{Re} \left(t \frac{U_0}{2i\omega L} e^{i\omega t} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left(\frac{U_0}{2L\omega} (-i)t(\cos \omega t + i \sin \omega t) \right) \\ &= \frac{U_0}{2L\omega} t \sin \omega t. \end{aligned}$$

Damit ist die allgemeine inhomogene Lösung der ursprünglichen Gleichung (12.8), falls $R = 0$ und $\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{1}{LC}}$:

$$Q(t) = \frac{U_0}{2L\omega} t \sin \omega t + C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t.$$

Sehen wir uns ein Beispiel für eine Anfangsbedingung an:

$$\begin{aligned} Q(0) = 0 &\Rightarrow C_1 = 0 \\ \dot{Q}(0) = Q'_0 &\Rightarrow \dot{Q}(0) = \frac{U_0}{2L\omega} (\sin \omega t + t\omega \cos \omega t) + C_2 \omega \cos \omega t \Big|_{t=0} = Q'_0 \\ &\Rightarrow C_2 \omega = Q'_0 \\ &\Rightarrow Q(t) = \underbrace{\left(\frac{U_0}{2L\omega} t + \frac{Q'_0}{\omega} \right)}_{\substack{\rightarrow \infty (t \rightarrow \infty) \\ \text{bei } U_0 > 0}} \sin \omega t \quad \text{Resonanzkatastrophe} \end{aligned}$$

Im anderen Fall ($\chi(i\tilde{\omega}) \neq 0$) verwendet man die komplexifizierte Gleichung

$$\ddot{Q} + \frac{R}{L} \dot{Q} + \frac{1}{LC} Q = \frac{U_0}{L} e^{i\tilde{\omega}t}$$

und den Ansatz

$$Q_p(t) = t^0 P e^{i\tilde{\omega}t}.$$

Dies ergibt

$$\begin{aligned} P \left[(i\tilde{\omega})^2 + \frac{R}{L} i\tilde{\omega} + \frac{1}{LC} \right] e^{i\tilde{\omega}t} &= \frac{U_0}{L} e^{i\tilde{\omega}t} \\ \Leftrightarrow P &= \frac{U_0}{L \left(-\tilde{\omega}^2 + \frac{R}{L} i\tilde{\omega} + \frac{1}{LC} \right)}. \end{aligned}$$

Also ist eine partikuläre Lösung von (12.8) im Fall $\chi(i\tilde{\omega}) \neq 0$ gegeben durch

$$Q_p(t) = \operatorname{Re} \left(\frac{U_0}{L \left(-\tilde{\omega}^2 + \frac{R}{L} i\tilde{\omega} + \frac{1}{LC} \right)} e^{i\tilde{\omega}t} \right).$$

Ohne Ohm'schen Widerstand ergibt dies

$$Q_p(t) = \frac{U_0}{-L\tilde{\omega}^2 + \frac{1}{C}} \cos \tilde{\omega}t = \frac{U_0}{L \left(-\tilde{\omega}^2 + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega^2} \right)} \cos \tilde{\omega}t.$$

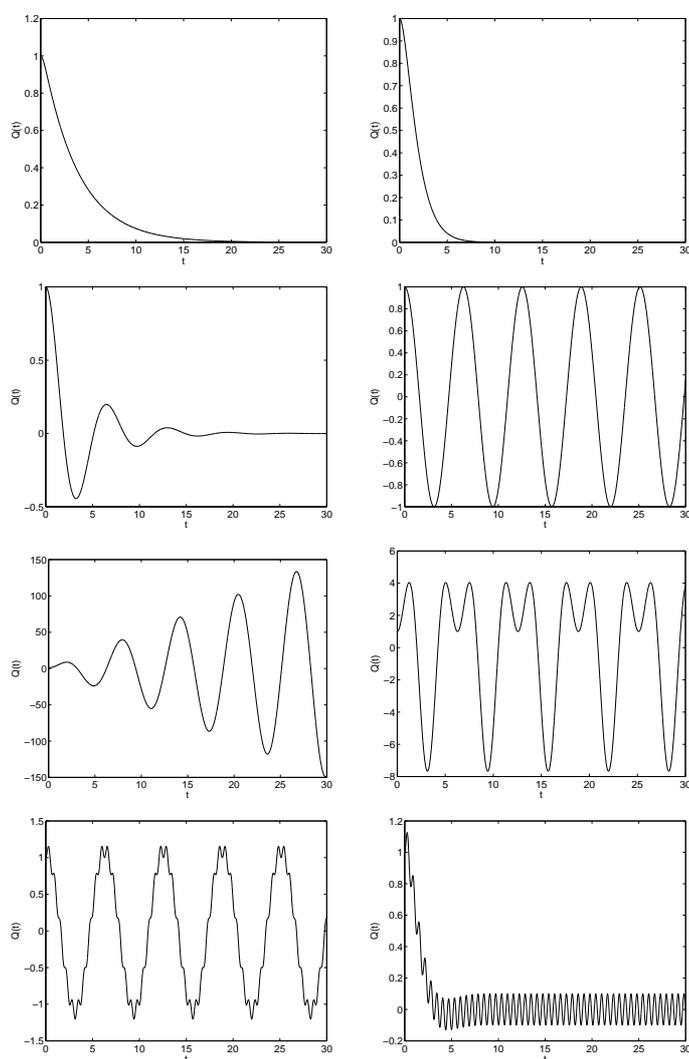


Abbildung 12.3: Lösungen für die Gleichung des Schwingkreises mit den Anfangsbedingungen $Q(0) = 1$, $\dot{Q}(0) = 0$. Zu sehen sind die folgenden Fälle: homogen, $L = 1$, $C = 1$, $R = 4$ (links oben); homogen, $L = 1$, $C = 1$, $R = 2$ (rechts oben); homogen, $L = 1$, $C = 1$, $R = 0.5$ (2. Zeile links); homogen, $L = 1$, $C = 1$, $R = 0$ (2. Zeile rechts); inhomogen, $U_0 = 10$, $\tilde{\omega} = 1$, $L = 1$, $C = 1$, $R = 0$ (3. Zeile links); $U_0 = 10$, $\tilde{\omega} = 2$, $L = 1$, $C = 1$, $R = 0$ (3. Zeile rechts); $U_0 = 10$, $\tilde{\omega} = 10$, $L = 1$, $C = 1$, $R = 0$ (unten links) und $U_0 = 10$, $\tilde{\omega} = 10$, $L = 1$, $C = 1$, $R = 1.5$ (unten rechts).

Je weiter $\tilde{\omega}$ von der Eigenfrequenz entfernt ist, desto geringer ist also die Amplitude (siehe auch Abbildung 12.3). \diamond

Eine weitere Möglichkeit, eine partikuläre Lösung zu bestimmen, ist auch hier die **Variation der Konstanten**:

- Bestimme ein Fundamentalsystem y_1, y_2
- Setze $C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$ für die inhomogene Gleichung an und fordere zusätzlich

$$C_1'(x)y_1(x) + C_2'(x)y_2(x) = 0$$

- Finde geeignete C_1 und C_2 aus

$$C_1'(x) = -\frac{1}{W(x)} y_2(x)f(x), \quad C_2'(x) = \frac{1}{W(x)} y_1(x)f(x),$$

wobei $W(x) = y_1(x)y_2'(x) - y_2(x)y_1'(x)$ die **Wronski-Determinante** ist.

12.4 Die Laplace-Transformation

Neben der Fourier-Transformation bietet die Laplace-Transformation ebenfalls eine Möglichkeit, eine Differentialgleichung durch Umwandlung in eine algebraische Gleichung zu lösen. Deswegen kommt hier ein kurzer Crashkurs im Laplace-Transformieren.

Definition 12.4.1 Sei $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ eine gegebene Funktion, so dass

$$F(s) := \mathcal{L}\{f(t)\} := \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \quad (12.9)$$

für mindestens ein $s \in \mathbb{R}$ konvergiert. Dann heißt $F(s)$ die **Laplace-Transformierte** und f heißt **Laplace-transformierbar**. Analog zur Fourier-Transformation unterscheidet man die Rolle von Groß- und Kleinbuchstaben, nennt die Abbildung $f \mapsto F$ die **Laplace-Transformation** und benutzt die Notation der **L-Korrespondenz**

$$f(t) \circ \longrightarrow \bullet F(s)$$

Die Menge aller $s \in \mathbb{R}$, für die (12.9) konvergiert, nennt man den **Konvergenzbereich** \mathcal{K}_F von F .

Satz 12.4.2 (Rechenregeln der Laplace-Transformation) Seien $f, g : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ Laplace-transformierbar sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}^+$, $s \in \mathcal{K}_F \cap \mathcal{K}_G$. Dann gilt für die Laplace-Transformierten:

a) **Linearität:** $\alpha f(t) + \beta g(t) \circ \longrightarrow \bullet \alpha F(s) + \beta G(s)$

b) **Streckung:** $f(\gamma t) \circ \bullet \frac{1}{\gamma} F\left(\frac{s}{\gamma}\right)$

c) **Dämpfung:** $e^{-\gamma t} f(t) \circ \bullet F(s + \gamma)$

d) **Transformation der Ableitung und des Integrals:** Ist $f \in C^{(n-1)}(\mathbb{R}^+)$, $f^{(n-1)}$ differenzierbar und ferner $f, f', \dots, f^{(n)}$ Laplace-transformierbar, dann gilt

$$f^{(n)}(t) \circ \bullet s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{(n-1-k)} f^{(k)}(0+)$$

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \circ \bullet \frac{1}{s} F(s)$$

e) **Ableitungen oder Integrale als Transformierte:**

$$t^n f(t) \circ \bullet (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$$

Ist zusätzlich $t \mapsto \frac{f(t)}{t}$ Laplace-transformierbar, so gilt außerdem

$$\frac{f(t)}{t} \circ \bullet \int_s^\infty F(u) du.$$

Beispiel 12.4.3 Sei $f(t) = e^{at}$, $t \in \mathbb{R}_0^+$, $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{e^{at}\} &= \int_0^\infty e^{-st} e^{at} dt = \int_0^\infty e^{(a-s)t} dt \\ &= \begin{cases} \frac{1}{a-s} e^{(a-s)t} \Big|_0^\infty, & s \neq a \\ \infty, & s = a \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{s-a}, & s > a \\ \infty, & s \leq a \end{cases}. \end{aligned}$$

Nach Satz 12.4.2 gilt damit beispielsweise auch

$$\begin{aligned} \cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t}) &\circ \bullet \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s-1} + \frac{1}{s+1} \right) = \frac{s}{s^2-1}, & s > 1 \\ +\infty, & s \leq 1 \end{cases} \\ te^{at} &\circ \bullet \begin{cases} \frac{1}{(s-a)^2}, & s > a \\ +\infty, & s < a \end{cases}. \end{aligned}$$

◇

$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\}$
1	$\frac{1}{s}, s > 0$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}, s > a$
$\cosh(at)$	$\frac{s}{s^2-a^2}, s > a $
$\sinh(at)$	$\frac{a}{s^2-a^2}, s > a $
$\cos(at)$	$\frac{s}{s^2+a^2}, s > 0$
$\sin(at)$	$\frac{a}{s^2+a^2}, s > 0$
$H(t-a) := \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & t \geq a \end{cases}, a > 0$	$e^{-as} \frac{1}{s}, s > 0$
$g(t-a)H(t-a), a > 0$	$e^{-as} \mathcal{L}\{g(t)\}$

Tabelle 12.1: Beispiele für Fourier-Transformierte. Die Funktion H heißt **Heaviside-Funktion**.

Tabelle 12.1 zeigt einige ausgewählte Laplace-Transformierte.

Mittels Laplacetransformation können lineare Differentialgleichungen beliebig hoher Ordnung behandelt werden (zumindest im Fall konstanter Koeffizienten). Das Verfahren läuft wie folgt ab:

1. Wende die Laplace-Transformation auf das Anfangswertproblem für die Funktion $x(t)$ an.
2. Löse die algebraische Gleichung für $X(s)$.
3. Rücktransformiere $X(s)$ zu $x(t)$.

Dass trotzdem bei weitem nicht alle Anfangswertprobleme damit gelöst werden können, liegt daran, dass oft die Transformierte bzw. die inverse Transformierte nicht bestimmt werden kann. In der Mathematik wird diese Methode eher als Randerscheinung angesehen, da nur relativ wenige Differentialgleichungen damit gelöst werden können. In den Ingenieurwissenschaften ist die Technik hingegen relativ beliebt, was daran liegen mag, dass sie gerade bei einigen wichtigen Anwendungsbeispielen erfolgreich ist.

Beispiel 12.4.4 Wir betrachten das Anfangswertproblem

$$\ddot{x} + 4x = \cos \omega t, \quad \omega > 0 \text{ fest}, \quad x(0) = 1, \quad \dot{x}(0) = -2$$

einer ungedämpften Schwingung. Dass sie ungedämpft ist, erkennen wir an der Abwesenheit des \dot{x} -Terms, was beispielsweise beim Schwingkreis für einen verschwindenden Widerstand stand.

Bei mechanischen Schwingungen stellt dies analog eine Reibungsfreiheit dar. Wir wenden zuerst die Laplace-Transformation an. Nach Satz 12.4.2 d) wird aus der linken Seite

$$\ddot{x} + 4x \circ \bullet s^2 X(s) - (s^1 x(0) + s^0 \dot{x}(0)) + 4X(s) = s^2 X(s) - s + 2 + 4X(s).$$

Tabelle 12.1 hilft bei der rechten Seite, so dass wir schließlich die transformierte Gleichung

$$(s^2 + 4) X + 2 - s = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

erhalten. Diese lässt sich leicht nach X auflösen:

$$X(s) = (s^2 + 4)^{-1} \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} - 2 + s \right).$$

Die Rücktransformation ist das Hauptproblem. Mit Tabelle 12.1 finden wir zumindest

$$\begin{aligned} -\sin(2t) &\circ \bullet \frac{-2}{s^2 + 4}, \\ \cos(2t) &\circ \bullet \frac{s}{s^2 + 4}. \end{aligned}$$

Für die Transformierte $\frac{s}{(s^2 + 4)(s^2 + \omega^2)}$ sehen wir uns an, dass

$$\cos(2t) \circ \bullet \frac{s}{s^2 + 4} \quad \text{und} \quad \cos(\omega t) \circ \bullet \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

gilt. Subtraktion und Hauptnennerbildung liefert die Funktion

$$\frac{s(s^2 + \omega^2) - s(s^2 + 4)}{(s^2 + 4)(s^2 + \omega^2)} = \frac{s(\omega^2 - 4)}{(s^2 + 4)(s^2 + \omega^2)}$$

als Transformierte von $\cos(2t) - \cos(\omega t)$. Also gilt

$$\frac{1}{\omega^2 - 4} [\cos(2t) - \cos(\omega t)] \circ \bullet \frac{s}{(s^2 + 4)(s^2 + \omega^2)}.$$

Die gesuchte Lösung ist folglich

$$x(t) = \frac{1}{\omega^2 - 4} [\cos(2t) - \cos(\omega t)] - \sin(2t) + \cos(2t).$$

Prüfen Sie es nach: Die Funktion erfüllt tatsächlich das Anfangswertproblem. \diamond

12.5 Lineare Differentialgleichungssysteme 1. Ordnung und lineare Differentialgleichungen höherer Ordnung

12.5.1 Vorbemerkungen

Wir betrachten hier nur Gleichungen mit konstanten Koeffizienten.

Unter einem linearen Differentialgleichungssystem (1. Ordnung) versteht man ein System

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1(t) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_n(t) \end{aligned}$$

für n unbekannte Funktionen x_1, \dots, x_n . Kürzer kann man das schreiben als

$$\dot{x} = Ax + b(t), \quad (12.10)$$

wobei x die gesuchte vektorielle Funktion ist ($x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$), $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine gegebene Funktion ist und A eine gegebene $n \times n$ -Matrix ist.

Eine lineare Differentialgleichung höherer Ordnung hat die Form

$$y^{(n)} = \alpha_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + \alpha_2\ddot{y} + \alpha_1\dot{y} + \alpha_0y + \beta(t),$$

wobei $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gesucht ist und $\alpha_0, \dots, \alpha_{n-1} \in \mathbb{R}$, $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben sind. Eine solche Gleichung kann in ein System der Form (12.10) umgewandelt werden. Hierfür setzt man

$$x_1 := y, \quad x_2 := \dot{y}, \quad \dots, \quad x_n := y^{(n-1)}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\vdots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= \alpha_0x_1 + \alpha_1x_2 + \dots + \alpha_{n-1}x_n + \beta(t). \end{aligned}$$

In der Notation von (12.10) ist somit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & & & & 1 \\ \alpha_0 & \alpha_1 & \cdots & \cdots & \cdots & \alpha_{n-1} \end{pmatrix}, \quad b(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ \beta(t) \end{pmatrix}$$

Es reicht damit, wenn wir uns auf die Systeme 1. Ordnung beschränken.

12.5.2 homogene Systeme mit konstanten Koeffizienten

Naiv betrachtet könnte man auf die Idee kommen, dass

$$\dot{x} = Ax$$

gelöst wird durch

$$x(t) = e^{At} \cdot \text{const.}$$

Doch A ist nun eine Matrix. In der Tat kann man dies aber mathematisch umsetzen.

Definition 12.5.1 Für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ definiert man die **Matrixexponentialfunktion** als

$$e^A := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k,$$

wobei die Konvergenz komponentenweise zu verstehen ist.

Damit ist entsprechend

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (tA)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k.$$

Satz 12.5.2 (Eigenschaften der Matrixexponentialfunktion) Für $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ gilt:

- a) $e^{0A} = E_n$ ($n \times n$ -Einheitsmatrix),
- b) $(e^A)^{-1} = e^{-A}$,
- c) Wenn $AB = BA$ gilt (A und B "kommutieren"), dann gilt

$$e^{A+B} = e^A e^B$$

- d) $\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} \quad \forall t \in \mathbb{R}$.

Satz 12.5.3 Die allgemeine Lösung des Systems

$$\dot{x} = Ax, \quad A \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ konstant,}$$

ist gegeben durch

$$x(t) = e^{tA} c, \quad c \in \mathbb{R}^n \text{ beliebiger konstanter Vektor.}$$

Beispiel 12.5.4 Wir sehen uns

$$\ddot{y} + 9y = 0 \quad (12.11)$$

an. Das zugehörige System erhält man mit

$$x_1 := y, \quad x_2 = \dot{y}$$

als

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -9x_1. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist damit

$$x(t) = \exp \left[t \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} \right] c.$$

Um die Matrixexponentialfunktion zu berechnen, brauchen wir eine Formel für die Potenzen der auftretenden Matrix. Es gilt

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix}, \\ A^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}, \\ A^3 &= \begin{pmatrix} -9 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ (-9)^2 & 0 \end{pmatrix}, \\ A^4 &= \begin{pmatrix} 0 & -9 \\ (-9)^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-9)^2 & 0 \\ 0 & (-9)^2 \end{pmatrix}, \\ A^5 &= \begin{pmatrix} (-9)^2 & 0 \\ 0 & (-9)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-9)^2 \\ (-9)^3 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Dies führt zu der Vermutung, dass die folgenden Formeln für die geraden und ungeraden Potenzen gelten:

$$A^{2n} = \begin{pmatrix} (-9)^n & 0 \\ 0 & (-9)^n \end{pmatrix}, \quad A^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & (-9)^n \\ (-9)^{n+1} & 0 \end{pmatrix} \quad \forall n = 0, 1, 2, \dots \quad (12.12)$$

Dies lässt sich mit einem einfachen Induktionsbeweis belegen:

Den Induktionsanfang haben wir bereits oben durchgeführt ($n = 0$ und damit die Einheitsmatrix $E_2 = A^0$ und $A = A^1$ reichen hierfür bereits). Es folgt die Induktionsannahme: Für ein $n \in \mathbb{N}$ gelten die Formeln in (12.12).

Schließlich folgt der Induktionsschritt: Für die nächste gerade Potenz gilt - nach Induktionsannahme - dass

$$A^{2n+2} = A^{2n+1}A = \begin{pmatrix} 0 & (-9)^n \\ (-9)^{n+1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-9)^{n+1} & 0 \\ 0 & (-9)^{n+1} \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

und für die nächste ungerade Potenz folglich

$$A^{2n+3} = A^{2n+2}A = \begin{pmatrix} (-9)^{n+1} & 0 \\ 0 & (-9)^{n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -9 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & (-9)^{n+1} \\ (-9)^{n+2} & 0 \end{pmatrix}. \quad \checkmark$$

Damit wäre (12.12) bewiesen. Also gilt für die allgemeine Lösung unseres Differentialgleichungssystems

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k c \\ &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ gerade}}}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k c + \sum_{\substack{k=1 \\ k \text{ ungerade}}}^{\infty} \frac{t^k}{k!} A^k c \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} A^{2n} c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} A^{2n+1} c \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \begin{pmatrix} (-9)^n & 0 \\ 0 & (-9)^n \end{pmatrix} c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \begin{pmatrix} 0 & (-9)^n \\ (-9)^{n+1} & 0 \end{pmatrix} c \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} (-1)^n \begin{pmatrix} 3^{2n} & 0 \\ 0 & 3^{2n} \end{pmatrix} c + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & 3^{2n} \\ -3^{2n+2} & 0 \end{pmatrix} c \\ &= \begin{pmatrix} \cos(3t) & \frac{1}{3} \sin(3t) \\ -3 \sin(3t) & \cos(3t) \end{pmatrix} c. \end{aligned}$$

Wir interessieren uns ja eigentlich nur für $x_1 = y$. Also ist

$$y(t) = c_1 \cos(3t) + \frac{c_2}{3} \sin(3t).$$

Übrigens haben wir schon eine andere Methode für (12.11) kennengelernt. Rechnen Sie selbst nach, dass dies zum gleichen Ergebnis führt! ³ \diamond

³Das charakteristische Polynom ist $\chi(\lambda) = \lambda^2 + 9$ mit den Nullstellen $\lambda_{1,2} = \pm 3i$. Satz 12.3.4 liefert den Rest. Da $c_2 \in \mathbb{R}$ beliebig ist, ist es egal, ob man c_2 oder $\frac{c_2}{3}$ schreibt.

Bemerkung 12.5.5 (Matrixexponentialfunktion symmetrischer Matrizen)

Bei einer symmetrischen Matrix gibt es einen eleganten Weg, die Matrixexponentialfunktion zu berechnen. Man bedient sich hierbei der Hauptachsentransformation (Satz 2.7.4). Zur Erinnerung: Man konstruiert eine orthogonale Matrix B , deren Spalten eine ONB aus Eigenvektoren darstellen. Dann ist

$$B^T A B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} =: \Lambda,$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Eigenwerte von A sind (gezählt nach der algebraischen Vielfachheit). Da B orthogonal ist ($B^T = B^{-1}$), gilt somit

$$A = B \Lambda B^T.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} A^k &= \overbrace{(B \Lambda B^T) (B \Lambda B^T) \dots (B \Lambda B^T) (B \Lambda B^T)}^{k \text{ Faktoren}} \\ &= B \Lambda^k B^T, \end{aligned}$$

wodurch

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (B \Lambda^k B^T) = B \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \Lambda^k \right) B^T \\ &= B \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n^k \end{pmatrix} \right] B^T \\ &= B \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} B^T \end{aligned}$$

gilt.

Beispiel 12.5.6

a) Das System

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 - x_2 \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2\end{aligned}$$

gehört zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dies ist die Matrix aus dem Beispiel zur Hauptachsentransformation. Wir haben damals ausgerechnet, dass

$$B = \frac{1}{\sqrt{10 - 2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 2 & -1 + \sqrt{5} \\ 1 - \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix}$$

die Transformationsmatrix zu den Eigenwerten

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

ist. Also ist die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems gegeben durch

$$\begin{aligned}x(t) &= \frac{1}{10 - 2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 + \sqrt{5} \\ 1 - \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 - \sqrt{5} \\ -1 + \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix} c \\ &= \frac{1}{10 - 2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 + \sqrt{5} \\ 1 - \sqrt{5} & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2e^{\lambda_1 t} & (1 - \sqrt{5})e^{\lambda_1 t} \\ (-1 + \sqrt{5})e^{\lambda_2 t} & 2e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} c \\ &= \frac{1}{10 - 2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 4e^{\lambda_1 t} + (6 - 2\sqrt{5})e^{\lambda_2 t} & 2(1 - \sqrt{5})(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \\ 2(1 - \sqrt{5})(e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) & (6 - 2\sqrt{5})e^{\lambda_1 t} + 4e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} c \\ &= \frac{1}{5 - \sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}t} + (3 - \sqrt{5})e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}t} & (1 - \sqrt{5}) \left(e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}t} \right) \\ (1 - \sqrt{5}) \left(e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}t} - e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}t} \right) & (3 - \sqrt{5})e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}t} + 2e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}t} \end{pmatrix} c.\end{aligned}$$

b) Zu dem System

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = x_1$$

gehört die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit den Eigenwerten $\lambda_{1,2} = \pm 1$ und der ONB aus Eigenvektoren

$$v^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Also erhält man die allgemeine Lösung

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} c \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^t & e^t \\ e^{-t} & -e^{-t} \end{pmatrix} c \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e^t + e^{-t} & e^t - e^{-t} \\ e^t - e^{-t} & e^t + e^{-t} \end{pmatrix} c, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 \cosh t + c_2 \sinh t, \\ x_2(t) &= c_1 \sinh t + c_2 \cosh t. \end{aligned}$$

Das System gehört zu einer linearen Differentialgleichung 2. Ordnung. Welcher?⁴ Lösen Sie sie auf die altbekannte Art!⁵

◇

12.5.3 inhomogene Systeme mit konstanten Koeffizienten

Hierfür gibt es Ansätze wie die Laplacetransformation, die wir bereits kennengelernt haben und Techniken wie die Variation der Konstanten und die Wahl bestimmter Ansatzfunktionen passend zur rechten Seite (“Ansatz vom Typ der rechten Seite”), wie wir dies für die 2. Ordnung gesehen haben. Für Details sei auf die Literatur verwiesen.

⁴ $\cdot \hat{n} = \hat{n}$ wenn $\eta \hat{\eta} \eta^{-1} x = \hat{n} \eta \eta^{-1}$

⁵Das charakteristische Polynom zu $\ddot{y} - y = 0$ ist $\chi(\lambda) := \lambda^2 - 1$. Die Nullstellen sind $\lambda_{1,2} = \pm 1$. Dies ergibt die allgemeine Lösung $y(t)$ ($= x_1(t)$) $= \tilde{c}_1 e^t + \tilde{c}_2 e^{-t}$ und $x_2(t) = \dot{x}_1(t) = \tilde{c}_1 e^t - \tilde{c}_2 e^{-t}$. Dies ist trotzdem die gleiche Lösung, da $c_1 \cosh t + c_2 \sinh t = \frac{c_1}{2} (e^t + e^{-t}) + \frac{c_2}{2} (e^t - e^{-t}) = \frac{1}{2} (c_1 + c_2) e^t + \frac{1}{2} (c_1 - c_2) e^{-t}$. Mit $\tilde{c}_1 := \frac{1}{2} (c_1 + c_2)$, $\tilde{c}_2 := \frac{1}{2} (c_1 - c_2)$ erhält man die andere Darstellung. Die Beziehung $(c_1, c_2) \leftrightarrow (\tilde{c}_1, \tilde{c}_2)$ ist bijektiv. Damit erhält man in der Tat die gleichen Lösungen.

Kapitel 13

Partielle Differentialgleichungen

13.1 Vorbemerkungen und Klassifikation

13.1.1 Allgemeines und Notation

Im Gegensatz zu gewöhnlichen Differentialgleichungen sind bei partiellen Differentialgleichungen Funktionen mehrerer Veränderlicher gesucht. Es treten somit partielle Ableitungen in der Gleichung auf. Ein Beispiel ist die **lineare Transportgleichung**

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (13.1)$$

Hierbei ist a eine gegebene Funktion des Orts und u ist die gesuchte Funktion des Orts und der Zeit.

Bei einer partiellen Differentialgleichung verwendet man oft die Kurzschreibweise einer Ableitung mittels Indizes, also $u_t := \frac{\partial u}{\partial t}$, $u_{xy} := \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} u$ usw. Die lineare Transportgleichung kann man damit auch schreiben als

$$u_t + a(x)u_x = 0.$$

13.1.2 Randbedingungen

Bei gewöhnlichen Differentialgleichungen benötigt man Anfangsbedingungen, um eine eindeutige Lösung zu erhalten. Da bei partiellen Differentialgleichungen mehrere Variablen vorliegen, braucht man u.U. für alle eine Bedingung. Deswegen treten hier so genannte **Randbedingungen** auf. Beispielsweise könnte ein Problem wie folgt aussehen:

Sei $\Omega := \{x \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1\}$ die Einheitskreisscheibe. Gesucht ist $u \in C^{(2)}(\Omega \times \mathbb{R})$, so dass

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} - \frac{1}{c^2} u_{tt} &= 0 \quad \text{in } \Omega \ (\forall t) \\ u(x, y, 0) &= F(x, y) \quad \forall (x, y) \in \Omega \end{aligned} \quad (13.2)$$

$$u(x, y, t) = G(x, y, t) \quad \forall (x, y) \in \partial\Omega \quad \forall t,$$

wobei $\partial\Omega$ der Rand von Ω ist und die Funktionen $F : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $G : \partial\Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben sind. F gibt Anfangswerte von u vor und G Randwerte.

In diesem Fall wird die gesuchte Funktion selbst am Rand vorgegeben (Dirichlet-Randbedingung). Man kann stattdessen auch ihre Ableitung - oder z.B. die Normalkomponente derselben - am Rand vorgeben (Neumann-Randbedingung). Ein Beispiel haben wir schon in Abschnitt 10.2 kennengelernt.

13.1.3 Ordnung

Unter der Ordnung einer partiellen Differentialgleichung versteht man die höchste auftretende Ableitungsordnung, wobei es egal ist, ob die Ableitungen gemischt sind oder sich alle auf die gleiche Variable beziehen. So ist (13.1) eine Gleichung 1. Ordnung, während beispielsweise (13.2) und

$$u_{xy} + u_z - u_t = 0$$

beide Gleichungen 2. Ordnung sind.

13.1.4 Quasilineare Differentialgleichungen 2. Ordnung

Im Fall zweier Variablen x und y handelt es sich hierbei um Gleichungen der Form

$$Au_{xx} + 2Bu_{xy} + Cu_{yy} = F.$$

Hierbei sind A, B, C und F Funktionen, die nicht nur von x und y , sondern auch von u, u_x und u_y abhängen dürfen. Man unterscheidet dabei folgende Typen von Gleichungen: Die Gleichung heißt auf einer Teilmenge D des Definitionsbereichs G der gesuchten Funktion

- a) **elliptisch**, wenn $AC - B^2 > 0$ auf D gilt,
- b) **parabolisch**, wenn $AC - B^2 = 0$ auf D gilt und
- c) **hyperbolisch**, wenn $AC - B^2 < 0$ auf D gilt.

Beispiel 13.1.1

- a) Die **Laplace-Gleichung** $\Delta u = 0$, d.h. (im \mathbb{R}^2)

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

spielt bei der Gravitation und der Elektromagnetik eine wichtige Rolle. Hier ist $A \equiv 1$, $B \equiv 0$ und $C \equiv 1$. Wegen

$$AC - B^2 = 1 > 0$$

ist sie damit auf dem ganzen \mathbb{R}^2 **elliptisch**.

b) Die eindimensionale **Wellengleichung**

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0$$

haben wir auch schon kennengelernt. Wegen $A \equiv 1$, $B \equiv 0$, $C \equiv -\frac{1}{c^2}$ und

$$AC - B^2 = -\frac{1}{c^2} < 0$$

ist sie **hyperbolisch** im ganzen \mathbb{R}^2 .

c) Als **Diffusionsgleichung** bezeichnet man die Gleichung

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_t = 0.$$

Hier gilt $A \equiv 1$, $B \equiv C \equiv 0$, $F(u_t) = \frac{1}{c^2} u_t$ (t ist hier die 2. Variable statt y). Wegen

$$AC - B^2 = 0$$

ist die Diffusionsgleichung in ganz \mathbb{R}^2 **parabolisch**.

d) Für die **Tricomi-Gleichung**

$$u_{yy} - yu_{xx} = 0$$

haben wir $A(y) = -y$, $B \equiv 0$, $C \equiv 1$ und

$$AC - B^2 = -y.$$

Damit ist die Gleichung

(i) auf $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ hyperbolisch

(ii) auf $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$ parabolisch

(iii) auf $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$ elliptisch.

◇

13.2 Die Wellengleichung

Wir sehen uns zunächst die eindimensionale Wellengleichung an:

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = f(x, t). \quad (13.3)$$

Es geht also um die Ausbreitung einer Welle längs einer Geraden mit der konstanten Geschwindigkeit $c > 0$.

Hierbei bedienen wir uns des folgenden Satzes:

Satz 13.2.1 Für eine lineare partielle Differentialgleichung 1. Ordnung

$$\sum_{j=1}^n a_j(x)u_{x_j} + c(x)u = f(x), \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n,$$

bzw. 2. Ordnung

$$\sum_{j=1}^n a_j(x)u_{x_j} + \sum_{k,l=1}^n b_{kl}(x)u_{x_k x_l} + c(x)u = f(x), \quad x \in G \subset \mathbb{R}^n,$$

gilt:

- Linearkombinationen beliebiger homogener Lösungen ($f \equiv 0$) sind wieder eine homogene Lösung (**Superpositionsprinzip**).
- Die allgemeine inhomogene Lösung hat die Form

allgemeine homogene Lösung + partikuläre inhomogene Lösung.

Für (13.3) suchen wir nun eine Lösung in der vereinfachten Form $u(x, t) := g(x - ct)$ für eine unbekannte Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dies ist nur ein Ansatz. Wir wissen zunächst nicht, ob er von Erfolg gekrönt ist. Um dies zu überprüfen, setzen wir ihn in (13.3) ein. Es gilt nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} g(x - ct) = \frac{\partial}{\partial x} g'(x - ct) = g''(x - ct), \\ u_{tt} &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} g(x - ct) = \frac{\partial}{\partial t} g'(x - ct) \cdot (-c) = g''(x - ct) \cdot c^2 \end{aligned}$$

und somit

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0.$$

Damit liefert jedes $g \in C^{(2)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ auf diese Art eine homogene Lösung. Analog kann man zeigen, dass der Ansatz $u(x, t) := h(x + ct)$ ebenfalls stets funktioniert. Rechnen Sie es nach!¹ In der Tat kann man sogar zeigen, dass es sonst keine homogenen Lösungen gibt.

Satz 13.2.2 (D'Alembert-Lösung der 1-D-Wellengleichung)

Die allgemeine homogene Lösung von (13.3) hat die Form

$$u(x, t) = g(x - ct) + h(x + ct)$$

mit beliebig wählbaren $g, h \in C^{(2)}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

¹ $\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t} g(x - ct) = -c \frac{\partial}{\partial t} g'(x - ct) = c^2 g''(x - ct)$

Bemerkung 13.2.3 Wenn man eine Welle beobachtet, fixiert man meist einen bestimmten Zustand und verfolgt diesen. So richtet man seinen Blick bei einer Wasserwelle üblicherweise auf einen Wellenberg und sieht, wie er wandert. Abstrakt betrachtet ist der Berg ein Maximum von g (oder h). Noch abstrakter betrachten wir uns hierbei eigentlich nur an einem bestimmten Funktionswert. Das heißt: Zu einem festen Zeitpunkt t_1 stellen wir fest, dass bei x_1 die Welle die Höhe $g(x_1, t_1)$ (bzw. $h(x_1, t_1)$) hat. Wenn wir die Welle beobachten, suchen wir zu anderen Zeitpunkten $t_2 > t_1$ die gleiche Höhe, die nun in x_2 vorliegt. Also gilt jeweils für beide Lösungstypen

$$\begin{aligned} g(x_1 - ct_1) &= g(x_2 - ct_2) & h(\tilde{x}_1 + c\tilde{t}_1) &= h(\tilde{x}_2 + c\tilde{t}_2) \\ x_1 - ct_1 &= x_2 - ct_2 & \tilde{x}_1 + c\tilde{t}_1 &= \tilde{x}_2 + c\tilde{t}_2 \\ \Leftrightarrow \underbrace{c}_{>0} \underbrace{(t_2 - t_1)}_{>0} &= x_2 - x_1 & \underbrace{c}_{>0} \underbrace{(\tilde{t}_1 - \tilde{t}_2)}_{<0} &= \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1 \end{aligned}$$

Die beiden Lösungstypen unterscheiden sich also nur durch die Richtung, in die sie laufen. $g(x - ct)$ steht für eine Welle, die in positive x -Richtung läuft, und $h(x + ct)$ für eine, die entgegengesetzt läuft. Die Geschwindigkeit ist dabei stets c .

Für eine partikuläre inhomogene Lösung führen wir, inspiriert durch obige Resultate, die Substitution $a := x - ct$, $b := x + ct$ in $U(a, b) = U(x - ct, x + ct) := u(x, t)$ durch. Dies ergibt in (13.3)

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial U}{\partial a} + \frac{\partial U}{\partial b} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} + 2 \frac{\partial^2 U}{\partial a \partial b} + \frac{\partial^2 U}{\partial b^2}, \\ u_{tt} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial U}{\partial a} \cdot (-c) + \frac{\partial U}{\partial b} \cdot c \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial a^2} c^2 - 2 \frac{\partial^2 U}{\partial a \partial b} c^2 + \frac{\partial^2 U}{\partial b^2} c^2, \\ u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} &= 4 \frac{\partial^2 U}{\partial a \partial b}. \end{aligned}$$

Für die rechte Seite müssen wir zunächst x und t in Abhängigkeit von a und b darstellen:

$$x = \frac{1}{2}(a + b), \quad t = \frac{1}{2c}(b - a).$$

Damit haben wir die Gleichung

$$\frac{\partial^2 U}{\partial a \partial b} = \frac{1}{4} f \left(\frac{a + b}{2}, \frac{b - a}{2c} \right),$$

für die man eine Lösung als

$$U(a, b) = \frac{1}{4} \int \int f \left(\frac{a + b}{2}, \frac{b - a}{2c} \right) da db$$

erhält. Durch Rücksubstitution erhält man eine partikuläre Lösung u_p .

Beispiel 13.2.4 Die Wellengleichung

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = \sin t \quad (13.4)$$

sei mit den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= e^{-x^2} \\ u_t(x, 0) &= \frac{1}{1+x^2} \end{aligned}$$

gegeben.

Für eine partikuläre Lösung berechnen wir (da wir nur eine Lösung brauchen, verzichten wir ausnahmsweise auf das “+ const”)

$$\begin{aligned} U(a, b) &= \frac{1}{4} \int \int \sin\left(\frac{b-a}{2c}\right) da db \\ &= \frac{1}{4} \int 2c \cos\left(\frac{b-a}{2c}\right) db \\ &= c^2 \sin\left(\frac{b-a}{2c}\right), \end{aligned}$$

also

$$u_p(x, t) = c^2 \sin t.$$

Damit ist die allgemeine Lösung von (13.4) gegeben durch

$$u(x, t) = g(x - ct) + h(x + ct) + c^2 \sin t; \quad g, h \in C^{(2)}(\mathbb{R}, \mathbb{R}).$$

Wegen

$$u_t(x, t) = -cg'(x - ct) + ch'(x + ct) + c^2 \cos t$$

ergeben die Anfangsbedingungen

$$g(x) + h(x) = e^{-x^2} \quad \text{für alle } x, \quad (13.5)$$

$$-cg'(x) + ch'(x) + c^2 = \frac{1}{1+x^2} \quad \text{für alle } x. \quad (13.6)$$

Aus (13.6) folgt ($\gamma = \text{const}$)

$$c(h(x) - g(x)) = \int \frac{1}{1+x^2} - c^2 dx = \arctan x - c^2 x + \gamma.$$

Division durch c und Addition von (13.5) ergibt

$$2h(x) = e^{-x^2} + \frac{1}{c} \arctan x - cx + \frac{\gamma}{c}.$$

Folglich gilt

$$g(x) = e^{-x^2} - h(x) = \frac{1}{2} e^{-x^2} - \frac{1}{2c} \arctan x + \frac{c}{2} x - \frac{\gamma}{2c}.$$

Also ist die gesuchte Lösung

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2} \left(e^{-(x-ct)^2} - \frac{1}{c} \arctan(x-ct) + c(x-ct) - \frac{\gamma}{c} \right. \\ &\quad \left. + e^{-(x+ct)^2} + \frac{1}{c} \arctan(x+ct) - c(x+ct) + \frac{\gamma}{c} \right) + c^2 \sin t \\ &= \frac{1}{2} \left(e^{-(x-ct)^2} - \frac{1}{c} \arctan(x-ct) - 2c^2 t \right. \\ &\quad \left. + e^{-(x+ct)^2} + \frac{1}{c} \arctan(x+ct) \right) + c^2 \sin t. \end{aligned}$$

◇

Beispiel 13.2.5 Ein klassisches Beispiel ist eine **schwingende Saite**, die mit einer 1-D-Wellengleichung beschreiben wird:

$$u_{xx} - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0. \quad (13.7)$$

Die Saite sei hierbei auf dem Intervall $[0, L]$ eingespannt. Als Anfangsbedingungen haben wir hier

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), & (\text{Form der Saite am Anfang}) \\ u_t(x, 0) &= g(x), & (\text{Geschwindigkeit am Anfang}) \end{aligned}$$

wobei $f \equiv 0 \equiv g$ für eine anfangs ruhende Saite stehen würde. Zusätzlich brauchen wir eine Randbedingung, die

- eine Dirichlet-Randbedingung $u(0, t) = a(t)$, $u(L, t) = b(t)$

oder

- eine Neumann-Randbedingung $u_x(0, t) = a(t)$, $u_x(L, t) = b(t)$

sein kann. Im ersten Fall wird die Position am Rand vorgegeben (bei $a \equiv 0 \equiv b$ wäre die Saite z. B. fest eingespannt), während im zweiten Fall die Spannung am Rand angegeben wird.

Wir beschränken uns hier auf den Fall der fest eingespannten Saite, haben also die Randbedingung

$$u(0, t) = 0 = u(L, t) \quad (\forall t). \quad (13.8)$$

Um dieses Problem zu lösen, benutzt man eine beliebige Technik, die wir bei dieser Gelegenheit gleich am Beispiel erlernen können: ein **Separationsansatz**. Hierfür nehmen wir an, dass die gesuchte Funktion u dargestellt werden kann als

$$u(x, t) = v(x)w(t).$$

Wir setzen diesen Ansatz in (13.7) ein und erhalten

$$v''(x)w(t) - \frac{1}{c^2} v(x)w''(t) = 0.$$

Wir formen ein wenig um:

$$v''(x)w(t) = \frac{1}{c^2} v(x)w''(t).$$

Sofern $v(x) \neq 0$ und $w(t) \neq 0$ gilt, folgt

$$\frac{v''(x)}{v(x)} = \frac{1}{c^2} \frac{w''(t)}{w(t)}.$$

Dieses Zwischenergebnis ist nun entscheidend: Die linke Seite hängt nur von x ab, die rechte Seite nur von t . Würde man x festhalten und t beliebig verändern, dürfte sich somit keine der beiden Seiten verändern. Genauso kann man t festhalten und x verändern, ohne dass etwas passiert. Also sind **beide Seiten konstant**. Es existiert somit eine Konstante $\gamma \in \mathbb{R}$, so dass

$$v''(x) = \gamma v(x) \quad \text{und} \quad w''(t) = \gamma c^2 w(t).$$

Die Lösungen hiervon hängen vom Vorzeichen von γ ab. Für $\gamma > 0$ erhalten wir

$$v(x) = C_1 e^{\sqrt{\gamma}x} + C_2 e^{-\sqrt{\gamma}x}, \quad w(t) = C_3 e^{c\sqrt{\gamma}t} + C_4 e^{-c\sqrt{\gamma}t},$$

also

$$u(x, t) = C_1 C_3 e^{\sqrt{\gamma}(x+ct)} + C_2 C_4 e^{-\sqrt{\gamma}(x+ct)} + C_1 C_4 e^{\sqrt{\gamma}(x-ct)} + C_2 C_3 e^{-\sqrt{\gamma}(x-ct)}.$$

Dies ist also (erwartungsgemäß) eine Lösung vom d'Alembert'schen Typ. Mit der Randbedingung (13.8) folgt hieraus aber $u \equiv 0$. Das wäre nur im (uninteressanten) Fall $f \equiv 0 \equiv g$ die richtige Lösung. Dies ist auch das Resultat bei $\gamma = 0$. Also muss $\gamma < 0$ gelten. Dies ergibt

$$v(x) = C_1 \sin(\sqrt{-\gamma}x) + C_2 \cos(\sqrt{-\gamma}x), \quad w(t) = C_3 \sin(c\sqrt{-\gamma}t) + C_4 \cos(c\sqrt{-\gamma}t).$$

Aus den Randbedingungen folgt dann

$$C_2 w(t) = 0, \quad v(L)w(t) = 0.$$

Hieraus ergibt sich insbesondere

$$C_2 = 0 \quad \text{und} \quad C_1 \sin(\sqrt{-\gamma} L) = 0.$$

Da $C_1 = 0$ unwillkürlich zu $u \equiv 0$ führen würde, was wir ja nicht wollen, muss also $\sqrt{-\gamma} L$ eine Nullstelle des Sinus sein. L ist durch das Problem vorgegeben. Somit ergibt dies eine Bedingung an γ :

$$\sqrt{-\gamma} L = n\pi, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \Rightarrow \sqrt{-\gamma} = \frac{n\pi}{L}, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \Rightarrow \gamma = -\left(\frac{n\pi}{L}\right)^2, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}.$$

Also ist

$$v_n(x) = C_{1,n} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right)$$

eine mögliche Lösung. Hierzu haben wir

$$w_n(x) = C_{3,n} \sin\left(c \frac{n\pi}{L} t\right) + C_{4,n} \cos\left(c \frac{n\pi}{L} t\right).$$

Wegen des Superpositionsprinzips, das auch hier gilt, hat die allgemeine Lösung also die Form

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) \left[a_n \sin\left(c \frac{n\pi}{L} t\right) + b_n \cos\left(c \frac{n\pi}{L} t\right) \right].$$

Der Summand für $n = 1$ steht dabei für die **Grundschwingung** und alle anderen für die **Oberschwingungen**.

Wir müssen noch die Anfangsbedingungen einbauen. Diese ergeben

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) b_n &= f(x), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{L} x\right) c \frac{n\pi}{L} a_n &= g(x). \end{aligned}$$

Somit können die Koeffizienten a_n und b_n aus den diskreten Fourier-Transformierten von f und g berechnet werden. \diamond

Wir wenden uns nun der (homogenen) zweidimensionalen Wellengleichung zu:

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0, \quad c > 0 \text{ konstant}, \quad (13.9)$$

wobei im hier betrachteten 2-D-Fall

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy}$$

gilt. Auch hierzu lösen wir das zugehörige klassische Anwendungsbeispiel.

Beispiel 13.2.6 Eine **rechteckige schwingende Membran** der Abmessungen $0 \leq x \leq a$, $0 \leq y \leq b$ gehorcht der 2-D-Wellengleichung

$$\Delta u - \frac{1}{c^2} u_{tt} = 0.$$

Am Rand sei sie fest eingespannt, was den Randbedingungen

$$u(0, y, t) = u(a, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0$$

entspricht. Für die Anfangsbedingung lassen wir allgemein

$$u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = g(x, y)$$

zu. Die Strategie zur Lösung dieses Anfangswertproblems ist im Grunde analog zum 1-D-Fall. Wir starten mit einem Separationsansatz

$$u(x, y, t) = v_1(x)v_2(y)w(t).$$

Einsetzen in (13.9) ergibt

$$v_1''(x)v_2(y)w(t) + v_1(x)v_2''(y)w(t) - \frac{1}{c^2} v_1(x)v_2(y)w''(t) = 0,$$

woraus wir, durch Division durch v_1v_2w (außerhalb von Nullstellen),

$$\frac{v_1''(x)}{v_1(x)} + \frac{v_2''(y)}{v_2(y)} = \frac{1}{c^2} \frac{w''(t)}{w(t)} \quad (13.10)$$

herleiten. Da die rechte Seite nur von t abhängt und die linke Seite unabhängig von t ist, müssen folglich beide Seiten konstant bezüglich t sein. Es existiert somit ein $\lambda \in \mathbb{R}$, so dass

$$w''(t) = \lambda c^2 w(t) \quad (13.11)$$

gilt. Aus der Tatsache, dass die linke Seite von (13.10) auch konstant bezüglich t ist, folgt ferner, dass

$$\frac{v_1''(x)}{v_1(x)} = \lambda - \frac{v_2''(y)}{v_2(y)}. \quad (13.12)$$

Da die linke Seite von (13.12) nur von x abhängt und die rechte Seite nur von y abhängt (sie sollten jetzt ein Déjà-vu-Erlebnis haben; sonst müssen Sie noch mal ein paar Seiten zurückblättern), sind beide Seiten konstant. Es existiert ein $\mu \in \mathbb{R}$, so dass

$$v_1''(x) = \mu v_1(x), \quad \lambda - \frac{v_2''(y)}{v_2(y)} = \mu \quad (13.13)$$

Sehen wir uns die Randbedingungen an: Da $u(0, y, t) = 0 = u(a, y, t)$ für alle y und alle t gelten muss, ist dies (von den Fällen $v_2 \equiv 0$ oder $w \equiv 0$ mal abgesehen) nur durch $v_1(a) = v_1(0) = 0$ zu bewerkstelligen. Bei $\mu \geq 0$ würde dies wieder unwillkürlich zu $v_1 \equiv 0$, also $u \equiv 0$, führen. Also können wir von $\mu < 0$ ausgehen. Somit ist

$$v_1(x) = C_1 \sin(\sqrt{-\mu} x) + C_2 \cos(\sqrt{-\mu} x).$$

Aus $v_1(a) = v_1(0) = 0$ folgt damit

$$C_2 = 0 \quad \text{und} \quad C_1 \sin(\sqrt{-\mu} a) = 0.$$

Dies führt, weil wir wieder $u \equiv 0$ verhindern wollen, zu

$$\sqrt{-\mu} a = n\pi, \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\},$$

also

$$v_1(x) = C_1 \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right), \quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ beliebig.}$$

Analog erhalten wir aus (13.13) und den Randbedingungen, dass

$$v_2(y) = C_3 \sin(\sqrt{\mu - \lambda} y) + C_4 \cos(\sqrt{\mu - \lambda} y)$$

unter der Annahme $\lambda - \mu < 0$, wobei $C_4 = 0$ und $\sqrt{\mu - \lambda} b = m\pi$, $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, also

$$v_2(y) = C_3 \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right), \quad m \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \text{ beliebig,}$$

gilt. Da wir nun $\lambda < \mu < 0$ haben, ist automatisch auch die andere Konstante λ in (13.11) negativ. Also ergibt sich

$$w(t) = C_5 \sin(\sqrt{-\lambda} ct) + C_6 \cos(\sqrt{-\lambda} ct),$$

wobei wir gesehen haben, dass $\mu - \lambda = \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$, d.h. $\lambda = \mu - \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$, und $-\mu = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2$. Somit ist $-\lambda = \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{b}\right)^2$. Folglich erhalten wir die allgemeine Lösung des Problems der rechteckigen schwingenden Membran

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b} y\right) \left[a_{n,m} \sin\left(\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} \pi ct\right) + b_{n,m} \cos\left(\sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} \pi ct\right) \right].$$

Aus den Anfangsbedingungen ergeben sich die Bedingungen

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) b_{nm} = f(x,y),$$

$$\sum_{n,m=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi}{a}x\right) \sin\left(\frac{m\pi}{b}y\right) a_{nm} \sqrt{\frac{n^2}{a^2} + \frac{m^2}{b^2}} \pi c = g(x,y)$$

für die Koeffizienten a_{nm} und b_{nm} , die sich leicht aus den **zweidimensionalen diskreten Fourier-Transformierten** von f und g bestimmen lassen (was hier nicht behandelt wurde, aber leicht aus dem 1-D-Fall übertragen werden kann). \diamond

13.3 Laplace-Gleichung

Die **Laplace-Gleichung**, die auch **Potentialgleichung** genannt wird, hat die Form

$$\Delta u = 0.$$

Ihre Lösungen nennt man **harmonische Funktionen**. Mit der Eindeutigkeit der Lösung der zugehörigen Dirichlet- und Neumann-Randwertprobleme haben wir uns bereits in Abschnitt 10.2 beschäftigt. Es ist empfehlenswert, dies bei dieser Gelegenheit noch einmal nachzulesen.

Beispiel 13.3.1

a) Für einen festen Punkt $y \in \mathbb{R}^n$, $n \geq 3$, ist die Funktion

$$f(x) := \frac{1}{|x - y|^{n-2}}, \quad x \in \mathbb{R}^n \setminus \{y\},$$

harmonisch. Dies sieht man wie folgt:

$$f(x) = \left(\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right)^{-\frac{n-2}{2}}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k}(x) = -\frac{n-2}{2} \left(\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right)^{-\frac{n}{2}} \cdot 2(x_k - y_k)$$

$$= -(n-2) \left(\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right)^{-\frac{n}{2}} (x_k - y_k)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x) &= \frac{(n-2)n}{2} \left(\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right)^{-\frac{n+2}{2}} \cdot 2 \cdot (x_k - y_k)^2 \\
&\quad - (n-2) \left(\sum_{j=1}^n (x_j - y_j)^2 \right)^{-\frac{n}{2}} \cdot 1 \\
&= (n-2) \left[n |x-y|^{-n-2} (x_k - y_k)^2 - |x-y|^{-n} \right] \\
\Rightarrow \Delta f(x) &= \sum_{k=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2}(x) \\
&= (n-2) \sum_{k=1}^n \left(n |x-y|^{-n-2} (x_k - y_k)^2 - |x-y|^{-n} \right) \\
&= (n-2) \left(n |x-y|^{-n-2} \underbrace{\sum_{k=1}^n (x_k - y_k)^2}_{=|x-y|^2} - n |x-y|^{-n} \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

b) Für einen festen Punkt $y \in \mathbb{R}^2$ ist die Funktion

$$f(x) := \ln |x - y|, \quad x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{y\},$$

harmonisch. Auch das lässt sich leicht nachrechnen:

$$\begin{aligned}
f(x) &= \ln \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\
\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_k} &= \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{2} \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 (x_k - y_k) \\
&= \left[(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 \right]^{-1} (x_k - y_k) \\
\Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} &= 2 |x-y|^{-4} (x_k - y_k)^2 - |x-y|^{-2} \quad (\text{analog zu oben}) \\
\Rightarrow \Delta f(x) &= \sum_{k=1}^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_k^2} \\
&= 2 |x-y|^{-4} \sum_{k=1}^2 (x_k - y_k)^2 - 2 |x-y|^{-2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

◇

Die Funktionen der obigen Beispiele nennt man die **Fundamentallösungen der Laplace-Gleichung**. Mit ihrer Hilfe konstruiert man die Potentiale

$$V(x) = \int_G \frac{\varrho(y)}{|x-y|^{n-2}} dy, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \text{bzw.} \quad V(x) = \int_G \varrho(y) \ln|x-y| dy, \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

wobei G eine beschränkte, zusammenhängende Menge ist. Unter geeigneten Voraussetzungen an die Belegungsfunktion ϱ (und die Menge G) kann man den Laplace-Operator Δ mit der Integration vertauschen, so dass (der Index x zeigt, dass bzgl. x_1, \dots, x_n und nicht y_1, \dots, y_n differenziert wird)

$$\Delta_x V(x) = \Delta_x \int_G \dots dy = \int_G \Delta_x \dots dy = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus G$$

Wir betrachten nun das folgende Dirichlet-Problem:

gegeben: $F \in C(\partial\Sigma)$, wobei Σ eine (offene) Kreisscheibe um 0 mit Radius $\sigma > 0$ ist und $\partial\Sigma$ dessen Rand ist.

gesucht: $u \in C^{(2)}(\Sigma \cup \partial\Sigma)$ mit

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 & \text{in } \Sigma \\ u &= F & \text{auf } \partial\Sigma. \end{aligned}$$

Es bietet sich an, dieses Problem in Polarkoordinaten zu lösen. Hierfür brauchen wir zunächst eine Darstellung des Laplace-Operators in Polarkoordinaten.

Satz 13.3.2 *Bezüglich den Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ gilt*

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Beweis: Sei u zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt nach der Kettenregel

$$\begin{aligned} u_r &= u_x x_r + u_y y_r = u_x \cos \varphi + u_y \sin \varphi, \\ u_\varphi &= u_x x_\varphi + u_y y_\varphi = -u_x r \sin \varphi + u_y r \cos \varphi. \end{aligned}$$

In Matrixschreibweise ergibt das

$$\begin{pmatrix} u_r \\ u_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix}.$$

Die zugehörige Matrix ist leicht zu invertieren:

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \varphi & -\sin \varphi \\ r \sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_r \\ u_\varphi \end{pmatrix}.$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} u_{xx} &= \cos \varphi u_{xr} - \frac{1}{r} \sin \varphi u_{x\varphi} \\ &= \cos \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(u_r \cos \varphi - \frac{1}{r} u_\varphi \sin \varphi \right) - \frac{1}{r} \sin \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(u_r \cos \varphi - \frac{1}{r} u_\varphi \sin \varphi \right) \\ &= u_{rr} \cos^2 \varphi + \frac{1}{r^2} u_\varphi \sin \varphi \cos \varphi - \frac{1}{r} u_{r\varphi} \sin \varphi \cos \varphi \\ &\quad - \frac{1}{r} u_{r\varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{r} u_r \sin^2 \varphi + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} \sin^2 \varphi + \frac{1}{r^2} u_\varphi \sin \varphi \cos \varphi \\ &= u_{rr} \cos^2 \varphi + \frac{2}{r^2} u_\varphi \sin \varphi \cos \varphi - \frac{2}{r} u_{r\varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{r} u_r \sin^2 \varphi + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} \sin^2 \varphi \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} u_{yy} &= \sin \varphi u_{yr} + \frac{1}{r} \cos \varphi u_{y\varphi} \\ &= \sin \varphi \frac{\partial}{\partial r} \left(u_r \sin \varphi + \frac{1}{r} u_\varphi \cos \varphi \right) + \frac{1}{r} \cos \varphi \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(u_r \sin \varphi + \frac{1}{r} u_\varphi \cos \varphi \right) \\ &= u_{rr} \sin^2 \varphi - \frac{1}{r^2} u_\varphi \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{r} u_{r\varphi} \sin \varphi \cos \varphi \\ &\quad + \frac{1}{r} u_{r\varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{r} u_r \cos^2 \varphi + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} \cos^2 \varphi - \frac{1}{r^2} u_\varphi \sin \varphi \cos \varphi \\ &= u_{rr} \sin^2 \varphi - \frac{2}{r^2} u_\varphi \sin \varphi \cos \varphi + \frac{2}{r} u_{r\varphi} \sin \varphi \cos \varphi + \frac{1}{r} u_r \cos^2 \varphi + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi} \cos^2 \varphi. \end{aligned}$$

Durch Summation beider Gleichungen erhält man schließlich

$$\Delta u = u_{rr} + \frac{1}{r} u_r + \frac{1}{r^2} u_{\varphi\varphi}.$$

■

Wir fahren nun mit einer Technik fort, die wir bereits bei der Wellengleichung angewendet haben: einem Separationsansatz

$$u(r, \varphi) = v(r)w(\varphi).$$

Damit erhalten wir aus der Laplace-Gleichung

$$v''(r) w(\varphi) + \frac{1}{r} v'(r) w(\varphi) + \frac{1}{r^2} v(r) w''(\varphi) = 0.$$

Wir erkennen dann, dass in

$$r^2 \frac{v''(r)}{v(r)} + r \frac{v'(r)}{v(r)} = -\frac{w''(\varphi)}{w(\varphi)} \quad (13.14)$$

beide Seiten konstant sein müssen. Nennen wir diese Konstante λ . Auch hier ergibt sich, dass nur ein Vorzeichen vorkommt, aber aus einem anderen Grund als bei der Wellengleichung: **Wir brauchen eine 2π -periodische Lösung w** . Sonst wäre u unstetig und schon gar nicht differenzierbar! Somit muss λ in

$$w'' = -\lambda w$$

nicht-negativ sein. Um dies zu verdeutlichen, schreiben wir $\lambda = \alpha^2$, $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$. Also hat w die Form

$$w(\varphi) = C_1 \cos(\alpha\varphi) + C_2 \sin(\alpha\varphi).$$

Das garantiert aber noch nicht die 2π -Periodizität. Wir brauchen

$$w(\varphi) = C_1 \cos(n\varphi) + C_2 \sin(n\varphi), \quad n \in \mathbb{N} \text{ beliebig.}$$

Für $\lambda = 0$ müssten wir übrigens $w(\varphi) = C_1 + C_2 t$ ansetzen, woraus wegen der Periodizität $C_2 = 0$ folgen würde. Dies entspricht der obigen Lösung für $n = 0$.

Aus (13.14) erhalten wir ferner

$$r^2 v'' + r v' - n^2 v = 0. \quad (13.15)$$

Dies ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung - allerdings nicht mit konstanten Koeffizienten, wie wir es bisher hatten. Sie gehört zu den **Euler'schen Differentialgleichungen**, die allgemein die Form

$$a_n x^n y^{(n)} + a_{n-1} x^{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_1 x y' + a_0 y = 0$$

mit gegebenen Konstanten a_0, \dots, a_n haben. Man löst sie, indem man sie durch die Substitution $y(x) = f(\ln x)$ in eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten umwandelt. In unserem Fall heißt das, wir substituieren $v(r) = f(\ln r)$ und $t := \ln r$, d.h. $v(r) = f(t)$. Dann ist

$$\begin{aligned} v'(r) &= v_r = \frac{\partial f}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial r} = f_t \frac{1}{r} \\ v''(r) &= \frac{\partial}{\partial r} \left(f_t \frac{1}{r} \right) = f_{tt} \frac{1}{r^2} - f_t \frac{1}{r^2}. \end{aligned}$$

Aus Gleichung (13.15) wird dann

$$\begin{aligned} f_{tt} - f_t + f_t - n^2 f &= 0 \\ \Leftrightarrow f_{tt} &= n^2 f. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist offensichtlich

$$f(t) = C_3 e^{nt} + C_4 e^{-nt}$$

für $n \neq 0$ und

$$f(t) = C_3 + C_4 t$$

für $n = 0$. Durch Rücksubstitution landen wir bei

$$v(r) = \begin{cases} C_3 r^n + C_4 r^{-n}, & n \neq 0 \\ C_3 + C_4 \ln r, & n = 0 \end{cases}.$$

Da die Lösung auch bei $r = 0$ existieren muss, scheidet jeweils der zweite Teil des Fundamentalsystems aus, was $C_4 = 0$ bedeutet. Also ist $v(r) = C_3 r^n$ und insgesamt

$$\boxed{u(r, \varphi) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos(n\varphi) + b_n \sin(n\varphi))}. \quad (13.16)$$

Wir haben noch nicht die Dirichlet-Randbedingung eingebaut. Es muss

$$u(\sigma, \varphi) = F(\varphi) \quad \forall \varphi \in [0, 2\pi[$$

gelten. Auch hier liefert die diskrete Fourier-Transformation die Koeffizienten: F kann geschrieben werden als

$$F(\varphi) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos(n\varphi) + B_n \sin(n\varphi))$$

mit

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(t) \cos(nt) dt, \quad B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(t) \sin(nt) dt.$$

Folglich gilt

$$a_0 = \frac{A_0}{2}, \quad a_n = \frac{A_n}{\sigma^n}, \quad b_n = \frac{B_n}{\sigma^n} \quad \forall n \geq 1.$$

Wir setzen dieses Ergebnis in (13.16) ein:

$$\begin{aligned} u(r, \varphi) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) dt + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\sigma} \right)^n \frac{1}{\pi} \left[\int_0^{2\pi} F(t) \cos(nt) dt \cos(n\varphi) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} F(t) \sin(nt) dt \sin(n\varphi) \right]. \end{aligned}$$

Wir vertauschen nun die Reihe mit der Integration. Dies ist nicht trivial, aber wenn f nicht allzu skurril ist, dann ist das erlaubt.

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\sigma} \right)^n (\cos(nt) \cos(n\varphi) + \sin(nt) \sin(n\varphi)) \right] dt.$$

Das lässt sich mit einem Additionstheorem vereinfachen:

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\sigma}\right)^n \cos(n(t - \varphi)) \right] dt.$$

Es ist möglich (und das ist der eigentliche Clou), eine geschlossene Darstellung für die Reihe herzuleiten. Mittels Euler-Formel und geometrischer Reihe erhält man nämlich:

$$\begin{aligned} & 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\sigma}\right)^n \cos(n(t - \varphi)) \\ &= \operatorname{Re} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\sigma}\right)^n e^{in(t - \varphi)} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[1 + 2 \left(\frac{1}{1 - \frac{r}{\sigma} e^{i(t - \varphi)}} - 1 \right) \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[1 + 2 \frac{\frac{r}{\sigma} e^{i(t - \varphi)}}{1 - \frac{r}{\sigma} e^{i(t - \varphi)}} \right] \\ &= \operatorname{Re} \frac{\sigma - r e^{i(t - \varphi)} + 2 r e^{i(t - \varphi)}}{\sigma - r e^{i(t - \varphi)}} \\ &= \operatorname{Re} \frac{\sigma + r e^{i(t - \varphi)}}{\sigma - r e^{i(t - \varphi)}} \\ &= \operatorname{Re} \frac{\sigma + r \cos(t - \varphi) + i r \sin(t - \varphi)}{\sigma - r \cos(t - \varphi) - i r \sin(t - \varphi)} \\ &= \frac{\sigma^2 - r^2 \cos^2(t - \varphi) - r^2 \sin^2(t - \varphi)}{(\sigma - r \cos(t - \varphi))^2 + r^2 \sin^2(t - \varphi)} \\ &= \frac{\sigma^2 - r^2}{\sigma^2 - 2\sigma r \cos(t - \varphi) + r^2}. \end{aligned}$$

Wir erhalten damit eine Formel zur Berechnung der Lösung u aus den Randwerten F :

$$\boxed{u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(t) \frac{\sigma^2 - r^2}{\sigma^2 - 2\sigma r \cos(t - \varphi) + r^2} dt.} \quad (13.17)$$

Man nennt sie die **Poisson'sche Integralformel**.

Zum Abschluss noch zwei grundlegende Sätze über harmonische Funktionen, die zur Allgemeinbildung jedes/-r Ingenieurs/-in und jedes/-r Mathematikers/-in gehören sollten. Sie gelten auch in höheren Dimensionen, nicht nur im \mathbb{R}^2 .

Satz 13.3.3 (Mittelwertsatz für harmonische Funktionen) Die Funktion $u \in C^{(2)}(G)$ sei harmonisch, wobei die Kreisscheibe $K_\rho(x_0, y_0)$ mit Zentrum (x_0, y_0) und Radius $\rho > 0$ ganz in $G \subset \mathbb{R}^2$ enthalten sei. Dann ist u in (x_0, y_0) durch die Werte am Kreisrand gegeben:

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{\partial K_\rho(x_0, y_0)} u \, ds.$$

Beweis: u ist die eindeutige Lösung $u = \tilde{u}$ des inneren Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u} &= 0 && \text{in } K_\rho(x_0, y_0) \\ \tilde{u} &= u && \text{auf } \partial K_\rho(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Wir verschieben das Koordinatensystem nun, so dass der Ursprung im Kreismittelpunkt liegt. Dann liefert die Poisson'sche Integralformel mit $r = 0$ den Rest (denken Sie an den Faktor ρ , der sich im Kurvenintegral ergibt). ■

Satz 13.3.4 (Maximumprinzip) Sei $G \subset \mathbb{R}^2$ abgeschlossen (d.h. der Rand ist enthalten), beschränkt und zusammenhängend. Ist $u \in C^{(2)}(G)$ harmonisch und nicht-konstant, dann nimmt u sein Maximum und sein Minimum auf dem Rand ∂G an.

Beweis: Wir betrachten hier das Maximum. Das Minimum kann man analog als Maximum von $-u$ behandeln. Der folgende Beweis ist indirekt: Wir nehmen an, dass es einen Punkt (x_0, y_0) im Inneren von G gibt, wo

$$u(x_0, y_0) = \max_{(x,y) \in G} u(x, y) =: M$$

gilt. Da u nicht-konstant ist, muss es einen Punkt (x_2, y_2) geben, so dass $u(x_2, y_2) < M$. Da außerdem G zusammenhängend ist, muss es einen regulären Weg ψ von (x_0, y_0) nach (x_2, y_2) geben, der ganz in G enthalten ist (siehe Abbildung 13.1). Auf dem Weg von (x_0, y_0) nach (x_2, y_2) sei (x_1, y_1) der letzte Punkt, in dem noch u den maximalen Wert annimmt (aufgrund der Stetigkeit von u muss es ihn geben). Es ist nicht ausgeschlossen, dass dies (x_0, y_0) sein kann. Aber es ist sicher, dass (x_1, y_1) nicht gleich (x_2, y_2) ist. Folglich können wir eine Kreisfläche $K_\rho(x_1, y_1)$ konstruieren, so dass (x_2, y_2) nicht im Kreis liegt, der Kreis aber ganz in G liegt. (Das ist wichtig; hier geht ein, dass (x_0, y_0) nicht am Rand liegt!) Da auf dem Teil des Weges ψ hinter (x_1, y_1) bekanntermaßen $u < M$ gilt, gilt dies auch auf dem Schnittpunkt dieses Wegstücks mit dem Kreisrand $\partial K_\rho(x_1, y_1)$. Wegen der Stetigkeit von u gilt damit auch $u < M$ auf einem Teilstück positiver Länge von $\partial K_\rho(x_1, y_1)$. Mit Satz 13.3.3 erhalten wir damit

$$\underbrace{u(x_1, y_1)}_{=M} = \frac{1}{2\pi\rho} \underbrace{\oint_{\partial K_\rho(x_1, y_1)} u \, ds}_{< M 2\pi\rho} < M.$$

Dies ist ein Widerspruch. ■

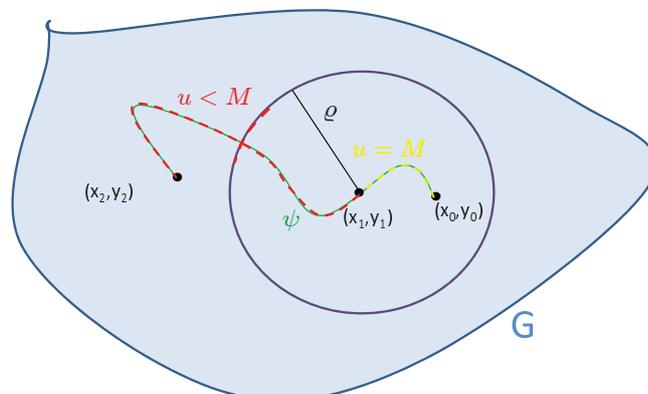


Abbildung 13.1: Illustration für den Beweis von Satz 13.3.4.

13.4 Einschub: Distributionen und noch mal Funktionalanalysis

Distributionen sind ein bewährtes Hilfsmittel, um partielle Differentialgleichungen zu behandeln, u.a. weil sie eine so genannte schwache Formulierung der Gleichung erlauben.

Definition 13.4.1 Die Menge $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ bestehe aus allen Funktionen $\varphi \in C^{(\infty)}(\mathbb{R}^n)$, die nur auf einer beschränkten Menge von Null verschieden sind. Ihre Elemente heißen **Testfunktionen**.

Beispiel 13.4.2 Die Funktion

$$\varphi(x) := \begin{cases} \exp\left(\frac{1}{|x|^2-1}\right), & |x| < 1 \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

ist ein Beispiel für eine Testfunktion. Sie ist außerhalb der Kugel $K_1(0)$ gleich Null. Außerdem ist sie beliebig oft differenzierbar. Letzteres nachzuprüfen wird als Übungsaufgabe überlassen. Hierfür muss gezeigt werden, dass alle Ableitungen von φ , die im Inneren der Kugel gebildet werden, im Limes $|x| \rightarrow 1$ verschwinden. \diamond

Definition 13.4.3 Unter einer **Distribution** (auch **verallgemeinerte Funktion** genannt) versteht man eine Abbildung $\mathcal{F} : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathbb{R}$, die

1. linear ist, d.h.

$$\mathcal{F}(\lambda\varphi + \mu\psi) = \lambda\mathcal{F}(\varphi) + \mu\mathcal{F}(\psi) \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} \quad \forall \varphi, \psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),$$

2. und stetig ist, d.h. für jede konvergente Folge $\varphi_n \rightarrow \varphi$ in $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}(\varphi_n) = \mathcal{F}(\varphi).$$

Die Menge aller Distributionen wird mit $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$ bezeichnet.

Was “ $\varphi_n \rightarrow \varphi$ ” bedeutet, lassen wir hier mal außer Acht: Für Details sei auf [13] verwiesen. In diesem Zusammenhang gibt es einen interessanten Satz.

Satz 13.4.4 (Riesz’scher Darstellungssatz) Sei $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ ein Hilbertraum und $\mathcal{F} : H \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige lineare und stetige Abbildung. Dann existiert genau ein Element $g \in H$, so dass

$$\mathcal{F}(f) = \langle f, g \rangle \quad \forall f \in H$$

gilt.

Leider ist dieser Satz nicht auf $\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$ anwendbar. Zwar kann man $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ein L^2 -Skalarprodukt “verpassen”, jedoch ist der entstehende Funktionenraum nicht vollständig, also kein Hilbertraum. Trotzdem gibt es manche Distributionen, bei denen es so eine Darstellung gibt.

Definition 13.4.5 Eine Distribution $\mathcal{F} \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$ heißt **regulär**, wenn es eine Funktion $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, so dass

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)F(x) \, dx \quad (= \langle \varphi, F \rangle_{L^2(\mathbb{R}^n)}) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

gilt. Ansonsten heißt sie **singulär**.

Beispiel 13.4.6

a) Die Distribution $\mathcal{F} \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ mit

$$\mathcal{F}(\varphi) := \int_0^\infty \varphi(t) \, dt$$

ist regulär, da

$$\mathcal{F}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \varphi(t)H(t) \, dt$$

gilt, wenn

$$H(t) := \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t \leq 0 \end{cases}$$

die **Heaviside-Funktion** ist. \mathcal{F} heißt entsprechend **Heaviside-Distribution**.

b) Die **Dirac'sche Delta-Distribution** $\delta_{x_0} \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$ mit $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ist definiert durch

$$\delta_{x_0}(\varphi) := \varphi(x_0) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Sie ist **singulär** (auch wenn manche Anwender abenteuerliche Vorstellungen von Funktionen haben, die sie darstellen).

◇

Für Differentialgleichungen ist vor allem die folgende Definition wichtig:

Definition 13.4.7 Sei $\mathcal{F} \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$ eine Distribution und $D := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}}$ ein Differentialoperator. Eine Distribution $\mathcal{G} \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$, für die

$$\mathcal{G}(\varphi) = (-1)^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n} \mathcal{F}(D\varphi) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$$

gilt, nennt man die **Ableitung der Distribution** \mathcal{F} . Man schreibt $D\mathcal{F} := \mathcal{G}$.

Beispiel 13.4.8

a) Sei $\mathcal{F} \in \mathcal{D}^*(\mathbb{R})$ eine reguläre Distribution. Also gibt es ein $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, so dass

$$\mathcal{F}\varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)F(t) dt \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Ist F (im konventionellen Sinne) differenzierbar, so erhält man mittels partieller Integration

$$\left(\frac{d}{dt} \mathcal{F}\right) \varphi \stackrel{\text{Def.}}{=} -\mathcal{F}(\varphi') = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi'(t)F(t) dt = -\varphi(t)F(t) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)F'(t) dt.$$

Aufgrund der Definition von $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ gibt es ein Intervall $[a, b]$, außerhalb dessen φ verschwindet. Also gilt $\lim_{t \rightarrow \pm\infty} (\varphi(t)F(t)) = 0$. Folglich erhalten wir

$$\left(\frac{d}{dt} \mathcal{F}\right) \varphi = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t)F'(t) dt,$$

d.h. F' ist eine Funktion, die (die reguläre Distribution) $\frac{d}{dt} \mathcal{F}$ darstellt.

b) Wir betrachten die Heaviside-Distribution. Die zugehörige Heaviside-Funktion ist nicht auf ganz \mathbb{R} differenzierbar. Jedoch gibt es eine Ableitung im distributionellen Sinne. Aus

$$\mathcal{F}\varphi = \int_0^{\infty} \varphi(t) dt$$

und

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{dt} \mathcal{F}\right) \varphi &= -\mathcal{F}\left(\frac{d}{dt} \varphi\right) \\
 &= -\int_0^\infty \varphi'(t) dt \\
 &= -\lim_{M \rightarrow \infty} \varphi(t) \Big|_0^M \\
 &= \varphi(0) \\
 &= \delta_0 \varphi
 \end{aligned}$$

folgt, dass die Dirac'sche Delta-Distribution δ_0 die Ableitung der Heaviside-Distribution ist.

◇

Das Konzept der distributionellen Ableitung erlaubt damit in der Tat eine Verallgemeinerung des klassischen Ableitungsbegriffs. Der Nutzen bei partiellen Differentialgleichungen ist folgender: Beispielsweise aus

$$u_{xy} - u_t = 0 \tag{13.18}$$

kann man

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} u(x, y, t) - \frac{\partial}{\partial t} u(x, y, t) \right) \varphi(x, y, t) d(x, y, t) = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$$

und mittels distributioneller Ableitung

$$\iiint_{\mathbb{R}^3} u(x, y, t) \left(\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \varphi(x, y, t) + \frac{\partial}{\partial t} \varphi(x, y, t) \right) d(x, y, t) = 0 \tag{13.19}$$

herleiten. Hierbei nennt man (13.19) die **schwache Formulierung** von (13.18). Dies liegt daran, dass aus (13.18) stets (13.19) mittels partieller Integration hergeleitet werden kann. Jedoch gilt die Umkehrung in aller Regel nicht, da u für (13.19) nicht einmal differenzierbar sein muss. Trotzdem erweist es sich manchmal (vor allem, aber nicht nur, in der Numerik) als hilfreich, die schwache Formulierung zu lösen.

13.5 Die Poisson-Gleichung

Die Poisson-Gleichung ist im Grunde nichts anderes als das inhomogene Gegenstück der Laplace-Gleichung:

$$\Delta u = f.$$

Für die Poisson-Gleichung verwendet man eine Technik, die typisch für elliptische partielle Differentialgleichungen ist: das Lösen mittels Green'scher Funktion.

Definition 13.5.1 Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Unter einer **Green'schen Funktion** (für den Laplace-Operator) versteht man eine Funktion $(x, y) \mapsto G(x, y)$, die für alle $x \in B$ und alle $y \in B$ mit $x \neq y$ definiert ist und folgende Eigenschaften hat:

- a) $\lim_{x \rightarrow \xi} G(x, y) = 0 \quad \forall \xi \in \partial B \quad \forall y \in B$
 b) $\Delta_x G(x, y) = \delta_y \quad \forall y \in B$ im distributionellen Sinne.

Satz 13.5.2 Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet und G die zugehörige Green'sche Funktion für den Laplace-Operator. Dann ist die Lösung des Dirichlet-Problems

$$\begin{aligned} \Delta u &= f & \text{in } B & \quad (f \in C(B) \text{ gegeben}) \\ u &= 0 & \text{auf } \partial B & \end{aligned}$$

gegeben durch

$$u(x) = \int_B f(y) G(x, y) \, dy \quad \forall x \in B.$$

Beispiel 13.5.3 Für den Fall $B = \mathbb{R}^3$ ist die Green'sche Funktion gegeben durch

$$G(x, y) = -\frac{1}{4\pi} \frac{1}{|x - y|}.$$

Dies ergibt, dass das Potential

$$V(x) = \int_B f(y) \frac{1}{|x - y|} \, dy$$

die Poissongleichung

$$\Delta V = -4\pi f$$

erfüllt. Wir rechnen nach, dass G wirklich die Green'sche Funktion ist. Zu Eigenschaft a) wäre zu sagen, dass der \mathbb{R}^3 keinen Rand besitzt. In diesem Fall ist die Bedingung also so zu interpretieren, dass

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} G(x, y) = 0 \quad \forall y \in B$$

gelten muss, was offensichtlich erfüllt ist.

Wenden wir uns Bedingung b) zu. Es ist also (nach Definition der distributionellen Ableitung) zu zeigen, dass

$$-\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|x-y|} \Delta_x \varphi(x) \, dx = \varphi(y) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$$

gilt. Mit der Substitution $\tilde{x} := x - y$ erhält man

$$-\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\tilde{x}|} \Delta_{\tilde{x}} \varphi(\tilde{x} + y) \, d\tilde{x} = \varphi(y) \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3).$$

Ferner ergibt $\tilde{\varphi}(\tilde{x}) := \varphi(\tilde{x} + y)$, dass

$$-\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|\tilde{x}|} \Delta_{\tilde{x}} \tilde{\varphi}(\tilde{x}) \, d\tilde{x} = \tilde{\varphi}(0) \quad \forall \tilde{\varphi} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$$

gezeigt werden muss. Es reicht daher, den Fall $y = 0$ zu betrachten. Wir wissen bereits, dass $\Delta_x \frac{1}{|x|} = 0$ für alle $x \neq 0$ gilt.

Wir wenden nun die 2. Green'sche Formel auf $\mathbb{R}^3 \setminus K_R(0)$ an, wobei $K_R(0)$ wie üblich eine Kugel um 0 mit Radius $R > 0$ ist. Wir erhalten

$$\int_{\mathbb{R}^3 \setminus K_R(0)} \left(\varphi(x) \underbrace{\Delta_x \frac{1}{|x|}}_{=0} - \frac{1}{|x|} \Delta \varphi(x) \right) dx = \int_{\partial K_R(0)} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial n(x)} \frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x|} \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x) \, dO(x).$$

Das Herausnehmen der Kugel ist notwendig, da $\frac{1}{|x|}$ nicht in $x = 0$ definiert ist. Übrigens ist n wieder die äußere Einheitsnormale, die hier in $K_R(0)$ hinein zeigt. Außerdem haben wir hier benutzt, dass am "Rand des \mathbb{R}^3 ", also für $|x| \rightarrow \infty$, die Testfunktion mit all ihren Ableitungen gegen Null strebt.

Sehen wir uns das verbleibende Randintegral genauer an: Zunächst ist

$$\frac{\partial}{\partial n(x)} \frac{1}{|x|} = \underbrace{n(x)}_{=-\frac{x}{|x|}} \cdot \nabla_x \frac{1}{|x|} = -\frac{x}{|x|} \cdot \left(-\frac{x}{|x|^3} \right) = \frac{1}{|x|^2} = \frac{1}{R^2} \quad \forall x \in \partial K_R(0).$$

Also gilt

$$\int_{\partial K_R(0)} \varphi(x) \frac{\partial}{\partial n(x)} \frac{1}{|x|} \, dO(x) = \frac{1}{R^2} \int_{\partial K_R(0)} \varphi(x) \, dO(x).$$

Den zweiten Teil des Oberflächenintegrals können wir abschätzen mit

$$\begin{aligned} \left| \int_{\partial K_R(0)} \frac{1}{|x|} \frac{\partial \varphi}{\partial n}(x) \, dO(x) \right| &= \left| \int_{\partial K_R(0)} \frac{1}{R} n \cdot (\nabla \varphi(x)) \, dO(x) \right| \\ &\leq \frac{1}{R} \int_{\partial K_R(0)} \underbrace{|n|}_{=1} \cdot |\nabla \varphi(x)| \, dO(x) \\ &\leq \frac{1}{R} \int_{\partial K_R(0)} \max_{y \in \mathbb{R}^3} |\nabla \varphi(y)| \, dO(x) \\ &= \frac{1}{R} \max_{y \in \mathbb{R}^3} |\nabla \varphi(y)| \cdot 4\pi R^2 \xrightarrow{R \rightarrow 0} 0. \end{aligned}$$

Das Maximum von $|\nabla \varphi|$ existiert hierbei, da $|\nabla \varphi|$ nur auf einer beschränkten Menge von Null verschieden ist und stetig ist (siehe Satz 7.2.9).

Es bleibt also (diesmal mit Vorfaktor $\frac{1}{4\pi}$) im Limes $R \rightarrow 0+$

$$-\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|x|} \Delta\varphi(x) dx = \lim_{R \rightarrow 0+} \left[\frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial K_R(0)} \varphi(x) dO(x) \right].$$

Wegen der Monotonie des Integrals gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial K_R(0)} \min_{|y|=R} \varphi(y) dO(x) &\leq \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial K_R(0)} \varphi(x) dO(x) \leq \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial K_R(0)} \max_{|y|=R} \varphi(y) dO(x) \\ \Leftrightarrow \min_{|y|=R} \varphi(y) &\leq \frac{1}{4\pi R^2} \int_{\partial K_R(0)} \varphi(x) dO(x) \leq \max_{|y|=R} \varphi(y). \end{aligned}$$

Im Limes $R \rightarrow 0+$ gehen sowohl die linke als auch die rechte Seite aufgrund der Stetigkeit von φ gegen $\varphi(0)$. Somit gilt dies auch für den eingeschlossenen Term in der Mitte. Folglich haben wir

$$-\int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{4\pi|x|} \Delta\varphi(x) dx = \varphi(0).$$

◇

Beispiel 13.5.4 Wir betrachten das folgende Problem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 4 \quad \text{in } K_1(0) \\ u &= \cos \vartheta \sin \varphi \quad \text{auf } \partial K_1(0). \end{aligned}$$

Diese Lösung setzt sich aus zwei Funktionen zusammen: $u = v + w$, wobei

$$\begin{aligned} \Delta v &= 4 \quad \text{in } K_1(0) & \Delta w &= 0 & \text{in } K_1(0) \\ v &= 0 \quad \text{auf } \partial K_1(0) & w &= \cos \vartheta \sin \varphi & \text{auf } \partial K_1(0). \end{aligned}$$

w bekommt man mit der 3D-Version der Poisson'schen Integralformel, die man in der Literatur nachlesen kann. v erhält man mittels Green'scher Funktion:

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_{K_1(0)} \frac{4}{-4\pi|x-y|} dy \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_{K_1(0)} \frac{1}{|x-y|} dy. \end{aligned}$$

◇

Kapitel 14

Funktionentheorie

14.1 Die komplexe Ableitung

Unter dem Begriff Funktionentheorie versteht man eine Analysis für komplexe Funktionen. Wir haben bereits Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ behandelt, wie z.B. $f(t) = e^{i\omega t}$. Diese lassen sich wie reelle Funktionen behandeln, wenn man beachtet, dass $i^2 = -1$ gilt. In der Funktionentheorie geht es aber um Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ oder allgemein $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ mit $D \subset \mathbb{C}$. Erinnern Sie sich daran, dass wir \mathbb{C} aus dem \mathbb{R}^2 konstruiert haben. So kann man Funktionen $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ auch als Funktionen vom \mathbb{R}^2 in den \mathbb{R}^2 auffassen: $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ mit

$$\tilde{f}(x, y) := (\operatorname{Re} f(x + iy), \operatorname{Im} f(x + iy))^T$$

wäre eine solche Entsprechung. Wir können also Bezüge zur reellen Analysis mehrerer Veränderlicher aufstellen. In der Tat lassen sich die Begriffe der Konvergenz und der Stetigkeit direkt übertragen. Bei der Differentiation gibt es jedoch einen kleinen aber feinen Unterschied. Wir definieren zunächst die Ableitung.

Definition 14.1.1 Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine gegebene Funktion. Dann heißt f in $z_0 \in G$ **komplex differenzierbar**, wenn der Limes

$$\frac{df}{dz}(z_0) := f'(z_0) := \lim_{\substack{h \rightarrow 0 \\ (h \in \mathbb{C})}} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existiert. Ist f in allen $z_0 \in G$ komplex differenzierbar, so nennt man f **analytisch** oder auch **holomorph** (in G).

Für die komplexe Ableitung gelten die gleichen Regeln wie für die reelle (Linearität, Produktregel, Quotientenregel, Kettenregel). Außerdem lassen sich viele Ableitungen elementarer Funktionen auf den komplexen Fall erweitern, wie Tabelle 14.1 zeigt. Für zwei Funktionen in dieser Tabelle besteht jedoch Klärungsbedarf.

$f(z)$	$f'(z)$
e^z	$e^z, z \in \mathbb{C}$
$\sin z$	$\cos z, z \in \mathbb{C}$
$\cos z$	$-\sin z, z \in \mathbb{C}$
$\sinh z$	$\cosh z, z \in \mathbb{C}$
$\cosh z$	$\sinh z, z \in \mathbb{C}$
$z^n, n \in \mathbb{N}$	$nz^{n-1}, z \in \mathbb{C}$
$\operatorname{Ln} z$	$\frac{1}{z}, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$
\sqrt{z}	$\frac{1}{2\sqrt{z}}, z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_0^-$

Tabelle 14.1: Auswahl verschiedener komplexer Ableitungen.

Bemerkung 14.1.2

- a) Der **komplexe Logarithmus** soll eine Umkehrfunktion der komplexen e -Funktion darstellen (die ihrerseits auf die übliche Weise als Potenzreihe definiert ist). Hierbei bezieht man sich auf die Polardarstellung

$$z = |z|e^{i\varphi}, \quad -\pi < \varphi \leq \pi,$$

und definiert

$$\operatorname{Ln} z := \ln |z| + i\varphi. \quad (14.1)$$

Dieser Definition liegt eine gewisse Willkür zugrunde, denn für ein eindeutiges Argument $\varphi = \arg z$ reicht es, irgendein beliebiges halboffenes Intervall der Länge 2π zu wählen. Man erhält dann jeweils andere Funktionen als Logarithmus, die man die **Zweige des Logarithmus** nennt. Die hier gewählte Variante (14.1) heißt **Hauptwert des Logarithmus**. Übrigens: Der komplexe Logarithmus ist zwar — wie der reelle — eine Umkehrfunktion der e -Funktion, genauer der eingeschränkten e -Funktion $\exp : \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} z \in]-\pi, \pi]\} \rightarrow \mathbb{C}$, da für $z = |z|e^{i\varphi} = x + iy, \varphi \in]-\pi, \pi], x \in \mathbb{R}, y \in]-\pi, \pi]$ gilt:

$$\begin{aligned} e^{\operatorname{Ln} z} &= e^{\operatorname{Ln} |z|} e^{i\varphi} = |z| e^{i\varphi} = z, \\ \operatorname{Ln} e^z &= \operatorname{Ln} |e^z| + i \arg e^z = \operatorname{Ln} |e^{x+iy}| + i \arg e^{x+iy} = x + iy, \end{aligned}$$

jedoch gelten im Komplexen die Logarithmengesetze nicht!

- b) Auch bei der Wurzelberechnung benutzt man eine Polardarstellung. Wir legen auch hier (erneut völlig willkürlich)

$$z = |z|e^{i\varphi}, \quad -\pi < \varphi \leq \pi,$$

als Polardarstellung fest und wählen (auch hier herrscht Willkür) die folgende der beiden Quadratwurzeln aus:

$$\sqrt{z} := \sqrt{|z|} e^{i \frac{\varphi}{2}}.$$

Übrigens kann man in der Ebene das Potential einer Punktladung im Punkt z_0 darstellen als komplexe Funktion

$$f(z) = \operatorname{Ln}(z - z_0).$$

Nicht alle Funktionen sind komplex differenzierbar, wie das folgende Beispiel zeigt.

Beispiel 14.1.3 Sie $f(z) = \bar{z}$ die Funktion der komplexen Konjugation. Wir schreiben $z = z_1 + iz_2$, $h = h_1 + ih_2$; $z_1, z_2, h_1, h_2 \in \mathbb{R}$; und erhalten

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\overline{z+h} - \bar{z}}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{z_1 + h_1 - i(z_2 + h_2) - (z_1 - iz_2)}{h_1 + ih_2} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h_1 - ih_2}{h_1 + ih_2}. \end{aligned}$$

Dieser Limes existiert jedoch nicht, da man beispielsweise durch Annäherung auf der imaginären Achse (also $h = 0 + ih_2$, $h_2 \rightarrow 0$) den Quotienten -1 und bei Annäherung auf der reellen Achse ($h = h_1 + i0$, $h_1 \rightarrow 0$) den Quotienten 1 erhält. Somit ist f nirgends in \mathbb{C} differenzierbar. \diamond

14.2 Integration

In der komplexen Ebene sind vor allem Kurvenintegrale von Interesse. Auch bei ihnen profitieren wir davon, dass wir schon wissen, wie das im \mathbb{R}^2 geht.

Definition 14.2.1 Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine stetige Funktion und $\gamma : [a, b] \rightarrow G$ eine (stückweise) stetig differenzierbare Kurve. Dann nennt man

$$\int_{\gamma} f(z) dz := \int_a^b f(\gamma(t)) \dot{\gamma}(t) dt$$

das (**Kurven-**)Integral von f längs γ .

Beispiel 14.2.2 Wir integrieren die komplexe Funktion $f(z) := (z - a)^n$ mit $a = a_1 + ia_2 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{Z}$, längs der Kreislinie um a mit Radius $r > 0$. In \mathbb{R}^2 hätten wir die Kurve parametrisiert durch

$$x = a_1 + r \cos \varphi, \quad y = a_2 + r \sin \varphi, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Da x für den Realteil und y für den Imaginärteil steht, wird im Komplexen daraus die Kurve

$$\gamma(\varphi) = a + r \cos \varphi + ir \sin \varphi = a + re^{i\varphi}, \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Damit können wir das Integral berechnen:

$$\begin{aligned} \oint_{\partial K_r(a)} (z-a)^n dz &= \int_0^{2\pi} (re^{i\varphi})^n rie^{i\varphi} d\varphi \\ &= r^{n+1}i \int_0^{2\pi} e^{(n+1)i\varphi} d\varphi \\ &= r^{n+1} \begin{cases} \frac{1}{n+1} e^{(n+1)i\varphi} \Big|_0^{2\pi}, & n \neq -1 \\ i \int_0^{2\pi} 1 d\varphi, & n = -1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$\oint_{\partial K_r(a)} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi i, & n = -1 \end{cases} \quad \forall a \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

Dieses Integral nennt man das **Fundamentalintegral**. ◇

Bemerkung 14.2.3 *Wir legen für den Rest dieses Skripts fest, dass geschlossene Kurven immer in **positiver Umlaufrichtung** durchlaufen werden, d.h. in Umlaufrichtung liegt die umschlossene Fläche (das "Innere" der Kurve) stets links.*

14.3 Der Hauptsatz über holomorphe Funktionen und der Cauchy'sche Integralsatz

Es gibt einen fundamentalen Zusammenhang zwischen einzelnen Bereichen der Funktionentheorie, der u.a. den Unterschied zwischen komplexer und reeller Ableitung verdeutlicht.

Satz 14.3.1 (Hauptsatz über holomorphe Funktionen) *Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

- a) f ist holomorph in G .
- b) f ist in jedem $z_0 \in G$ einmal komplex differenzierbar.
- c) f ist in jedem $z_0 \in G$ reell differenzierbar und es gelten die **Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen** : Für $f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ gilt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

- d) f ist in jedem $z_0 \in G$ in eine Potenzreihe entwickelbar.
- e) Zu jedem $z_0 \in G$ existiert ein Kreis $K_{r(z_0)}(z_0)$, in dem es eine holomorphe Funktion F mit $F' = f$ gibt (**lokale Stammfunktion**).
- f) Für jedes in G gelegene abgeschlossene Dreieck Δ gilt

$$\int_{\partial\Delta} f(z) dz = 0.$$

Beispiel 14.3.2 Wir haben bereits gesehen, dass $f(z) = \bar{z}$ nicht holomorph ist. Mit $f(x+iy) = x-iy$, $u(x,y) := x$, $v(x,y) := -y$ testen wir die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen, die tatsächlich verletzt sind:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

◇

Satz 14.3.3 (Cauchy'scher Integralsatz) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet "ohne Loch" und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt für jede geschlossene Jordankurve γ in G , dass

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 0.$$

Satz 14.3.4 (Cauchy-Integralformel) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet "ohne Loch" und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Ist γ eine geschlossene Jordankurve in G , so gilt für alle z im Inneren von γ , dass

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \quad (14.2)$$

Satz 14.3.5 Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet "mit Löchern" und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann gilt für je zwei geschlossene Kurven γ_1 und γ_2 in G , die dieselbe Ausnahmemenge in gleicher Richtung einmal umlaufen, dass

$$\oint_{\gamma_1} f(z) dz = \oint_{\gamma_2} f(z) dz.$$

Beispiel 14.3.6

- a) Die Bedingung “ohne Loch” im Cauchy’schen Integralsatz ist wichtig, wie das Fundamentalintegral zeigt: Für $m = -1$ ist $f(z) = (z - a)^m$ nicht auf $K_R(a)$ definierbar. In der Tat gilt dann auch

$$\oint_{\partial K_R(a)} \frac{1}{z - a} dz = 2\pi i \neq 0.$$

- b) Wir suchen

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 1} dz$$

für eine beliebige Kurve γ , die weder durch i noch durch $-i$ verläuft. Mit γ_{int} bezeichnen wir die von γ umschlossene Fläche (das “Innere” von γ) und mit γ_{ext} den entsprechenden Außenbereich. Partialbruchzerlegung liefert

$$\frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{2i} \frac{1}{z - i} - \frac{1}{2i} \frac{1}{z + i}.$$

Nach Satz 14.3.5 gilt, wenn i im Inneren von γ liegt,

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z - i} dz = \oint_{\partial K_R(i)} \frac{1}{z - i} dz = 2\pi i \quad (\text{mit beliebigem } R > 0).$$

Ist i nicht im Inneren von γ , so verschwindet das Integral wegen des Cauchy’schen Integralsatzes. Analoges gilt für $\frac{1}{z+i}$. Also gilt

$$\oint_{\gamma} \frac{1}{z^2 + 1} dz = \begin{cases} \pi, & i \in \gamma_{\text{int}} \text{ und } -i \in \gamma_{\text{ext}} \\ -\pi, & i \in \gamma_{\text{ext}} \text{ und } -i \in \gamma_{\text{int}} \\ 0, & i, -i \in \gamma_{\text{int}} \text{ oder } i, -i \in \gamma_{\text{ext}} \end{cases}$$

◇

14.4 Taylor- und Laurent-Reihe

Satz 14.4.1 Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Dann ist f in jedem Kreis $K_R(z_0)$, der ganz in G liegt, in eine **Taylor-Reihe**

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(z_0)}{k!} (z - z_0)^k \quad \forall z \in K_R(z_0)$$

entwickelbar. Ferner gilt für die Ableitungen von f :

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_{\partial K_{\varrho}(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta \quad \forall n \in \mathbb{N}_0 \quad \forall z \in K_{\varrho}(z_0) \quad \forall \varrho \in]0, R[. \quad (14.3)$$

Die Formel (14.3) ist offensichtlich eine Verallgemeinerung von (14.2).

Taylor-Reihen kennen wir bereits aus der reellen Analysis. Für Funktionen, deren Potenzreihen wir kennen, wie \exp , \sin , \cos , \sinh , \cosh , stimmen sie mit eben jenen Potenzreihen überein.

Im Komplexen gibt es eine allgemeinere Form der Taylor-Reihe, die so genannte Laurent-Reihe. Sie erlaubt es, "Löcher" im Definitionsbereich zuzulassen.

Satz 14.4.2 Sei $K_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbb{C} \mid r < |z - z_0| < R\}$ ein Kreisring und $f : K_{r,R}(z_0) \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann lässt sich f in $K_{r,R}(z_0)$ in eine **Laurent-Reihe** entwickeln:

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n \quad \forall z \in K_{r,R}(z_0),$$

wobei

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K_\varrho(z_0)} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad \forall \varrho \in]r, R[.$$

Die Laurent-Reihe teilt man in zwei Teile auf:

$$f(z) = \underbrace{\sum_{n=0}^{+\infty} c_n (z - z_0)^n}_{\text{Nebenteil}} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n}_{\text{Hauptteil}}$$

Sehen wir uns den Zusammenhang zur Taylor-Reihe an. Ist f sogar auf $K_R(z_0)$ holomorph und damit in eine Taylor-Reihe entwickelbar, so gilt nach Satz 14.4.1

$$c_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} \quad \forall n \geq 0.$$

Da man zeigen kann, dass Laurent-Reihen bei vorgegebenem Entwicklungszentrum z_0 eindeutige Koeffizienten c_n haben, muss in diesem Fall die Taylor-Reihe mit der Laurent-Reihe übereinstimmen, deren Hauptteil somit verschwindet. Also gilt

$$c_n = 0 \quad \forall n < 0.$$

Interessant ist die Laurent-Reihe also gerade dann, wenn es zwingend erforderlich ist, den inneren Kreis $K_r(z_0)$ herauszunehmen.

Beispiel 14.4.3

- a) Für $f(z) = \frac{1}{(z-i)^4}$ ist die Laurent-Reihe in $K_{r,R}(i)$ mit beliebig gewählten $0 < r < R$ einfach, denn $f(z) = \frac{1}{(z-i)^4}$ ist bereits die Laurent-Reihe. Es gilt

$$c_{-4} = 1, \quad c_n = 0 \quad \forall n \neq -4.$$

b) Für $f(z) = e^z$ kennen wir die Laurent-Reihe alias Taylor-Reihe in $K_R(0)$, $R > 0$ beliebig:

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

Also gilt für $g(z) = e^{\frac{1}{z+i}}$:

$$\begin{aligned} g(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{z+i} \right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z+i)^{-n} \\ &\stackrel{m:=-n}{=} \sum_{m=-\infty}^0 \frac{1}{(-m)!} (z - (-i))^m \quad \text{für } |z+i| > 0. \end{aligned}$$

Also erfüllen die Laurent-Koeffizienten von g bei Wahl des Entwicklungszentrums $-i$:

$$\begin{aligned} c_m &= 0 \quad \forall m > 0, \\ c_m &= \frac{1}{(-m)!} \quad \forall m \leq 0. \end{aligned}$$

c) Stammbrüche können auch mit einem anderen Zentrum als der Nullstelle des Nenners entwickelt werden. Kehren wir zurück zu $f(z) = \frac{1}{(z-i)^4}$ und entwickeln um $z_0 \neq i$. Wir benutzen hierfür die altbekannte geometrische Reihe, die auch komplex gültig ist:

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \quad \text{für alle } z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z| < 1.$$

Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{z-i} &= \frac{1}{(z-z_0) - (i-z_0)} \\ &= \frac{1}{z-z_0} \frac{1}{1 - \frac{i-z_0}{z-z_0}}. \end{aligned}$$

Gilt $|i-z_0| < |z-z_0|$, so können wir mit der geometrischen Reihe fortfahren:

$$\frac{1}{z-i} = \frac{1}{z-z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{i-z_0}{z-z_0} \right)^k.$$

Analog erhält man für $|i - z_0| > |z - z_0|$, dass

$$\frac{1}{z - i} = \frac{1}{(z - z_0) - (i - z_0)} = \frac{1}{i - z_0} \cdot \frac{1}{\frac{z - z_0}{i - z_0} - 1} = -\frac{1}{i - z_0} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{i - z_0} \right)^k.$$

Beachten Sie, dass z hier die Variable ist. Damit erhalten wir die Laurent-Reihen

$$\begin{aligned} \frac{1}{z - i} &= \sum_{k=0}^{\infty} (i - z_0)^k \frac{1}{(z - z_0)^{k+1}}, & \text{falls } |z - z_0| > |i - z_0| \\ \frac{1}{z - i} &= -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(i - z_0)^{k+1}} (z - z_0)^k, & \text{falls } |z - z_0| < |i - z_0|. \end{aligned}$$

Letztere ist gleichzeitig eine Taylor-Reihe.

Gesucht ist allerdings die 4. Potenz der Reihen. Da

$$\begin{aligned} \frac{d}{dz} \frac{1}{z - i} &= -\frac{1}{(z - i)^2}, \\ \frac{d^2}{dz^2} \frac{1}{z - i} &= 2 \frac{1}{(z - i)^3}, \\ \frac{d^3}{dz^3} \frac{1}{z - i} &= -6 \frac{1}{(z - i)^4} \end{aligned}$$

gilt, erhalten wir im Fall $|z - z_0| > |i - z_0|$, dass

$$\begin{aligned} \frac{1}{(z - i)^4} &= -\frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} (i - z_0)^k \frac{d^3}{dz^3} (z - z_0)^{-k-1} \\ &= -\frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} (i - z_0)^k (-k - 1)(-k - 2)(-k - 3) (z - z_0)^{-k-4} \\ &= \frac{1}{6} \sum_{k=0}^{\infty} (i - z_0)^k (k + 1)(k + 2)(k + 3) (z - z_0)^{-k-4} \\ &= \frac{1}{(z - z_0)^4} + 4(i - z_0) \frac{1}{(z - z_0)^5} + 10(i - z_0)^2 \frac{1}{(z - z_0)^6} + \dots \end{aligned}$$

Der andere Fall ist analog (und einfacher).

- c) $f(z) = \frac{1}{z^2 - z}$ ist ein Beispiel für eine rationale Funktion. Solchen Funktionen rückt man zunächst mit einer Partialbruchzerlegung zuleibe:

$$\frac{1}{z^2 - z} = \frac{1}{z(z - 1)} = \frac{-1}{z} + \frac{1}{z - 1}.$$

Damit haben wir wieder Stammbrüche. Analog zum Teil b) erhalten wir

$$\frac{1}{z-1} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad \text{für } |z| < 1,$$

$$\frac{1}{z-1} = \frac{1}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^{n+1}} \quad \text{für } |z| > 1,$$

so dass man folgende Laurent-Reihen für f mit Entwicklungszentrum $z_0 = 0$ aufstellen kann:

(i) für $0 < |z| < 1$ ist

$$\frac{1}{z^2 - z} = -\frac{1}{z} - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = -\sum_{n=-1}^{\infty} z^n$$

(ii) für $1 < |z|$ ist

$$\frac{1}{z^2 - z} = -\frac{1}{z} + \sum_{n=0}^{\infty} z^{-n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} z^{-n-1} = \sum_{n=2}^{\infty} z^{-n}.$$

Natürlich sind auch Entwicklungen um andere Zentren möglich.

◇

Beachten Sie, dass in \mathbb{C} immer eine Zerlegung des Nenners einer rationalen Funktion in Linearfaktoren möglich ist. Daher ergibt die Partialbruchzerlegung stets eine Linearkombination von Stammbrüchen, die jeweils wie in Teil b) des Beispiels behandelt werden können.

Im buchstäblichen Mittelpunkt von Laurent-Reihen stehen Punkte, in denen die betrachtete Funktion nicht definiert ist. Solche so genannten Singularitäten stellen einen eigenen Zweig der Funktionentheorie dar.

Definition 14.4.4 Sei f eine komplexe Funktion.

- a) Ein Punkt $z_0 \in \mathbb{C}$ heißt **Singularität (singulärer Punkt)** von f , wenn f oder f' nicht in z_0 definiert ist.
- b) Eine Singularität z_0 von f heißt **isoliert**, wenn ein $r > 0$ existiert, so dass f in der **punktierten Kreisumgebung** $K_r(z_0) \setminus \{z_0\}$ holomorph ist.

14.5 Der Residuensatz

Definition 14.5.1 Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $z_0 \in G$ und $f : G \setminus \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Dann wird der Koeffizient c_{-1} der (unter diesen Bedingungen zwingend existierenden) Laurent-Reihe mit Zentrum z_0 das **Residuum** von f in z_0 genannt:

$$\operatorname{Res}(f, z_0) := c_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial K_\varrho(z_0)} f(\zeta) d\zeta. \quad (14.4)$$

In (14.4) muss ϱ hinreichend klein sein, damit $K_\varrho(z_0) \setminus \{z_0\} \subset G$.

Satz 14.5.2 (Residuensatz) Die Funktion f habe auf dem Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ die isolierten Singularitäten a_1, \dots, a_n und sei auf $G \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ holomorph. Ferner sei γ eine geschlossene Jordankurve, die in $G \setminus \{a_1, \dots, a_n\}$ verläuft und die Punkte a_1, \dots, a_n umschließt. Dann gilt:

$$\oint_{\gamma} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}(f, a_k).$$

Man macht übrigens keinen Fehler, wenn man versehentlich eine Nicht-Singularität a_k benutzt, da dann f in einem hinreichend kleinen Kreis $K_\varrho(a_k)$ in eine Taylor-Reihe entwickelt werden kann, wodurch $\operatorname{Res}(f, a_k) = 0$ gilt.

Beispiel 14.5.3 Ein einfaches Beispiel ist das Fundamentalintegral:

$$f(z) = (z - a)^m$$

ist bereits selbst eine Laurent-Reihe mit Entwicklungszentrum a . Es gilt somit

$$c_n = \delta_{n,m},$$

d.h.

$$\operatorname{Res}(f, a) = \delta_{-1,m},$$

wobei im Fall $m \geq 0$ der Punkt a gar keine Singularität ist und

$$\oint_{\gamma} (z - a)^m dz = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}$$

schon allein aufgrund des Cauchy'schen Integralsatzes gilt.

In Übereinstimmung mit den früheren Betrachtungen liefert der Residuensatz

$$\oint_{\gamma} (z - a)^m dz = \begin{cases} 0, & m \in \mathbb{Z}^- \setminus \{-1\} \\ 2\pi i \cdot 1, & m = -1, a \in \gamma_{\text{int}} \\ 0, & m = -1, a \in \gamma_{\text{ext}} \end{cases}.$$

◇

Der Hauptnutzen, den Anwender(innen) aus dem Residuensatz ziehen, besteht in der Berechnung reeller uneigentlicher Integrale. Wie dies geht, sehen wir uns an ein paar Beispielen an.

Beispiel 14.5.4 Für ein **uneigentliches Integral einer rationalen Funktion, deren Nenner keine reelle Nullstelle hat**, wie z.B. $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$, konstruiert man einen Halbkreis um 0 mit "großem" Radius R in der oberen Halbebene (siehe Abbildung 14.1). Mit "groß" ist hierbei

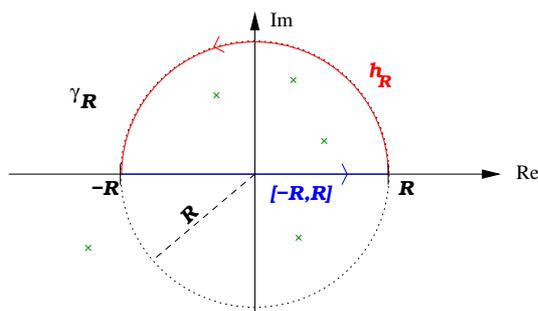


Abbildung 14.1: Kurve γ_R mit Teilkurve h_R und Singularitäten.

gemeint, dass alle Singularitäten der oberen Halbebene a_1, \dots, a_N im Inneren des Halbkreises liegen müssen. Die entsprechende Hälfte der Kreislinie bezeichnen wir hier mit h_R und die zugehörige geschlossene Kurve, die man durch Ergänzen des reellen Intervalls $[-R, R]$ erhält, als γ_R . Die Beispielfunktion $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$ hat die Singularitäten

$$z_1 = i, \quad z_2 = -i,$$

wovon z_1 nur relevant ist, da $-i$ in der unteren Halbebene liegt (siehe auch Abbildung 14.2).

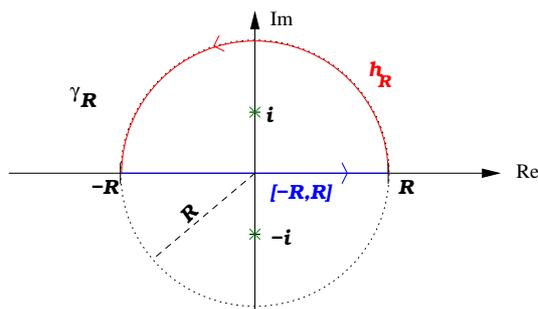


Abbildung 14.2: wie Abbildung 14.1, aber für das konkrete Beispiel $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$.

Das Kurvenintegral $\int_{\gamma_R} f(z) dz$ lässt sich mit dem Residuensatz berechnen:

$$\oint_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}(f, a_k).$$

In unserem Beispiel bestimmen wir zunächst die Laurent-Reihe. Es gilt:

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2i} \frac{1}{z-i} - \frac{1}{2i} \frac{1}{z+i}.$$

Da

$$\oint_{\gamma_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}(f, i)$$

gilt, brauchen wir eine Laurent-Reihe mit Zentrum i . Da aber $\frac{1}{z+i}$ in einem hinreichend kleinen Kreis um i holomorph ist, gilt

$$\operatorname{Res}(f, i) = \operatorname{Res}\left(\frac{1}{2i} \frac{1}{z-i}, i\right) = \frac{1}{2i}.$$

Folglich gilt

$$\oint_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2} dz = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$$

Nun sieht man sich die einzelnen Teile des Integrals an:

$$\oint_{\gamma_R} \frac{1}{1+z^2} dz = \int_{h_R} \frac{1}{1+z^2} dz + \int_{-R}^R \frac{1}{1+x^2} dx$$

und lässt $R \rightarrow \infty$ streben. Mit der Parametrisierung $z = Re^{i\varphi}$, $\varphi \in [0, \pi]$ behandelt man das Integral längs h_R . In unserem Beispiel erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| \int_{h_R} \frac{1}{1+z^2} dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{1}{1+R^2 e^{2i\varphi}} R i e^{i\varphi} d\varphi \right| \\ &\leq \int_0^\pi \frac{R}{|1+R^2 e^{2i\varphi}|} d\varphi. \end{aligned}$$

Den kleinsten Wert des Nenners erhält man bei $\varphi = \frac{\pi}{2}$, wo $R^2 e^{2i\varphi} = -R^2$ gilt. Also gilt (für hinreichend große R , z.B. $R \geq 2$)

$$\left| \int_{h_R} \frac{1}{1+z^2} dz \right| \leq \int_0^\pi \frac{R}{1-R^2} d\varphi = \frac{R\pi}{1-R^2} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Verschwimmt aber $\int_{h_R} f(z) dz$ im Limes $R \rightarrow \infty$, so bleibt (allgemein)

$$2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}(f, a_k) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$$

und in unserem Beispiel:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \pi.$$

Dieses Integral kann man übrigens auch auf die konventionelle Art ausrechnen. Wie?¹ \diamond

Nicht immer sind Residuen so einfach zu berechnen wie in obigem Beispiel. Bei rationalen Funktionen $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ kann man $\operatorname{Res}(f, z_0)$, wenn z_0 eine einfache Nullstelle des Nenners ist (d.h. $h(z_0) = 0$ und $h'(z_0) \neq 0$) und keine Nullstelle von g ist, wie folgt berechnen:

$$\operatorname{Res}\left(\frac{g(z)}{h(z)}, z_0\right) = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \quad (14.5)$$

Dies lässt sich wie folgt einfach beweisen: Da z_0 nur einfache Nullstelle von h und keine Nullstelle von g ist, hat die Laurent-Reihe um z_0 die Form

$$f(z) = \sum_{k=-1}^{\infty} c_k (z - z_0)^k.$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \sum_{k=-1}^{\infty} c_k (z - z_0)^{k+1} \\ &= c_{-1} = \operatorname{Res}(f, z_0). \end{aligned}$$

Außerdem gilt

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z)}{\frac{h(z)}{z - z_0}} \\ &= \lim_{\substack{z \rightarrow z_0 \\ h(z) \neq 0}} \frac{g(z)}{\frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} \\ &= \frac{\lim_{z \rightarrow z_0} g(z)}{\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{h(z) - h(z_0)}{z - z_0}} \\ &= \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}. \end{aligned}$$

¹ $\frac{1}{x} = \left(\frac{z}{x}\right) - \frac{z}{x} = \frac{\infty - z}{\infty} = x \operatorname{arctan} \frac{z-x}{1} = x \operatorname{arctan} \frac{\infty - z}{\infty}$

Beispiel 14.5.5 Wir betrachten

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}.$$

Die Singularitäten sind (wie man komplexe Nullstellen bzw. komplexe Wurzeln berechnet, haben wir schon in Korollar 3.3.3 gesehen)

$$z_1 = e^{i\frac{\pi}{4}}, \quad z_2 = e^{i\frac{3}{4}\pi}, \quad z_3 = e^{i\frac{5}{4}\pi}, \quad z_4 = e^{i\frac{7}{4}\pi},$$

wobei z_1 und z_2 in der oberen Halbebene sind. Wir überprüfen zunächst, dass

$$\begin{aligned} \left| \int_{h_k} \frac{z^2}{1+z^4} dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{R^2 e^{2i\varphi}}{1+R^4 e^{4i\varphi}} R i e^{i\varphi} d\varphi \right| \\ &\leq \int_0^\pi \frac{R^2}{1-R^4} \cdot R d\varphi \\ &= \frac{R^3 \pi}{1-R^4} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

gilt. Also erhalten wir (unter Verwendung von (14.5))

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx &= 2\pi i \left(\operatorname{Res} \left(\frac{z^2}{1+z^4}, e^{i\frac{\pi}{4}} \right) + \operatorname{Res} \left(\frac{z^2}{1+z^4}, e^{i\frac{3}{4}\pi} \right) \right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{e^{i\frac{\pi}{2}}}{4e^{i\frac{3}{4}\pi}} + \frac{e^{i\frac{3}{2}\pi}}{4e^{i\frac{9}{4}\pi}} \right) \\ &= 2\pi i \left(\frac{1}{4} e^{-i\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{4} e^{-i\frac{3}{4}\pi} \right) \\ &= \frac{1}{2} \pi i \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \pi. \end{aligned}$$

Übrigens kann man auch die untere Halbebene statt der oberen Halbebene verwenden. Dies ist vor allem sinnvoll, wenn in der unteren Halbebene weniger Singularitäten liegen. In unserem Beispiel ist dies gleich. Zur Erläuterung gehen wir hier auch noch den Alternativweg über die untere Halbebene (siehe Abbildung 14.3)

Zu beachten ist hierbei folgendes: Wir haben vereinbart, dass die Kurven immer im Gegenuhrzeigersinn durchlaufen werden, d.h. so, dass das Innere im Umlaufsinn links liegt. Dann hätten wir hier aber das Teilstück

$$\int_{+R}^{-R} \frac{x^2}{1+x^4} dx.$$

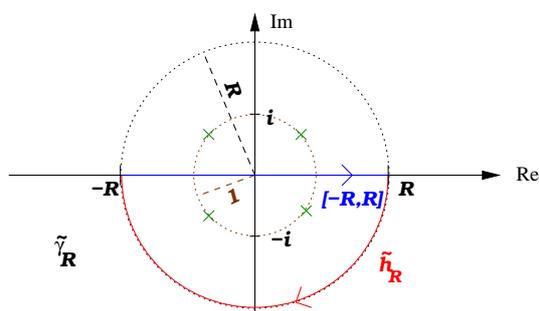


Abbildung 14.3: alternativer Integrationsweg für $f(z) = \frac{z^2}{1+z^4}$.

Wir müssen deswegen den Umlaufsinn des Wegs und somit auch das Vorzeichen des Integrals umdrehen!

Wir erhalten

$$\begin{aligned} \left| \int_{\tilde{h}_R} \frac{z^2}{1+z^4} dz \right| &= \left| \int_{\pi}^{2\pi} \frac{R^2 e^{2i\varphi}}{1+R^4 e^{4i\varphi}} R i e^{i\varphi} d\varphi \right| \\ &\leq \int_{\pi}^{2\pi} \frac{R^3}{1-R^4} d\varphi \\ &= \frac{R^3 \pi}{1-R^4} \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0 \end{aligned}$$

und folglich

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4} dx &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\tilde{\gamma}_R} \frac{z^2}{1+z^4} dz \\ &= -2\pi i \left(\operatorname{Res} \left(\frac{z^2}{1+z^4}, e^{i\frac{5}{4}\pi} \right) + \operatorname{Res} \left(\frac{z^2}{1+z^4}, e^{i\frac{7}{4}\pi} \right) \right) \\ &= -2\pi i \left(\frac{e^{i\frac{5}{2}\pi}}{4e^{i\frac{15}{4}\pi}} + \frac{e^{i\frac{7}{2}\pi}}{4e^{i\frac{21}{4}\pi}} \right) \\ &= -\frac{\pi}{2} i \left(e^{-i\frac{5}{4}\pi} + e^{-i\frac{7}{4}\pi} \right) \\ &= -\frac{\pi}{2} i \left(-\frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2} + \frac{1}{2}\sqrt{2} + i\frac{1}{2}\sqrt{2} \right) \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\pi. \end{aligned}$$

◇

Die Formel (14.5) lässt sich noch verallgemeinern:

Hat f in z_0 einen m -fachen Pol (d.h. die Laurent-Reihe beginnt bei $k = -m$, was z.B. der Fall ist, wenn f von der Form $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ mit holomorphem g in z_0 , $g(z_0) \neq 0$, und holomorphem h in z_0 , wobei $h(z_0) = h'(z_0) = \dots = h^{(m-1)}(z_0) = 0$, $h^{(m)}(z_0) \neq 0$), so gilt

$$\operatorname{Res}(f, z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right]. \quad (14.6)$$

Beispiel 14.5.6 Wir suchen das Fourier-Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + 2t^2 + t^4} e^{i\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(1 + t^2)^2} dt, \quad \omega > 0.$$

Wir wählen die obere Halbebene, wo die doppelte Nullstelle des Nenners (und damit der doppelte Pol) $z_0 = i$ liegt. Für das Halbkreisintegral erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| \int_{h_R} \frac{e^{i\omega z}}{(1 + z^2)^2} dz \right| &= \left| \int_0^\pi e^{i\omega(R \cos \varphi + iR \sin \varphi)} \frac{1}{(1 + R^2 e^{2i\varphi})^2} R i e^{i\varphi} d\varphi \right| \\ &\leq \int_0^\pi e^{-\omega R \sin \varphi} \frac{R}{(1 - R^2)^2} d\varphi \\ &= \frac{2R}{(1 - R^2)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\omega R \sin \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Es ist eine einfache Analysis-Übungsaufgabe, zu zeigen, dass

$$\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi \quad \forall \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

gilt (prüfen Sie es nach!²). Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \left| \int_{h_R} \frac{e^{i\omega z}}{(1 + z^2)^2} dz \right| &\leq \frac{2R}{(1 - R^2)^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-\omega R \frac{2\varphi}{\pi}} d\varphi \\ &= \frac{2R}{(1 - R^2)^2} \left(-\frac{\pi}{2\omega R} \right) (e^{-\omega R} - 1) \\ &= \frac{\pi}{\omega (1 - R^2)^2} (1 - e^{-\omega R}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

²Sei $f(\varphi) := \sin \varphi - \frac{2}{\pi} \varphi$. Dann erhält man die Extrema auf $]0, \frac{\pi}{2}[$ durch: $f'(\varphi) = 0 \Leftrightarrow \cos \varphi = \frac{2}{\pi}$, $f''(\varphi) = -\sin \varphi < 0 \forall \varphi \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Also treten Minima nur als Randminima auf. Es gilt $f(0) = 0$, $f(\frac{\pi}{2}) = 0$ und folglich $f(\varphi) \geq 0 \forall \varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

da $\omega > 0$. Dies führt - wie gehabt - zu dem Ergebnis

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(1+t^2)^2} dt = 2\pi i \operatorname{Res} \left(\frac{e^{i\omega z}}{(1+z^2)^2}, i \right).$$

Mit (14.6) erhalten wir wegen $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$, dass

$$\begin{aligned} \operatorname{Res} \left(\frac{e^{i\omega z}}{(1+z^2)^2}, i \right) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(\frac{(z-i)^2 e^{i\omega z}}{(1+z^2)^2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left(\frac{e^{i\omega z}}{(z+i)^2} \right) \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{i\omega e^{i\omega z} (z+i)^2 - e^{i\omega z} 2(z+i)}{(z+i)^4} \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \left[\left(\frac{i\omega}{(z+i)^2} - \frac{2}{(z+i)^3} \right) e^{i\omega z} \right] \\ &= \left(\frac{i\omega}{4i^2} - \frac{2}{8i^3} \right) e^{-\omega} \\ &= -\frac{1}{4} (i\omega + i) e^{-\omega} \\ &= -\frac{1}{4} i(\omega + 1) e^{-\omega}. \end{aligned}$$

Damit kommen wir zum Endergebnis

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\omega t}}{(1+t^2)^2} dt = \frac{\pi}{2} (\omega + 1) e^{-\omega}, \quad \omega > 0.$$

◇

Sieht man sich die obigen Beispiele genauer an, so kommt man zu dem Schluss, dass in den folgenden Fällen analog gezeigt werden kann, dass jeweils das Halbkreis-Integral (in der oberen Halbebene) für $R \rightarrow \infty$ gegen Null konvergiert (f erfülle jeweils die Voraussetzungen des Residuensatzes).

1. $\lim_{r \rightarrow \infty} r f(re^{i\varphi}) = 0$ für alle $\varphi \in [0, \pi]$.
2. f hat die Form $f(z) = e^{i\omega z} F(z)$ mit $\omega > 0$ und die Funktion $g(z) := zF(z)$ ist auf $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| > R \text{ und } \operatorname{Im} z \geq 0\}$ (für ein hinreichend großes, festes R) beschränkt.

In diesen Fällen müssen wir nicht mehr das Halbkreisintegral untersuchen und können direkt schließen, dass

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 2\pi i \sum_{k=1}^N \operatorname{Res}(f, z_k)$$

gilt, wenn z_1, \dots, z_N die Singularitäten von f in der oberen Halbebene sind.

Für die untere Halbebene lassen sich analoge Aussagen formulieren. Bei Fourier-Integralen (d.h. im 2. Fall) ist dabei zu beachten, dass für $\omega > 0$ der Weg über die obere Halbebene genommen werden muss und bei $\omega < 0$ über die untere Halbebene gegangen werden muss.

Literaturverzeichnis

- [1] A. Blickensdörfer-Ehlers, H. Neunzert: Analysis, Band 1, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [2] A. Blickensdörfer-Ehlers, H. Neunzert: Analysis, Band 2, Springer-Verlag, Berlin, 1998.
- [3] K. Burg, H. Haf, F. Wille, A. Meister: Partielle Differentialgleichungen und funktionalanalytische Grundlagen, 4. Auflage, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2009.
- [4] F. Furlan: Das gelbe Rechenbuch 3 für Ingenieure, Naturwissenschaftler und Mathematiker, Verlag Martina Furlan, Dortmund, 2002.
- [5] H. Heuser: Gewöhnliche Differentialgleichungen - Einführung in Lehre und Gebrauch, Teubner, Stuttgart, 1991.
- [6] N. Hungerbühler: Einführung in partielle Differentialgleichungen, vdf Vorlesungsskripte Mathematik, vdf Hochschulverlag AG an der ETH Zürich, Zürich, 1997.
- [7] K. Meyberg, P. Vachenauer: Höhere Mathematik 1, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [8] K. Meyberg, P. Vachenauer: Höhere Mathematik 2, Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [9] V. Michel: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Vorlesungsskript Wintersemester 2008/2009, www.geomathematik-siegen.de, 2009.
- [10] L. Papula: Mathematik für Ingenieure und Naturwissenschaftler — Klausur- und Übungsaufgaben, 3. Auflage, Vieweg+Teubner Verlag, Wiesbaden, 2008.
- [11] R. Remmert, G. Schumacher: Funktionentheorie 1, 5. Auflage, Springer-Verlag, Berlin, 2002.
- [12] W. Walter: Analysis II, Springer-Verlag, Berlin, 1990.
- [13] W. Walter: Einführung in die Theorie der Distributionen, 3. Auflage, B.I. Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1994.

Liste der Symbole

\emptyset	leere Menge	11
\in	Element von	11
\notin	nicht Element von	11
	so dass gilt	11
\wedge	und	12
\wedge	Vektorprodukt	65
\vee	oder	12
\cup	vereinigt	14
\cap	geschnitten	14
\neg	nicht	12
\setminus	ohne	15
\exists	Es existiert ein	13
$\exists!$	Es existiert genau ein	13
\nexists	Es existiert kein	13
\forall	Für alle	13
\Rightarrow	Folgerung	13
\Leftrightarrow	Äquivalenz	14
\subset	Teilmenge	15
\subseteq	Teilmenge	15
\subsetneq	echte Teilmenge	15
\times	kartesisches Produkt	15
\times	Vektorprodukt	65
im	Bild, Wertebereich	16
f^{-1}	Urbild	16
f^{-1}	Umkehrfunktion, Umkehrabbildung	19

\circ	Verkettung	19
\mathbb{R}	reelle Zahlen	20
$\mathbb{R}_0^+, \mathbb{R}^+, \mathbb{R}_0^-$	Teilmengen von \mathbb{R}	30
$\mathbb{R}^{n \times m}$	Matrizenmenge	82
\mathbb{N}_m	$\{n \in \mathbb{Z} \mid n \geq m\}$	32
\mathbb{C}	komplexe Zahlen	37
$\mathbb{C}^{n \times m}$	Matrizenmenge	103
$C(D)$	Menge der stetigen Funktionen auf D	48, 237
$C^{(k)}(D)$	Menge aller k -fach stetig differenzierbaren Funktionen auf D	49, 237
\mathbb{P}, \mathbb{P}_n	Menge der Polynome (vom Grad $\leq n$)	48, 49
\leq	kleiner oder gleich	20
$<$	echt kleiner als	21
sup	Supremum	21
inf	Infimum	21
max	Maximum	21
min	Minimum	21
$+\infty, -\infty$	\pm unendlich	29
$[a, b]$ etc.	Intervall	29
$ \cdot $	Betrag	31
$\ \cdot\ $	Norm	62
$ \cdot $	Euklidische Norm	63
$\ \cdot\ _p$	eine Norm auf $C[a, b]$	63
$\ \cdot\ _\infty$	eine Norm auf $C[a, b]$	63
sgn	Vorzeichen	31
$n!$	Fakultät	33
$\binom{n}{m}$	Binomialkoeffizient	33
(a_n)	Folge	33
\sum	Summe	34
Π	Produkt	34
i	imaginäre Einheit	37
Re	Realteil	38
Im	Imaginärteil	38
Pol, Pol_n	Menge der Polynome (vom Grad $\leq n$)	48, 49
deg	Grad	49
Lin, span	lineare Hülle	53
dim	Dimension	55
e^j	Standardbasis des \mathbb{R}^n	55
$\langle \cdot, \cdot \rangle$	Skalarprodukt	58

\perp	orthogonal	59
\perp	Orthogonalraum	72
δ_{ij}	Kronecker-Delta	64
S_r^1	1-Sphäre	68
e^r, e^φ, e^t	lokale ONB	69, 70
Mat	Matrizenmenge	82
$(a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,m}}$	$n \times m$ -Matrix	82
E_n	Einheitsmatrix	85
A^{-1}	inverse Matrix	86
Rg, rk	Rang	94
det	Determinante	95
$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$	Determinante	95, 96
A^T	transponierte Matrix	103
$\chi_A(\lambda)$	charakteristisches Polynom	106
tr	Spur einer Matrix	109
lim	Grenzwert	126, 155
$\lceil \cdot \rceil$	aufrunden	126
e	Euler'sche Zahl	133
exp	Exponentialfunktion	142
log, ln	Logarithmus	142, 143
sin, cos, tan	trigonometrische Funktionen	145
sinh, cosh, tanh	Hyperbelfunktionen	145
arg	Argument einer komplexen Zahl	150
$\frac{d}{dx}$	Ableitung	163
f'	Ableitung	163, 238
f'	komplexe Ableitung	393
$\int_a^b f(x) dx$	Integral	189
arsinh, arcosh, artanh	Areafunktionen	205
CHW, C.p.v.	Cauchy'scher Hauptwert	214
$K_\varepsilon(x)$	offene Kugel um x mit Radius ε	233
$\overline{K}_R(y)$	abgeschlossene Kugel um y mit Radius R	234
$\frac{\partial f}{\partial x_j}$	partielle Ableitung nach x_j	235
$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$	höhere partielle Ableitung	236
$H_f(x^0)$	Hesse-Matrix von f	237

o, O	Landau-Symbole	238, 326
$\text{grad } f(x^0)$	Gradient von f in x^0	239, 268
∇	Nabla-Operator	239, 268
$\text{div } f$	Divergenz von f	267
$\text{rot } f$	Rotation von f	267
Δ	Laplace-Operator	268
$\int_{\varphi} f \, ds$	Kurvenintegral	280
$\oint_{\varphi} f \, ds$	Kurvenintegral über geschlossene Kurve	280
$\int_{\varphi} f \cdot dx$	Wegintegral	283
$\oint_{\varphi} f \cdot dx$	Wegintegral längs eines geschlossenen Weges	283
$F(M)$	Inhalt der Menge $M \subset \mathbb{R}^2$	290
∂M	Rand der Menge M	291
$\iint_M f \, dF$	Flächenintegral	292
E, F, G	metrische Fundamentalgrößen	303
$\iint_S f \, dO$	Oberflächenintegral	306
$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$	Jacobi-Determinante	311
$\iint_S f \cdot dO$	Fluss	313
$\iiint_M f \, dV$	Volumenintegral	318
$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$	Jacobi-Determinante	322
$\ F\ _p$	L^p -Norm	330
$\langle F, G \rangle_2$	L^2 -Skalarprodukt	330
\mathcal{F}	Fourier-Transformation	335
$\circ \text{---} \bullet$	Fourier-Transformation	335
$\circ \text{---} \bullet$	Laplace-Transformation	356
\mathcal{F}^{-1}	inverse Fourier-Transformation	339
sinc, si	Spaltfunktion	340
\mathcal{L}	Laplace-Transformation	356
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$	Menge der Testfunktionen	386
$\mathcal{D}^*(\mathbb{R}^n)$	Menge der Distributionen	387
$\frac{df}{dz}$	komplexe Ableitung	393
Ln	komplexer Logarithmus	394
$\int_{\gamma} f(z) \, dz, \oint_{\gamma} f(z) \, dz$	komplexes Kurvenintegral	395
$\text{Res}(f, z_0)$	Residuum	403

Index

- ∀, 13
- Abbildung, 16
 - bijektive, 17, 19
 - injektive, 17
 - invertierbare, 19
 - lineare, 105
 - surjektive, 17
 - umkehrbare, 19
 - verkettete, 19
- abgeschlossen, 233
- abhängig
 - linear, 55, 63
- Ableitung, 105, 163
 - der Umkehrfunktion, 169
 - einer Distribution, 388
 - Gradient, 239
 - höhere, 171
 - Hesse-Matrix, 237
 - Jacobi-Matrix, 242
 - komplexe, 393
 - partielle, 235, 240
 - Richtungs-, 245
 - Tabelle, 171
 - totale, 238, 240
- Ableitungsregeln, 167
- absolut konvergent, 137
- Abtastfrequenz, 340
- Abtastsatz, 340
- Addition, 20, 45
- Additivität
 - des Flächenintegrals, 293
 - des Kurvenintegrals, 281
 - des Riemann-Integrals, 191
 - des Volumen-Integrals, 318
- Äquipotentiallinien, 346
- äquivalent, 13
- Äquipotentialfläche, 249
- äußere Einheitsnormale, 298
- äußerer Inhalt, 290
- äußeres Dirichlet-Problem, 325
- äußeres Neumann-Problem, 326
- algebraische Vielfachheit, 109, 112
- Aliasing, 341
- alternierende Reihe, 137
- analytisch, 393
- Anordnung, 20
- Ansatz vom Typ der rechten Seite, 352
- Antisymmetrie, 66
- Approximation, 122
- Approximation 1. Grades, 251
- Approximation 2. Grades, 251
- Arbeit, 190
- Arbeitsintegral, 283
- Areasinushyperbolicus, 205
- Argument einer komplexen Zahl, 149
- arsinh, 205
- Assoziativgesetz, 20, 45
 - für Matrizenmultiplikation, 85
- Aufpunkt, 74, 75
- Ausgleichsproblem, 123
- Aussage, 12
- Banachraum, 329
- Basis, 55, 60

- Basisergänzungssatz, 57
- bedingt konvergent, 137
- Bernoulli'sche Ungleichung, 36
- beschränkt, 21, 30, 128, 161, 233
 - nach oben, 21
 - nach unten, 21, 30
- Bestapproximation, 123
- bestimmt divergente Folge, 128
- bestimmte Divergenz, 155
- Betrag, 31, 38
- Beweis
 - indirekter, 14
- bijektiv, 17, 19
- Bild, 16, 17
- Bilinearität, 58
- Binomialkoeffizient, 33
- Binomischer Lehrsatz, 35, 142
- Blindwiderstand, 43
- bound
 - lower, 21
 - upper, 21
- Breitengrad, 69
- Bruchrechenregeln, 24

- $C(I)$, 48, 51, 59, 63
- $C^{(k)}(I)$, 49, 51
- \mathbb{C}^n , 58
- Cauchy principal value, 214
- Cauchy'scher Hauptwert, 214
- Cauchy'scher Integralsatz, 397
- Cauchy-Integralformel, 397
- Cauchy-Produkt, 139, 142
- Cauchy-Riemann'sche Differentialgleichung, 396
- Cauchy-Schwarz-Bunjakowski-Ungleichung, 63
- Cauchyfolge
 - bezüglich Norm, 329
- charakteristisches Polynom, 106, 109
 - einer Differentialgleichung, 350
- CHW, 214
- continuous, 159

- Corioliskraft, 228
- cos, 145
- cosh, 145, 205
- Cosinus, 145
- Cosinus hyperbolicus, 145
- Coulombkraft, 228
- C.p.v., 214
- Cramer'sche Regel, 100
- CSB-Ungleichung, 64

- δ_{ij} , 64
- D'Alembert-Lösung, 370
- dann und nur dann, wenn, 13
- De L'Hospital
 - Regel von, 184
- De Moivre
 - Formeln von, 151
- Definitheit
 - positive, 58, 62
- Definition
 - rekursive, 33
- Definitionsbereich, 16, 17
 - maximaler, 16
- deg, 49
- Delta-Distribution, 388
- Determinante, 95, 96
 - Entwicklungssatz, 97
- diagonalisieren, 112, 115
- Diagonalmatrix, 110
- Differentialgleichung
 - Euler'sche, 382
 - exakte, 347
 - gewöhnliche, 217
 - lineare, 1. Ordnung, 343
 - lineare, 2. Ordnung, 349
 - lineare, höherer Ordnung, 360
 - partielle, 367
- Differentialgleichungssystem
 - lineares, 360
- Differentialrechnung

- Mittelwertsatz der, 172
- differenzierbar, 163, 172
 - komplex, 393
 - partiell, 235
 - total, 240
- Diffusionsgleichung, 369
- dim, 55, 57
- Dimension, 55, 57
- Dirac'sche Delta-Distribution, 388
- Dirichlet-Problem, 325
 - äußeres, 325
 - inneres, 325
- Dirichlet-Randbedingung, 368
- disjoint, 14
- disjunkt, 14
- diskrete Fourier-Transformation, 334, 375, 383
 - 2D, 378
- diskrete Fourier-Transformierte, 334, 375, 383
 - 2D, 378
- Diskriminante, 351
- Distribution, 387
 - Ableitung, 388
 - reguläre, 387
 - singuläre, 387
- Distributivgesetz, 20, 45, 66
 - für Matrizen, 85
 - unendliches, 139
- divergente Folge, 128
- Divergenz, 267
- domain, 16
- Doppelintegral, 292
- Drehung, 115
- Dreiecksungleichung, 31, 62
 - für Riemann-Integrale, 192
- Dreifachintegral, 318
- \exists , 13
- \nexists , 13
- e^j , 55, 59
- e^r , 228
- e^t , 228
- e^φ , 228
- e-Funktion, 142
- Ebene, 75, 76
 - Koordinatendarstellung, 76
- echte Teilmenge, 15
- EDP, 325
- Eigenfrequenz, 351
- Eigenraum, 105
- Eigenvektor, 105, 110, 111
 - Orthonormalsystem, 115
- Eigenwert, 105, 110, 111, 119
 - reeller, 115
- Einheitsmatrix, 85
- Einheitsnormale, 304
 - äußere, 298
- Einheitssphäre, 259
- Einheitswurzeln, 153
- Einschließungssatz, 133, 179
- elektrostatistisches Potential, 325
- Element, 11
- Eliminationsverfahren, 86
- Ellipse, 118, 300
- elliptische Integrale, 302
- Energiegleichung, 339
- ENP, 326
- entweder ... oder, 12
- Entwicklungssatz, 66
- Entwicklungssatz für Determinanten, 97
- Entwicklungszentrum, 148
- erweiterte Koeffizientenmatrix, 90
- Erzeugendensystem, 53
- Euklidische Norm, 63
- Euklidisches Skalarprodukt, 58, 63
- Euler'sche Differentialgleichung, 382
- Euler'sche Formel, 148
- Euler'sche Zahl, 133
- exakte Differentialgleichung, 347
- Existenz, 13
- Exponentialfunktion, 19, 142

- Funktionalgleichung, 142
- Exponentieller Zerfall, 144
- Exponentielles Wachstum, 143
- Extremum, 179, 253
- F-Korrespondenz, 335
- Fakultät, 33
- fast überall, 290
- fast Fourier transform, 335
- Fermat-Kriterium, 253
- FFT, 335
- Fixpunkt, 113
- Flächenelement, 292
- Flächenintegral, 292
- Flächennormale, 304
- Flächenstück
 - reguläres, 303
- Fluss, 313
- Folge, 33, 230
 - bestimmt divergente, 128
 - divergente, 128
 - konvergente, 126
 - Konvergenz, 230
 - rekursive, 127
 - unbestimmt divergente, 128
- Formeln von De Moivre, 151
- Fourier-Transformation
 - diskrete, 334, 375, 383
 - diskrete, 2D, 378
 - inverse, 339
 - kontinuierliche, 335, 409
 - schnelle, 335
- Fourier-Transformierte
 - diskrete, 334, 375, 383
 - diskrete, 2D, 378
 - kontinuierliche, 335, 409
- Fourierentwicklung, 65, 69
- Fourierreihe, 333
- Fourierspektrum, 334
- Fubini
 - Satz von, 303, 319
- für alle, 13
- Fundamentalintegral, 396, 403
- Fundamentallösungen der Laplace-Gleichung, 380
- Fundamentalsatz der Algebra, 40
- Fundamentalsystem, 349
- Funktion, 142
 - Ableitung, 163, 235, 237–240, 245
 - höhere, 171
 - komplexe, 393
 - Tabelle, 171
 - Umkehrfunktion, 169
 - analytische, 393
 - beschränkte, 161
 - bestimmte Divergenz, 155
 - differenzierbare, 163, 172, 235, 240
 - gerade, 145
 - Graph, 223
 - Grenzwert, 155
 - Grenzwertsätze, 157
 - holomorphe, 393
 - Hyperbel-, 145, 205
 - Konvergenz, 155
 - monotone, 161, 173, 190
 - partiell differenzierbare, 235
 - rationale, 159, 207
 - skalare, 223
 - Stammfunktion, 196
 - stetig differenzierbare, 175, 237
 - stetige, 159, 172, 190, 231
 - total differenzierbare, 238
 - trigonometrische, 145
 - unbestimmte Divergenz, 155
 - ungerade, 145
 - vektorwertige, 223
 - verallgemeinerte, 387
- Funktionaldeterminante, 311, 322
- Gauß
 - Satz von, 298, 301, 324

- Gaußklammer, 156
- Gauß'sche Zahlenebene, 38
- Gauß'sches Eliminationsverfahren, 86
- Gauß-Jordan-Verfahren, 101
- Gebiet, 287
- Gebietsintegral, 292
- genau dann, wenn, 13
- geometrische Reihe, 134, 140
- geometrische Vielfachheit, 109, 112
- Gerade, 74, 75
 - Koordinatendarstellung, 75
 - Normalenform, 75
 - Parameterdarstellung, 74
- gerade Funktion, 145
- Gesamtwiderstand, 43
- geschlossene Kurve, 279
- geschlossener Weg, 279
- gewöhnliche Differentialgleichung, 217
- Gleichungssystem
 - lineares, 82, 85
- globales Maximum, 179
- globales Minimum, 179
- Grad, 49
- Gradient, 239, 268
- Gradientenfeld, 270, 274, 287
- Graph, 16, 17, 223
- Grassmann-Identität, 66
- Gravitationskraft, 228, 271
- Gravitationspotential, 325
- Green
 - Satz von, 298
- Green'sche Formeln, 325
- Green'sche Funktion, 390
- Grenzwert
 - einer Folge, 126
 - einer Funktion, 155
- Grenzwertsätze
 - für Folgen, 127
 - für Funktionen, 157
- Grundschiwingung, 375
- höhere Ableitung, 171
- Halbwertszeit, 144
- harmonisch, 378
- harmonische Reihe, 135
- Hauptachsen, 118
- Hauptachsentransformation, 115
- Hauptminoren, 119
- Hauptsatz über holomorphe Funktionen, 396
- Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung, 196
- Hauptsatz für Orthonormalbasen, 333
- Hauptteil einer Laurent-Reihe, 399
- Hauptwert des Logarithmus, 394
- HDI, 196
- Heaviside-Distribution, 387
- Heaviside-Funktion, 358, 387
- Helmholtzgleichung, 339
- Hemisphäre, 314
- hermitesch, 58
- Hesse'sche Normalenform, 75, 76
- Hesse-Matrix, 237
- Hilbertraum, 329
- hinreichend, 13
- Hochpunkt, 182
- holomorph, 393
- homogene Differentialgleichung, 343
- homogenes LGS, 90
- Homogenität, 62
- Horizontalteil, 71
- Hyperbelfunktion, 145, 205
 - Umkehrfunktion, 205
- i , 37
- IDP, 325
- if and only if, 13
- iff, 13
- im, 16
- image, 16
- imaginäre Einheit, 37
- Imaginärteil, 38

- eines Bruchs, 39
- Impedanz, 43
- impliziert, 13
- implizite Funktionen
 - Satz über, 259, 261
- indefinit, 118
- indirekter Beweis, 14
- Induktivität, 42
- induzierte Norm, 62, 63
- Infimum, 21, 30
- Inhalt, 290
- inhomogenes LGS, 90
- injektiv, 17
- Innenprodukt, 58
- Innenproduktraum, 58
- innerer Inhalt, 290
- innerer Punkt, 180
- inneres Dirichlet-Problem, 325
- inneres Neumann-Problem, 325
- INP, 325
- Integrabilitätsbedingung, 270, 274
- Integral, 189, 292
 - Additivität, 191, 281, 293, 318
 - Dreiecksungleichung, 192
 - elliptisches, 302
 - Flächen-, 292
 - Fluss, 313
 - komplexes, 395
 - Kurven-, 280, 284, 395
 - Linearität, 191, 284, 293, 318
 - Monotonie, 192, 293, 318
 - Oberflächen-, 306
 - unbestimmtes, 197
 - uneigentliches, 211, 404
 - Volumen-, 318
 - Weg-, 283
- Integralkriterium, 215
- Integralrechnung
 - Mittelwertsatz der, 194
- Integralungleichungen, 191
- Integrand, 189
- Integrationsregeln, 191
- integrierbar, 189, 190, 216
- intersection, 14
- Intervall, 29
- Inverse, 19, 86
 - einer 2×2 -Matrix, 104
- Inverse Fourier-Transformation, 339
- inverse Matrix, 86
 - 2×2 , 104
- inverses Element, 20, 45, 46
- invertierbar, 19
- invertierbare Matrix, 86, 95, 111
- isolierte Singularität, 402
- Jacobi-Determinante, 242, 311, 322
- Jacobi-Matrix, 242
- Jordan'scher Weg, 279
- Jordankurve, 279
- Körper, 20, 37
 - angeordneter, 20
 - teilgeordneter, 21
 - totalgeordneter, 20
 - vollständiger, 21
- Kapazität, 42
- kartesisches Produkt, 15
- Kettenregel, 167, 243
- Kirchhoff'sche Regeln, 42
- Koeffizientenmatrix
 - erweiterte, 90
- Kommutativgesetz, 20, 45
- kompakt, 235
- komplex differenzierbar, 393
- komplexe Einheitswurzeln, 153
- komplexe Konjugation, 38
- komplexe Wurzeln, 151
- komplexe Zahl, 37, 149
 - Argument, 149
 - Phase, 149

- Polardarstellung, 149
- komplexe Zahlenebene, 38
- komplexer Logarithmus, 394
- komplexer Widerstand, 42
- komplexes Kurvenintegral, 395
- Komplexifizierung einer Differentialgleichung, 353
- konjugierte komplexe Zahl, 38
- kontinuierliche Fourier-Transformation, 409
- kontinuierliche Fourier-Transformierte, 409
- konvergent, 230
- konvergente Folge, 126
- Konvergenz, 155
 - bezüglich Norm, 329
 - einer Folge, 230
- Konvergenzkreis, 148
- Konvergenzradius, 148
- konvex, 251
- Koordinatendarstellung, 75, 76
- Koordinatentransformation, 310, 322
- Kreiskoordinaten, 311
- Kreislinie, 68
- Kreuzprodukt, 65
- Kronecker-Delta, 64
- Kugelkoordinaten, 68, 69, 322
- Kurve, 279
 - geschlossene, 279
 - Jordan-, 279
 - reguläre, 279
- Kurvenintegral, 280, 284
 - komplexes, 395
- L^p -Räume, 330
- L-Korrespondenz, 356
- Längengrad, 69
- Lagrange-Funktion, 263
- Lagrange-Identität, 66
- Lagrange-Multiplikator, 263
- Lagrange-Multiplikator-Regel, 263
- Landau-Symbol, 238, 326
- Laplace-Gleichung, 325, 368, 378
- Laplace-Operator, 268
- Laplace-Transformation, 356
- Laplace-transformierbar, 356
- Laplace-Transformierte, 356
- Laurent-Reihe, 399
- least-square-approximation, 123
- leere Menge, 11
- leere Summe, 34
- leeres Produkt, 34
- Leibniz-Kriterium, 137, 177
- Leibniz-Regel, 171
- level set, 223
- LGS, 82, 85
 - überbestimmtes, 93
 - homogenes, 90
 - inhomogenes, 90
 - unterbestimmtes, 93
- Limes
 - einer Folge, 126, 230
 - einer Funktion, 155, 231
- Lin, 53
- linear abhängig, 55, 63
- linear unabhängig, 55, 60
- linear-quadratisches Problem, 257
- lineare Abbildung, 105
- lineare Differentialgleichung 1. Ordnung, 343
- lineare Differentialgleichung 2. Ordnung, 349
- lineare Differentialgleichung höherer Ordnung, 360
- lineare Hülle, 53
- lineare Regression, 123
- lineare Transportgleichung, 367
- linearer Teilraum, 50
- lineares Differentialgleichungssystem, 360
- lineares Gleichungssystem, 82, 85
- Linearfaktoren, 23, 40
- Linearität
 - des Flächenintegrals, 293
 - des Riemann-Integrals, 191

- des Volumen-Integrals, 318
 - des Weg-Integrals, 284
- Linearkombination, 53
- linksseitiger Grenzwert, 155
- Ln , 394
- \ln , 142
- Loch, 397
- Lösung
 - partikuläre, 90
- \log , 142
- Logarithmengesetze, 143
- Logarithmus, 142
 - komplexer, 394
- lokale Koordinaten, 68, 70
- lokale Stammfunktion, 397
- lokales Maximum, 179
- lokales Minimum, 179
- Lorentzkraft, 65
- lower bound, 21
- LQP, 257
- Majorantenkriterium, 136
- Matrix, 82
 - charakteristisches Polynom, 106
 - Determinante, 95, 96
 - Diagonal-, 110
 - Eigenraum, 105
 - Eigenvektor, 105, 110, 111
 - Orthonormalsystem, 115
 - Eigenwert, 105, 110, 111, 119
 - reeller, 115
 - Hauptminoren, 119
 - Hesse-, 237
 - indefinite, 118
 - inverse, 86
 - 2×2 , 104
 - invertierbare, 86, 95, 111
 - komplexe, 103
 - Multiplikation, 84
 - negativ definite, 118
 - negativ semidefinite, 118
 - obere Dreiecks-, 110
 - orthogonale, 113
 - positiv definite, 118
 - positiv semidefinite, 118
 - Potenz, 84
 - quadratische, 82
 - Rang, 94
 - reguläre, 86
 - singuläre, 86
 - Spur, 109
 - symmetrische, 103
 - transponierte, 103
 - Rechenregeln, 104
 - unitäre, 113
- Matrixexponentialfunktion, 361
 - symmetrischer Matrizen, 364
- maximaler Definitionsbereich, 16
- Maximierer, 182
- Maximum, 21, 30, 179, 253
- Maximumprinzip, 385
- Maxwellgleichungen, 269
- Menge, 11
 - abgeschlossene, 233
 - beschränkte, 233
 - explizite Darstellung, 11
 - implizite Darstellung, 11
 - kompakte, 235
 - konvexe, 251
 - leere, 11
 - offene, 233
 - Rand einer, 291
 - reguläre, 291, 317
 - Riemann-messbare, 290, 317
 - sternförmige, 274
 - zusammenhängende, 287
- metrische Fundamentalgröße, 303
- Minimierer, 182
- Minimum, 21, 30, 179, 253
- Minorantenkriterium, 136

- Mittelwertsatz
 - der Differentialrechnung, 172
 - der Integralrechnung, 194
 - für Flächenintegrale, 293
 - für harmonische Funktionen, 385
- Momente, 321
- monoton fallend, 132, 161, 173, 190
- monoton steigend, 132, 161, 173, 190
- monoton wachsend, 161, 173, 190
- monotone Konvergenz, 133
- Monotonie
 - des Flächenintegrals, 293
 - des Riemann-Integrals, 192
 - des Volumen-Integrals, 318
- Multiplikation, 20
 - skalare, 45
 - von Matrizen, 84
- Nabla-Notation, 268
- nach oben beschränkt, 21, 128
- nach unten beschränkt, 21, 30, 128
- natürlicher Logarithmus, 142
- Nebenteil einer Laurent-Reihe, 399
- negativ definit, 118
- negativ semidefinit, 118
- Neumann-Problem
 - äußeres, 326
 - inneres, 325
- Neumann-Randbedingung, 368
- neutrales Element, 20, 45, 46
- Newton'sches Gravitationspotential, 242
- nicht, 12
- Niveaufläche, 223
- Niveaumenge, 223
- Norm, 62
 - Euklidische, 63
 - induzierte, 62, 63
- Normalbereich, 293, 319
- Normale
 - äußere Einheits-, 298
- Normalenform, 75
 - Hesse'sche, 75, 76
- Normalenvektor, 75, 76
- Normalgleichung, 123
- Normalteil, 69, 71, 73
- normierter Raum, 62
- notwendig, 13
- Nullelement, 83
- Nullfolge, 126, 129
- Nullmatrix, 83
- Nullmenge, 290, 292, 317
- Nullstelle, 40
 - Vielfachheit, 40, 42
- Nullvektor, 60
- Nyquist-Shannon Sampling Theorem, 340
- Nyquist-Shannon'scher Abtastatz, 340
- obere Dreiecksmatrix, 110
- obere Schranke, 21
- Oberflächenintegral, 306
- Oberschwingung, 375
- Obersumme, 188, 190, 194
- oder, 12
- offen, 233
- Ohm'scher Widerstand, 42
- ohne, 15
- ONB, 64
- ONS, 64
- Ordnung einer partiellen Differentialgleichung, 368
- orthogonal, 59
- Orthogonalbasis, 59, 331, 333
- orthogonale Matrix, 113
- Orthogonalprojektion, 71
- Orthogonalraum, 72
- Orthogonalsystem, 59, 60
- Orthonormalbasis, 64, 331
 - Hauptsatz, 333
- Orthonormalisierungsverfahren, 73
- Orthonormalsystem, 64, 331

- von Eigenvektoren, 115
 - vollständiges, 331
- \mathbb{P} , 48
- \mathbb{P}_n , 49
- Paraboloid, 224
- Parallelogramm
 - Flächeninhalt, 66, 95
- Parameterdarstellung, 74
- Parametrisierung, 281, 303
- Parseval-Identitäten, 333
- Parseval-Plancherel-Gleichung, 339
- Partialbruchzerlegung, 207
 - Zuhaltetechnik, 210
- partiell differenzierbar, 235
- partielle Ableitung, 235, 240
- partielle Differentialgleichung, 367
 - elliptische, 368
 - hyperbolische, 368
 - Ordnung, 368
 - parabolische, 368
 - quasilineare, 2. Ordnung, 368
 - schwache Formulierung, 389
- partielle Integrationsregel, 199
- partikuläre Lösung, 90, 344
- Pascal'sches Dreieck, 36, 37
- Phase einer komplexen Zahl, 149
- Poisson'sche Integralformel, 384
- Poisson-Gleichung, 389
- Pol, 48, 409
- Pol_n , 49, 51
- Polarabstand, 69
- Polardarstellung, 149
- Polarkoordinaten, 68, 69, 311, 322
- Polynom
 - charakteristisches, 106, 109
- Polynomdivision, 208
- positiv definit, 118
- positiv semidefinit, 118
- positive Definitheit, 58, 62
- positive Umlaufrichtung, 396
- Potential, 270, 272, 346
- Potentialfeld, 287
- Potentialgleichung, 378
- Potenzreihe, 148, 159, 177
- p-q-Formel, 23
- Prä-Hilbertraum, 58
- Produkt
 - leeres, 34
- Produktregel, 167
 - Leibniz-Regel, 171
- Projektion, 71
 - Orthogonal-, 71
- punktierte Kreisumgebung, 402
- quadratische Form, 115, 223
- quadratische Matrix, 82
- quadratischer Fehler, 122
- Quasilineare Differentialgleichungen 2. Ordnung, 368
- Quotientenkriterium, 140
- Quotientenregel, 167
- \mathbb{R} , 20
- \mathbb{R}^2 , 47, 51, 68
- \mathbb{R}^3 , 15, 66, 69
- \mathbb{R}^n , 55, 58, 63, 67
- Radialteil, 69, 71
- Radikand, 23
- Rand, 291
- Randbedingung, 367
- Randwertproblem, 325
- Rang, 94
- range, 16
- rank, 94
- rationale Ausdrücke
 - Grenzwert, 131
- rationale Funktion, 159, 207
- Realteil, 38
 - eines Bruchs, 39

- Rechenregel für Transponierte, 104
- Rechte-Hand-Regel, 65
- rechtsseitiger Grenzwert, 155
- reelle Zahlen, 21
- Regel
 - Cramer'sche, 100
 - von De L'Hospital, 184
 - von Sarrus, 98
- regulär, 291, 317
- regulär im Unendlichen, 325
- reguläre Distribution, 387
- reguläre Kurve, 279
- reguläre Matrix, 86
- regulärer Weg, 279
- reguläres Flächenstück, 303
- Reihe, 134
 - absolut konvergente, 137
 - alternierende, 137
 - bedingt konvergente, 137
 - Cauchy-Produkt, 139, 142
 - Divergenzkriterium, 136, 215
 - geometrische, 134, 140
 - harmonische, 135
 - Konvergenzkriterium, 136, 140, 215
 - Quotientenkriterium, 140
 - Rechenregeln, 138
 - Wurzelkriterium, 140
- rekursive Definition, 33
- rekursive Folge, 127
- Residuensatz, 403, 405, 410
- Residuum, 403, 406, 409
- Resonanzkatastrophe, 354
- Rg, 94
- Richtungsableitung, 245
- Richtungsvektor, 74, 75
- Riemann-Integral, 189
 - Additivität, 191
 - Dreiecksungleichung, 192
 - Linearität, 191
 - Monotonie, 192
 - unbestimmtes, 197
 - uneigentliches, 211
- Riemann-integrierbar, 189, 190, 216, 292
- Riemann-messbar, 290, 317
- Riemann-Obersumme, 291
- Riemann-Untersumme, 291
- Riesz'scher Darstellungssatz, 387
- rk, 94
- Rolle
 - Satz von, 172, 173
- Rotation, 267
- Sandwich Theorem, 133, 179
- Sarrus
 - Regel von, 98
- Satz
 - über implizite Funktionen, 259, 261
 - von der monotonen Konvergenz, 133
 - von Fubini, 303, 319
 - von Gauß, 298, 301, 324
 - von Green, 298
 - von Rolle, 172, 173
 - von Schwarz, 237
 - von Stokes, 313
 - von Taylor, 175, 251
- Scheinwiderstand, 43
- Schmidt'sches Orthonormalisierungsverfahren, 73
- schnelle Fourier-Transformation, 335
- Schnittmenge, 14
- Schnittpunkt, 76, 78, 80
- Schrödingers Katze, 13
- Schranke
 - obere, 21
 - untere, 21
- schwache Formulierung, 389
- Schwarz
 - Satz von, 237
- Schwerpunkt, 296, 321
- schwingende Membran

- rechteckige, 376
- Schwingkreis, 350
- Schwingungsgleichung, 216
- Separation der Variablen, 217
- Separationsansatz, 374
- Signum, 31
- sin, 145
- singuläre Distribution, 387
- singuläre Matrix, 86
- singulärer Punkt, 402
- Singularität, 402
 - isolierte, 402
- sinh, 145, 205
- Sinus, 145
- Sinus hyperbolicus, 145
- skalare Funktion, 223
- skalare Multiplikation, 45
- Skalarfeld, 223
- Skalarprodukt, 58
 - Euklidisches, 63
- Spaltenvektor, 83
- Spaltfunktion, 340
- span, 53
- Spann, 53
- Spat
 - Volumen, 96
- Spatprodukt, 96
- 1-Sphäre, 68
- Spiegelung, 113
- Spur, 109, 279
- Stammfunktion, 196, 198, 270, 272
 - lokale, 397
 - Tabelle, 198
- Standard-Basis des \mathbb{R}^n , 55
- stationärer Punkt, 254, 263
- steilster Anstieg, 246
- sternförmig, 274
- stetig, 159, 172, 190, 231
- stetig differenzierbar, 175, 237
- stetig fortsetzbar, 160
- Stokes
 - Satz von, 313
- streng monoton fallend, 132, 161, 173, 190
- streng monoton steigend, 132, 161, 173, 190
- streng monoton wachsend, 161, 173, 190
- Substitutionsregel, 200, 218
 - für Flächenintegrale, 310
 - für Volumenintegrale, 322
- Summe
 - leere, 34
- Superpositionsprinzip, 349, 370
- Supremum, 21, 30
- surjektiv, 17
- Symmetrie, 58
- symmetrische Matrix, 103
- tan, 145
- Tangens, 145
- Tangens hyperbolicus, 145
- Tangente, 239
- Tangentialebene, 240, 248, 249, 304
- Tangentialteil, 69, 71, 73
- tanh, 145
- Taylor
 - Satz von, 175, 251
- Taylor-Polynom, 178
- Taylor-Reihe, 177, 398
- Teilmenge, 15
 - echte, 15
- Teilordnung, 21
- Teilraum
 - linearer, 50
- Teleskopsumme, 194
- Testfunktion, 386
- Thomson-Gleichung, 352
- Tiefpunkt, 182
- Topologie, 233
- total differenzierbar, 238, 240
- totale Ableitung, 238, 240
- totales Differential, 238, 240

- Totalordnung, 20
- Trägheitsmoment, 282
- trace, 109
- Transponierte, 103
 - Rechenregeln, 104
- transponierte Matrix, 103
 - Rechenregeln, 104
- Transportgleichung
 - lineare, 367
- Tricomi-Gleichung, 369
- trigonometrische Funktionen, 145
- Tripel, 15

- überbestimmtes LGS, 93
- Umkehrabbildung, 17, 19
- umkehrbar, 19
- Umkehrfunktion, 169
- Umlaufrichtung, 396
- unabhängig
 - linear, 55, 60
- unbestimmt divergente Folge, 128
- unbestimmte Divergenz, 155
- unbestimmtes Integral, 197
- und, 12
- uneigentliches Integral, 211, 404
- unendlich, 29
- ungerade Funktion, 145
- union, 14
- unitäre Matrix, 113
- unterbestimmtes LGS, 93
- untere Schranke, 21
- Unterraum, 50
- Untersumme, 188, 190, 193
- Untervektorraum, 50
- upper bound, 21
- Urbild, 16, 17

- Variation der Konstanten, 344, 356
- Vektor, 45
- Vektorfeld, 223
- Vektorprodukt, 65, 66
- Vektorraum, 45, 83
- vektorwertige Funktion, 223
- verallgemeinerte Funktion, 387
- Verdopplungszeit, 144
- Vereinigungsmenge, 14
- Verkettung, 19
- Verknüpfung, 19
- Vertikalteil, 71
- Vielfachheit, 40, 42
 - algebraische, 109, 112
 - geometrische, 109, 112
- vollständig, 21, 329
 - ONS, 331
- Volumenintegral, 318
- Vorzeichen, 31

- Wärmekapazität, 195
- Weg, 279
 - geschlossener, 279
 - Jordan'scher, 279
 - regulärer, 279
- Wegintegral, 283
- Weglänge, 282
- Wellengleichung, 339, 369
 - 1D, 369
 - 2D, 376
- Wendepunkt, 181
- Wertebereich, 16
- Wirkwiderstand, 43
- Wronski-Determinante, 356
- Wurzel
 - komplexe, 151
- Wurzelkriterium, 140

- Zahl
 - komplexe, 37
 - Argument, 149
 - Phase, 149
 - Polardarstellung, 149

reelle, 21
Zeilenvektor, 83
Zirkulation, 283
Zuhaltetechnik, 210
zusammenhängend, 287
Zweige des Logarithmus, 394
zweiseitige Fläche, 324
zweite Ableitung, 171
Zwischenwertsatz, 161, 218
Zylinderkoordinaten, 323
Zylindermantel, 307