

Fachhochschule Köln
University of Applied Sciences Cologne
Campus Gummersbach

Prof. Dr.-Ing. Jürgen Weber

Dipl.-Ing. Franz Josef Klein

Andreas Wagen

Skript zum elektrotechnischen Teil des Kurses

Einführung in die

Mechanik und

Elektrotechnik I

September 2003

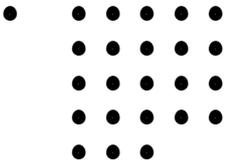
„Was ist das Schwerste von allem?

Was dich das Leichteste dünkt:

Das vor Augen zu seh'n,

Was vor Augen dir liegt.“

J. W. v. Goethe



Fachhochschule Köln
University of Applied Sciences Cologne
Campus Gummersbach

Prof. Dr.-Ing. Jürgen Weber

Dipl.-Ing. Franz Josef Klein

Andreas Wagen

0 Vorbemerkung

Inhaltsverzeichnis

0 VORBEMERKUNG 3

1 Einleitung

2 Der elektrische Strom

3 Gleichstromschaltungen mit linearen Bauelementen

4 Der Wechselstromkreis

5 Messtechnik

6 Dreiphasenwechselstrom

7 Der Transformator

Anhang

Anlage I Praktika

0 VORBEMERKUNG

Das vorliegende Skript enthält den elektrotechnischen Teil des Kurses „Einführung in die Mechanik und Elektrotechnik I“, der seit dem Wintersemester 2001/2002 am Campus Gummersbach der Fachhochschule Köln von mir gelesen wird. Der Kurs, der aus Vorlesung, Übung und Praktikum besteht, läuft über einen Zeitraum von einem Semester und wird mit dem Kurs „Einführung in die Mechanik und Elektrotechnik II“ im 2. Semester fortgesetzt. Beide Kurse wenden sich an die Studierenden des 1. bzw. des 2. Semesters eines Studienmodells, das ebenfalls seit dem Wintersemester 2001/2002 angeboten wird. Das Studienmodell differenziert im 1. Studienjahr nicht zwischen den verschiedenen ingenieurwissenschaftlichen Studienangeboten des Campus Gummersbach, so dass die Studierenden erst nach dem 1. Studienjahr ihre weitere Studienrichtung festlegen müssen. Das Studienmodell umfasst zur Zeit ab dem 3. Semester die Studienangebote

- Elektronik / Electronics
- Automatisierungstechnik / Automation Systems
- Allgemeiner Maschinenbau / Mechanical Engineering
- Wirtschaftsingenieur / Mechanical Engineering with Business
- Informatikingenieur / Mechanical Engineering with Computer Science

Dieses Studienmodell stellt in diesem Zusammenhang einen besonderen Anspruch an die Kurse „Einführung in die Mechanik und Elektrotechnik I und II“. Für Studierende, die nach dem 1. Studienjahr ein maschinentechnisches Studium wählen, sind diese Kurse die einzigen Berührungspunkte zu grundsätzlichen Betrachtungen der Elektrotechnik während ihres Studiums. Für Studierende, die nach dem 1. Studienjahr ein elektrotechnisches Studium wählen, sind diese Kurse die einzigen Berührungspunkte zu grundsätzlichen Betrachtungen der Mechanik und der Konstruktion während ihres Studiums. Insofern hat dieser Kurs in seinen Teilen Mechanik und Elektrotechnik den Charakter eines Überblickskurses.

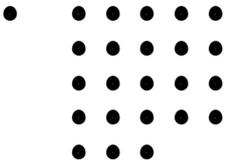
So möchte ich auch die elektrotechnischen Teile der Kurse „Einführung in die Mechanik und Elektrotechnik I und II“ verstanden wissen. Die elektrotechnischen Teile der Kurse haben nicht den Anspruch eines Kurses „Grundlagen der Elektrotechnik“, der im einzelnen wesentlich mehr in die Tiefe gehen muss. In den 2 Semestern möchte ich nach der Bereitstellung wesentlicher (aber zum Teil vereinfachter) Grundregeln des Gleich- und Wechselstroms den Schwerpunkt auf Themen wie die Anwendungen von Transistoren oder der Funktionsweise und des Aufbaus von elektronischen Schaltungen, z. B. eines Analog-Digital-Wandlers, legen. Damit soll den Studierenden, die nach dem 1. Studienjahr in den Studienangeboten Wirtschaftsingenieur, Maschinenbau oder Informatikingenieur weiterstudieren, ein elektrotechnisches Grundverständnis vermittelt werden. Studierende, die nach dem 1. Studienjahr die elektrotechnisch ausgerichteten Studienangebote Elektronik / Electronics oder Automatisierungstechnik / Automation Systems (Diplomabschluss / Bachelorabschluss) wählen, erhalten einen Überblick über einige Themen, die dann ab dem 3. Semester in unterschiedlichen Kursen vertieft werden. Studierende, die bereits über eine elektrotechnische Ausbildung verfügen, werden bereits in meinen Kursen erkennen, dass an einer Hochschule viele Betrachtungen und Berechnungen durch eine andere Vorgehensweise und andere mathematische Werkzeuge geprägt sind.

Den Mitarbeitern Dipl.-Ing. Franz Josef Klein und Andreas Wagen danke ich für die Mitarbeit an diesem Skript und für die Betreuung des Praktikums.

Jürgen Weber

Bergneustadt, im September 2002

1. Überarbeitung im September 2003



Fachhochschule Köln
University of Applied Sciences Cologne
Campus Gummersbach

Prof. Dr.-Ing. Jürgen Weber

Dipl.-Ing. Franz Josef Klein

Andreas Wagen

1 Einleitung

Inhaltsverzeichnis

0	<i>Vorbemerkung</i>	
1	EINLEITUNG	3
2	<i>Der elektrische Strom</i>	
3	<i>Gleichstromschaltungen mit linearen Bauelementen</i>	
4	<i>Der Wechselstromkreis</i>	
5	<i>Messtechnik</i>	
6	<i>Dreiphasenwechselstrom</i>	
7	<i>Der Transformator</i>	

Anhang

<i>Anlage I</i>	<i>Praktika</i>	
-----------------	-----------------	--

1 EINLEITUNG

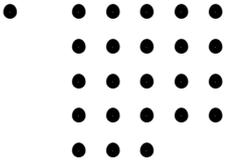
Der elektrotechnische Teil des Kurses „Einführung in die Mechanik und Elektrotechnik I“ soll den Studierenden einen Überblick über weite Gebiete der Elektrotechnik geben. Dabei stehen nach Kapiteln, die zunächst die einfachsten Grundlagen und Rechenvorschriften definieren, auch Anwendungen im Vordergrund. Der Kurs besteht aus Vorlesungen, Übungen und Praktika, die in diesem Skript zusammengefasst sind.

Auf Grund des Charakters des Kurses (siehe hierzu das Kapitel Vorbemerkung), ist es schwer, geeignete Literatur zur Begleitung dieses Kurses zu empfehlen. In den meisten Fällen geht die Literatur wesentlich tiefer auf die in diesem Kurs behandelten Sachverhalte ein, so dass es bei deren Benutzung zum Teil einer aufwendigen Einarbeitung bedarf. Trotzdem wird zu den einzelnen Kapiteln eine entsprechende Literaturliste angegeben.

Fragen und Übungsaufgaben zu den einzelnen Unterkapiteln sind jeweils an deren Ende formuliert und, sofern dies bei den Übungen die Aufgabenstellung zulässt, mit den numerischen Lösungen versehen. Die Fragen und die Übungsaufgaben haben das Niveau einzelner Prüfungsaufgaben. Bei der Prüfung selbst, die in dem Kurs „Einführung in die Mechanik und Elektrotechnik I“ einen Zeitraum von 90 Minuten umfasst, sind keine Unterlagen zugelassen.

Die Versuchsbeschreibungen der insgesamt drei kursbegleitenden Praktika sind im Anhang als Anlage I zu diesem Skript zu finden. Sie müssen durch die Messergebnisse, die durch die praktischen Übungen im Institute of Electronics & Information Engineering gewonnen werden, in dazu gekennzeichneten Feldern ergänzt werden. Innerhalb dieser Versuchsbeschreibungen wird auf Kapitel und Abschnitte verwiesen, deren Inhalte für die erfolgreiche Teilnahme an den Praktika beherrscht werden müssen. Die erfolgreiche Teilnahme an den drei Praktika ist Voraussetzung für die Teilnahme an der Prüfung des Kurses „Einführung in die Mechanik und Elektrotechnik I“.

In diesem Skript werden Matrizen und Vektoren fett – kursiv dargestellt.



Fachhochschule Köln
University of Applied Sciences Cologne
Campus Gummersbach

Prof. Dr.-Ing. Jürgen Weber

Dipl.-Ing. Franz Josef Klein

Andreas Wagen

2 Der elektrische Strom

Inhaltsverzeichnis

0	<i>Vorbemerkung</i>	
1	<i>Einleitung</i>	
2	DER ELEKTRISCHE STROM	3
2.1	Der Atomaufbau	3
2.1.1	Einleitung	3
2.1.2	Der Atomkern	4
2.1.3	Die Atomhülle	4
2.1.4	Fragen- und Aufgabensammlung	6
2.2	Das Bändermodell	7
2.2.1	Fragen- und Aufgabensammlung	9
2.3	Der Stromkreis	11
2.3.1	Die elektrische Stromstärke	11
2.3.2	Die elektrische Spannung	12
2.3.3	Der einfache Stromkreis	14
2.3.4	Fragen- und Aufgabensammlung	14
2.4	Stromarten, Spannungsarten und Stromwirkungen	16
2.4.1	Strom- und Spannungsarten	16
2.4.2	Stromwirkungen	19
2.4.3	Fragen- und Aufgabensammlung	20
2.5	Der elektrische Widerstand	22
2.5.1	Widerstand und Leitwert	22
2.5.2	Temperaturabhängigkeit der Widerstände und Leitwerte	24
2.5.3	Fragen- und Aufgabensammlung	24
2.6	Das Ohmsche Gesetz	26
2.6.1	Fragen- und Aufgabensammlung	27
2.7	Literaturhinweise	28
3	<i>Gleichstromschaltungen mit linearen Bauelementen</i>	
4	<i>Der Wechselstromkreis</i>	
5	<i>Messtechnik</i>	
6	<i>Dreiphasenwechselstrom</i>	
7	<i>Der Transformator</i>	
	<i>Anhang</i>	
	<i>Anlage I</i>	<i>Praktika</i>

2 DER ELEKTRISCHE STROM

2.1 Der Atomaufbau

2.1.1 Einleitung

Um sich zunächst Klarheit darüber zu verschaffen, was der elektrische Strom eigentlich darstellt, soll in diesem Kapitel der Atomaufbau nach dem „Bohrschen Atommodell“ betrachtet werden. Obwohl dieses Modell bei weitem nicht alle Phänomene der Materie beschreibt, ist es für die Betrachtung des elektrischen Stromes zunächst ausreichend.

Die einfachste Form des „Bohrschen Atommodells“ geht davon aus, dass sich die Materie aus drei Elementarteilchen zusammensetzt:

- dem elektrisch positiv geladenen Proton
- dem elektrisch negativ geladenen Elektron
- dem elektrisch neutralen Neutron

Die Protonen und die Neutronen bilden dabei den Atomkern, während die Elektronen den Atomkern umkreisen und dabei die Atomhülle bilden. Atomkern und Atomhülle ergeben das Atom. Verbindungen mehrerer Atome bezeichnet man als Molekül. Einzelne Atome oder Moleküle können sich zu einem Atomgitter zusammenschließen, womit sich feste Werkstoffe bilden. Schließen sich Atome zu einem Atomgitter zusammen, so ergeben sich bis zu 10^{23} Atome pro cm^3 .

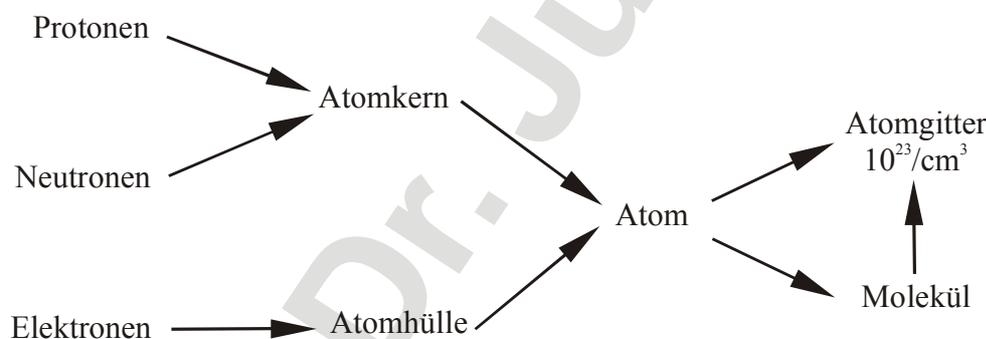


Bild 2.1.1 - 1: Vom Elementarteilchen zum Molekül

Dass es sich bei dem „Bohrschen Atommodell“ um eine sehr vereinfachte Darstellung handelt, erkennt man daran, dass die Physik inzwischen mehr als 200 weitere Teilchen kennt.

Den Elementarteilchen Proton, Neutron und Elektron werden folgende Eigenschaften zugeordnet:

- elektrische Ladung
- Masse (Ruhemasse)
- Drehimpuls (Spin)
- magnetisches Moment

Von diesen Eigenschaften ist für die Elektrotechnik primär nur die elektrische Ladung Q von Interesse. Diese elektrische Ladung wird in Coulomb (C [As]) gemessen. Danach ergibt sich für die kleinste Ladungseinheit, der Elementarladung e , ein Ladungswert von $1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$. Den Elementarteilchen sind die folgenden Ladungswerte zugeordnet:

Proton	$e_p = +e = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$
Neutron	$e_n = 0$
Elektron	$e_e = -e = -1,602 \cdot 10^{-19} \text{C}$

2.1.2 Der Atomkern

Der Atomkern besteht aus so genannten Nukleonen. Wir unterscheiden bei den Nukleonen zwischen Protonen und Neutronen. Eine Anzahl von Z Protonen und eine Anzahl von N Neutronen bilden den Atomkern.

$$Z \text{ Protonen} + N \text{ Neutronen} = Z + N \text{ Nukleonen} \Rightarrow \text{Atomkern}$$

Mit der Anzahl Z der Protonen ist auch die Anzahl der Elektronen in der Atomhülle eines elektrisch neutralen Atoms festgelegt. Die Anzahl Z der Protonen ist identisch mit der Ordnungszahl eines Atoms, die wiederum die Stellung des Atoms durch sein chemisches Verhalten im Periodensystem der Elemente kennzeichnet.

Die Summe der Protonen und Neutronen in einem Atomkern bestimmt die Massenzahl A .

$$A = Z + N \quad 2.1.2-1$$

Atome mit gleicher Ordnungszahl Z aber unterschiedlicher Massenzahl A bezeichnet man als Isotope. Wegen der großen Massenunterschiede von Nukleonen und Elektronen (ein Nukleon hat die 1836-fache Masse des Elektrons) ist nahezu die gesamte Masse eines Atoms in seinem Kern konzentriert.

2.1.3 Die Atomhülle

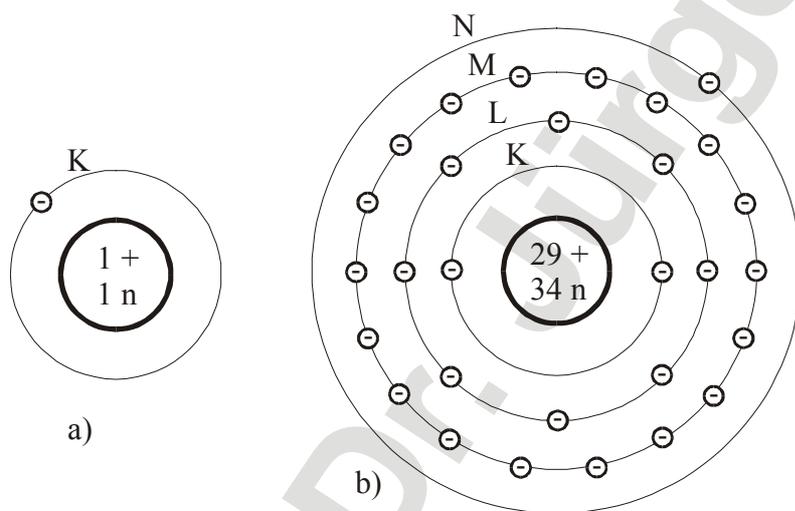
Wie bereits erwähnt kreisen die Elektronen nach dem „Bohrschen Atommodell“ um den Atomkern. Dabei befinden sie sich in verschiedenen Schalen mit unterschiedlichen Abständen vom Atomkern. Innerhalb der einzelnen Schalen findet nur eine begrenzte Anzahl von Elektronen Platz. Als generelle Tendenz steigt die Energie der Elektronen mit dem Abstand vom Atomkern, wobei innerhalb der Schalen die Elektronen aufgrund unterschiedlicher Drehimpulse wiederum verschiedene Energiezustände einnehmen. Während die unterschiedlichen Energieniveaus der Schalen durch die Hauptquantenzahlen gekennzeichnet werden, beschreibt die Nebenquantenzahl die unterschiedlichen Energieniveaus innerhalb einer Schale. Damit fächert sich die Energie innerhalb einer Schale auf. Dabei gibt es die Fälle, dass die unteren Energieniveaus innerhalb einer Schale niedriger sind als die oberen Energieniveaus der benachbarten inneren Schale. Da die Natur immer bestrebt ist, den energetisch geringsten Zustand anzustreben, werden die Schalen entsprechend ihrer Energieniveaus besetzt. Bevor sich also eine Schale vollständig füllt, sind die von ihr aus gesehenen inneren Schalen mit einer entsprechend niedrigeren Hauptquantenzahl bereits vollständig besetzt.

Die Schalen mit den Hauptquantenzahlen $n = 1$ bis 7 werden von innen nach außen beginnend mit den Buchstaben K für die 1. und damit innerste Schale, bis zur 7. Schale mit dem Buchstaben Q bezeichnet. Dabei unterliegen diese Schalen dem folgenden Gesetz über die maximale Anzahl der Elektronen pro Schale:

$$\text{maximale Anzahl von Elektronen pro Schale} = 2 \cdot n^2 \quad 2.1.3-1$$

mit	2	Elektronen in der Schale K	($n = 1$)
	8	Elektronen in der Schale L	($n = 2$)
	18	Elektronen in der Schale M	($n = 3$)
	32	Elektronen in der Schale N	($n = 4$)
	•		
	•		

Bild 2.1.3-1 zeigt den Aufbau eines Wasserstoffatoms und eines Kupferatoms. Das Wasserstoffatom besitzt nur ein Elektron in der K-Schale und jeweils ein Proton und Neutron im Atomkern. Das Kupferatom weist dagegen insgesamt 29 Elektronen auf, die über die voll besetzten Schalen K bis M und die mit einem Elektron besetzte N-Schale verteilt sind. Im Atomkern des Kupferatoms befinden sich 29 Protonen und 34 Neutronen. Die dargestellten Atome sind damit nach außen hin elektrisch neutral, da eine entsprechende Anzahl



von Elektronen in der Hülle einer identischen Anzahl von Protonen im Atomkern gegenübersteht. Atome, die diese Eigenschaft nicht aufweisen und weniger oder mehr Elektronen in der Hülle als Protonen im Kern besitzen, bezeichnet man als ionisiert.

Bild 2.1.3-1: Aufbau neutraler Atome a) Wasserstoff; b) Kupfer

Ein Atom ist elektrisch neutral, wenn die folgende Aussage gilt:

$$\text{Anzahl der Elektronen} = \text{Anzahl der Protonen}$$

Die Anzahl der Elektronen in der jeweils äußeren Schale bestimmt das chemische und elektrische Verhalten. Sie charakterisieren die chemische Wertigkeit und damit die so genannte Va-

lenz. Deshalb werden die Elektronen in der äußeren Schale auch als Valenzelektronen bezeichnet.

Diese Valenzelektronen besitzen, da sie den größten Abstand vom Atomkern haben, im Allgemeinen auch die größte Energie und sind bei einer geringen Besetzung der äußeren Schale nur relativ schwach an den Atomkern gebunden. Diese Elektronen können sich von dem Atomkern lösen und bilden dann frei bewegliche Elektronen im Atomgitter. Das Atom selbst ist dann nicht mehr elektrisch neutral und wird somit zu einem Ion.

2.1.4 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Wie heißen die 3 Elementarteilchen?
- 2) Welchen Elementarteilchen bilden den Atomkern?
- 3) Bis zu wie viel Atome können sich innerhalb eines Atomgitters pro cm^3 befinden?
- 4) Welche Eigenschaften können den Elementarteilchen zugeordnet werden?
- 5) In welcher Einheit wird die elektrische Ladung gemessen?
- 6) Welchen Ladungswert hat die Elementarladung?
- 7) Welche Ladungen haben die einzelnen Elementarteilchen?
- 8) Was ist ein Nukleon?
- 9) Welche Bedingung muss erfüllt sein, damit ein Atom nach außen hin elektrisch neutral ist?
- 10) Was beschreibt die Massenzahl A ?
- 11) Was sind Isotope?
- 12) Was versteht man unter der Hauptquantenzahl?
- 13) Was versteht man unter der Nebenquantenzahl?
- 14) Nach welchem Naturgesetz werden die Schalen des Atoms mit Elektronen besetzt?
- 15) Wie werden die Elektronen in der äußeren Schale genannt?
- 16) Wie nennt man ein Atom, das nach außen hin nicht mehr elektrisch neutral ist?
- 17) Wann sind Valenzelektronen nur relativ schwach an das Atom gebunden?

Aufgabe 2.1.4-1:

Berechnen Sie die maximale Anzahl der Elektronen, die auf der P-Schale Platz finden.

(Lösung: 72 Elektronen)

2.2 Das Bändermodell

Wie bereits erwähnt, wächst die Energie W der einzelnen Elektronen mit zunehmendem Abstand vom Atomkern. Dabei können die einzelnen Elektronen nur ganz bestimmte Energieniveaus einnehmen. Für ein einzelnes Atom, welches sich nicht mit weiteren Atomen innerhalb eines Atomgitters in Wechselwirkung befindet, zeigt Bild 2.2-1 einen Ausschnitt zugelassener diskreter Energiezustände für einzelne Elektronen. Die Zwischenräume können nicht besetzt werden und sind somit unerlaubte Energiezustände.

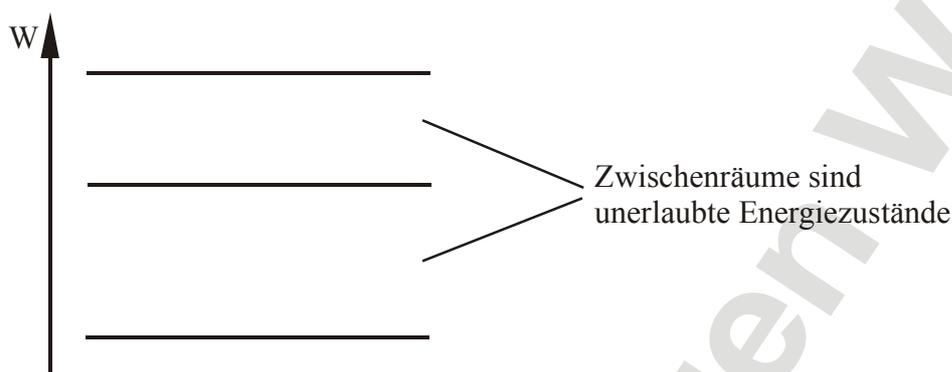


Bild 2.2-1: Energieniveaus einzelner Elektronen in einem isolierten Atom

Innerhalb eines Atomgitters treten Wechselwirkungen der Atome untereinander auf. Das Atomgitter bildet damit ein gekoppeltes System, in dem naturgemäß einzelne Energiezustände nicht doppelt besetzt werden können. Daraus resultiert ein Auffächern der einzelnen diskreten Energiezustände im Atomgitter zu Bändern, die weiterhin durch verbotene Bereiche voneinander abgegrenzt sind. Bild 2.2-2 zeigt einen Ausschnitt der Verteilung einzelner Energiebänder im Atomgitter über der Energie W .

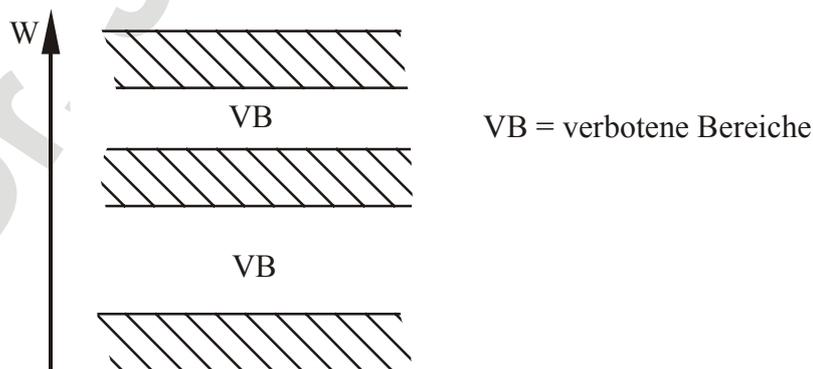


Bild 2.2-2: Energiebänder im Atomgitter

Sind alle Elektronen an den Atomkern gebunden, so stellt das oberste Energieband als das Energieband, dem die höchste Energie zugeordnet ist, die Energieverteilung der Valenzelektronen dar. Dieses Energieband wird als Valenzband V bezeichnet.

Damit sich aus diesem Valenzband einzelne Elektronen befreien können, um dann als frei bewegliche Elektronen im Atomgitter zu existieren, wird im Allgemeinen eine noch höhere Energie als die des Valenzbandes benötigt. Frei bewegliche Elektronen befinden sich dann in dem so genannten Leitungsband L , welches von dem Valenzband im Allgemeinen durch eine

verbotene Energiezone des Energieabstandes ΔW getrennt ist. Die Größe des Energieabstandes ΔW ist dabei werkstoffabhängig. Bild 2.2-3 zeigt den Aufbau des Valenzbandes und des Leitungsbandes. Damit ist ΔW die minimalste Energie die einem Elektron zugeführt werden muss, damit es vom obersten Rand des Valenzbandes zum untersten Rand des Leitungsbandes gehoben werden kann. Dabei erfolgt die Energiezufuhr im Allgemeinen durch Erwärmung des Werkstoffes.

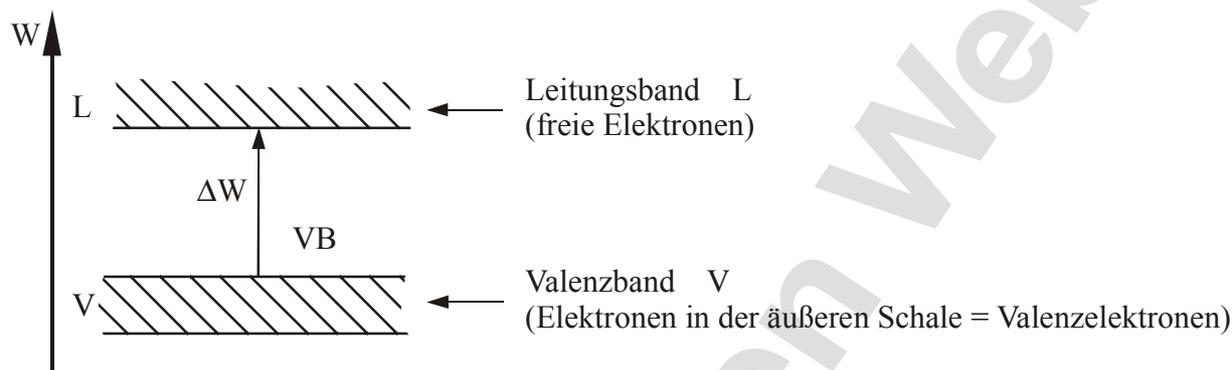


Bild 2.2-3: Abstand zwischen Valenzband und Leitungsband

Metalle besitzen in der Regel 1 bis 3 Valenzelektronen in der äußeren Schale der Atomhülle. Die Anzahl dieser Valenzelektronen gibt die Wertigkeit des Atoms an. So ist z. B. das Kupferatom (Cu) mit einem Valenzelektron ein einwertiges Atom.

Vorangehend wurde davon gesprochen, dass zwischen dem Valenzband und dem Leitungsband eine verbotene Zone existiert. Bei Metallen kommt es nun vor, dass sich das Valenzband und das Leitungsband überlappen, wie dies im Bild 2.2-4 dargestellt ist. Bei einwertigen Me-

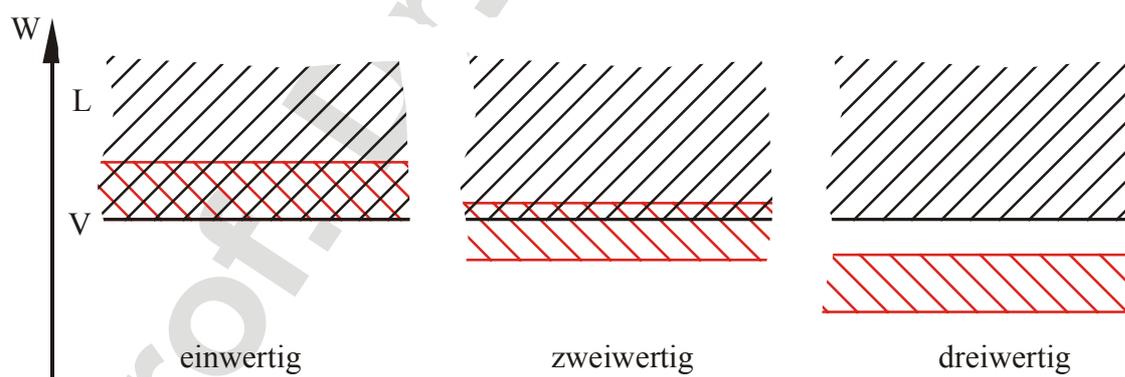


Bild 2.2-4: Valenz- und Leitungsbander bei Metallen

tallen liegt das Valenzband vollständig im Leitungsband und schließt mit dessen unterem Energieniveau ab. Dies bedeutet, dass sich bereits ohne Energiezufuhr bei einer Temperatur von $T = 0K$ (Kelvin) alle Valenzelektronen im Leitungsband befinden. Bei zweiwertigen Me-

tallen überlappen sich das Valenzband und das Leitungsband teilweise, während sich bei dreiwertigen Metallen bereits eine verbotene Zone bildet.

Generell lässt sich aber feststellen, dass jedes Metallatom, unabhängig von seiner Wertigkeit, bei Raumtemperatur von $T = 290\text{K}$ ein Valenzelektron in das Leitungsband gehoben hat. Da bei Metallen ca. 10^{23} Atome pro cm^3 existieren, dürfen wir auch von ca. 10^{23} frei beweglichen Elektronen pro cm^3 ausgehen. Dies erklärt die gute elektrische Leitfähigkeit ρ von Metallen, die proportional zu der Anzahl der freien Elektronen ist.

Nichtmetallische Werkstoffe haben meist mehr als 3 Valenzelektronen und einen relativ großen Abstand zwischen dem Valenzband und dem Leitungsband, wie dies im Bild 2.2-5 dargestellt ist. Im Gegensatz zu Metallen befinden sich bei Nichtmetallen bei Raumtemperatur von $T = 290\text{K}$ nur wenige Elektronen im Leitungsband. Diese Werkstoffe besitzen somit nur eine schlechte elektrische Leitfähigkeit.

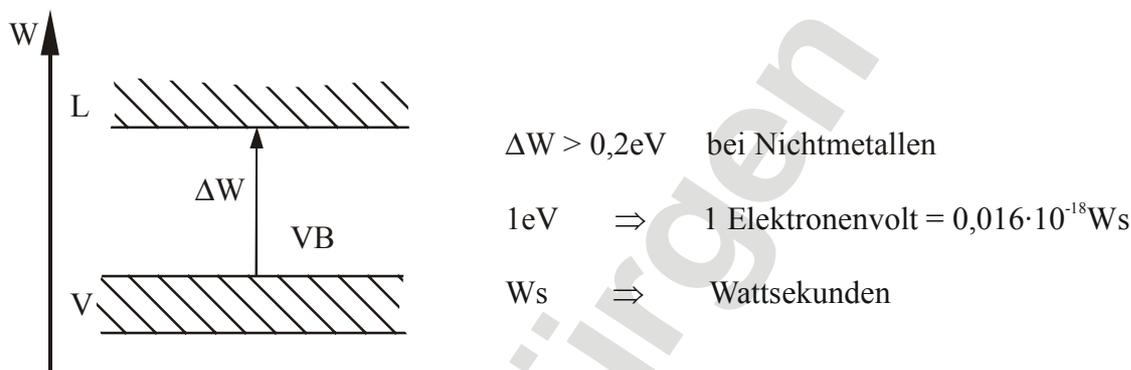


Bild 2.2-5: Abstand zwischen Valenzband und Leitungsband bei Nichtmetallen

2.2.1 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Zeichnen Sie einen Ausschnitt aus dem Bändermodell für ein einzelnes Atom.
- 2) Wieso fächern sich im Bändermodell bei einem Atomgitter die einzelnen Energiebänder auf?
- 3) Wie bezeichnet man im Bändermodell das oberste Band, in dem die Elektronen noch an das Atom gebunden sind?
- 4) In welchem Band des Bändermodells befinden sich im Atomgitter frei bewegliche Elektronen?
- 5) Wie bezeichnet man im Bändermodell die Zonen zwischen den einzelnen Bändern?
- 6) Zeichnen Sie einen Ausschnitt aus dem Bändermodell eines Atomgitters.
- 7) An welcher Stelle des Bändermodells muss sich ein Elektron befinden, damit es mit der geringsten zusätzlichen Energie ΔW in das Leitungsband gehoben werden kann?
- 8) Wie viele Valenzelektronen besitzen Metalle?
- 9) Was versteht man unter der Wertigkeit eines Atoms?

- 10) Zeichnen Sie für ein einwertiges Metall das Bändermodell für das Valenz- und Leitungsband.
- 11) Zeichnen Sie für ein zweiwertiges Metall das Bändermodell für das Valenz- und Leitungsband.
- 12) Zeichnen Sie für ein dreiwertiges Metall das Bändermodell für das Valenz- und Leitungsband.
- 13) Bewerten Sie die elektrische Leitfähigkeit von ein-, zwei- und dreiwertigen Metallen bei $T = 0\text{K}$.
- 14) Was unterscheidet nach dem Bändermodell metallische und nichtmetallische Werkstoffe?

2.3 Der Stromkreis

2.3.1 Die elektrische Stromstärke

Betrachtet man einen metallischen Werkstoff, so befinden sich bei Temperaturen um 300K in dem Werkstoff eine erhebliche Anzahl von Elektronen im Leitungsband. Diese Elektronen bewegen sich innerhalb dieses Werkstoffes zunächst völlig willkürlich, wobei aufgrund der Verteilung der Bewegungen für die Elektronen keine resultierende Bewegung in eine bestimmte Richtung zustande kommt. Dies ändert sich erst, wenn eine elektrische Feldstärke E in diesem Werkstoff wirkt (Bild 2.3.1-1). Auf Grund ihrer elektrisch negativen Ladung entsteht eine Kraft F auf die Elektronen, die gegen das elektrische Feld E gerichtet ist. Dadurch stellt sich eine resultierende Elektronenbewegung ein.

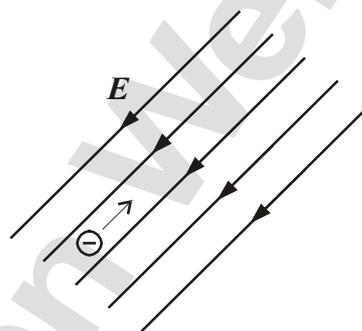


Bild 2.3.1-1: Elektron im elektrischen Feld

Aus dieser Elektronenbewegung definiert sich die elektrische Stromstärke i , die auch allgemein als der elektrische Strom bezeichnet wird. Der elektrische Strom i ist nach Definition gegen die Bewegung der Elektronen gerichtet. Bild 2.3.1-2 zeigt einen zylindrischen metallischen Leiter, in dem durch eine resultierende Elektronenbewegung ein elektrischer Strom i fließt. Die Stromstärke, die angibt, welche elektrische Ladungsmenge Q durch die Leiterquerschnittsfläche A pro Zeiteinheit fließt, wird dabei in Ampere [A] gemessen. Allgemein gilt für die Querschnittsfläche A :

$$i = \frac{dQ}{dt} \quad 2.3.1-1$$

Im Fall einer zeitlich konstanten Elektronenbewegung geht das Differenzial in die Gleichung

$$i = \frac{Q}{t} \quad 2.3.1-2$$

über. Im Allgemeinen verteilen sich die durch die Querschnittsfläche A hindurchtretenden Ladungen nicht homogen über die Leiterquerschnittsfläche. In diesem Fall muss die ortsabhängige Stromdichte S [A/m²] ermittelt werden, mit der dann die Stromstärke über

$$i = \int_A S dA \quad 2.3.1-3$$

berechnet werden kann. Auf diese Formel soll hier nicht

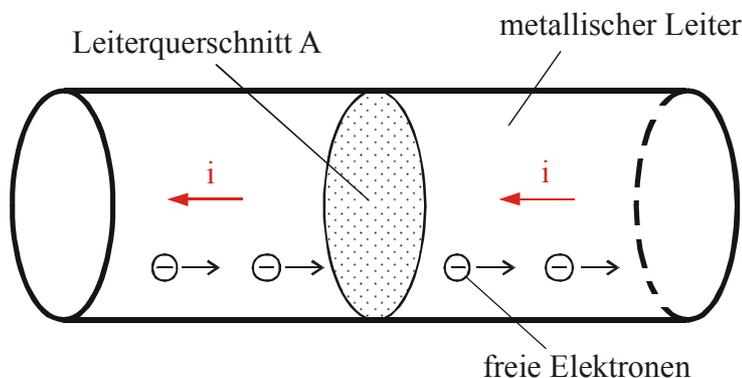


Bild 2.3.1-2: Transport der Ladungsträger

näher eingegangen werden.

Der elektrische Strom i hat ein magnetisches Feld H zur Folge, welches sich innerhalb und außerhalb des Leiters ausbreitet. Da dieses magnetische Feld seinerseits wieder eine Kraftwirkung auf andere stromdurchflossene Leiter ausübt, gelangt man über die folgende Festlegung zur Einheit der Stromstärke:

Die Stromstärke i hat den Wert 1A, wenn zwei im Abstand $r = 1\text{m}$ parallel angeordnete, geradlinige, unendlich lange Leiter mit vernachlässigbar kleinem Querschnitt, die vom gleichen zeitlich konstanten Strom i durchflossen werden, je 1m Leiterlänge die Kraft $F = 10^{-7}\text{ N/m}$ aufeinander ausüben.

Bisher wurde der Strom i nur als Bewegung von Elektronen betrachtet. In einem elektrischen Feld E bewegen sich diese Elektronen aufgrund ihrer negativen Ladung wie bereits erwähnt gegen dieses Feld. Da die Elektronen, die sich im Leitungsband befinden, in der Regel ein positiv geladenes Atom zurücklassen, wird auf dieses im elektrischen Feld ebenfalls eine Kraft ausgeübt, die mit dem Feld gerichtet ist. In einem festen Körper hat diese Kraftwirkung keine Folge. Ganz anders sieht die Situation aus, wenn ein elektrisches Feld in einer Flüssigkeit wirkt, in der sich ionisierte Atome oder Moleküle befinden. Je nach deren Ladung driften diese mit oder gegen das elektrische Feld. Diesen Vorgang, der zur Zersetzung eines Stoffes führt, nennt man Elektrolyse. Aufgrund der Ladungsbewegung kann man hier auch von einem elektrischen Strom sprechen. Da diese Art des Stroms in diesem Kurs keine Rolle spielt, soll auf die Elektrolyse nicht näher eingegangen werden.

Eine weitere Art des Stroms liegt vor, wenn sich neben der Bewegung der Elektronen im Leitungsband gegen ein elektrisches Feld auch noch so genannte Bindungslücken mit dem elektrischen Feld bewegen. Bindungslücken entstehen zunächst im Atomgitter dort, wo ein in das Leitungsband gehobenes Elektron ein elektrisch positives Ion hinterlässt. Vereinfacht kann man sich nun eine Ladungsbewegung so vorstellen, dass Elektronen des Valenzbandes zu benachbarten ionisierten Atomen wechseln. Da diese Elektronensprünge gegen das elektrische Feld E gerichtet sind, scheint sich dabei eine positive Ladung gleichzeitig mit dem elektrischen Feld E zu bewegen. Der Strom setzt sich dann aus der Bewegung der freien Elektronen und der Bewegung der Bindungslücken zusammen. Auf diesen Effekt wird im Skript des elektrotechnischen Teils des Kurses „Einführung in die Mechanik und Elektrotechnik II“ noch genauer eingegangen, da es sich hierbei um den Stromfluss innerhalb von Halbleitern handelt, die in der Elektrotechnik eine bedeutende Rolle spielen.

2.3.2 Die elektrische Spannung

Im vorangehenden Abschnitt wurde eine resultierende Elektronenbewegung auf die Existenz eines elektrischen Feldes E zurückgeführt. Dieses elektrische Feld E ist ein Vektor. Das bedeutet, dass das elektrische Feld eine Richtung im dreidimensionalen Raum besitzt und damit in einzelne Komponenten zerlegt werden kann. Legt man das kartesische Koordinatensystem mit den Dimensionen x , y und z zu Grunde, so lässt sich die elektrische Feldstärke im Allgemeinen wie folgt durch ihre einzelnen Komponenten darstellen:

$$\mathbf{E} = e_x E_x + e_y E_y + e_z E_z \quad 2.3.2-1$$

Mithin müsste man bei elektrotechnischen Berechnungen immer alle drei Komponenten E_x , E_y und E_z der elektrischen Feldstärke berücksichtigen, bzw. alle drei Komponenten ermitteln. Um dies für die überwiegende Anzahl der elektrotechnischen und elektronischen Berechnungen und Analysen zu vermeiden, hat man ein übergeordnetes Skalarpotenzial φ , das elektrische Potenzial, eingeführt. Das elektrische Potenzial φ , das als $\varphi(x,y,z)$ eine Funktion des Ortes ist und die Dimension Volt [V] besitzt, hat als Skalar keine Richtung und zerfällt somit nicht in einzelne Komponenten. Aus diesem Skalar lässt sich die elektrische Feldstärke \mathbf{E} dann wieder über die an dieser Stelle nicht näher beschriebene Beziehung

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi(x, y, z) = -\mathbf{e}_x \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial x} - \mathbf{e}_y \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial y} - \mathbf{e}_z \frac{\partial \varphi(x, y, z)}{\partial z} \quad 2.3.2-2$$

bei Bedarf ermitteln.

Das elektrische Potenzial φ kann mit Höhenlinien auf einer Landkarte verglichen werden. So wie Höhenlinien den Verlauf konstanter Höhen in der Landschaft beschreiben und damit einen Hinweis über den Verlauf der Höhenunterschiede geben, so beschreibt das elektrische Potenzial φ existierende Potenzialdifferenzen, aus denen man die elektrische Spannung u ermitteln kann. Potenzialdifferenzen lassen sich am einfachsten anhand des Bildes 2.3.2-1 erklären. Hier liegen sich zwei metallische Platten gegenüber, wobei die eine Platte einen Elektronenmangel und die andere einen Elektronenüberschuss aufweist. Ein Gebiet mit Elektronenmangel entsteht dadurch, dass Elektronen, die sich als freie Elektronen im Leitungsband

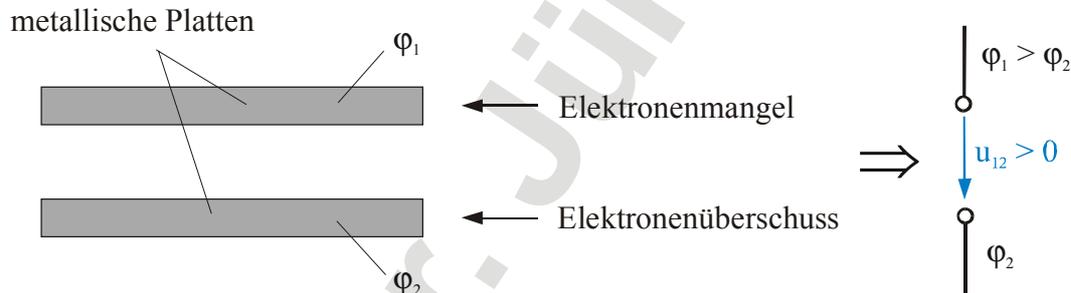


Bild 2.3.2-1: Potenzial und elektrische Spannung

befinden, teilweise „abgesaugt“ werden. Nach außen hin erscheint dann solch ein Gebiet wegen der positiven Ionen elektrisch nicht mehr neutral, sondern elektrisch positiv. Man spricht dann davon, dass das Gebiet eine positive Gesamtladung Q [Coulomb = As] aufweist. Ein Gebiet mit Elektronenüberschuss entsteht dadurch, dass zusätzliche freie Elektronen in das Gebiet gebracht werden. Nach außen hin erscheint dann solch ein Gebiet elektrisch negativ und besitzt damit eine negative Gesamtladung Q . Allgemein weist man positiveren Gesamtladungen ein höheres elektrisches Potenzial φ zu, womit für Bild 2.3.2-1 gilt:

$$\varphi_1 > \varphi_2 \quad 2.3.2-3$$

Die elektrische Spannung u zwischen den Platten des Bildes 2.3.2-1, die wie das elektrische Potenzial φ die Dimension [Volt = V] besitzt, berechnet sich nun aus der Potenzialdifferenz:

$$u_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 \quad 2.3.2-4$$

2.3.3 Der einfache Stromkreis

Will man nun einen Strom i fließen lassen, so benötigt man eine Quelle, die eine bestimmte Potenzialdifferenz $\Delta\phi = u$ aufbringt. Bild 2.3.3-1 zeigt eine Quelle, an deren äußeren Klemmen die Spannung u abgegriffen werden kann. Wird an diese Quelle über Leitungen ein „Verbraucher“ angeschlossen, so bildet sich ein einfacher geschlossener Stromkreis, in dem der Strom i fließt. Der Begriff „Verbraucher“, der allgemein benutzt wird, ist dabei

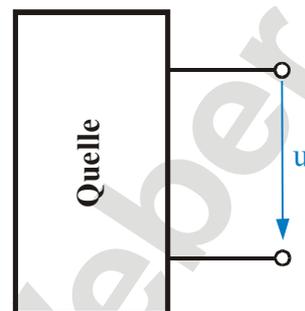


Bild 2.3.3-1: Quelle

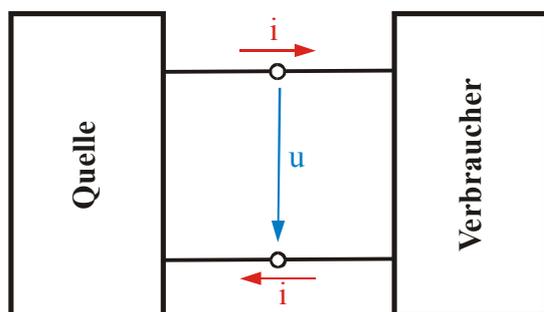


Bild 2.3.3-2: Einfacher Stromkreis

irreführend. Auf Grund der Spannung u und des Stroms i muss die Quelle elektrische Energie zur Verfügung stellen, die im „Verbraucher“ dann allgemein in Wärme umgesetzt wird. Bild 2.3.3-2 zeigt die Zusammenschaltung einer Quelle mit einem Verbraucher. Der in diesem Stromkreis fließende Strom i versucht dabei die Ursache der Spannung u , nämlich den Elektronenüberschuss und den Elektronenmangel, auszugleichen.

2.3.4 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Welche Richtung nimmt die resultierende Elektronenbewegung unter dem Einfluss eines elektrischen Feldes E ein?
- 2) Was gibt die Stromstärke i in einem metallischen Leiter an?
- 3) In welcher Dimension wird die Stromstärke i gemessen?
- 4) Über welche physikalische Größe wird die Stromstärke $i = 1\text{A}$ im Experiment definiert?
- 5) Aus welchem Grund wurde das elektrische Potenzial ϕ eingeführt?
- 6) Welche der beiden metallischen Platten wird ein höheres elektrisches Potenzial ϕ zugeordnet:
 - a) $1,012 \cdot 10^{23}$ freie Elektronen pro cm^3
 - b) $1,034 \cdot 10^{23}$ freie Elektronen pro cm^3

Aufgabe 2.3.4-1:

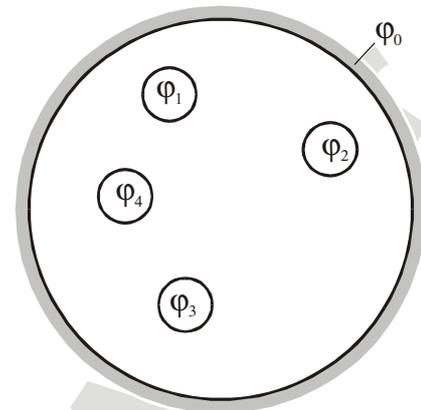
Wie groß ist der Betrag der Stromstärke i innerhalb eines metallischen Leiters der Querschnittsfläche $A = 1\text{cm}^2$, wenn konstant über der Zeit durch die Querschnittsfläche A 10^{17} Elektronen pro Minute fließen?

(Lösung: $i = 267\mu\text{A}$)

Aufgabe 2.3.4-2:

Innerhalb einer Hohlkugel mit dem elektrischen Potenzial $\varphi_0 = 3V$ befinden sich laut nebenstehender Zeichnung vier kleine Kugeln mit den elektrischen Potenzialen

- $\varphi_1 = 10V$
- $\varphi_2 = -6V$
- $\varphi_3 = 3V$
- $\varphi_4 = 18V$



Berechnen Sie die elektrischen Spannungen u_{nm} zwischen den einzelnen Kugeln und zur Oberfläche der Hohlkugel.

(Lösung: $u_{12} = 16V$; $u_{13} = 7V$; $u_{14} = -8V$; $u_{23} = -9V$; $u_{24} = -24V$; $u_{34} = -15V$; $u_{10} = 7V$; $u_{20} = -9V$; $u_{30} = 0V$; $u_{40} = 15V$)

2.4 Stromarten, Spannungsarten und Stromwirkungen

2.4.1 Strom- und Spannungsarten

Je nach der Beschaffenheit der Quelle stellen sich unterschiedliche Strom- und Spannungsarten ein. Bild 2.4.1-1 zeigt unterschiedliche Stromarten.

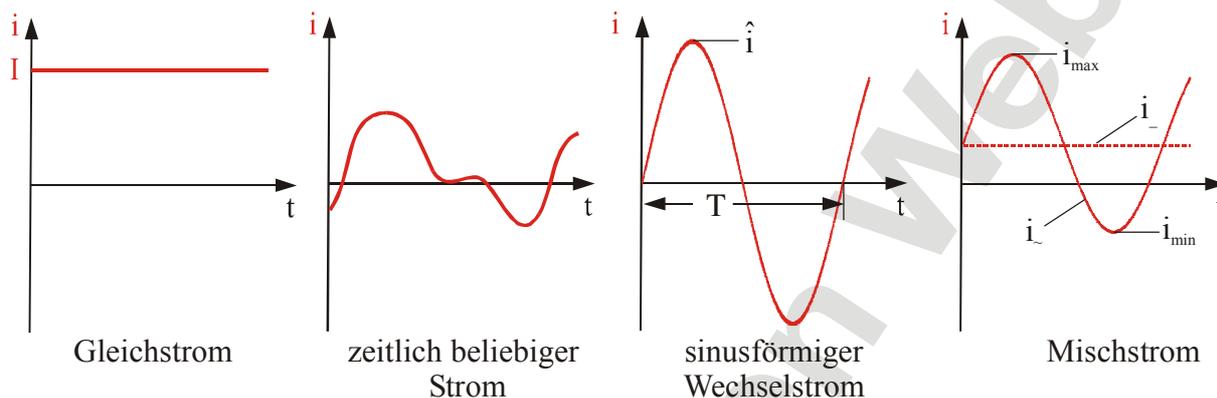


Bild 2.4.1-1: Stromarten

2.4.1.1 Zeitlich beliebiger Strom und zeitlich beliebige Spannung

Ein zeitlich beliebiger Strom oder eine zeitlich beliebige Spannung sind keinerlei Regelmäßigkeiten unterworfen. Zur Beschreibung werden im weiteren kleine Buchstaben für diese Art von Strom und Spannung benutzt:

$$i = i(t) \quad 2.4.1.1-1$$

$$u = u(t) \quad 2.4.1.1-2$$

2.4.1.2 Gleichstrom und Gleichspannung

Ein Grenzfall eines zeitlich beliebigen Stroms oder einer zeitlich beliebiger Spannung ist der zeitlich konstante Strom oder die zeitlich konstante Spannung. Für die Darstellung dieser Strom- und Spannungsverläufe, die als Gleichstrom oder als Gleichspannung bezeichnet werden, benutzt man die großen Buchstaben I bzw. U :

$$I \neq i(t) \quad 2.4.1.2-1$$

$$U \neq u(t) \quad 2.4.1.2-2$$

2.4.1.3 Sinusförmiger Wechselstrom und sinusförmige Wechselspannung

Als weitere Grenzfälle eines zeitlich beliebigen Stroms oder einer zeitlich beliebigen Spannung sind der sinusförmige Wechselstrom und die sinusförmige Wechselspannung zu betrachten. Für den zeitlichen Verlauf der beiden Größen gilt im Zeitbereich allgemein:

$$i = i(t) = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i) \quad 2.4.1.3-1$$

$$u = u(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) \quad 2.4.1.3-2$$

Die Größen \hat{i} und \hat{u} beschreiben hier die Maximalwerte (Scheitelwerte) des Stroms $i(t)$ bzw. der Spannung $u(t)$. Auf Grund des sinusförmigen Verlaufs dieser Zeitfunktionen sind hier der Strom und die Spannung periodische Funktionen mit der Periodendauer T [s]. Der Kehrwert der Periodendauer ist die Frequenz f , die in Hertz [$\text{Hz} = 1/\text{s}$] angegeben wird:

$$f = \frac{1}{T} \quad 2.4.1.3-3$$

Mit Hilfe der Frequenz f lässt sich die Kreisfrequenz ω [1/s] durch

$$\omega = 2\pi f \quad 2.4.1.3-4$$

angeben.

Als letzte Größen der allgemeinen Darstellungen für den Strom $i(t)$ und für die Spannung $u(t)$ nach den Gleichungen 2.4.1.3-1 und 2.4.1.3-2 sollen die Winkel φ_i und φ_u betrachtet werden. Diese Winkel stellen nach Bild 2.4.1.3-1 einen relativen Bezug der Sinusschwingung mit ihren Nulldurchgängen zu der Zeitachse mit dem Ursprung $t = 0$ dar.

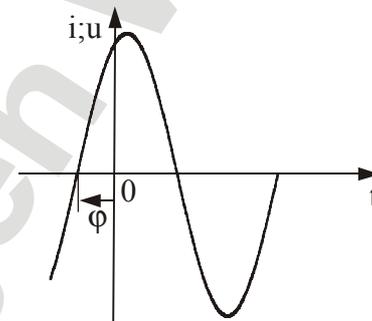


Bild 2.4.1.3-1: Phasenwinkel

Die Darstellung der sinusförmigen Wechselgrößen in Form von Zeitfunktionen nach Gleichungen 2.4.1.3-1 und 2.4.1.3-2 sind für Berechnungen von Wechselstromkreisen in den meisten Fällen ungeeignet. An ihre Stellen treten dann die komplexen Ströme und Spannungen:

$$\hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i) \Rightarrow \underline{I} \quad 2.4.1.3-5$$

$$\hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) \Rightarrow \underline{U} \quad 2.4.1.3-6$$

Auf diese Art der Darstellung durch komplexe Werte wird in einem späteren Kapitel eingegangen.

2.4.1.4 Mischstrom und Mischspannung

Unter einem Mischstrom bzw. einer Mischspannung versteht man die Überlagerung eines Gleichstroms bzw. einer Gleichspannung mit einem sinusförmigen Strom bzw. einer sinusförmigen Spannung der Frequenz f . Für diese Mischgrößen lassen sich die Maximalwerte i_{\max} bzw. u_{\max} und die Minimalwerte i_{\min} bzw. u_{\min} angeben (siehe Bild 2.4.1-1).

2.4.1.5 Der lineare Mittelwert

Die linearen Mittelwerte \bar{i} des Stroms und \bar{u} der Spannung ergeben sich aus den folgenden Integralen:

$$\bar{i} = \frac{1}{T} \int_0^T i(t) dt \quad 2.4.1.5-1$$

$$\bar{u} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt$$

2.4.1.5-2

Die Integrale werden dabei über eine Periodendauer T eines periodischen Stroms i(t) bzw. einer periodischen Spannung u(t) gebildet (Bild 2.4.1.5-1). Auf diese Art erhält man für einen Mischstrom den Gleichstromanteil und bei einer Mischspannung den Gleichspannungsanteil. Für reine sinusförmige Größen wird der Mittelwert zu Null.

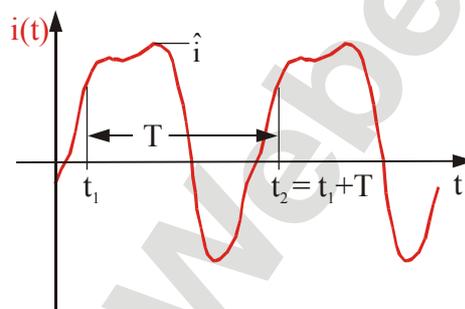


Bild 2.4.1.5-1: Periodischer Strom

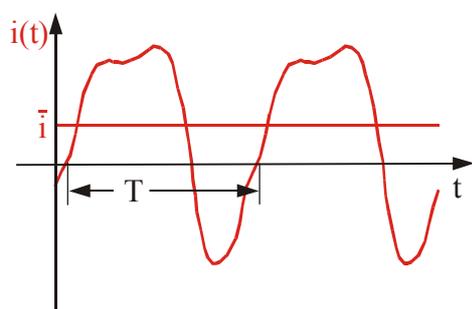


Bild 2.4.1.5-2: Linearer Mittelwert

Für den Mittelwert des Stromes

lässt sich eine Verbindung zu dem Ladungstransport aufbauen. Betrachtet man die Definition des Stroms nach der Gleichung 2.3.1-1

$$i = \frac{dQ}{dt},$$

so ergibt deren Auflösung nach der Ladung Q:

$$Q = \int i(t) dt$$

2.4.1.5-3

Mithin lässt sich über den linearen Mittelwert ein Vergleich zwischen dem Transport der Ladungsmenge Q eines konstanten Gleichstroms I und dem resultierenden Ladungstransport eines zeitlich veränderlichen Stroms i(t) anstellen.

2.4.1.6 Der Gleichrichtwert

Der Gleichrichtwert $|\bar{i}|$ des Stroms und der Gleichrichtwert $|\bar{u}|$ der Spannung ergeben sich aus den folgenden Integralen:

$$|\bar{i}| = \frac{1}{T} \int_0^T |i(t)| dt$$

2.4.1.6-1

$$|\bar{u}| = \frac{1}{T} \int_0^T |u(t)| dt$$

2.4.1.6-2

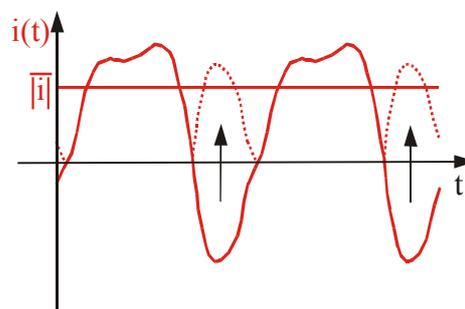


Bild 2.4.1.6-1: Gleichrichtwert

Der Gleichrichtwert resultiert aus dem Mittelwert einer gleichgerichteten periodischen Zeitfunktion. Gleichrichtung bedeutet dabei, dass der Betrag der Zeitfunktion, wie das Bild 2.4.1.6-1 zeigt, gebildet wird.

Die Gleichrichtung eines Stroms hat einen einseitig gerichteten Ladungstransport zur Folge. Dessen Gleichrichtwert muss bei elektrolytischen Vorgängen und bei der Ladung von Kondensatoren hinter einem Vollweggleichrichter berücksichtigt werden. Auf die Vollweggleichrichtung und auf das Laden eines Kondensators wird in einem späteren Kapitel eingegangen.

2.4.1.7 Der Effektivwert

Der Effektivwert I_{eff} des Stroms bzw. U_{eff} der Spannung ergeben sich aus den folgenden Integralen:

$$I_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T i^2(t) dt} \quad 2.4.1.7-1$$

$$U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u^2(t) dt} \quad 2.4.1.7-2$$

Die Effektivwerte werden zur Berechnung der umgesetzten Leistung sowohl bei zeitlich konstanten als auch bei zeitlich beliebigen Funktionen $i(t)$ bzw. $u(t)$ in einem Widerstand R benötigt. Auf die Leistungsumsetzung in einem Widerstand R wird an einer späteren Stelle dieses Kapitels noch eingegangen. Bei Gleichspannung und Gleichstrom sind die Effektivwerte identisch mit den Werten der Gleichspannung und des Gleichstroms:

$$U_{\text{eff}} = U \quad 2.4.1.7-3$$

$$I_{\text{eff}} = I \quad 2.4.1.7-4$$

2.4.2 Stromwirkungen

Wie bereits im Abschnitt 2.3.1 dieses Kapitels beschrieben, bildet sich durch den Stromfluss ein magnetisches Feld, so dass man zunächst dem elektrischen Strom eine magnetische Wirkung zuordnen kann. Diese Wirkung wird unter anderem bei Motoren und im Fall von Wechselströmen auch bei Transformatoren ausgenutzt.

Wie in einem späteren Kapitel noch genauer beschrieben wird, findet durch den Stromfluss in einem Widerstand eine Leistungsumsetzung in Wärme statt. Damit kann man dem elektrischen Strom ferner eine thermische Wirkung zuordnen, die im Extremfall zum Glühen eines Widerstands führen kann und dann auch eine Lichtwirkung zur Folge hat.

Eine chemische Wirkung entsteht bei der Elektrolyse, bei der sich in Flüssigkeiten Moleküle aufspalten können. So kann Wasser in Wasserstoff und Sauerstoff zerlegt werden.

Vom elektrischen Strom geht eine besondere Gefahr durch eine physiologische Wirkung aus. Bereits 50mA können, wenn sie über das Herz fließen, für den Menschen tödlich sein. Deshalb sollte man spannungsführende Teile, die Spannungen über 42V führen, nicht berühren. Dabei ist niederfrequenter Wechselstrom, wie zum Beispiel die 50Hz des normalen Hausnet-

zes, gefährlicher als Gleichstrom. Durch einen Stromschlag können die folgenden Wirkungen beim Menschen auftreten:

- **Herzschädigungen**
Arrhythmien, reversibler Herzstillstand und Herzkammerflimmern. Letzteres ist besonders gefährlich, da es bereits bei kleinen Stromstärken eintreten kann und durch die üblichen Wiederbelebensmaßnahmen nicht beeinflusst werden kann.
- **Atemstörungen**
Bestimmte Stromstärken führen zur Verkrampfung der Atemmuskulatur.
- **Verbrennungen**
Große Stromstärken können lebensgefährliche Verbrennungen verursachen.
- **Nierenschäden**
Als Spätfolge ist auch noch nach vielen Stunden ein Nierenversagen möglich.
- **Nervenschäden**
Bewusstlosigkeit, Dauerschäden.
- **Muskulaturverkrampfung**
Ein Verkrampfen der Muskulatur bewirkt, dass die spannungsführenden Teile unter Umständen nicht mehr losgelassen werden können. Dadurch wirkt der Strom länger ein und die anderen bereits genannten Schädigungen werden dadurch entsprechend stärker.
- **Schock**
Ein Stromschlag kann einen Schock hervorrufen. Ein Schock kann tödlich sein.

Die Höhe der Stromstärke im Körper hängt von der Spannung zwischen den Berührstellen und dem elektrischen Körperwiderstand ab. Der elektrische Körperwiderstand sinkt dabei mit steigender Spannung. In der Regel beträgt der elektrische Körperwiderstand etwa 600Ω (Ohm). Der elektrische Hautwiderstand beträgt dagegen einige Tausend Ohm. Er kann aber bei hohen Spannungen bis auf Null absinken.

Sollten Sie gezwungen sein, bei einem Unfall mit elektrischen Strom Erste Hilfe leisten zu müssen, so sollten Sie die verunglückte Person zunächst von den spannungsführenden Teilen trennen. Dazu schalten Sie als erstes die Spannungsquelle ab. Sollte dies nicht möglich sein, so entfernen Sie die verunglückte Person mit garantiert nichtleitenden Stangen von den spannungsführenden Teilen. Berühren Sie dabei nicht die verunglückte Person mit Ihrem Körper, da Sie sich damit selbst gefährden. Danach leiten Sie die Erste-Hilfe-Maßnahmen ein.

2.4.3 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Wie wird allgemein ein zeitlich sinusförmiger Wechselstrom im Zeitbereich formelmäßig beschrieben?
- 2) Was versteht man bei einer sinusförmigen Wechselspannung unter der Periodendauer T ?

- 3) Zeichnen Sie die Spannung $u(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u)$ für $\varphi_u < 0$ über der Zeitachse t auf.
- 4) Was versteht man unter einem Mischstrom?
- 5) Was liefert der lineare Mittelwert \bar{i} eines Mischstroms?
- 6) Ab welcher Spannung wird das Berühren spannungsführender Teile lebensgefährlich?
- 7) Welche Stromstärke kann bereits für den Menschen tödlich sein?
- 8) Nennen Sie 4 Wirkungen, die durch ein Stromschlag bei einem Menschen auftreten können.
- 9) Was ist die erste Maßnahme, wenn Sie einen verunglückten Menschen vorfinden, der mit spannungsführenden Teilen Berührung hat?
- 10) Was dürfen Sie auf keinen Fall tun, wenn Sie einen verunglückten Menschen vorfinden, der mit spannungsführenden Teilen Berührung hat?

Aufgabe 2.4.3-1:

Berechnen Sie

- a) den linearen Mittelwert
- b) den Gleichrichtwert
- c) den Effektivwert

der periodischen Spannung

$$u = \begin{cases} 5V & \text{für } 0 \leq t < T/2 \\ 2V & \text{für } T/2 \leq t < 3T/4 \\ -6V & \text{für } 3T/4 \leq t \leq T \end{cases}$$

(Lösung: $\bar{u} = 1,50V$; $|\bar{u}| = 4,50V$; $U_{\text{eff}} = 4,74V$)

2.5 Der elektrische Widerstand

2.5.1 Widerstand und Leitwert

Jedem Werkstoff kann man auf Grund seiner Beschaffenheit einen spezifischen elektrischen Widerstand ρ zuordnen. Der spezifische Widerstand hängt von der Anzahl der freien Elektronen im Leitungsband und der Beweglichkeit dieser Elektronen ab. Mit Hilfe dieses spezifischen Widerstands lässt sich mit der Kenntnis der Abmessungen des Werkstoffes der elektrische

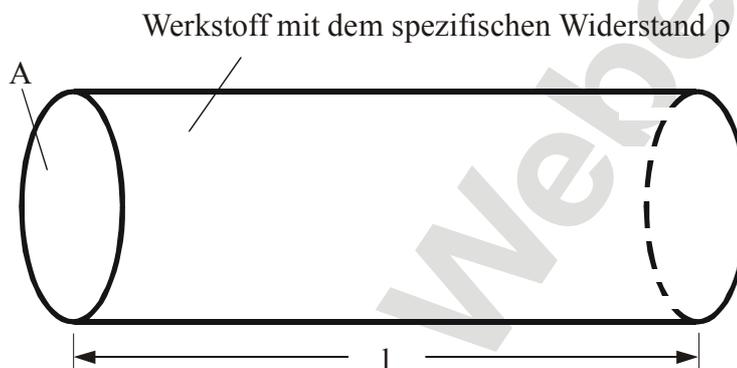


Bild 2.5.1-1: Elektrischer Leiter

Widerstand R [$\Omega = V/A$] berechnen. Bild 2.5.1-1 zeigt einen zylindrischen Werkstoff mit der Querschnittsfläche A und der Länge l . Der elektrische Widerstand R zwischen den Stirnflächen dieses elektrischen Leiters ist proportional zu dem spezifischen Widerstand und der Länge sowie umgekehrt proportional zu dessen Querschnitt, womit die folgende Beziehung für den elektrischen Widerstand gilt:

$$R = \rho \frac{l}{A} \quad 2.5.1-1$$

mit ρ in [$\Omega \cdot \text{mm}^2/\text{m}$]; l in [m]; A in [mm^2]

Über den Kehrwert des elektrischen Widerstands R definiert sich der elektrische Leitwert G [$S = 1/\Omega = A/V = \text{Siemens}$] mit dem spezifischen Leitwert κ :

$$G = \frac{1}{R} = \kappa \frac{A}{l} = \frac{1}{\rho} \frac{A}{l} \quad 2.5.1-2$$

mit κ in [$\text{m}/(\Omega \cdot \text{mm}^2)$]; l in [m]; A in [mm^2]

Mit Hilfe der Schaltzeichen für das Bauelement R ergibt sich für den einfachen elektrischen Stromkreis nach Abschnitt 2.3.3 dieses Kapitels das Schaltbild nach Bild 2.5.1-2, in dem die Quelle einen Innenwiderstand R_{iQ} und der Verbraucher einen Widerstand R_V besitzt. Die Verbindungsleitungen werden dabei als widerstandslos betrachtet, da ihre Leitungswiderstände im Allgemeinen gegenüber den Widerständen der Bauelemente zu vernachlässigen sind.

Die Widerstände lassen sich in Festwiderstände und einstellbare Widerstände einteilen, die mechanisch eingestellt werden können. Zusätzlich unterscheidet man zwischen linearen und nicht-linearen Widerständen. Während die nicht-linearen Widerstände eine große Abhängigkeit von einer physikalischen Größe, wie z.B. der Temperatur oder einem äußeren Magnetfeld, aufweisen, sind die linearen Widerstände meist nur gering temperaturabhängig.

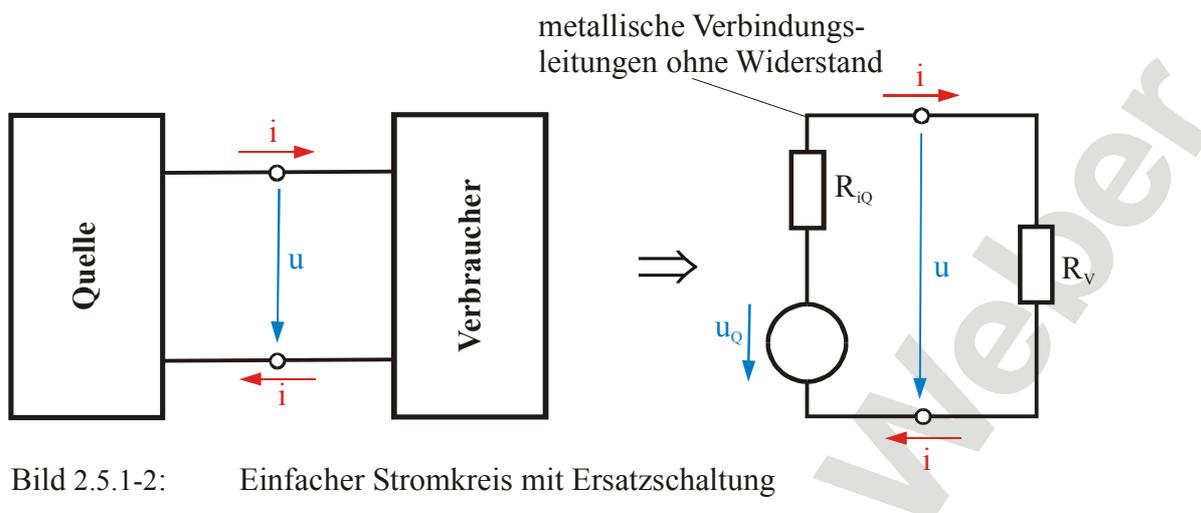


Bild 2.5.1-2: Einfacher Stromkreis mit Ersatzschaltung

Lineare Widerstände sind meist als Draht- oder Schichtwiderstände aufgebaut, wobei es sich bei den Schichtwiderständen um Kohleschichten oder Metallschichten auf einem zylindrischen Trägermaterial handelt. Die Größe der Bauelemente richtet sich dabei nach der maximalen Leistung, die innerhalb dieser Widerstände in Wärme umgesetzt werden kann.

Um den Widerstandswert, die Toleranz und den Temperaturkoeffizient (siehe Abschnitt

Kennfarbe	Widerstandswert in Ω		Toleranz	Temperaturkoeffizient
	zählende Ziffern	Multiplikator		
silber	-	10^{-2}	$\pm 10\%$	-
gold	-	10^{-1}	$\pm 5\%$	-
schwarz	0	10^0	-	$\pm 200 \cdot 10^{-6}/K$
braun	1	10^1	$\pm 1\%$	$\pm 100 \cdot 10^{-6}/K$
rot	2	10^2	$\pm 2\%$	$\pm 50 \cdot 10^{-6}/K$
orange	3	10^3	-	$\pm 15 \cdot 10^{-6}/K$
gelb	4	10^4	-	$\pm 25 \cdot 10^{-6}/K$
grün	5	10^5	$\pm 0,5\%$	-
blau	6	10^6	$\pm 0,25\%$	$\pm 10 \cdot 10^{-6}/K$
violett	7	10^7	$\pm 0,1\%$	$\pm 5 \cdot 10^{-6}/K$
grau	8	-	-	$\pm 1 \cdot 10^{-6}/K$
weiß	9	-	-	-

Tabelle 2.5.1-1: Farbcode der Widerstände

2.5.2) der Widerstände am Bauteil selbst erkennen zu können, sind sie mit einem Farbcode versehen, der in der Tabelle 2.5.1-1 dargestellt ist.

2.5.2 Temperaturabhängigkeit der Widerstände und Leitwerte

Metalle, lineare Drahtwiderstände und lineare Metallschichtwiderstände haben eine geringe Temperaturabhängigkeit. Mit steigender Temperatur T steigt auch in den überwiegenden Fällen deren Widerstandswert. Lineare Kohleschichtwiderstände verringern dagegen bei steigender Temperatur ihren Widerstandswert. Der Temperaturverlauf der Widerstände wird mit Hilfe der Beziehung

$$R(T) = R_{20} \cdot (1 + \alpha_{20} \cdot \Delta T) \quad 2.5.2-1$$

approximiert. Dabei stellt der Wert R_{20} den Widerstandswert bei 20°C dar, α_{20} den Temperaturkoeffizienten und $\Delta T = T - 273\text{K}$ dar. Hierbei handelt es sich um eine lineare Approximation. Genauere Beziehungen für den Temperaturverlauf erhält man, wenn die Beziehung 2.5.2-1 um einen quadratischen Term erweitert wird. Dies soll aber an dieser Stelle nicht näher betrachtet werden.

Tabelle 2.5.2-1 zeigt für verschiedene Werkstoffe den spezifischen Widerstand ρ , den spezifischen Leitwert κ sowie den Temperaturkoeffizienten α_{20} . Widerstände, die mit zunehmender Temperatur ihren Widerstandswert verringern, besitzen einen negativen Temperaturkoeffizienten α_{20} . Daraus leitet sich auch deren Bezeichnung NTC-Widerstand ab (negative temperature coefficient).

Material	ρ $\frac{\Omega \cdot \text{mm}^2}{\text{m}}$	κ $\frac{\text{m}}{\Omega \cdot \text{mm}^2}$	α_{20} 1/K
Aluminium	0,028	36	$4000 \cdot 10^{-6}$
Silber	0,016	63	$4000 \cdot 10^{-6}$
Kupfer	0,018	56	$4000 \cdot 10^{-6}$
Gold	0,023	44	$4000 \cdot 10^{-6}$
Platin	0,11	9	$2000 \cdot 10^{-6}$
Eisen	0,125	8	$5000 \cdot 10^{-6}$
Manganin	0,4	2,5	$10 \cdot 10^{-6}$
Chromnickel	1,0	1,0	$50 \cdot 10^{-6}$

Tabelle 2.5.2-1: Materialeigenschaften

2.5.3 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Von welchen Eigenschaften hängt der spezifische Widerstand ρ eines Werkstoffes ab?

- 2) Welches Vorzeichen hat der Temperaturkoeffizient α_{20} bei einem Kohleschichtwiderstand?
- 3) Welches Vorzeichen hat der Temperaturkoeffizient α_{20} bei einem Metallschichtwiderstand?

Aufgabe 2.5.3-1:

Eine Leitung (Hin- und Rückleiter) zu einem 2km entfernten Verbraucher hat den Kupferquerschnitt $A = 80\text{mm}^2$. Wie groß ist der Leiterwiderstand R bei 20°C ?

(Lösung: $R = 0,89\Omega$)

Aufgabe 2.5.3-2:

Eine Kupferleitung mit dem Querschnitt $A_{\text{CU}} = 10\text{mm}^2$ soll durch eine widerstandsgleiche Aluminiumleitung ersetzt werden. Welchen Querschnitt A_{AL} muss die Aluminiumleitung erhalten?

(Lösung: $A_{\text{AL}} = 15,6\text{mm}^2$)

Aufgabe 2.5.3-3:

An einem zylindrischen Kupferleiter der Länge $l = 10\text{m}$ und dem Durchmesser $D = 3\text{mm}$ liegt eine konstante elektrische Gleichspannung $U = 10\text{mV}$. Welcher Gleichstrom I fließt durch den Leiter, wenn der Leiter eine Temperatur von 50°C besitzt?

(Lösung: $I = 353\text{mA}$)

2.6 Das Ohmsche Gesetz

An einem Widerstand R verhalten sich Spannung u und Strom i proportional zueinander.

Der Spannungsabfall u an einem Widerstand R ist proportional zu dem den Widerstand durchfließenden Strom i.

Strom und Spannung an einem Widerstand haben einen unmittelbaren Bezug zu dem Zählpeilsystem, das die Zählrichtung für Strom und Spannung festlegt. Sofern an einem Widerstand R die Zählrichtung für den Strom i und die Spannung u nicht vorgegeben ist, kann das Zählpeilsystem willkürlich festgelegt werden. Dabei können beide Zählpeile in die gleiche oder in entgegengesetzter Richtung weisen, wie dies in Bild 2.6-1 dargestellt ist.

Entscheidet man sich für die gleiche Richtung der Zählpeile für Strom und Spannung oder wurde das Zählpeilsystem in dieser Art vorgegeben, so definiert sich das Ohmsche Gesetz zu:

$$u = i \cdot R \quad 2.6-1$$

Entscheidet man sich für die entgegengesetzte Richtung der Zählpeile für Strom und Spannung oder wurde das Zählpeilsystem in dieser Art vorgegeben, so definiert sich das Ohmsche Gesetz zu:

$$u = -i \cdot R \quad 2.6-2$$

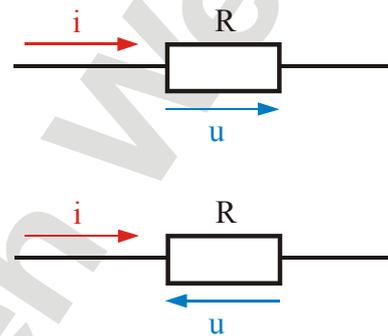


Bild 2.6-1: Zählpeilsysteme

Berechnungen von Strom und Spannung an Widerständen ergeben ohne Festlegung eines Zählpeilsystems keinen Sinn.

Ergibt sich bei der Berechnung der Spannung u für ein festgelegtes Zählpeilsystem ein positives Vorzeichen, so stimmt der Zählpeil für die Spannung mit dem Verlauf des elektrischen Potentials φ in der Form überein, dass der Zählpeil vom höheren zum niedrigeren Potenzial

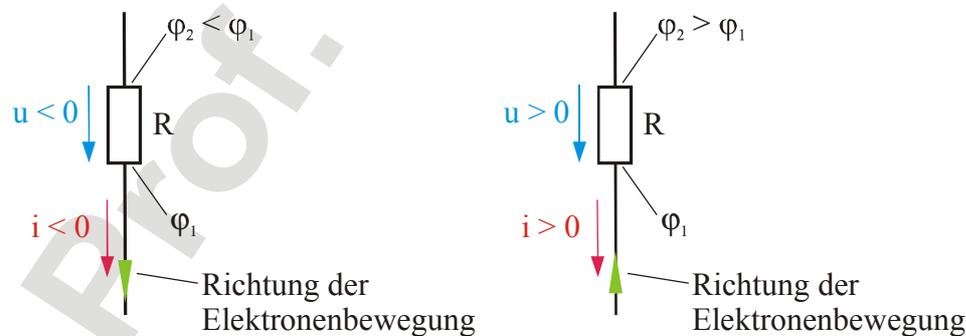


Bild 2.6-2: Interpretation der Zählpeile

weist. Erhält man bei der Berechnung des Stroms i für ein festgelegtes Zählpeilsystem ein positives Vorzeichen, so weist der Zählpeil für den Strom gegen die Richtung der

Elektronenbewegung. Bild 2.6-2 fasst die Interpretation der Zählpfeile graphisch zusammen. Ein einmal gewähltes Zählpfeilsystem sollte man aufgrund von negativen Vorzeichen in den Ergebnissen für den Strom oder für die Spannung nicht mehr antasten. Es bedarf nur der richtigen Interpretation.

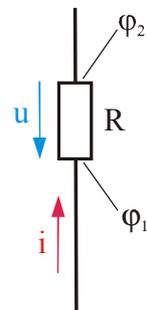
2.6.1 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Wie verhalten sich Strom und Spannung an einem Widerstand zueinander?
- 2) In welche Richtung hinsichtlich des elektrischen Potentials φ weist der Zählpfeil der Spannung u , wenn diese Spannung negativ ist?
- 3) In welche Richtung hinsichtlich der Elektronenbewegung weist der Zählpfeil des Stroms i , wenn dieser Strom negativ ist?

Aufgabe 2.6.1-1:

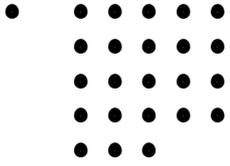
Gemäß des nebenstehenden Bildes wird ein Widerstand $R = 100\Omega$ von einem Strom $i = 20\text{mA}$ durchflossen. Berechnen Sie die Spannung u , die nach dem eingezeichneten Zählpfeilsystem am Widerstand R abfällt. Welchen Wert hat das elektrische Potential φ_1 , wenn für $\varphi_2 = -17\text{V}$ gilt?

(Lösung: $u = -2\text{V}$; $\varphi_1 = -15\text{V}$)



2.7 Literaturhinweise

- 1) Stöcker Taschenbuch der Physik
- 2) W. von Münch Elektrische und magnetische Eigenschaften der Materie
- 3) W. von Münch Werkstoffe und Bauelemente
- 4) Fricke/Vaske Elektrische Netzwerke
- 5) Moeller/Frohne Grundlagen der Elektrotechnik
- 6) Weißgerber Elektrotechnik für Ingenieure I
- 7) Pregla Grundlagen der Elektrotechnik I



Fachhochschule Köln
University of Applied Sciences Cologne
Campus Gummersbach

Prof. Dr.-Ing. Jürgen Weber

Dipl.-Ing. Franz Josef Klein

Andreas Wagen

3 Gleichstromschaltungen mit linearen Bauelementen

Inhaltsverzeichnis

0	Vorbemerkung	
1	Einleitung	
2	Der elektrische Strom	
3	GLEICHSTROMSCHALTUNGEN MIT LINEAREN BAUELEMENTEN	4
3.1	Ideale Bauelemente der Gleichstromschaltungen	4
3.1.1	Fragen- und Aufgabensammlung	4
3.2	Strom, Spannung, Potenzial und Leistung im einfachen Stromkreis	6
3.2.1	Fragen- und Aufgabensammlung	9
3.3	Die Kirchhoffschen Sätze	10
3.3.1	Verzweigte elektrische Netzwerke	10
3.3.2	Der erste Kirchhoffsche Satz (Knotenpunktregel)	Fehler! Textmarke nicht definiert.
3.3.3	Der zweite Kirchhoffsche Satz (Maschenregel)	12
3.3.4	Fragen- und Aufgabensammlung	13
3.4	Zusammenschaltungen mehrerer Widerstände	16
3.4.1	Die Serienschaltung	16
3.4.2	Die Parallelschaltung	16
3.4.3	Gesamtwiderstand umfangreicher Widerstandsnetzwerke	18
3.4.4	Die Stern-Dreieck-Transformation	18
3.4.5	Kennlinien der Widerstände	20
3.4.6	Widerstand als linearer passiver Zweipol	22
3.4.7	Fragen- und Aufgabensammlung	23
3.5	Reale Spannungs- und Stromquellen	24
3.5.1	Quellen und Innenwiderstände	24
3.5.2	Kennlinien der Spannungs- und Stromquellen	27
3.5.3	Vergleich der beiden Quellen	29
3.5.4	Spannungs- und Stromquellen als lineare aktive Zweipole	29
3.5.5	Der Arbeitspunkt der belasteten Quelle	30
3.5.6	Fragen- und Aufgabensammlung	31
3.6	Ersatzspannungsquellen und Ersatzstromquellen	34
3.6.1	Fragen- und Aufgabensammlung	36
3.7	Leistungsanpassung	39
3.7.1	Anpassungsbedingung	39
3.7.2	Der Wirkungsgrad	40
3.7.3	Der Ausnutzungsgrad	41
3.7.4	Anpassungskriterien	41
3.7.5	Fragen- und Aufgabensammlung	42

3.8	Der Spannungsteiler	43
3.8.1	Der unbelastete Spannungsteiler	43
3.8.2	Der belastete Spannungsteiler	44
3.8.3	Fragen- und Aufgabensammlung	46
3.9	Analyse von Netzwerken mit linearen Bauelementen	48
3.9.1	Der Graph eines Netzwerks	48
3.9.2	Die Baum- und Cobaumstruktur	50
3.9.3	Die Netzwerkmatrix	52
3.9.4	Das Superpositionsverfahren	53
3.9.5	Netzwerke mit gesteuerten Quellen	54
3.9.6	Fragen- und Aufgabensammlung	55
3.10	Literaturhinweise	58
4	<i>Der Wechselstromkreis</i>	
5	<i>Messtechnik</i>	
6	<i>Dreiphasenwechselstrom</i>	
7	<i>Der Transformator</i>	
<i>Anhang</i>		
<i>Anlage I</i>	<i>Praktika</i>	

3 GLEICHSTROMSCHALTUNGEN MIT LINEAREN BAUELEMENTEN

3.1 Ideale Bauelemente der Gleichstromschaltungen

In diesem Kapitel soll das Verhalten von linearen Bauelementen bei zeitlich konstanten Strömen und Spannungen betrachtet werden. Nach Formel 2.4.1.2-1 und 2.4.1.2-2 werden diese Gleichströme und Gleichspannungen mit großem I bzw. großem U gekennzeichnet:

$$I \Rightarrow \text{Gleichstrom} \quad 3.1-1$$

$$U \Rightarrow \text{Gleichspannung} \quad 3.1-2$$

Die Betrachtung impliziert, dass das Ereignis „eine elektrische Spannung oder ein elektrischer Strom wird in einem Netzwerk eingeschaltet“ so weit zurück liegt, dass eventuelle Einschwingvorgänge als abgeschlossen betrachtet werden dürfen. Unter einem Einschwingverhalten versteht man zum Beispiel, dass ein Strom durch einen gewickelten Drahtwiderstand nicht von 0 auf einen Endwert springen kann, sondern sich dieser Endwert erst allmählich einstellt.

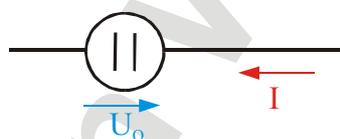
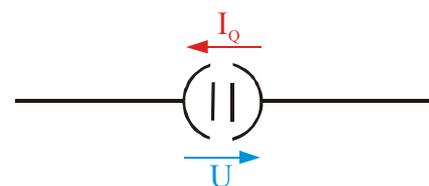


Bild 3.1-1: Ideale Spannungsquelle



oder

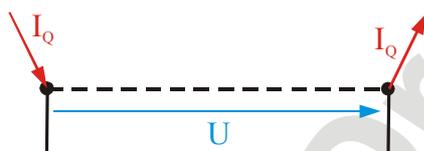


Bild 3.1-2: Ideale Stromquelle

Lineare Bauelemente definieren sich in der Strom-Spannungs-Charakteristik über eine Gerade. Als Quellen kommen hier zum einen die Gleichspannungsquellen U_Q in Betracht, die im Idealfall die konstante Gleichspannung U_Q unabhängig von dem ihnen entnommenem Gleichstrom I zur Verfügung stellen (Bild 3.1-1). Zum anderen kommen Gleichstromquellen I_Q in Betracht, die im Idealfall den konstanten Gleichstrom I_Q zur Verfügung stellen und jede beliebige Gleichspannung U dazu annehmen können (Bild 3.1-2). Gleichspannungs- und Gleichstromquellen bezeichnet man als aktive Bauelemente, da sie in der Lage sind, eine Wirkleistung zur Verfügung zu stellen.

Als passives lineares Bauelement, das eine Wirkleistung in Wärme umsetzt, wird in diesem Kapitel allein der ohmsche Widerstand R betrachtet (Bild 3.1-3).

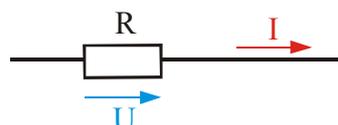


Bild 3.1-3: Ohmscher Widerstand

3.1.1 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Welche Buchstaben werden für die Gleichspannung und den Gleichstrom verwendet?
- 2) Unter welchen Voraussetzungen kann davon ausgegangen werden, dass in einem elektrischen Netzwerk ein Gleichstrom fließt?

- 3) Wie verhält sich eine ideale Spannungsquelle?
- 4) Wie verhält sich eine ideale Stromquelle?
- 5) Was definiert das Bauelement „Gleichspannungsquelle“?
- 6) Was definiert ein lineares Bauelement in der Strom-Spannungs-Charakteristik?

3.2 Strom, Spannung, Potenzial und Leistung im einfachen Stromkreis

Legt man an eine Gleichstrom- oder Gleichspannungsquelle über Verbindungsleitungen, wie im Bild 3.2-1 gezeigt, einen Abschlusswiderstand R_A , so bildet sich ein geschlossener Stromkreis. Da man von der Voraussetzung ausgehen kann, dass die Längen der Verbindungsleitungen VL_1 und VL_2 wesentlich größer als deren Querschnittsabmessungen sind, wird in der Verbindungsleitung ein Gleichstrom I fließen, dessen Stromdichte S homogen über die Querschnittsfläche der Verbindungsleitung verteilt ist. Ferner wird der Strom, der leitungsgeführt ist und keine Verzweigung im Stromkreis nach Bild 3.2-1 erfährt, im gesamten Stromkreis die gleiche Stromstärke I aufweisen.

Durch den Gleichstrom I wird nach dem Ohmschen Gesetz am Widerstand R_A eine Gleichspannung U_{RA} abfallen. Geht man davon aus, dass die Verbindungsleitungen nach Bild 3.2-1 jeweils den Leitungswiderstand

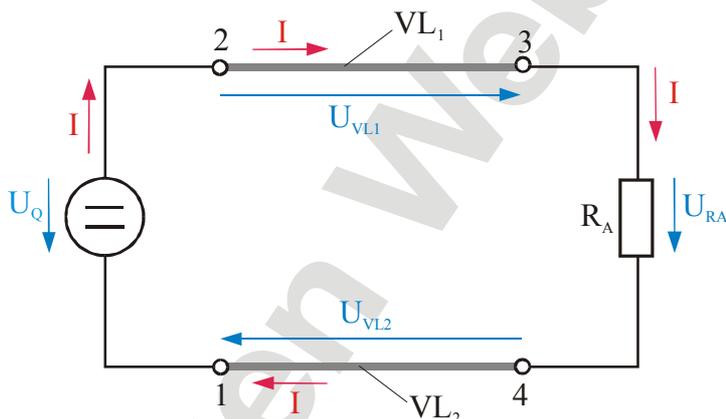


Bild 3.2-1: Einfacher Stromkreis

$$R_{VL} = \frac{l}{\kappa_R \cdot A} = \frac{\rho_R \cdot l}{A} \quad 3.2-1$$

besitzen, so ergeben sich ebenfalls entlang der Leitungen die Spannungsabfälle U_{VL1} und U_{VL2} . Ob die Widerstände der Leitungen und damit die Spannungsabfälle an den Leitungen berücksichtigt werden müssen, hängt von dem Verhältnis zwischen dem Widerstandswert des Bauelements R_A und den Leitungswiderständen R_{VL} ab. Im Fall

$$R_A \gg R_{VL} \quad 3.2-2$$

können die Leitungswiderstände vernachlässigt werden. In dem Fall werden die Verbindungsleitungen nach Bild 3.2-2 als dünne, widerstandslose Verbindungslinien gezeichnet. Ist die Voraussetzung nach Formel 3.2-2 nicht erfüllt, so stellt man die Leitungswiderstände nach Bild 3.2-3 in Form einer Ersatzschaltung als konzentrierte Bauelemente R_{VL} dar. Dabei müssen dann selbstverständlich die Spannungsabfälle an den Ersatz-

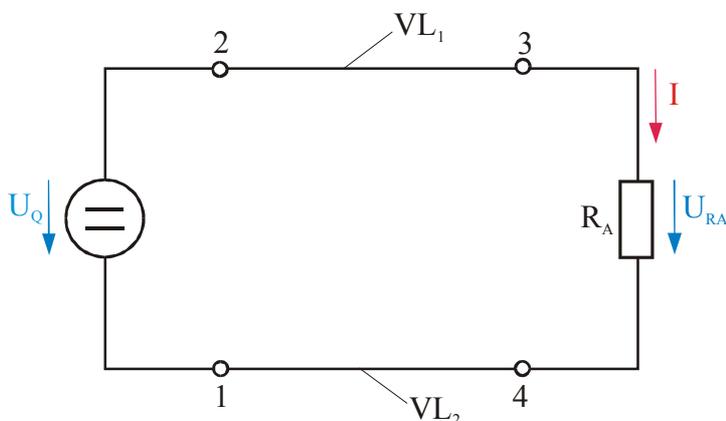


Bild 3.2-2: Stromkreis mit perfekt leitenden Verbindungsleitungen

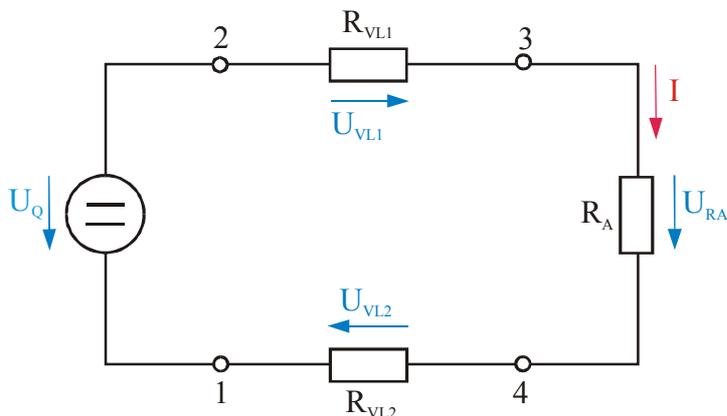


Bild 3.2-3: Stromkreis mit Berücksichtigung der Leitungswiderstände

bauerelementen berücksichtigt werden.

Mit Hilfe der Ersatzschaltung nach Bild 3.2-3 soll nun der Potenzialverlauf innerhalb des Stromkreises ermittelt werden. Da nur das Auftreten einer elektrischen Spannung U auf eine elektrische Potentialdifferenz $\Delta\phi$ schließen lässt, werden sich nun die einzelnen Abschnitte der als perfekt angenommenen Verbindungen zwischen den einzelnen Bauelementen auf dem selben elektrischen Potenzial

ϕ befinden. Dabei ist es keinesfalls notwendig, dass eine der Verbindungsabschnitte das Potenzial $\phi = 0V$ besitzt. Der gesamten Schaltung kann, ohne dass sich weder der Strom oder die Spannungen noch die Leistungen ändern, ein beliebiges elektrisches Potenzial überlagert werden. Bild 3.2-4 zeigt den Potenzialverlauf innerhalb des abgewickelten Stromkreises nach Bild 3.2-3. Darin baut die Spannungsquelle U_Q mit

$$U_Q = \phi_2 - \phi_1 \tag{3.2-3}$$

die Potentialdifferenz auf, während sich über den einzelnen Widerständen die Potentialdifferenz wieder nacheinander abbaut:

$$U_{VL1} = I \cdot R_{VL1} = \phi_2 - \phi_3 \tag{3.2-4}$$

$$U_{RA} = I \cdot R_A = \phi_3 - \phi_4 \tag{3.2-5}$$

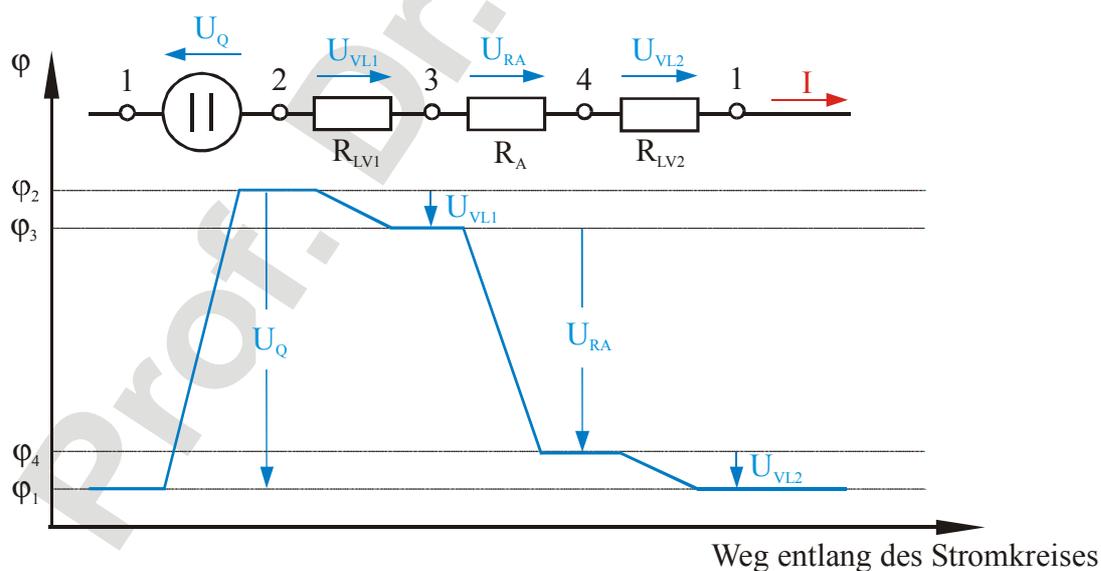


Bild 3.2-4: Potenzialverlauf im einfachen Stromkreis

$$U_{VL2} = I \cdot R_{VL2} = \varphi_4 - \varphi_1 \quad 3.2-6$$

Mit der Bereitstellung einer Spannung U_Q und dem im Stromkreis fließenden Strom I , liefert die Spannungsquelle eine Wirkleistung P , die in Watt [$W = VA$] gemessen wird. Bei der Berechnung der Wirkleistung ist wieder genau auf die vorgegebenen oder festgelegten Zählpfeilrichtungen für die Spannung und den Strom zu achten, da das Vorzeichen der berechneten Leistung eine wesentliche Aussage enthält.

Haben die Zählpfeile für die Spannung und den Strom an einem Bauelement die gleiche Richtung, so ergibt sich die Wirkleistung P zu:

$$P = U \cdot I \quad 3.2-7$$

Haben die Zählpfeile für die Spannung und den Strom an einem Bauelement die entgegengesetzte Richtung, so ergibt sich die Wirkleistung P zu:

$$P = -U \cdot I \quad 3.2-8$$

Dies gilt auch für Spannungs- und Stromquellen (siehe Bild 3.2-5). Liefert das Ergebnis für die Wirkleistung P einen positiven Wert, so handelt es sich um einen „Leistungsverbrauch“. Dieser „Leistungsverbrauch“ bedeutet bei einem ohmschen Widerstand die Umwandlung von

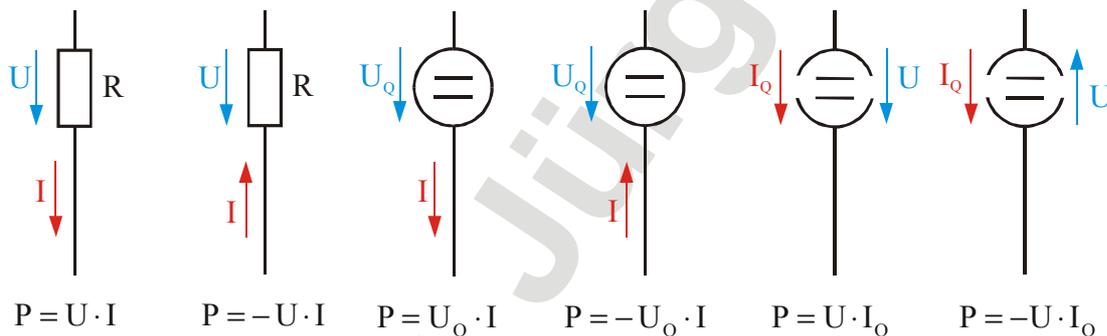


Bild 3.2-5: Berechnung der Wirkleistung bei unterschiedlichen Zählpfeilsystemen

elektrischer Energie in Wärme, während bei einer Strom- oder Spannungsquelle damit der Ladevorgang charakterisiert wird.

Liefert das Ergebnis für die Wirkleistung P einen negativen Wert, so handelt es sich um eine Bereitstellung von Wirkleistung. Die Bereitstellung von Wirkleistung ist dabei auf die Strom- und Spannungsquellen begrenzt, da ein ohmscher Widerstand R nur elektrische Energie in Wärme umwandeln kann.

$$P > 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Wärmeumwandlung; Ladezustand} \quad 3.2-9$$

$$P < 0 \quad \Rightarrow \quad \text{Bereitstellung von Wirkleistung} \quad 3.2-10$$

Ohmsche Widerstände gibt es in verschiedenen Leistungsgruppen. Bei Anwendungen muss die Leistungsangabe beachtet werden.

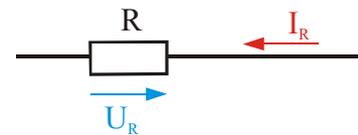
3.2.1 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Unter welcher Voraussetzung können die Leitungswiderstände in einem Stromkreis vernachlässigt werden?
- 2) In welcher Form werden Leitungswiderstände im Allgemeinen in Stromkreisen berücksichtigt?
- 3) Wie lautet die Gleichung für die Wirkleistung P , die in einem Widerstand R in Wärme umgesetzt wird, wenn die Zählpfeile am Widerstand für den Strom und für die Spannung entgegengesetzt gerichtet sind?
- 4) Was bedeutet „Leistungsverbrauch“ in einem ohmschen Widerstand?
- 5) Kann das numerische Ergebnis für die Wirkleistung P , die in einem ohmschen Widerstand umgesetzt wird, negativ sein?
- 6) Was bedeutet bei einer Gleichstromquelle die Zuordnung einer positiven Wirkleistung?

Aufgabe 3.2.1-1:

Berechnen Sie für das nebenstehende Zählpfeilsystem an einem Widerstand $R = 100\Omega$, an dem die Spannung

- a) $U_R = 10V$
- b) $U_R = -10V$



liegt, den Strom I_R und die Wirkleistung P_R .

(Lösung: $P_R = 1W$ für a) und b))

Aufgabe 3.2.1-2:

Berechnen Sie die Potenziale φ_1 , φ_2 und φ_4 nach Bild 3.2-4 für:

$$U_Q = 20V; R_{LV1} = R_{LV2} = 2\Omega; R_A = 16\Omega; I = 1A; \varphi_3 = 35V$$

(Lösung: $\varphi_1 = 17V; \varphi_2 = 37V; \varphi_4 = 19V$)

3.3 Die Kirchhoffschen Sätze

3.3.1 Verzweigte elektrische Netzwerke

Einfache Stromkreise nach Kapitel 3.2 treten nur äußerst selten auf. Im Allgemeinen wird man elektrische Netzwerke vorfinden, welche mehrere Stromverzweigungen enthalten. Bild 3.3.1-1 zeigt ein solches Netzwerk. Dabei bildet der Punkt nach Bild 3.3.1-2 eine feste mechanische und elektrische Verbindung, an der sich der elektrische Strom verzweigen kann. Die Verbindungspunkte werden als Knotenpunkte bezeichnet. Überkreuz verlaufende Linien ohne Punkt nach Bild 3.3.1-3, weisen dagegen keine elektrische Verbindung auf.

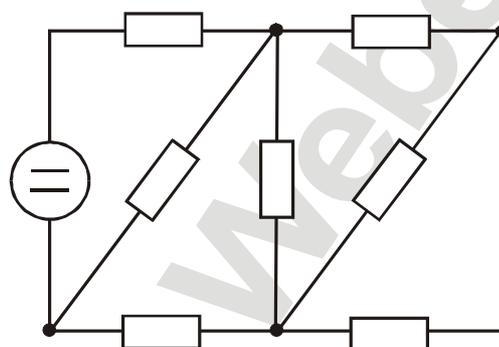


Bild 3.3.1-1: Verzweigtes elektrisches Netzwerk

Das elektrische Netzwerk nach Bild 3.3.1-1 enthält:

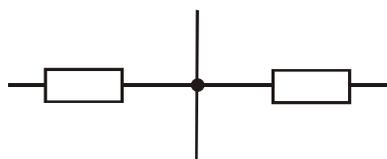


Bild 3.3.1-2: Knotenpunkt

- Knotenpunkte
- Zweige
- Maschen

In einem Knotenpunkt verzweigt sich wie bereits beschrieben der elektrische Strom (siehe Bild 3.3.1-4).

Zweige sind die Verbindungen zwischen zwei Knotenpunkten. In den Zweigen können passive Bauelemente und Spannungsquellen liegen. Dagegen sind Verbindungen, die eine Stromquelle enthalten, keine Zweige. Dies ist besonders bei der Netzwerkanalyse zu beachten, die am Ende dieses Kapitels betrachtet wird. Bei Verbindungen, die keine Bauelemente enthalten, können die beiden an den Enden der Verbindung liegenden Knotenpunkte als ein Knotenpunkt betrachtet und

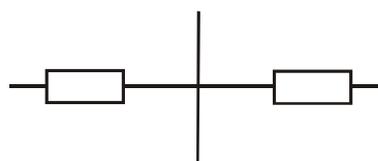


Bild 3.3.1-3: Keine elektrische Verbindung

zusammengefasst werden (siehe Bild 3.3.1-5).

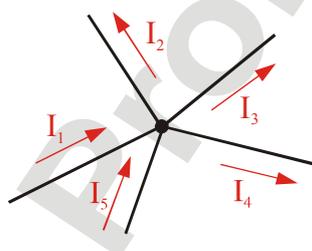


Bild 3.3.1-4: Stromverzweigung

Maschen sind geschlossene Strukturen im elektrischen Netzwerk, die über einzelne Zweige laufen aber auch Pfade über offene Klemmenpaare enthalten dürfen (siehe Bild 3.3.1-6). Ebenfalls zu beachten ist, dass Maschen zwar prinzipiell über Stromquellen laufen können, diese Maschen aber bei der Netzwerkanalyse nicht berücksichtigt werden dürfen.

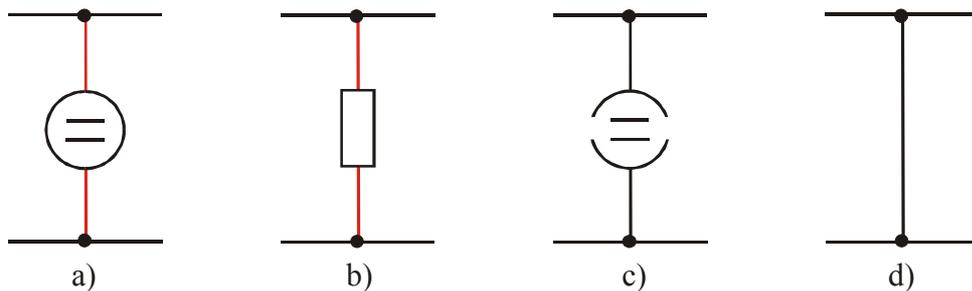


Bild 3.3.1-5: Verbindungen zwischen zwei Knotenpunkten
a) und b) Zweig
c) kein Zweig
d) Knotenpunkte können zusammen gefaßt werden

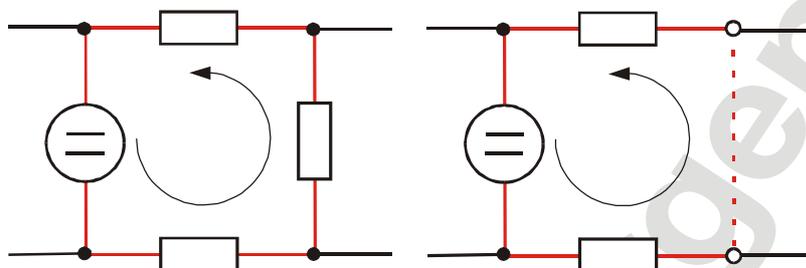


Bild 3.3.1-6: Maschen im elektrischen Netzwerk

3.3.2 Der erste Kirchhoffsche Satz (Knotenpunktregel)

Aus der Bedingung, dass alle Ladungsträger, die auf einen Knotenpunkt zufließen, von diesem Knotenpunkt auch wieder abfließen müssen, definiert sich der erste Satz von Kirchhoff, die so genannte Knotenpunktregel.

Die Summe aller auf einen Knotenpunkt zufließenden Ströme ist gleich der Summe aller von diesem Knotenpunkt abfließenden Ströme.

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad 3.3.2-1$$

Bei der Formulierung der Knotenpunktregel ist auf die Zählfeile der Ströme, die in Beziehung mit dem Knotenpunkt stehen, zu achten. Dabei kann man willkürlich für jeden Knotenpunkt eines elektrischen Netzwerks entweder die über das Zählfeilsystem auf einen Knotenpunkt zufließenden Ströme positiv und die abfließenden Ströme negativ oder die zufließenden Ströme negativ und die ab-

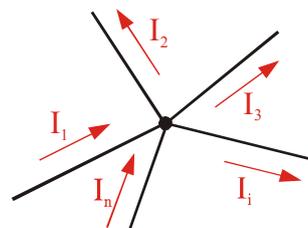


Bild 3.3.2-1: Knotenpunkt

fließenden Ströme positiv definieren. Für den in Bild 3.3.2-1 dargestellten Knotenpunkt ergibt sich somit entweder die Gleichung

$$I_1 - I_2 - I_3 \dots - I_i \dots + I_n = 0 \quad 3.3.2-2$$

oder

$$-I_1 + I_2 + I_3 \dots + I_i \dots - I_n = 0 \quad 3.3.2-3$$

Als Knotenpunkt können im übertragenen Sinn auch Teile eines elektrischen Netzwerks interpretiert werden. Um den Teil dieses Netzwerks muss man sich dann eine geschlossene Fläche vorstellen, so dass damit ein Volumen entsteht, in welches Ströme hinein- und hinausfließen. Bild 3.3.2-2 zeigt als Beispiel solch einen Teil eines Netzwerks.

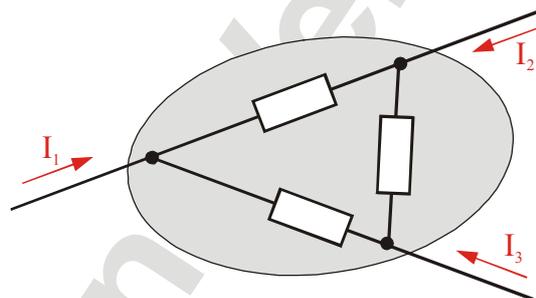


Bild 3.3.2-2: Volumenknoten

3.3.3 Der zweite Kirchhoffsche Satz (Maschenregel)

Der zweite Kirchhoffsche Satz formuliert die Bedingung für die Summe der elektrischen Spannungen innerhalb einer geschlossenen Masche.

Die Summe der Spannungen bei einem vollständigen Umlauf in einer Masche ist gleich Null.

Bild 3.3.3-1 zeigt ein verzweigtes Netzwerk, für das sich sechs unterschiedliche geschlossene Maschen definieren lassen. Dabei ist der Drehsinn eines Maschenumlaufs mathematisch positiv (gegen die Uhrzeigerrichtung) oder mathematisch negativ (mit der Uhrzeigerrichtung) sowie dessen Start-End-Punkt frei wählbar. Die Gleichungen 3.3.3-1 bis 3.3.3-6 formulieren

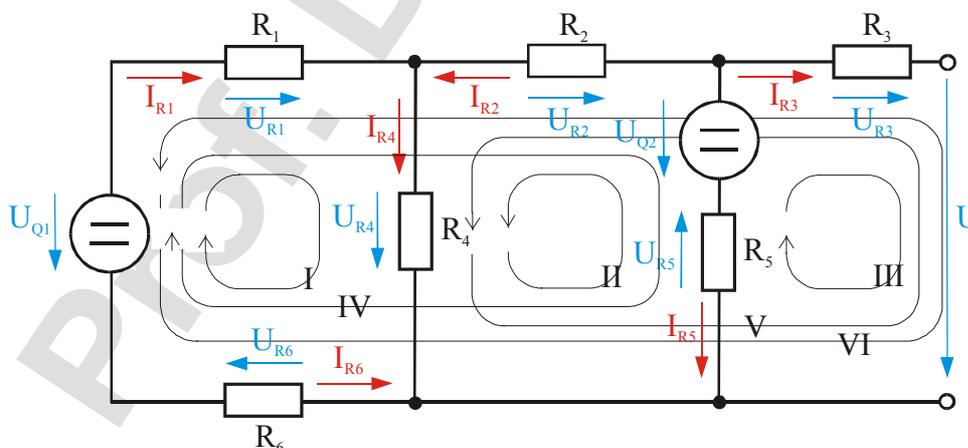


Bild 3.3.3-1: Beispielnetzwerk

die im Bild 3.3.3-1 eingezeichneten Maschen. Läuft man beim Maschenumlauf mit der Richtung eines Zählpfeils für die Spannung, so wird diese Spannung mit einem positiven Vorzeichen versehen. Läuft man beim Maschenumlauf gegen die Richtung eines Zählpfeils für die Spannung, so wird diese Spannung mit einem negativen Vorzeichen versehen.

$$\text{Masche I: } -U_{Q1} + U_{R1} + U_{R4} + U_{R6} = 0 \quad 3.3.3-1$$

$$\text{Masche II: } -U_{R2} + U_{R4} + U_{R5} - U_{Q2} = 0 \quad 3.3.3-2$$

$$\text{Masche III: } U + U_{R5} - U_{Q2} + U_{R3} = 0 \quad 3.3.3-3$$

$$\text{Masche IV: } -U_{Q1} + U_{R1} + U_{R2} + U_{Q2} - U_{R5} + U_{R6} = 0 \quad 3.3.3-4$$

$$\text{Masche V: } -U - U_{R3} - U_{R2} + U_{R4} = 0 \quad 3.3.3-5$$

$$\text{Masche VI: } U_{Q1} - U_{R6} - U - U_{R3} - U_{R2} - U_{R1} = 0 \quad 3.3.3-6$$

Mit Hilfe des Ohmschen Gesetzes lassen sich die Spannungen an den Widerständen durch die Ströme ausdrücken. Dabei müssen die Zählpfeilsysteme der einzelnen Widerstände beachtet werden. Die Formeln 3.3.3-1 bis 3.3.3-6 gehen dann in die folgenden Ausdrücke über:

$$\text{Masche I: } -U_{Q1} + I_{R1} \cdot R_1 + I_{R4} \cdot R_4 - I_{R6} \cdot R_6 = 0 \quad 3.3.3-7$$

$$\text{Masche II: } I_{R2} \cdot R_2 + I_{R4} \cdot R_4 - I_{R5} \cdot R_5 - U_{Q2} = 0 \quad 3.3.3-8$$

$$\text{Masche III: } U - I_{R5} \cdot R_5 - U_{Q2} + I_{R3} \cdot R_3 = 0 \quad 3.3.3-9$$

$$\text{Masche IV: } -U_{Q1} + I_{R1} \cdot R_1 - I_{R2} \cdot R_2 + U_{Q2} + I_{R5} \cdot R_5 - I_{R6} \cdot R_6 = 0 \quad 3.3.3-10$$

$$\text{Masche V: } -U - I_{R3} \cdot R_3 + I_{R2} \cdot R_2 + I_{R4} \cdot R_4 = 0 \quad 3.3.3-11$$

$$\text{Masche VI: } U_{Q1} + I_{R6} \cdot R_6 - U - I_{R3} \cdot R_3 + I_{R2} \cdot R_2 - I_{R1} \cdot R_1 = 0 \quad 3.3.3-12$$

Maschengleichungen werden unter anderem bei der Netzwerkanalyse benötigt, die am Ende dieses Kapitels besprochen wird.

3.3.4 Fragen- und Aufgabensammlung

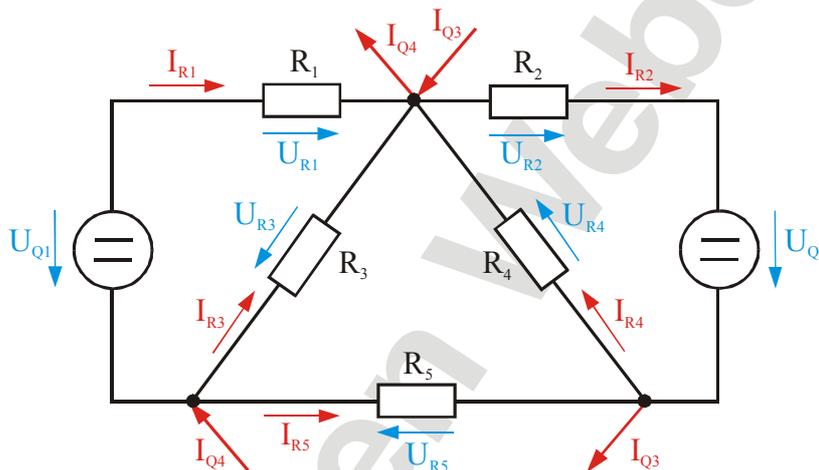
- 1) Was sind Knotenpunkte in einem elektrischen Netzwerk?
- 2) Was sind Zweige in einem elektrischen Netzwerk?
- 3) Was versteht man unter Maschen in einem elektrischen Netzwerk?
- 4) Können Maschen auch über offene Klemmenpaare geführt werden?
- 5) Wie lautet die Knotenpunktregel allgemein?
- 6) Wie lautet die Maschenregel allgemein?
- 7) Die Verbindung zweier Knotenpunkte läuft über eine Stromquelle. Handelt es sich bei der Verbindung um einen Zweig?

- 8) Eine Verbindung zweier Knotenpunkte enthält keine Bauelemente. Wie kann man die beiden Knotenpunkte deuten?

Aufgabe 3.3.4-1:

Gegeben ist das nebenstehende Netzwerk mit den folgenden Werten:

- $U_{Q1} = 20V$
- $U_{Q2} = 40V$
- $I_{Q3} = 400mA$
- $I_{Q4} = 800mA$
- $R_1 = 100\Omega$
- $R_2 = 150\Omega$
- $R_3 = 250\Omega$
- $R_4 = 300\Omega$
- $R_5 = 50\Omega$



Bekannt ist ferner der Strom $I_{R1} = 275,3mA$.

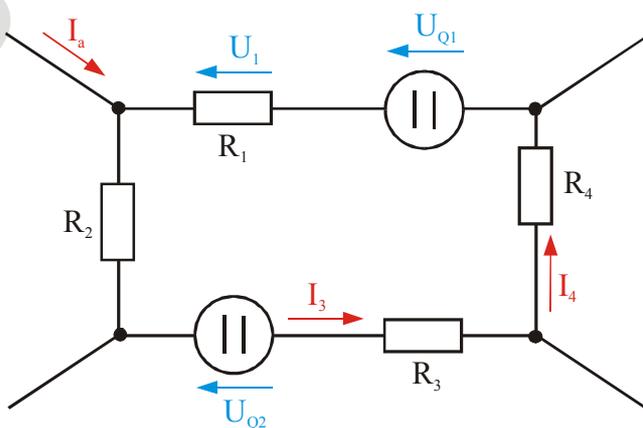
Berechnen Sie sämtliche Ströme und Spannungen des Netzwerks. Überprüfen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe der Leistungsbilanz des Netzwerks.

(Lösung: $U_{R1} = 27,53V$; $I_{R1} = 275mA$; $U_{R2} = -22,80V$; $I_{R2} = -152mA$; $U_{R3} = -7,53V$; $I_{R3} = 30mA$; $U_{R4} = -17,20V$; $I_{R4} = -57mA$; $U_{R5} = -24,73V$; $I_{R5} = 495mA$)

Aufgabe 3.3.4-2:

Gegeben ist das nebenstehende Netzwerk mit den folgenden Werten:

- $R_1 = 11\Omega$
- $R_2 = 10\Omega$
- $R_3 = 20\Omega$
- $R_4 = 15\Omega$
- $U_1 = 3V$
- $U_{Q1} = -11V$
- $U_{Q2} = 18V$
- $I_a = -1,5A$
- $I_4 = 0,5A$



Berechnen Sie den Strom I_3 .

(Lösung: $I_3 = 1,54A$)

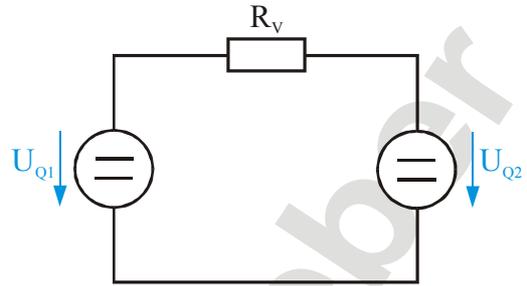
Aufgabe 3.3.4-3:

Gegeben ist das nebenstehende Netzwerk mit den folgenden Werten:

$$R_V = 5\Omega$$

$$U_{Q1} = 10V$$

$$U_{Q2} = 20V$$



Berechnen Sie die im Verbraucherwiderstand R_V umgesetzte Leistung. Welche Leistung wird von den einzelnen Spannungsquellen aufgebracht bzw. aufgenommen?

(Lösung: $P_{R_V} = 20W$; $P_{Q1} = 20W$; $P_{Q2} = -40W$)

Aufgabe 3.3.4-4:

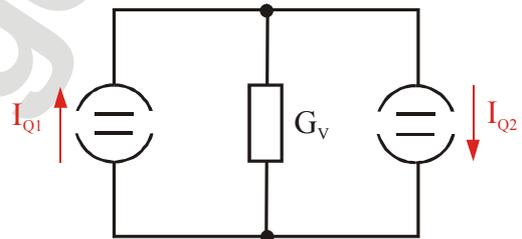
Gegeben ist das nebenstehende Netzwerk mit den folgenden Werten:

$$G_V = 0,1S$$

$$I_{Q1} = 2A$$

$$I_{Q2} = 0,5A$$

Berechnen Sie die im Verbraucherleitwert G_V umgesetzte Leistung. Welche Leistung wird von den einzelnen Stromquellen aufgebracht bzw. aufgenommen?



(Lösung: $P_{G_V} = 22,5W$; $P_{Q1} = -30W$;
 $P_{Q2} = 7,5W$)

3.4 Zusammenschaltungen mehrerer Widerstände

In elektrischen Netzwerken befindet sich mitunter eine Vielzahl von Widerständen. Um diese Netzwerke analysieren zu können, ist es mitunter notwendig, mehrere Widerstände zu einem Gesamtwiderstand R_{ges} zusammenzufassen. Dabei treten Serienschaltungen und Parallelschaltungen von Widerständen auf.

3.4.1 Die Serienschaltung

Betrachtet wird die Serienschaltung von n Widerständen nach Bild 3.4.1-1. Nach der Kirchhoffschen Maschenregel ergibt sich für die Schaltung:

$$-U_{ges} + U_1 + \dots + U_i + \dots + U_n = -U_{ges} + \sum_{i=1}^n U_i = 0 \quad 3.4.1-1$$

Nach der Auflösung der Gleichung 3.4.1-1 nach U_{ges} folgt:

$$U_{ges} = \sum_{i=1}^n U_i \quad 3.4.1-2$$

Ersetzt man in der Gleichung 3.4.1-2 die Einzelspannungen U_i nach dem Ohmschen Gesetz durch $I_{ges} \cdot R_i$, so ergibt sich

$$U_{ges} = \sum_{i=1}^n I_{ges} \cdot R_i = I_{ges} \sum_{i=1}^n R_i = I_{ges} \cdot R_{ges}, \quad 3.4.1-3$$

womit sich durch Koeffizientenvergleich der Gesamtwiderstand einer Serienschaltung von Widerständen zu

$$R_{ges} = \sum_{i=1}^n R_i \quad 3.4.1-4$$

berechnet.

Bei der Serienschaltung (Reihenschaltung) von Widerständen addieren sich die einzelnen Widerstände zum Gesamtwiderstand.

3.4.2 Die Parallelschaltung

Betrachtet wird die Parallelschaltung von n Widerständen nach Bild 3.4.2-1. Nach der Kirchhoffschen Knotenpunktregel ergibt sich für die Schaltung:

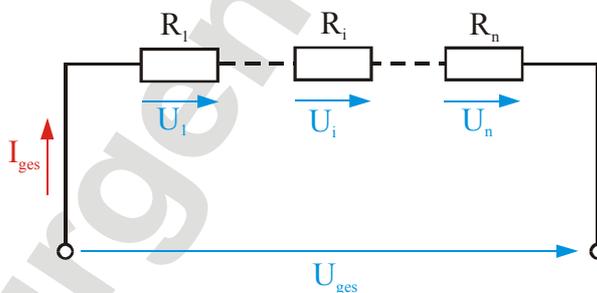


Bild 3.4.1-1: Widerstände in Serienschaltung

$$-I_{\text{ges}} + I_1 + \dots + I_i + \dots + I_n = -I_{\text{ges}} + \sum_{i=1}^n I_i = 0 \quad 3.4.2-1$$

Nach der Auflösung der Gleichung 3.4.2-1 nach I_{ges} folgt:

$$I_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n I_i \quad 3.4.2-2$$

Ersetzt man in der Gleichung 3.4.2-2 die Einzelströme I_i nach dem ohmschen Gesetz durch U_{ges}/R_i so ergibt sich

$$I_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n \frac{U_{\text{ges}}}{R_i} = U_{\text{ges}} \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} = \frac{U_{\text{ges}}}{R_{\text{ges}}}, \quad 3.4.2-3$$

womit sich durch Koeffizientenvergleich der Gesamtwiderstand einer Parallelschaltung von Widerständen zu

$$R_{\text{ges}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}} \quad 3.4.2-4$$

berechnet.

Bei der Parallelschaltung von Widerständen bietet es sich unter Umständen an, nicht mit deren Widerstandswerten sondern mit deren Leitwerten zu arbeiten. Aus der Gleichung 3.4.2-3 wird dann wegen

$$G_i = \frac{1}{R_i} \quad 3.4.2-5$$

die Gleichung

$$I_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n U_{\text{ges}} \cdot G_i = U_{\text{ges}} \sum_{i=1}^n G_i = U_{\text{ges}} \cdot G_{\text{ges}} \quad 3.4.2-6$$

Der Gesamtleitwert errechnet sich dann über die Gleichung:

$$G_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n G_i \quad 3.4.2-7$$

Bei der Parallelschaltung von Widerständen addieren sich deren Leitwerte zum Gesamtleitwert.

An dieser Stelle soll noch für den Spezialfall zweier parallel geschalteter Widerstände R_1 und R_2 die Berechnungsformel angegeben werden, die sich durch Umformung aus der Gleichung 3.4.2-4 ergibt:

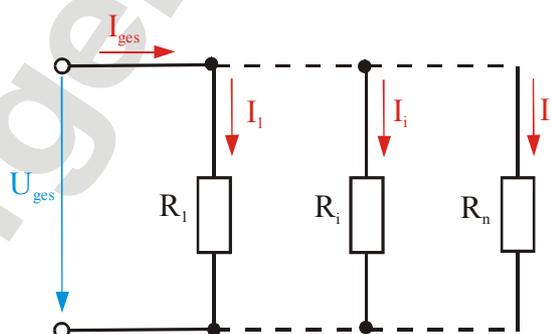


Bild 3.4.2-1: Widerstände in Parallelschaltung

$$R_{\text{ges}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} \quad 3.4.2-8$$

3.4.3 Gesamtwiderstand umfangreicher Widerstandsnetzwerke

Um den Gesamtwiderstand eines Widerstandsnetzwerks zu ermitteln, muss zunächst die Ebene festgelegt sein, für die die Berechnung erfolgen soll. Bild 3.4.3-1 zeigt ein Beispiel für ein Widerstandsnetzwerk, in das 3 verschiedene Ebenen eingezeichnet sind. Geht man davon aus, dass bei der Betrachtung einer Ebene die Klemmen der anderen beiden Ebenen jeweils unbeschaltet sind, so ergeben sich die einzelnen Gesamtwiderstände durch:

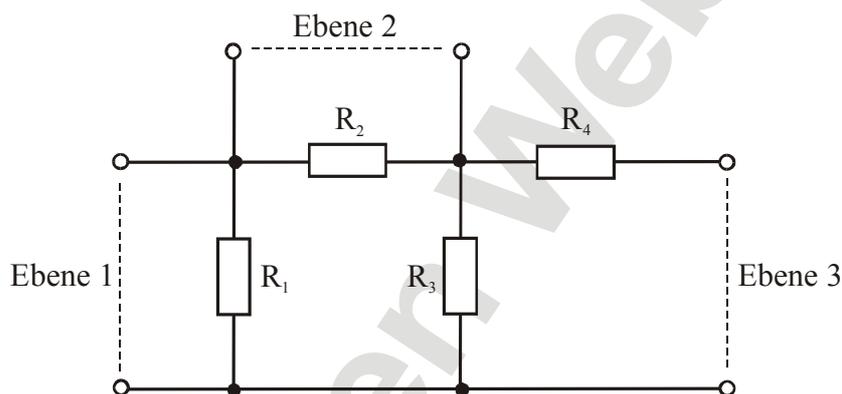


Bild 3.4.3-1: Beispiel für ein Widerstandsnetzwerk

$$\text{Ebene 1} \quad R_{\text{ges1}} = R_1 // (R_2 + R_3) = \frac{R_1 \cdot (R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad 3.4.3-1$$

$$\text{Ebene 2} \quad R_{\text{ges2}} = R_2 // (R_1 + R_3) = \frac{R_2 \cdot (R_1 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad 3.4.3-2$$

$$\text{Ebene 3} \quad R_{\text{ges3}} = R_4 + [R_3 // (R_1 + R_2)] = R_4 + \frac{R_3 \cdot (R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3} \quad 3.4.3-1$$

Die symbolische Schreibweise „//“ steht hierbei für die Parallelschaltung. Wie das Beispiel zeigt, bauen sich Widerstandsnetzwerke durch Serien- und Parallelschaltungen einzelner Gruppen von Widerständen auf, aus denen sich durch Zusammenfassungen der Gesamtwiderstand berechnet.

3.4.4 Die Stern-Dreieck-Transformation

Mitunter kommt es vor, dass sich der Gesamtwiderstand eines Widerstandsnetzwerks nicht direkt über die Serien- oder Parallelschaltung von Widerständen ermitteln lässt. Ein Beispiel hierfür zeigt das Netzwerk nach Bild 3.4.4-1, für das die bisher betrachteten Berechnungsarten versagen. In dem Fall hilft nur eine äquivalente Umformung eines Teils des Netzwerks nach der so genannten Stern-Dreieck-Transformation. Die äquivalente Umformung bezieht sich dabei auf drei Schaltungspunkte a, b und c, wie sie im Bild 3.4.4-2 dargestellt sind. Dabei

ist zu beachten, dass nach der Transformation die inneren Spannungs- und Stromaufteilungen nicht mehr mit den ursprünglichen Aufteilungen übereinstimmen. Demgegenüber bleibt die Wirkung des transformierten Teils des Netzwerks bezüglich der Klemmen a, b und c nach außen hin identisch.

Mit Hilfe der folgenden Gleichungen, die die Widerstände zwischen den einzelnen Klemmen in der Sternschaltung und in der Dreieckschaltung nach Bild 3.4.4-2 angeben, lassen sich die Umrechnungen von der Sternschaltung in die Dreieckschaltung nach den Formeln 3.4.4-4 bis 3.4.4-6 und von der Dreieckschaltung in die Sternschaltung nach den Formeln 3.4.4-7 bis 3.4.4-9 ermitteln.

Berechnung des Widerstands zwischen den Klemmen a und b:

$$R_a + R_b = \frac{R_{ab} \cdot (R_{ac} + R_{bc})}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}} \quad 3.4.4-1$$

Berechnung des Widerstands zwischen den Klemmen b und c:

$$R_b + R_c = \frac{R_{bc} \cdot (R_{ab} + R_{ac})}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}} \quad 3.4.4-2$$

Berechnung des Widerstands zwischen den Klemmen a und c:

$$R_a + R_c = \frac{R_{ac} \cdot (R_{ab} + R_{bc})}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}} \quad 3.4.4-3$$

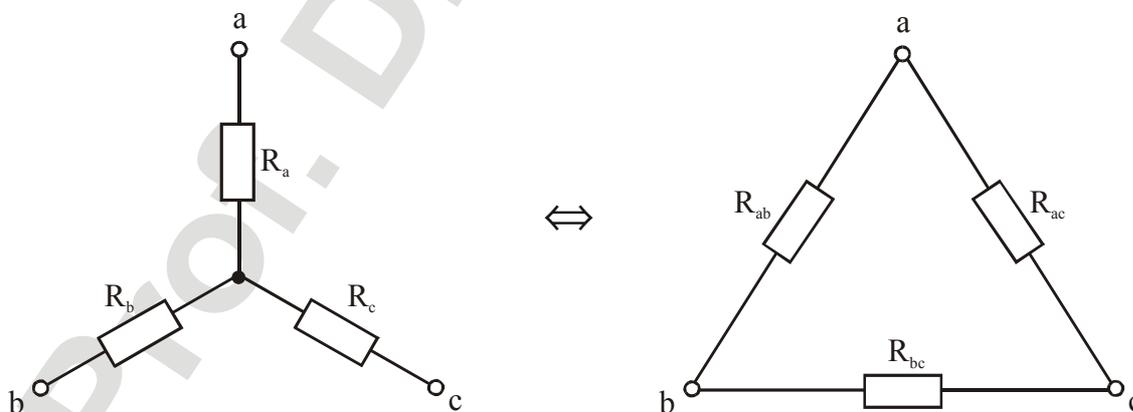


Bild 3.4.4-2: Sternschaltung und Dreieckschaltung

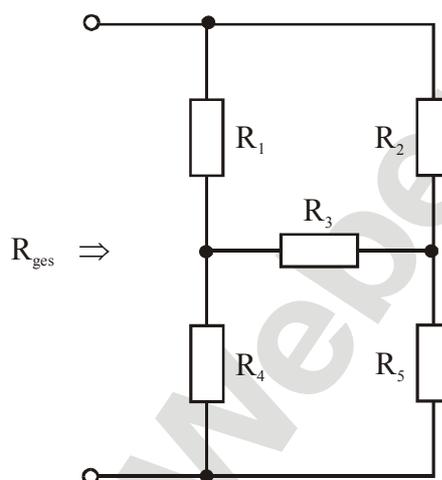


Bild 3.4.4-1: Problematisches Widerstandsnetzwerk

Berechnung der Widerstände der Dreieckschaltung aus denen der Sternschaltung:

$$R_{ab} = R_a + R_b + \frac{R_a \cdot R_b}{R_c} \quad 3.4.4-4$$

$$R_{bc} = R_b + R_c + \frac{R_b \cdot R_c}{R_a} \quad 3.4.4-5$$

$$R_{ac} = R_a + R_c + \frac{R_a \cdot R_c}{R_b} \quad 3.4.4-6$$

Berechnung der Widerstände der Sternschaltung aus denen der Dreieckschaltung:

$$R_a = \frac{R_{ab} \cdot R_{ac}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}} \quad 3.4.4-7$$

$$R_b = \frac{R_{ab} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}} \quad 3.4.4-8$$

$$R_c = \frac{R_{ac} \cdot R_{bc}}{R_{ab} + R_{ac} + R_{bc}} \quad 3.4.4-9$$

Die Methode der Stern-Dreieck-Transformation wird noch in dem späteren Kapitel „Dreiphasenwechselstrom“ eine große Rolle spielen.

3.4.5 Kennlinien der Widerstände

In der Elektrotechnik wird das Verhalten von Bauelementen oft über die Strom-Spannungs-Charakteristik beschrieben. Dabei handelt es sich um eine zweidimensionale grafische Darstellung, die den Verlauf des Stroms I über der Spannung U als Kennlinie aufzeigt. Da es sich bei Ohmschen Widerständen um lineare Bauelemente handelt, wird die Kennlinie eine Gerade sein, für deren Verlauf die Kenntnis zweier Punkte ausreicht. Damit lässt sich die allgemeine Beziehung für die Gerade

$$y = f(x) = m \cdot x + b \quad 3.4.5-1$$

mit der Steigung m und dem Abschnitt b auf der y -Achse in die Form

$$I = f(U) = C_1 \cdot U + C_2 \quad 3.4.5-2$$

umschreiben. Die beiden Koeffizienten C_1 und C_2 lassen sich über das Ohmsche Gesetz nach Bild 3.4.5-1 leicht durch Koeffizientenvergleich ermitteln:

$$I = \frac{U}{R} = C_1 \cdot U + C_2 \quad 3.4.5-3$$

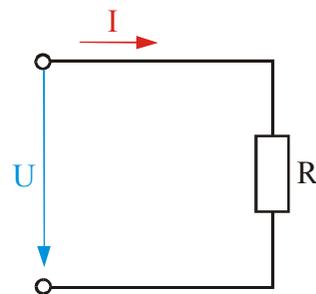


Bild 3.4.5-1: Widerstand

$$\text{mit } C_2 = 0 \text{ und } C_1 = \frac{1}{R}$$

Damit folgt für die Kennlinie eines Ohmschen Widerstands eine Gerade, die mit dem Steigungswinkel

$$\beta = \arctan \frac{1}{R} \tag{3.4.5-4}$$

durch den Nullpunkt des Strom-Spannungs-Achsen-systems verläuft. Der nach Gleichung 3.4.5-4 angegebene Winkel β bezieht sich dabei auf Achsen, die im gleichen Maßstab, also zum Beispiel A/cm und V/cm oder mA/cm und mV/cm usw. dargestellt sind. Oft ist aber eine sinnvolle Darstellung nur durch unterschiedliche Maßstäbe zu erzielen. Wählt man

m_I als Maßstabsfaktor für die Stromachse und

m_U als Maßstabsfaktor für die Spannungsachse,

so geht die Gleichung 3.4.5-4 in die Formel

$$\beta = \arctan \left(\frac{1}{R} \cdot \frac{m_U}{m_I} \right) \tag{3.4.5-5}$$

über. Dass die Einführung sinnvoller Maßstäbe notwendig ist, soll das Beispiel eines Widerstands $R = 1\text{M}\Omega$ zeigen. Ohne Einführung unterschiedlicher Maßstabsfaktoren ergibt sich ein Steigungswinkel $\beta = 57 \cdot 10^{-6} \text{ deg}$,

der in der Strom-Spannungs-Charakteristik nicht mehr darstellbar ist. Wählt man demgegenüber für die Achsendarstellungen den Strom in mA und die Spannung in kV, so ergeben sich die Maßstabsfaktoren zu $m_I = 10^{-3}$ und $m_U = 10^3$, womit sich dann der Winkel β zu 45° ergibt.

Im Allgemeinen wird man nicht die Steigung für die grafische Darstellung berechnen. Effizienter ist die Ermittlung der Geraden durch die Berechnung des zweiten Punktes nach dem Ohmschen Gesetz, wobei der erste Punkt wie bereits erwähnt der Nullpunkt des Achsen-systems ist.

Eine weitere Möglichkeit für die Darstellung der Kennlinie ergibt sich über die Definition des Widerstands über

$$R = \frac{\Delta U}{\Delta I}, \tag{3.4.5-6}$$

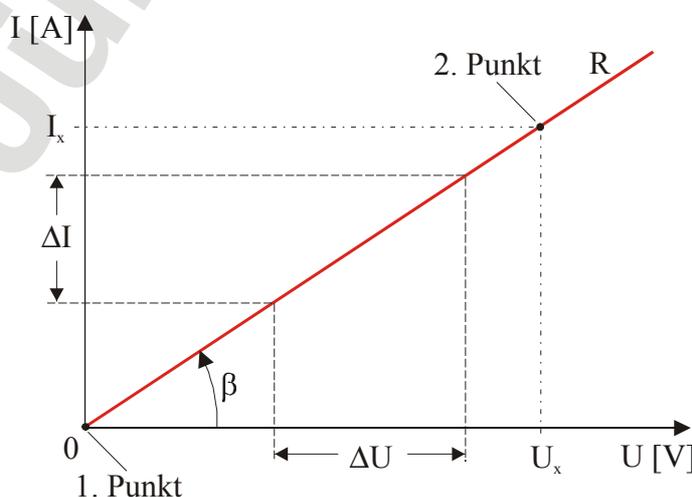


Bild 3.4.5-2: Kennlinie eines Widerstands

womit man unter Verwendung einer beliebigen Vorgabe für ΔU oder für ΔI die Steigung der Geraden grafisch darstellen kann.

3.4.6 Widerstand als linearer passiver Zweipol

Als Zweipol bezeichnet man Schaltungen, die nach außen hin als Interface nur zwei Klemmen aufweisen, wie dies im Bild 3.4.6-1 mit einem Verbraucher-Zählpfeilsystem dargestellt wurde. Die Zweipole teilen sich in 4 verschiedene Gruppen:

- Passive lineare Zweipole
- Passive nicht-lineare Zweipole
- Aktive lineare Zweipole
- Aktive nicht-lineare Zweipole

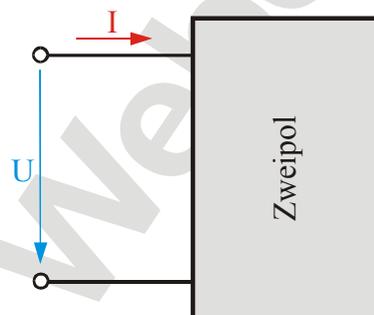


Bild 3.4.6-1: Zweipol

Passive Zweipole weisen, wenn man sie isoliert betrachtet, an ihren Klemmen keine Spannung auf. Daraus ergibt sich, dass sich im Inneren des passiven Zweipols keine Quellen befinden. Passive lineare Zweipole sind in der Gleichstromtechnik entweder einzelne Ohmsche Widerstände oder Widerstandsnetzwerke, die an den Klemmen das Verhalten ihres Gesamtwiderstands aufweisen. Ihre Strom-Spannungs-Charakteristik entspricht demnach der eines Ohmschen Widerstands. Bei nicht-linearen passiven Zweipolen verläuft die Kennlinie zwar ebenfalls durch den Nullpunkt des Strom-Spannungs-Achsensystems, weist dann allerdings keine Linearität zwischen Strom und Spannung auf. Bild 3.4.6-2 zeigt Beispiele für die Kennlinien eines passiven linearen Zweipols und eines passiven nicht-linearen Zweipols.

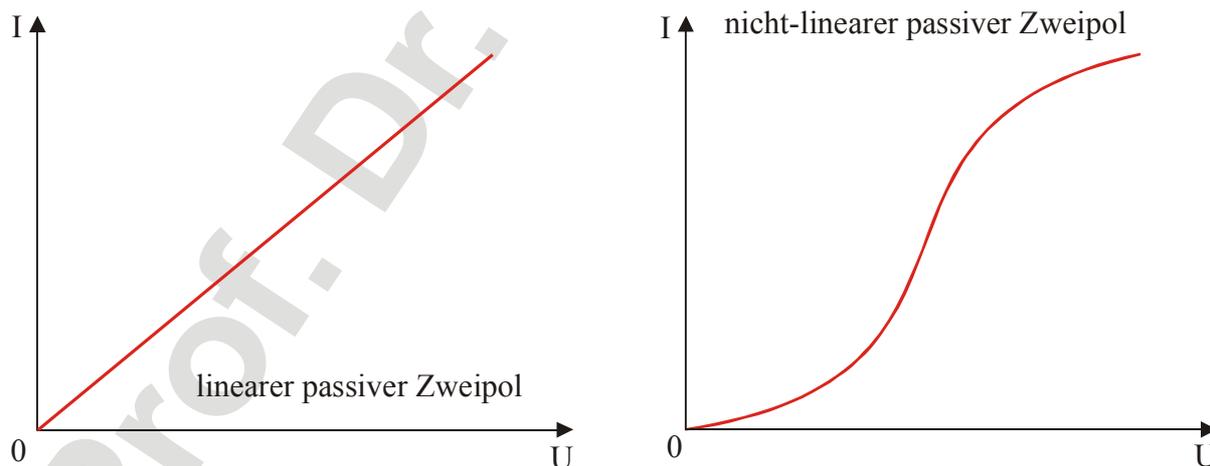


Bild 3.4.6-2: Kennlinien von passiven linearen und nicht-linearen Zweipolen

3.4.7 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Beweisen Sie, dass sich bei der Serienschaltung von Widerständen der Gesamtwiderstand aus der Summe der Einzelwiderstände ergibt.
- 2) Beweisen Sie, dass sich bei der Parallelschaltung von Widerständen der Gesamtleitwert aus der Summe der Einzelleitwerte ergibt.
- 3) Geben Sie die Formel des Gesamtwiderstands zweier parallel geschalteter Widerstände R_1 und R_2 an.
- 4) Worauf ist bei der Anwendung der Stern-Dreieck-Transformation nach der Transformation zu achten?
- 5) In welcher Charakteristik kann das Verhalten von Bauelementen grafisch dargestellt werden?
- 6) Durch welchen Punkt in der Strom-Spannungs-Charakteristik verlaufen alle Kennlinien von passiven Zweipolen?

Aufgabe 3.4.7-1:

Bestimmen Sie den Gesamtwiderstand des nebenstehenden Netzwerks. Die Werte der Widerstände sind wie folgt gegeben:

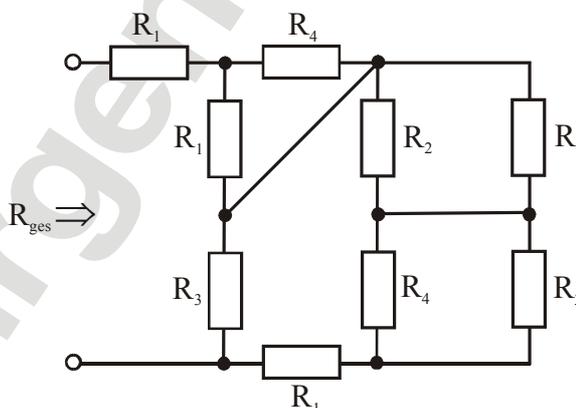
$$R_1 = 10\Omega$$

$$R_2 = 20\Omega$$

$$R_3 = 30\Omega$$

$$R_4 = 40\Omega$$

(Lösung: $R_{\text{ges}} = 35,23\Omega$)



Aufgabe 3.4.7-2:

Gegeben ist die nebenstehende Schaltung mit den Werten:

$$U_Q = 20V$$

$$R_1 = 15\Omega$$

$$R_2 = 8\Omega$$

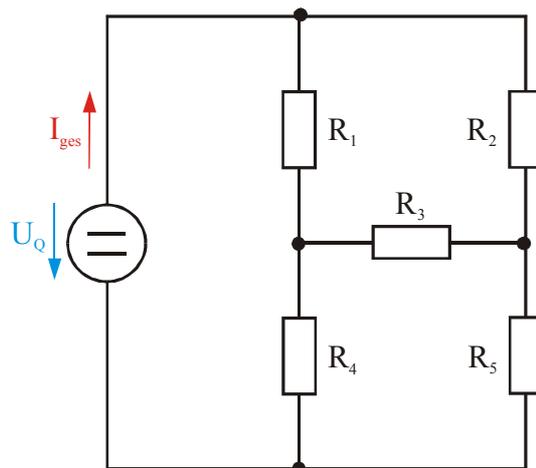
$$R_3 = 10\Omega$$

$$R_4 = 20\Omega$$

$$R_5 = 7\Omega$$

Berechnen Sie den Gesamtstrom I_{ges} der Schaltung.

(Lösung: $I_{\text{ges}} = 1,91A$)



3.5 Reale Spannungs- und Stromquellen

3.5.1 Quellen und Innenwiderstände

Im Abschnitt 3.1 wurden ideale Spannungs- und Stromquellen betrachtet. Diese idealen Bauelemente kommen in der Realität nicht vor. Eine ideale Spannungsquelle müsste nach Bild 3.5.1-1 unabhängig von ihrer Belastung mit einem Abschlusswiderstand R_a immer die konstante Quellenspannung U_Q an ihren Klemmen aufrecht erhalten. Im Extremfall $R_a = 0\Omega$ (der Ausgang wird kurzgeschlossen) würde sich ein unendlicher Strom I_a einstellen, der zur Folge hätte, dass die Quelle wegen

$$P_Q = -U_Q \cdot I_a = -\infty \quad 3.5.1-1$$

eine unendliche Leistung liefern müsste.

Bei einer idealen Stromquelle ist der Fall $R_a = \infty$ (der Ausgang wird im Leerlauf betrieben) kritisch, da hier die Spannung U_a nach Bild 3.5.1-2 unendlich würde, womit auch hier nach

$$P_Q = -U_a \cdot I_Q = -\infty \quad 3.5.1-2$$

die Quelle eine unendliche Leistung aufbringen müsste.

Beide Fälle sind technisch nicht möglich. Deshalb besitzen reale Spannungs- und Stromquellen inhärente Innenwiderstände, die das Auftreten dieser Extremfälle ausschließen.

3.5.1.1 Die reale Spannungsquelle

Eine reale Spannungsquelle wird in ihrem elektrotechnischen Ersatzschaltbild mit der Quelle U_Q und dem damit in Reihe liegenden Innenwiderstand R_{iQ} nach

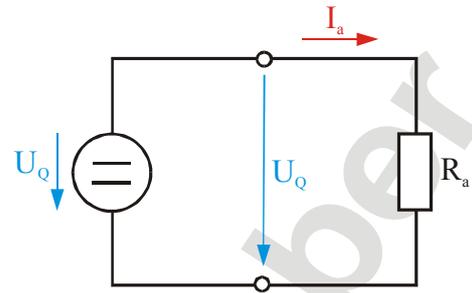


Bild 3.5.1-1: Ideale Spannungsquelle

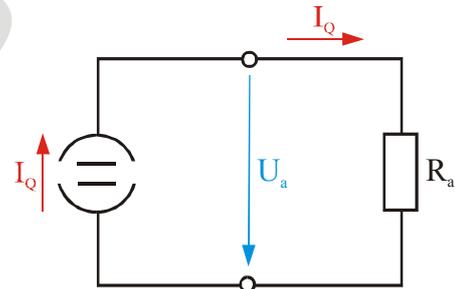


Bild 3.5.1-2: Ideale Stromquelle

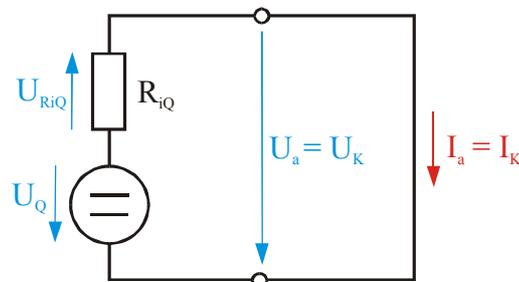
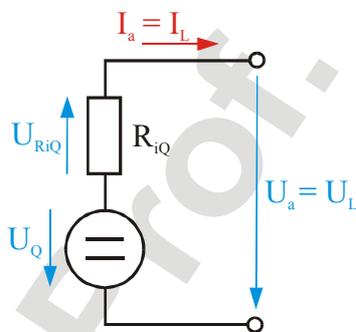


Bild 3.5.1.1-1: Reale Spannungsquelle im Leerlauf und im Kurzschluss

Bild 3.5.1.1-1 dargestellt. Befindet sich diese Spannungsquelle im Leerlauf, so wird sich wegen

$$I_a = I_L = 0 \quad 3.5.1.1-1$$

als die maximale Ausgangsspannung, die Leerlaufspannung

$$U_a = U_L = U_Q \quad 3.5.1.1-2$$

an den Klemmen einstellen.

Schließt man die reale Spannungsquelle nach Bild 3.5.1.1-1 an den Ausgangsklemmen kurz, so stellt sich als der maximale Ausgangsstrom, der Kurzschlussstrom

$$I_a = I_K = \frac{U_{RiQ}}{R_{iQ}} = \frac{U_Q}{R_{iQ}} \quad 3.5.1.1-3$$

ein, wobei die Ausgangsspannung den Wert

$$U_a = U_K = 0 \quad 3.5.1.1-4$$

annimmt. Die von der realen Spannungsquelle aufgebrauchten Leistungen nehmen für die beiden Extremfälle somit den Wert

$$P_{QL} = -U_Q \cdot I_L = 0 \quad 3.5.1.1-5$$

im Leerlauf und den endlichen Wert

$$P_{QK} = -U_Q \cdot I_K = -\frac{U_Q^2}{R_{iQ}} \quad 3.5.1.1-6$$

im Kurzschlussfall an.

Belastet man die reale Spannungsquelle mit dem Abschlusswiderstand R_a nach Bild 3.5.1.1-2, so ergeben sich Ausgangsstrom und Ausgangsspannung zu:

$$I_a = \frac{U_Q}{R_{iQ} + R_a} \quad 3.5.1.1-7$$

$$U_a = I_a \cdot R_a = U_Q \cdot \frac{R_a}{R_{iQ} + R_a} \quad 3.5.1.1-8$$

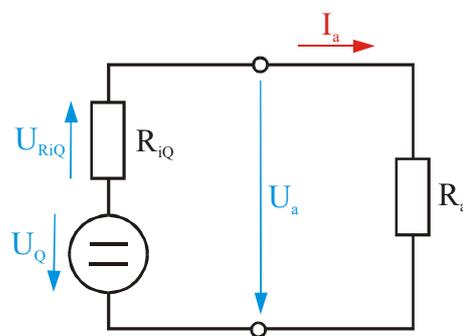


Bild 3.5.1.1-2: Belastete Spannungsquelle

3.5.1.2 Die reale Stromquelle

Eine reale Stromquelle wird in ihrem elektrotechnischen Ersatzschaltbild mit der Quelle I_Q und dem damit parallel liegenden Innenleitwert G_{iQ} nach Bild 3.5.1.2-1 dargestellt. Befindet sich diese Stromquelle im Leerlauf, so wird sich wegen

$$I_a = I_L = 0 \quad 3.5.1.2-1$$

als die maximale Ausgangsspannung die Leerlaufspannung

$$U_a = U_L = \frac{I_Q}{G_{iQ}} \quad 3.5.1.2-2$$

an den Klemmen einstellen.

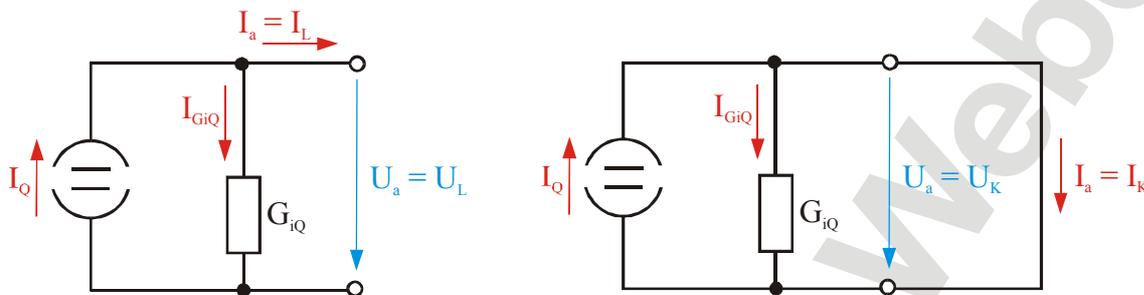


Bild 3.5.1.2-1: Reale Stromquelle im Leerlauf und im Kurzschluss

Schließt man die reale Stromquelle nach Bild 3.5.1.2-1 an den Ausgangsklemmen kurz, so stellt sich als der maximale Ausgangsstrom der Kurzschlussstrom

$$I_a = I_K = I_Q \quad 3.5.1.2-3$$

ein, wobei die Ausgangsspannung den Wert

$$U_a = U_K = 0 \quad 3.5.1.2-4$$

annimmt. Die von der realen Stromquelle aufgebrauchten Leistungen nehmen für die beiden Extremfälle somit den endlichen Wert

$$P_{QL} = -U_L \cdot I_Q = -\frac{I_Q^2}{G_{iQ}} \quad 3.5.1.2-5$$

im Leerlauf und den Wert

$$P_{QK} = -U_K \cdot I_Q = 0 \quad 3.5.1.2-6$$

im Kurzschlussfall an.

Belastet man die reale Stromquelle mit dem Abschlussleitwert G_a nach Bild 3.5.1.2-2, so ergeben sich Ausgangsspannung und Ausgangsstrom zu:

$$U_a = \frac{I_a}{G_a} = \frac{I_Q}{G_{iQ} + G_a} \quad 3.5.1.2-7$$

$$I_a = U_a \cdot G_a = I_Q \cdot \frac{G_a}{G_{iQ} + G_a} \quad 3.5.1.2-8$$

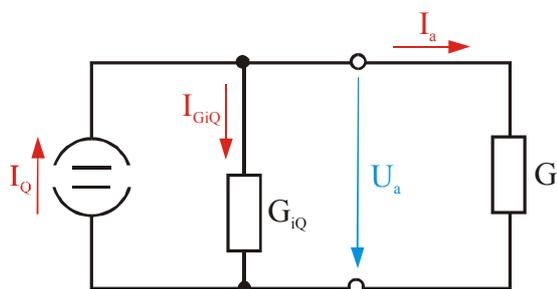


Bild 3.5.1.2-2: Belastete Stromquelle

3.5.2 Kennlinien der Spannungs- und Stromquellen

Reale Spannungs- und Stromquellen sind lineare Bauelemente. Beide Quellen zeigen demnach an den Ausgangsklemmen ein lineares Verhalten zwischen Strom und Spannung. Dies muss sich wie bei den Ohmschen Widerständen durch eine Gerade in der Strom-Spannungs-Charakteristik ausdrücken.

3.5.2.1 Kennlinie der Spannungsquelle

Für die Kennlinie der linearen Spannungsquelle gilt formal wieder die Geradengleichung

$$I = I(U) = C_1 \cdot U + C_2 \quad 3.5.2.1-1$$

mit der Steigung C_1 und dem Abschnitt C_2 auf der Stromachse. Betrachtet man den Kurzschlussfall

$$I_K = C_1 \cdot U_K + C_2, \quad 3.5.2.1-2$$

so folgt wegen $U_K = 0$ für C_2 :

$$C_2 = I_K = \frac{U_Q}{R_{iQ}} \quad 3.5.2.1-3$$

Der Leerlauf mit $I_L = 0$ liefert dann nach elementarer Umformung die Bestimmungsgleichung für C_1 :

$$C_1 = -\frac{C_2}{U_L} = -\frac{I_K}{U_L} = -\frac{1}{R_{iQ}} \quad 3.5.2.1-4$$

Die Geradengleichung der Spannungsquelle ergibt sich somit zu

$$I = -\frac{1}{R_{iQ}} \cdot U + \frac{U_Q}{R_{iQ}}. \quad 3.5.2.1-5$$

Aus Formel 3.5.2.1-4 lässt sich der Steigungswinkel α der Geraden wie folgt ermitteln:

$$\alpha = \pi + \arctan\left(-\frac{I_K}{U_L}\right) \quad 3.5.2.1-6$$

Bild 3.5.2.1-1 zeigt die Strom-Spannungs-Charakteristik der realen linearen Spannungsquelle. In dem Bild ist zum Vergleich auch die theoretische Kurve der idealen linearen Spannungsquelle gestrichelt eingezeichnet.

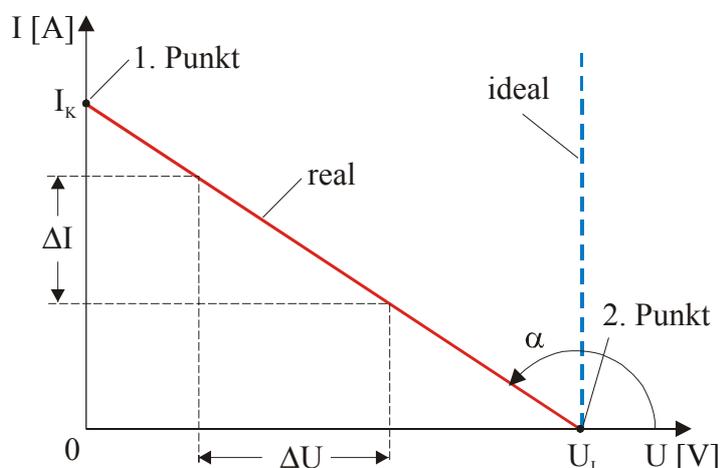


Bild 3.5.2.1-1: Kennlinie einer Spannungsquelle

Am einfachsten ergibt sich die Gerade aus den zwei Punkten Kurzschlussstrom I_K und Leerlaufspannung U_L . Diese Punkte ließen sich auch durch Messungen ermitteln, wenn der innere Aufbau der Spannungsquelle nicht bekannt ist. Dabei kann es aber im Fall eines extrem niedrigen Innenwiderstands zu erheblichen Problemen bei der Messung des Kurzschlussstroms kommen. Als Beispiel sei hier die Autobatterie genannt, die im Fall des Kurzschlusses mehrere 100A als Kurzschlussstrom aufbringen kann. In dem Fall empfiehlt es sich, die benötigten Punkte zur Konstruktion der Kennlinie durch Variation des Abschlusswiderstands und die daraus folgenden Änderungen ΔU der Spannung und ΔI des Stroms zu ermitteln.

3.5.2.2 Kennlinie der Stromquelle

Für die Kennlinie der linearen Stromquelle gilt formal auch wie bei der Spannungsquelle die Geradengleichung nach Gleichung 3.5.2.1-1. Betrachtet man den Kurzschlussfall

$$I_K = C_1 \cdot U_K + C_2, \quad 3.5.2.2-1$$

so folgt wegen $U_K = 0$ für C_2 :

$$C_2 = I_K = I_Q \quad 3.5.2.2-2$$

Der Leerlauf mit $I_L = 0$ liefert dann nach elementarer Umformung die Bestimmungsgleichung für C_1 :

$$C_1 = -\frac{C_2}{U_L} = -\frac{I_K}{U_L} = -G_{iQ} \quad 3.5.2.2-3$$

Die Geradengleichung der Stromquelle ergibt sich somit zu

$$I = -G_{iQ} \cdot U + I_Q. \quad 3.5.2.2-4$$

Aus Formel 3.5.2.2-3 lässt sich der Steigungswinkel α der Geraden analog zur Spannungsquelle nach Gleichung 3.5.2.1-5 ermitteln. Bild 3.5.2.2-1 zeigt die Strom-Spannungs-Charakteristik der realen linearen Stromquelle. In dem Bild ist zum Vergleich auch die theoretische Kurve der idealen linearen Stromquelle gestrichelt eingezeichnet.

Am einfachsten ergibt sich auch hier wieder die Gerade aus den zwei Punkten Kurzschlussstrom I_K und Leerlaufspannung U_L .

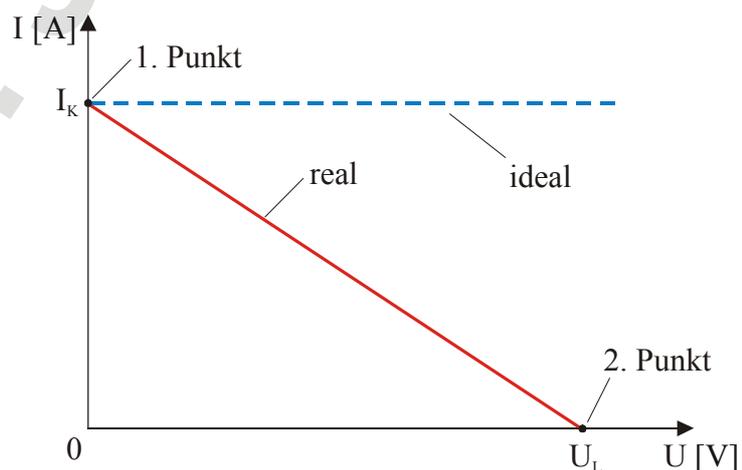


Bild 3.5.2.2-1: Kennlinie einer Stromquelle

3.5.3 Vergleich der beiden Quellen

Auf Grund der Tatsache, dass die reale Spannungsquelle und die reale Stromquelle die gleiche Strom-Spannungs-Charakteristik aufweisen und über den Kurzschlussstrom sowie über die Leerlaufspannung ihre Kennlinien definieren, müssen sich beide Quellen bezüglich ihrer Wirkungen an den Klemmen ineinander umrechnen lassen. Betrachtet man den Kurzschlussstrom und die Leerlaufspannung beider Quellen, so ergibt sich wegen

$$\text{Spannungsquelle} \Rightarrow \frac{U_Q}{R_{iQ}} = I_K = I_Q \Leftarrow \text{Stromquelle} \quad 3.5.3-1$$

und

$$\text{Spannungsquelle} \Rightarrow U_Q = U_L = \frac{I_Q}{G_{iQ}} \Leftarrow \text{Stromquelle} \quad 3.5.3-2$$

die Möglichkeit der Umrechnung der inneren Spannungsquelle in die innere Stromquelle sowie die Gleichsetzung des Innenwiderstands der Spannungsquelle mit dem Innenwiderstand bzw. dem Innenleitwert der Stromquelle:

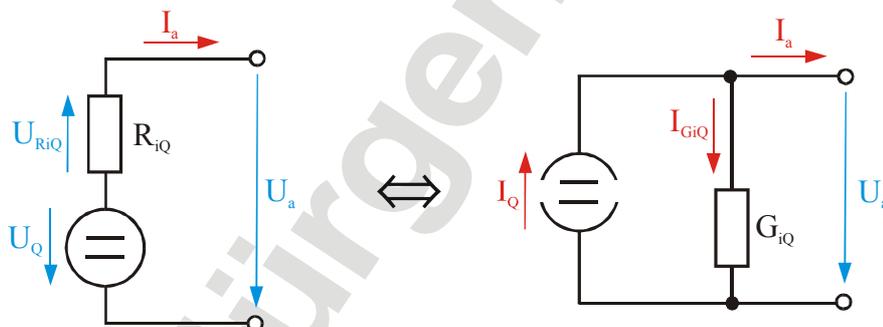


Bild 3.5.3-1: Vergleich der Spannungsquelle mit der Stromquelle

$$\text{Spannungsquelle} \Rightarrow R_{iQ} = \frac{1}{G_{iQ}} \Leftarrow \text{Stromquelle} \quad 3.5.3-3$$

Beide Quellen lassen sich also leicht ineinander umrechnen. Die Spannungsquelle kann bezüglich der Wirkung an den Klemmen in eine identische Stromquelle und die Stromquelle in eine identische Spannungsquelle umgerechnet werden. Dabei ist allerdings zu beachten, dass die inneren Verhältnisse sich bei diesen Umrechnungen verändern. Dies betrifft insbesondere die inneren Leistungsumsetzungen der Quellen, die für Strom- und Spannungsquellen unterschiedlich sind.

3.5.4 Spannungs- und Stromquellen als lineare aktive Zweipole

Da Spannungs- und Stromquellen nach außen hin als Interface nur 2 Klemmen besitzen, lassen auch sie sich als Zwei-

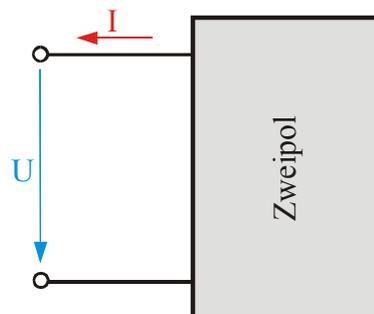


Bild 3.5.4-1: Zweipol

pole deuten. Bild 3.5.4-1 zeigt einen Zweipol mit einem Generator-Zählpeilsystem.

Da diese Zweipole lineare Quellen enthalten, handelt es sich hier um aktive lineare Zweipole, deren Kennlinien immer durch eine Gerade charakterisiert werden. Aktive nicht-lineare Zweipole weisen dagegen keine Gerade in der Strom-Spannungs-Charakteristik auf. Bild 3.5.4-2 zeigt Beispiele für die Kennlinien eines aktiven linearen Zweipols und eines aktiven nicht-linearen Zweipols.

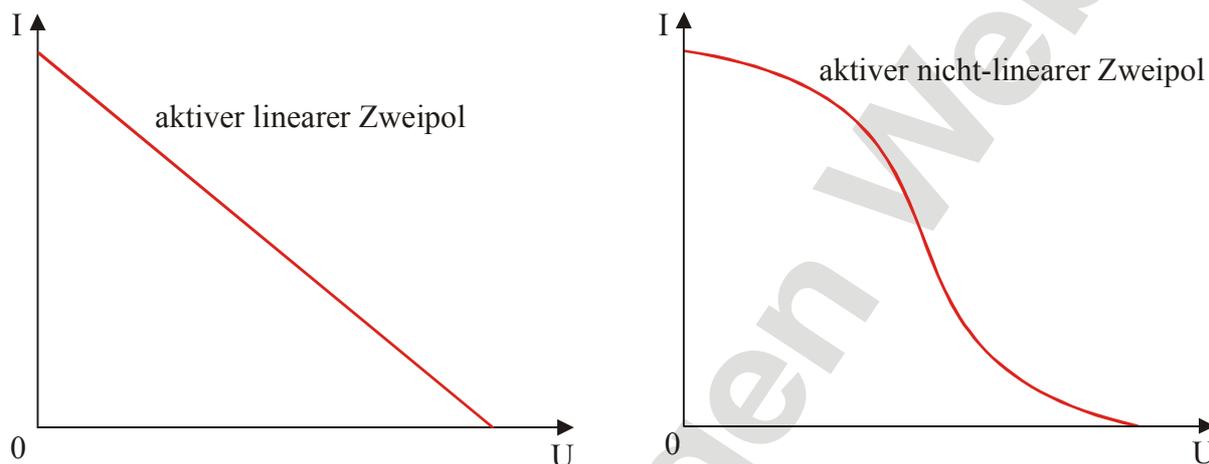


Bild 3.5.4-2: Kennlinien von aktiven linearen und nicht-linearen Zweipolen

3.5.5 Der Arbeitspunkt der belasteten Quelle

Wie bereits in den Abschnitten 3.5.1.1 und 3.5.1.2 hergeleitet wurde, ergeben sich der Ausgangsstrom und die Ausgangsspannung einer mit R_a belasteten Spannungsquelle zu

$$I_a = \frac{U_Q}{R_{iQ} + R_a} \quad 3.5.5-1$$

$$U_a = I_a \cdot R_a = U_Q \cdot \frac{R_a}{R_{iQ} + R_a} \quad 3.5.5-2$$

und einer mit G_a belasteten Stromquelle zu

$$U_a = \frac{I_a}{G_a} = \frac{I_Q}{G_{iQ} + G_a} \quad 3.5.5-3$$

$$I_a = U_a \cdot G_a = I_Q \cdot \frac{G_a}{G_{iQ} + G_a} \quad 3.5.5-4$$

I_a und U_a bezeichnet man allgemein als den Arbeitspunktstrom bzw. die Arbeitspunktspannung, wobei hier auch der Index A verwendet werden kann. $I_a = I_A$ und $U_a = U_A$ legen den so genannten Arbeitspunkt A der Schaltung fest:

$$\text{Arbeitspunkt} = f(I_A; U_A)$$

3.5.5-5

Neben der analytischen und numerischen Berechnung des Arbeitspunktes lässt sich der Arbeitspunkt auch grafisch ermitteln. Hierzu müssen nur die beiden Kennlinien der Quelle und des Abschlusswiderstands in die Strom-Spannungs-Charakteristik eingezeichnet werden, wie dies im Bild 3.5.5-1 gezeigt ist. Der Schnittpunkt beider Kurven liefert dann den Arbeitspunkt A, woraus sich die Achsenabschnitte I_A und U_A ergeben.

Die grafische Methode ist immer dann eine einfache Methode, wenn es sich bei der Belastung und/oder bei der Quelle um eine nicht-lineare Kennlinie handelt. Hierdurch lassen sich im Fall von transzendenten Gleichungen aufwändige numerische Verfahren vermeiden. Gleiches gilt auch, falls für die Belastung und/oder die Quelle nur die Kennlinie und nicht deren Gleichung bekannt ist.

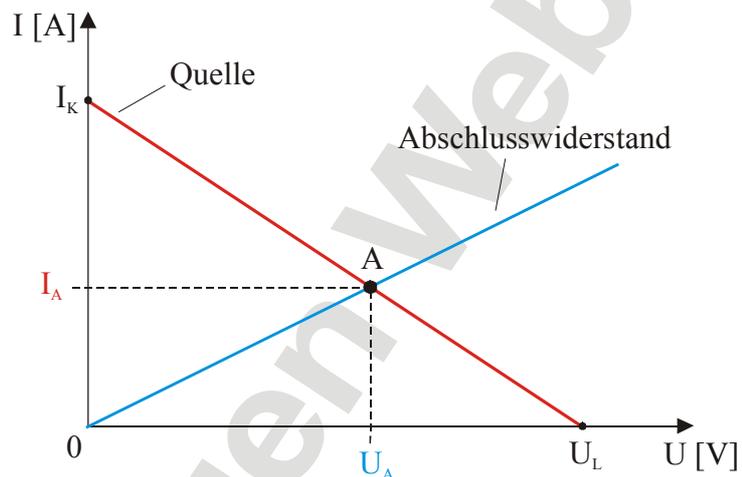


Bild 3.5.5-1: Arbeitspunkt einer belasteten Quelle

3.5.6 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Für welchen Fall, Kurzschluss oder Leerlauf, tritt bei der idealen Spannungsquelle ein Problem auf und wie stellt sich dieses Problem dar?
- 2) Für welchen Fall, Kurzschluss oder Leerlauf, tritt bei der idealen Stromquelle ein Problem auf und wie stellt sich dieses Problem dar?
- 3) Was ist mit jeder realen Spannungs- und Stromquelle inhärent verbunden?
- 4) Zeichnen Sie das Schaltbild einer realen Spannungsquelle und leiten Sie hieraus die Beziehungen für den Kurzschlussstrom und die Leerlaufspannung ab.
- 5) Zeichnen Sie das Schaltbild einer realen Stromquelle und leiten Sie hieraus die Beziehungen für den Kurzschlussstrom und die Leerlaufspannung ab.
- 6) Zeichnen Sie das Schaltbild einer realen Spannungsquelle und leiten Sie hieraus die Beziehungen für die inneren Leistungsumsetzungen im Leerlauf- und im Kurzschlussfall ab.
- 7) Zeichnen Sie das Schaltbild einer realen Stromquelle und leiten Sie hieraus die Beziehungen für die inneren Leistungsumsetzungen im Leerlauf- und im Kurzschlussfall ab.
- 8) Zeichnen Sie das Schaltbild einer realen Spannungsquelle, die mit dem Abschlusswiderstand R_a belastet wird, und leiten Sie hieraus die Beziehungen für den Ausgangsstrom I_a und die Ausgangsspannung U_a ab.
- 9) Zeichnen Sie das Schaltbild einer realen Stromquelle, die mit dem Abschlusswiderstand R_a belastet wird, und leiten Sie hieraus die Beziehungen für den Ausgangsstrom I_a und die Ausgangsspannung U_a ab.

- 10) Zeichnen Sie die Kennlinien der realen und der idealen Spannungsquelle in der Strom-Spannungs-Charakteristik.
- 11) Zeichnen Sie die Kennlinien der realen und der idealen Stromquelle in der Strom-Spannungs-Charakteristik.
- 12) Erklären Sie den Begriff „Arbeitspunkt“.

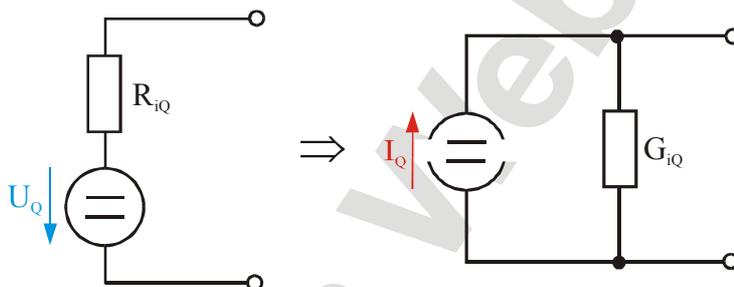
Aufgabe 3.5.6-1:

Gegeben ist die nebenstehende Spannungsquelle mit den Werten

$$U_Q = 12V$$

$$R_{iQ} = 1,2k\Omega.$$

Wandeln Sie diese Spannungsquelle in eine Stromquelle laut nebenstehender Schaltung um und berechnen Sie deren Werte I_Q und G_{iQ} .



(Lösung: $I_Q = 10mA$; $G_{iQ} = 833,3\mu S$)

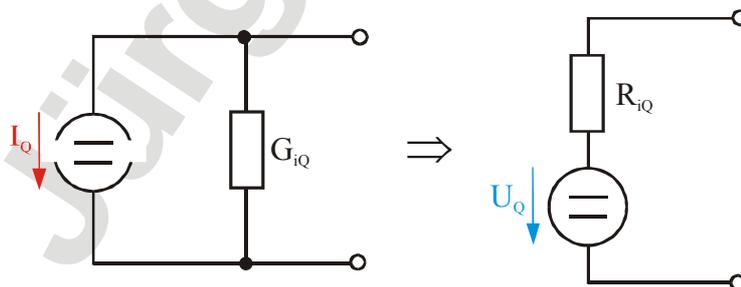
Aufgabe 3.5.6-2:

Gegeben ist die nebenstehende Stromquelle mit den Werten

$$I_Q = 150mA$$

$$G_{iQ} = 20mS$$

Wandeln Sie diese Stromquelle in eine Spannungsquelle laut nebenstehender Schaltung um und berechnen Sie deren Werte U_Q und R_{iQ} .



(Lösung: $U_Q = -7,5V$; $R_{iQ} = 50\Omega$)

Aufgabe 3.5.6-3:

Ein Akkumulator zeigt bei einer Belastung mit dem Strom $I_{a1} = 40A$ die Klemmenspannung $U_{a1} = 11,56V$ und bei einer Belastung mit dem Strom $I_{a2} = 80A$ die Klemmenspannung $U_{a2} = 10V$. Bestimmen Sie den Innenwiderstand R_{iQ} , die innere Quellenspannung U_Q und den Kurzschlussstrom I_K des Akkumulators.

(Lösung: $R_{iQ} = 39m\Omega$; $U_Q = 13,12V$; $I_K = 336,4A$)

Aufgabe 3.5.6-4:

Eine Stromquelle mit dem Quellenstrom $I_Q = 50mA$ und dem Innenleitwert $G_{iQ} = 5mS$ wird nacheinander an die Abschlusswiderstände

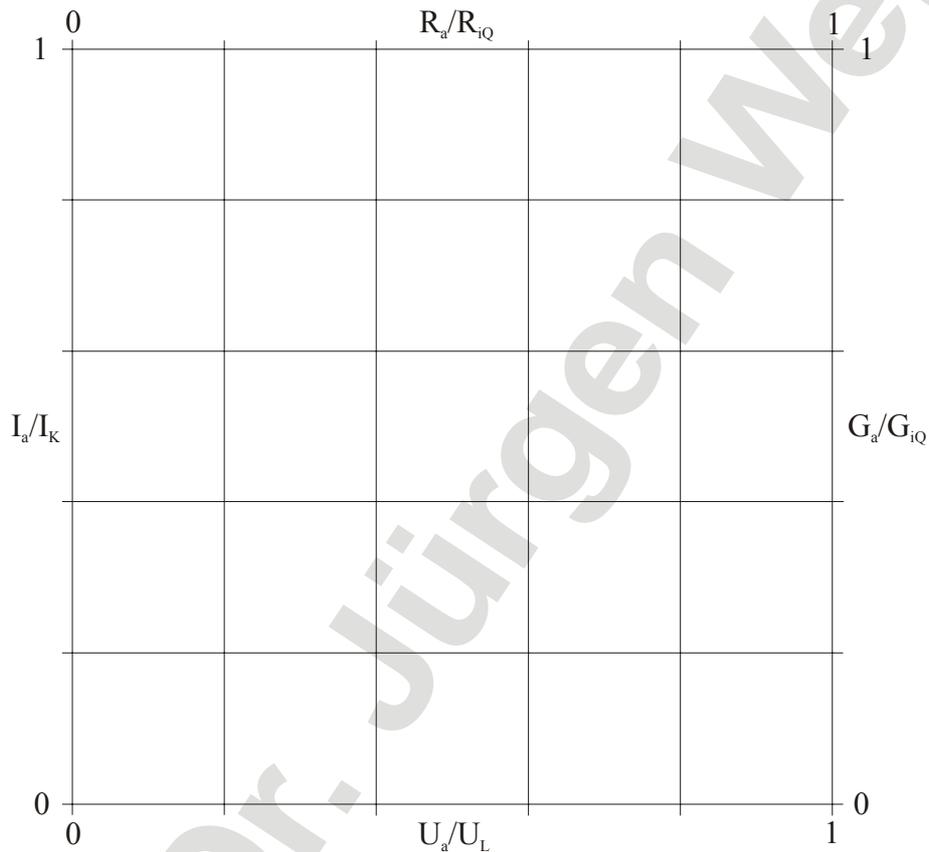
$$R_{a1} = 2k\Omega$$

$$R_{a2} = 500\Omega$$

$$R_{a3} = 50\Omega$$

angeschlossen. Bestimmen Sie numerisch und grafisch (mit Hilfe des nachfolgenden normierten Kennlinienfeldes) die Arbeitspunktspannungen und die Arbeitspunktströme.

(Lösung: $U_{a1}/U_L = 0,91$; $I_{a1}/I_K = 0,09$; $U_{a2}/U_L = 0,71$; $I_{a2}/I_K = 0,29$; $U_{a3}/U_L = 0,20$; $I_{a3}/I_K = 0,80$)



3.6 Ersatzspannungsquellen und Ersatzstromquellen

Bei umfangreichen Netzwerken mit Widerständen und linearen Quellen ist oft nur das Verhalten dieses Netzwerkes an zwei Klemmen von Interesse. Es bietet sich dann an, dieses Netzwerk als einen aktiven linearen Zweipol zu interpretieren. Bild 3.6-1 zeigt als Beispiel ein

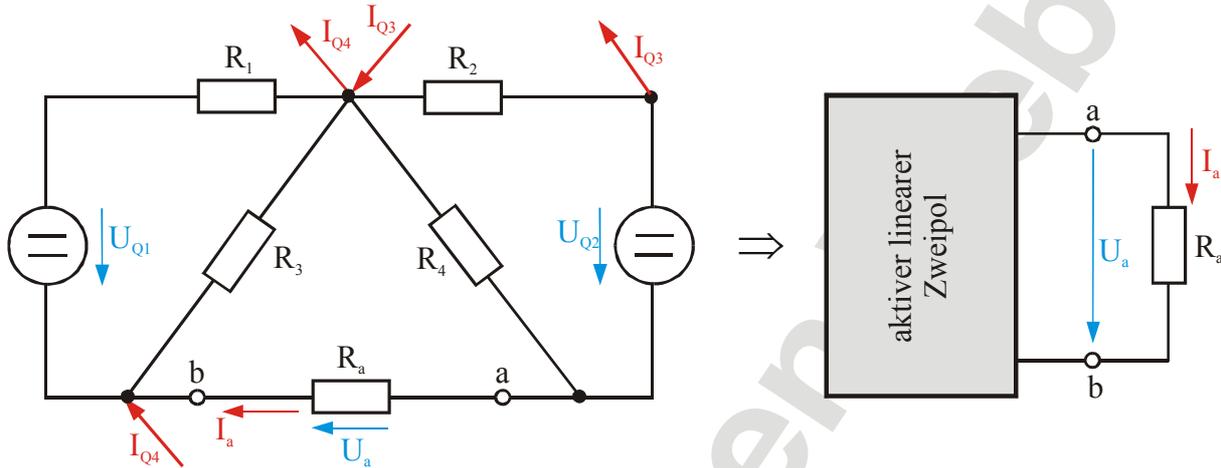


Bild 3.6-1: Umwandlung eines umfangreichen Netzwerkes in einen Zweipol

Netzwerk, dessen Verhalten allein an den Klemmen a und b von Interesse ist. Es besteht jetzt die Möglichkeit, den aktiven linearen Zweipol nach Bild 3.6-1 als eine Ersatzspannungsquelle mit der Quellenspannung U_{QE} und dem Ersatzinnenwiderstand R_{iE} oder als eine Ersatzstromquelle mit dem Quellenstrom I_{QE} und dem Ersatzinnenleitwert G_{iE} wie in Bild 3.6-2 dargestellt zu entwickeln.

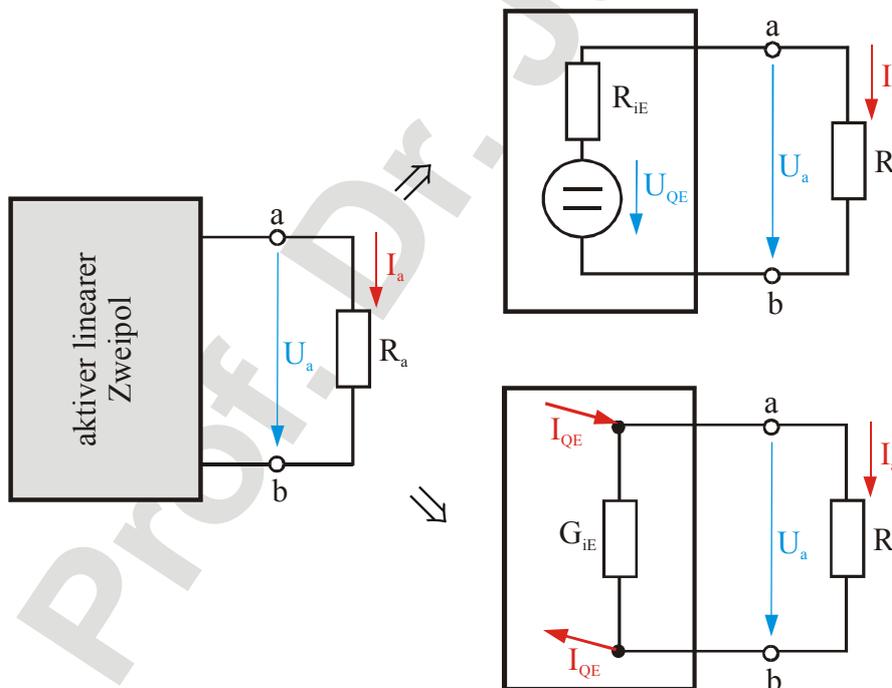


Bild 3.6-2: Umwandlung des aktiven linearen Zweipols

zu entwickeln.

Ermittelt man die Elemente der Ersatzspannungsquelle oder der Ersatzstromquelle durch Messung, so erfordert dies die Messung der Leerlaufspannung U_L sowie des Kurzschlussstroms I_K an den Klemmen a und b. Hierbei ist zu berücksichtigen, ob der Kurzschlussfall zu

erheblichen Problemen führen könnte. In diesem Fall muss man die Elemente der Ersatzquellen durch unterschiedliche Belastungen des Ausgangs ermitteln, wie dies bereits im Abschnitt 3.5.2.1 beschrieben wurde.

Um die Elemente der Ersatzquellen zu berechnen, gibt es unterschiedliche Ansätze:

1. Berechnung der Leerlaufspannung und des Kurzschlussstroms
2. Berechnung der Leerlaufspannung und des Ersatzinnenwiderstands
3. Berechnung des Kurzschlussstroms und des Ersatzinnenwiderstands

Mit der Berechnung der Leerlaufspannung U_L an den Klemmen a und b des ursprünglichen Netzwerks ergibt sich die Ersatzspannungsquelle U_{QE} . Mit der Berechnung des Kurzschlussstroms I_K an den Klemmen a und b des ursprünglichen Netzwerks ergibt sich die Ersatzstromquelle I_{QE} . Durch die Beziehung

$$R_{iE} = \frac{1}{G_{iE}} = \frac{U_L}{I_K} \quad 3.6-1$$

erhält man dann den Ersatzinnenwiderstand oder den Ersatzinnenleitwert, je nachdem welche Ersatzquelle berechnet werden soll.

Mitunter ist es einfacher, nur die Leerlaufspannung oder den Kurzschlussstrom und den Ersatzinnenwiderstand zu berechnen. Bei der Berechnung des Ersatzinnenwiderstands geht man dann wie folgt vor, wobei das Beispielnetzwerk nach Bild 3.6-1 betrachtet werden soll:

- Man schaut in die offenen Klemmen a und b des ursprünglichen Netzwerks
- Dabei werden alle Spannungsquellen kurzgeschlossen
- Alle Stromquellen werden entfernt

Bild 3.6-3 zeigt das Netzwerk nach Bild 3.6-1 für die Berechnung des Ersatzinnenwiderstands. Daraus ergibt sich der Ersatzinnenwiderstand zu:

$$R_{iE} = R_1 // R_3 + R_2 // R_4 \quad 3.6-2$$

Bei der Berechnung der Leerlaufspannung oder des Kurzschlussstroms erweist es sich oft als nützlich, vor der Berechnung einzelne Stromquellen in Spannungsquellen oder einzelne Spannungsquellen in Stromquellen umzuwandeln.

Bei der Umwandlung einer Stromquelle in eine Spannungsquelle greift man auf einen der Stromquelle direkt parallel geschalteten Widerstand zurück. Für das Beispielnetzwerk nach Bild 3.6-1 wäre das für die Stromquelle I_{Q3} der Widerstand R_2 und für die Stromquelle I_{Q4} der Widerstand R_3 . Wandelt man beide Stromquellen um, so

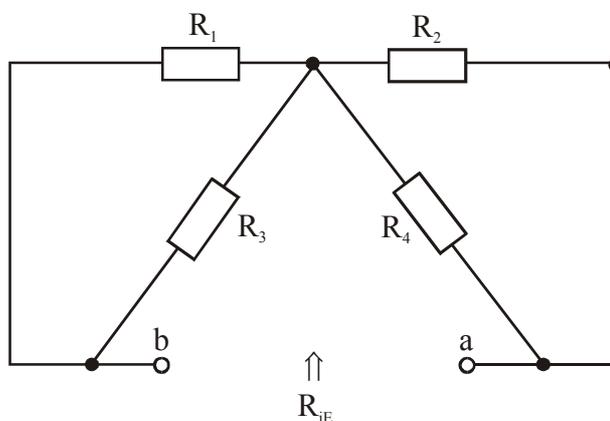


Bild 3.6-3: Berechnung des Ersatzinnenwiderstands

entsteht die Schaltung nach Bild 3.6-4 mit den neuen Spannungsquellen

$$U_{Q3} = I_{Q3} \cdot R_2$$

und

$$U_{Q4} = I_{Q4} \cdot R_3$$

Bei der Umwandlung ist auf die Zählpfeile der neuen Spannungsquellen nach Bild 3.6-2 zu achten. Das Netzwerk nach Bild 3.6-4 verhält sich bezüglich der Wirkung an den Klemmen a und b identisch zu dem Netzwerk nach Bild 3.6-1 und besitzt damit auch die gleiche Kennlinie in der Strom-Spannungs-Charakteristik. Die inneren Verhältnisse haben sich dagegen verändert.

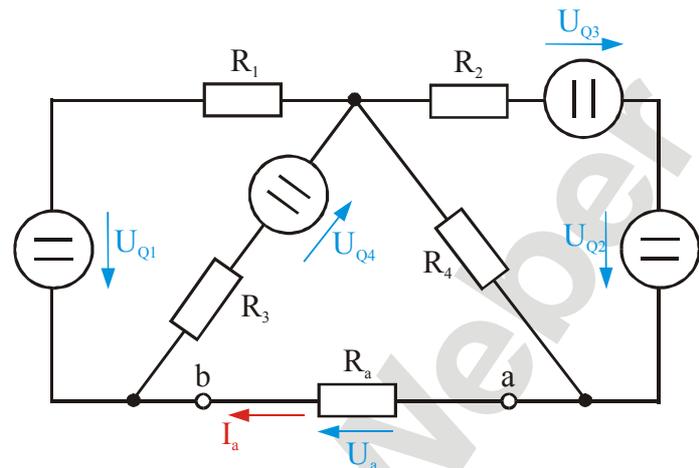


Bild 3.6-4: Netzwerk nach Umwandlung der Stromquellen in Spannungsquellen

Bei der Umwandlung einer Spannungsquelle in eine Stromquelle greift man auf einen der Spannungsquelle direkt in Reihe geschalteten Widerstand zurück. Für das Beispielnetzwerk nach Bild 3.6-1 wäre das für die Spannungsquelle U_{Q1} der Widerstand R_1 . Die Spannungsquelle U_{Q2} lässt sich dagegen mit den Mitteln, die in diesem Kurs behandelt werden sollen,

nicht in eine Stromquelle umwandeln, da der Widerstand R_2 nicht direkt mit der Spannungsquelle in Reihe liegt, sondern durch einen Knotenpunkt getrennt ist.

Bild 3.6-5 zeigt das neue Netzwerk mit der umgewandelten Quelle

$$I_{Q1} = \frac{U_{Q1}}{R_1}$$

Auch hier gilt wieder, dass sich das Netzwerk nach Bild 3.6-5 bezüglich der Klemmen a und b identisch zu dem Netzwerk nach Bild 3.6-1 verhält.

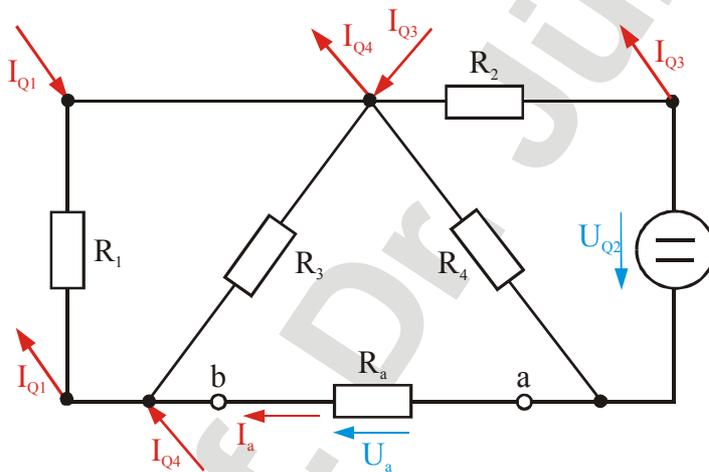


Bild 3.6-5: Netzwerk nach Umwandlung einer Spannungsquelle in eine Stromquelle

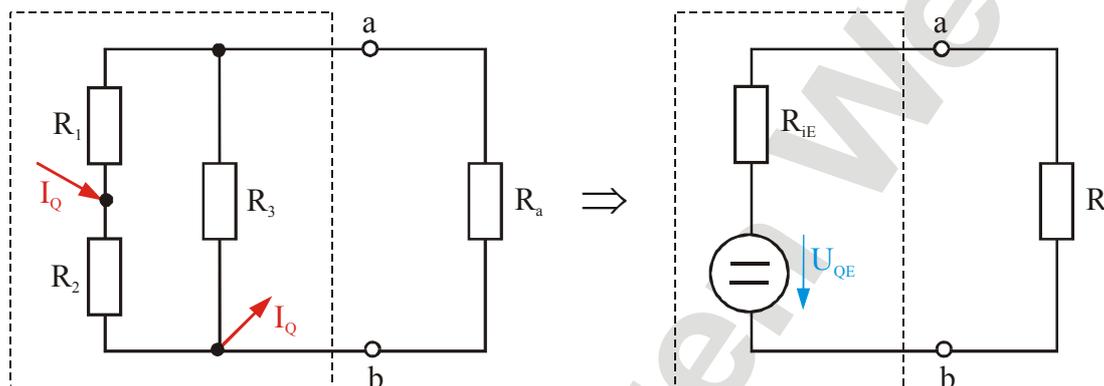
3.6.1 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Wie lassen sich Netzwerke, deren Verhalten nur an zwei Klemmen von Interesse ist, interpretieren?
- 2) Durch welche Ersatzschaltungen lassen sich aktive lineare Zweipole darstellen?

- 3) Zählen Sie die drei Möglichkeiten auf, durch die sich die Elemente der Ersatzquellen eines aktiven linearen Zweipols berechnen lassen.
- 4) Wie berechnet man den Ersatzinnenwiderstand eines aktiven linearen Zweipols?

Aufgabe 3.6.1-1:

Wandeln Sie die nachfolgende Schaltung bezüglich der Klemmen a und b in eine Ersatzspannungsquelle um und berechnen Sie deren Elemente U_{QE} und R_{iE} .



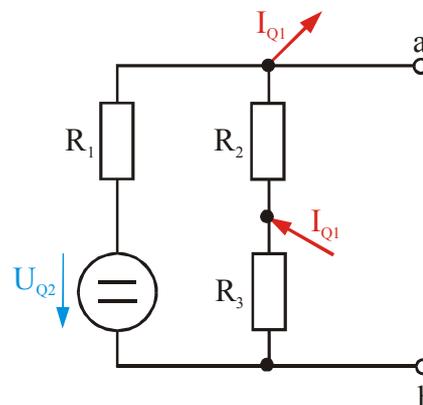
Gegebene Werte: $I_Q = 10\text{mA}$; $R_1 = 100\Omega$; $R_2 = 100\Omega$; $R_3 = 200\Omega$; $R_a = 100\Omega$

(Lösung: $R_{iE} = 100\Omega$; $U_{QE} = 0,5\text{V}$)

Aufgabe 3.6.1-2:

Wandeln Sie in der nebenstehenden Schaltung mit den Werten

- $R_1 = 2\text{k}\Omega$
- $R_2 = 1\text{k}\Omega$
- $R_3 = 1\text{k}\Omega$
- $I_{Q1} = 10\text{mA}$
- $U_{Q2} = 20\text{V}$



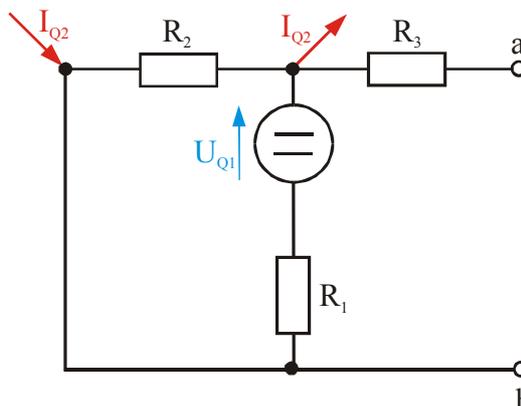
zunächst die Stromquelle in eine Spannungsquelle um. Ermitteln Sie danach die Elemente einer Ersatzstromquelle bezüglich der Klemmen a und b.

(Lösung: $U_{Q1} = 10\text{V}$; $I_{QE} = 5\text{mA}$;
 $G_{iE} = 1\text{mS}$)

Aufgabe 3.6.1-3:

Wandeln Sie in der nebenstehenden Schaltung mit den Werten

- $R_1 = 3\text{k}\Omega$
- $R_2 = 3\text{k}\Omega$



$$R_3 = 10\text{k}\Omega$$

$$U_{Q1} = 12\text{V}$$

$$I_{Q2} = 10\text{mA}$$

zunächst die Spannungsquelle in eine Stromquelle um. Ermitteln Sie danach die Elemente einer Ersatzspannungsquelle bezüglich der Klemmen a und b.

(Lösung: $I_{Q1} = 4\text{mA}$; $U_{QE} = -21\text{V}$; $R_{iE} = 11,5\text{k}\Omega$)

Aufgabe 3.6.1-4:

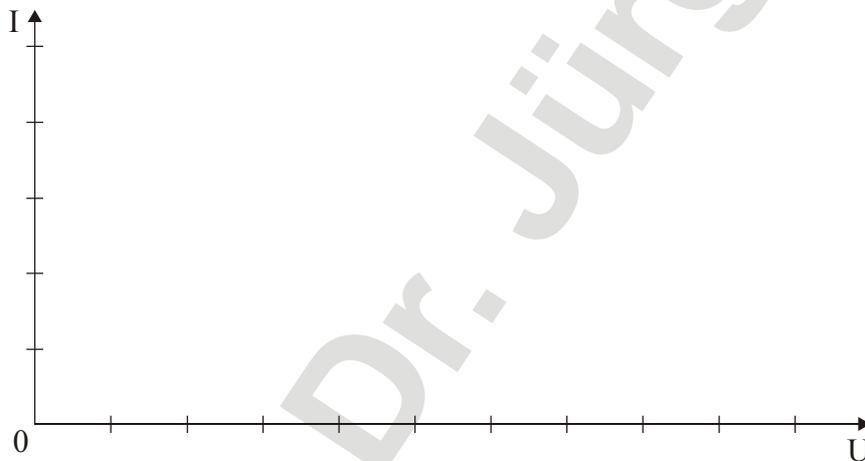
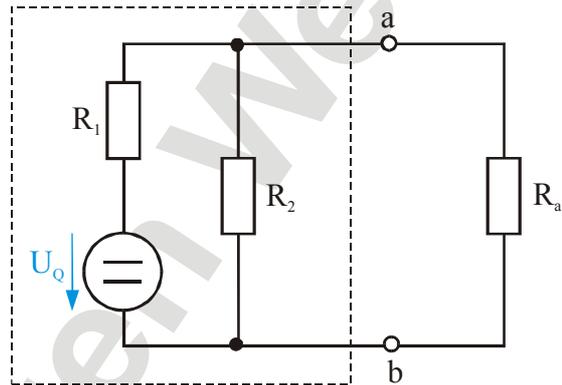
Ermitteln Sie mit Hilfe des unten stehenden Diagramms graphisch den Arbeitspunkt I_A und U_A der nebenstehenden Schaltung mit den Werten:

$$U_Q = 20\text{V}$$

$$R_1 = 100\Omega$$

$$R_2 = 33,33\Omega$$

$$R_a = 50\Omega$$



(Lösung: $U_A = 3,33\text{V}$; $I_A = 67\text{mA}$)

3.7 Leistungsanpassung

3.7.1 Anpassungsbedingung

In dem Netzwerk nach Bild 3.7.1-1 findet eine Leistungsumsetzung im Abschlusswiderstand R_a nach der Beziehung

$$P_a = U_a \cdot I_a \quad 3.7.1-1$$

statt. Auf Grund dessen, dass weder im Leerlauf ($R_a = \infty$) noch im Kurzschlussfall ($R_a = 0$) eine Leistung im Verbraucherwiderstand umgesetzt wird, muss ein Leistungsmaximum $P_{a \max}$ für einen Abschlusswiderstand

$$0 < R_a < \infty$$

existieren. Nach den Gleichungen 3.5.1.1-7 und 3.5.1.1-8 berechnet sich der Ausgangsstrom des belasteten Netzwerks nach Bild 3.7.1-1 zu

$$I_a = \frac{U_Q}{R_{iQ} + R_a}$$

und die Ausgangsspannung zu

$$U_a = I_a \cdot R_a = U_Q \cdot \frac{R_a}{R_{iQ} + R_a}$$

Für die im Abschlusswiderstand umgesetzte Leistung ergibt sich danach

$$P_a = U_Q^2 \cdot \frac{R_a}{(R_{iQ} + R_a)^2} = P_a(R_a) \quad 3.7.1-2$$

Aus der Ableitung

$$\frac{dP_a}{dR_a} = \frac{U_Q^2 \cdot ((R_{iQ} + R_a)^2 - 2 \cdot R_a \cdot (R_{iQ} + R_a))}{(R_{iQ} + R_a)^4} = 0 \quad 3.7.1-3$$

berechnet sich der Abschlusswiderstand R_a , in dem die maximale Leistung umgesetzt wird, zu:

$$R_a = R_{iQ} \quad 3.7.1-4$$

Die maximale Leistung, die damit eine Spannungsquelle an einen Abschlusswiderstand abgeben kann, ergibt sich somit zu:

$$P_{a \max} = \frac{U_Q^2}{4 \cdot R_{iQ}} \quad 3.7.1-5$$

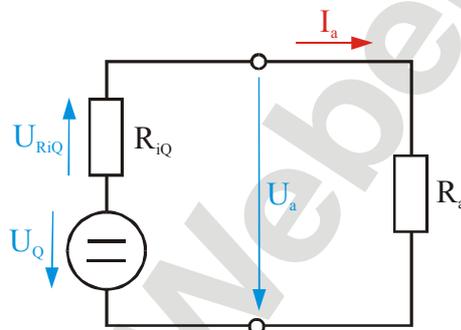
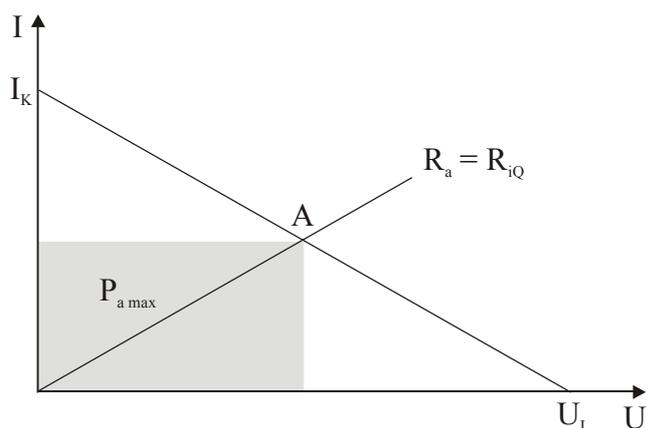


Bild 3.7.1-1: Belastetes Netzwerk

Dieses Ergebnis lässt sich direkt auf eine Stromquelle übertragen.

Im Fall der maximalen Leistungsumsetzung im Abschlusswiderstand R_a spricht man von Leistungsanpassung.

Leistungsanpassung liegt vor, wenn eine Quelle mit dem Innenwiderstand R_{iQ} bzw. dem Innenleitwert G_{iQ} mit einem Abschlusswiderstand $R_a = R_{iQ}$ bzw. einem Verbraucherleitwert $G_a = G_{iQ}$ belastet wird.



Dieser Sachverhalt lässt sich auch in der Strom-Spannungs-Charakteristik nach Bild 3.7.1-2 verdeutlichen. Haben die Quellenkennlinie und Kennlinie des Abschlusswiderstands betragsmäßig die gleiche Steigung, so ergibt sich für das Rechteck, das durch den Arbeitspunkt begrenzt wird, die maximale Fläche. Die Fläche P_a berechnet sich aus

$$P_a = U_A \cdot I_A \quad 3.7.1-6$$

Bild 3.7.1-2: Maximale Leistungsumsetzung im Abschlusswiderstand

und repräsentiert damit die Leistungsumsetzung im Abschlusswiderstand im Arbeitspunkt.

3.7.2 Der Wirkungsgrad

Bei der Belastung einer Spannungsquelle mit dem Abschlusswiderstand R_a muss die innere Spannungsquelle U_Q die Gesamtleistung

$$P_{Qges} = \frac{U_Q^2 \cdot R_a}{(R_{iQ} + R_a)^2} + \frac{U_Q^2 \cdot R_{iQ}}{(R_{iQ} + R_a)^2} = \frac{U_Q^2}{R_{iQ} + R_a} \quad 3.7.2-1$$

aufbringen. Bildet man den Quotienten P_a/P_{Qges} , so erhält man die Definition für den Wirkungsgrad η der Quelle:

$$\eta = \frac{P_a}{P_{Qges}} = \frac{R_a}{R_{iQ} + R_a} = \frac{R_a/R_{iQ}}{1 + R_a/R_{iQ}} \quad 3.7.2-2$$

Im Fall der Leistungsanpassung $R_a/R_{iQ} = 1$ erhält man den Wir-

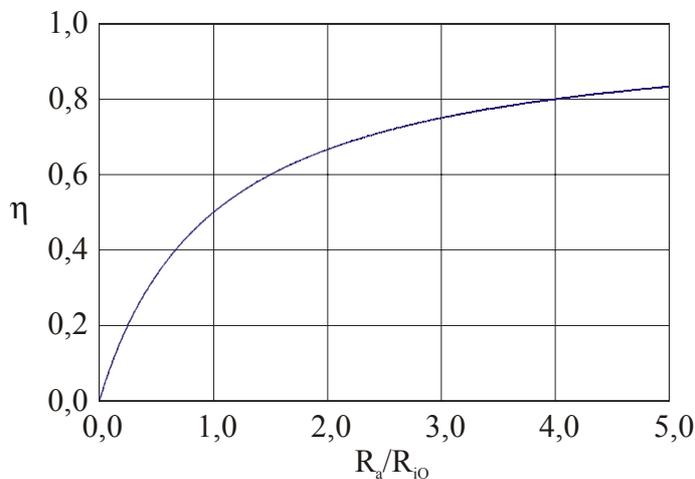


Bild 3.7.2-1: Verlauf des Wirkungsgrades

kungsgrad $\eta = 0,5$. Bild 3.7.2-1 stellt den Verlauf des Wirkungsgrades über dem normierten Widerstand R_a/R_{iQ} dar.

3.7.3 Der Ausnutzungsgrad

Bei der Belastung der Quelle im Kurzschlussfall muss die innere Spannungsquelle U_Q die Kurzschlussleistung

$$P_{QK} = U_Q \cdot I_K = \frac{U_Q^2}{R_{iQ}} = P_{Qmax} \quad 3.7.3-1$$

als die maximale Leistung aufbringen.

Bildet man nun den Quotienten P_a/P_{QK} , so erhält man den Ausnutzungsgrad ε der Quelle:

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \frac{P_a}{P_{QK}} = \frac{R_{iQ} \cdot R_a}{(R_{iQ} + R_a)^2} \\ &= \frac{R_a/R_{iQ}}{(1 + R_a/R_{iQ})^2} \quad 3.7.3-2 \end{aligned}$$

Im Fall der Leistungsanpassung erhält man für den Ausnutzungsgrad den maximalen Wert $\varepsilon = 0,25$.

Bild 3.7.3-1 stellt den Verlauf des Ausnutzungsgrades über dem bezogenen Widerstand R_a/R_{iQ} dar.

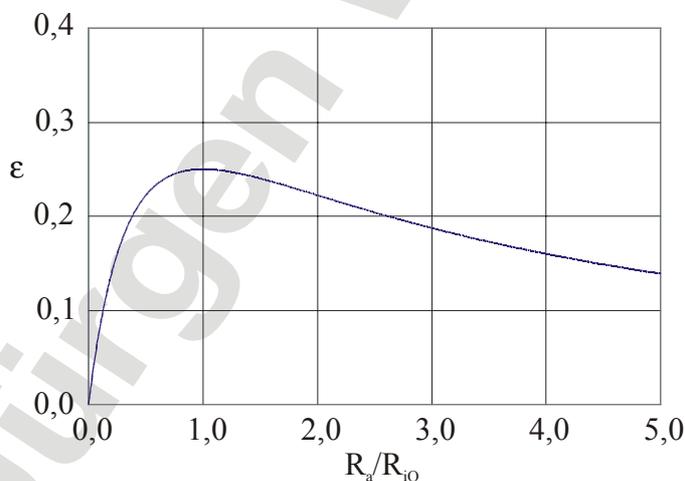


Bild 3.7.3-1: Verlauf des Ausnutzungsgrades

3.7.4 Anpassungskriterien

Im Fall der Leistungsanpassung ist zu beachten, dass nicht nur im Abschlusswiderstand die maximale Leistung umgesetzt wird, sondern auch in der Quelle selbst die gleiche Leistung im Innenwiderstand bzw. im Innenleitwert umgesetzt wird. Dies kann zu erheblichen Problemen führen und ist damit nicht immer erwünscht.

In der Nachrichtentechnik, wo man es im Allgemeinen mit beträchtlichen Längen bei den Übertragungswegen zu tun hat, sind die Leistungen, die zu einem Empfänger gelangen, sehr niedrig. Ohne Rücksicht auf entstehende Verluste soll dann die maximale Leistung aus dem schwachen Signal zur Weiterverarbeitung gewonnen werden. In diesem Fall wird man immer die Leistungsanpassung anstreben.

$$\text{Forderung in der Nachrichtentechnik} \quad R_a = R_{iQ} \quad 3.7.4-1$$

In der Energietechnik sollen große Leistungen zum Verbraucher übertragen werden. Die im Innenwiderstand des Generators umgesetzte Leistung darf auf Grund der Wirtschaftlichkeit und der damit verbundenen Wärmeentwicklung nicht groß werden. Hier wird man den Fall, dass der Abschlusswiderstand wesentlich größer als der Innenwiderstand ist, der Leistungsanpassung vorziehen.

Forderung in der Energietechnik

$$R_a \gg R_{iQ}$$

3.7.4-2

3.7.5 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Was versteht man unter Leistungsanpassung?
- 2) Welches Verhältnis haben bezogen auf die Energietechnik die Widerstände R_{iQ} und R_a zueinander?
- 3) Welches Verhältnis haben bezogen auf die Nachrichtentechnik die Widerstände R_{iQ} und R_a zueinander?

Aufgabe 3.7.5-1:

Ermitteln Sie für das nebenstehende Netzwerk mit den Werten

$$U_{Q1} = 15V$$

$$U_{Q2} = 20V$$

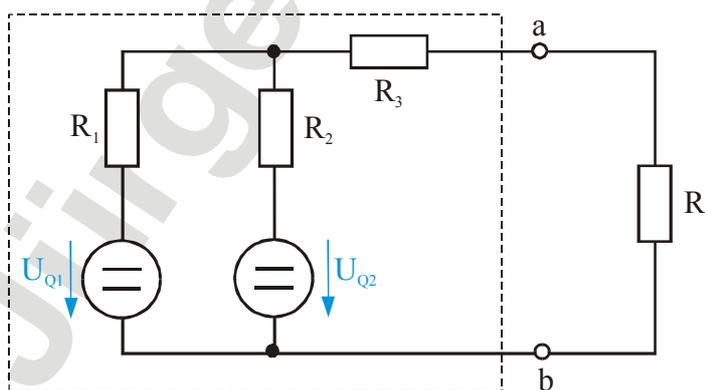
$$R_1 = 500\Omega$$

$$R_2 = 2k\Omega$$

$$R_3 = 1k\Omega$$

die maximale Leistung, die in einem Abschlusswiderstand R_a umgesetzt werden kann. Variieren Sie ferner den berechneten Abschlusswiderstand um plus und minus 10% und berechnen Sie die sich dann ergebenden Leistungen, die im Abschlusswiderstand umgesetzt werden.

(Lösung: $P_{a\max} = 45,7mW$; $P_{a+} = 45,6mW$; $P_{a-} = 45,6mW$)



3.8 Der Spannungsteiler

In der Praxis benötigt man oft Spannungen, die als Teilspannungen von einer größeren Gesamtspannung abgegriffen werden. Als Beispiel sei hier nur auf die Arbeitspunkteinstellung eines Transistors hingewiesen, die im Teil II des Skriptes behandelt wird. Die einfachste Art, eine gewünschte Spannung aus einer beliebig größeren Spannung zu gewinnen, stellt der ohmsche Spannungsteiler dar, der allein aus ohmschen Widerständen R aufgebaut ist.

3.8.1 Der unbelastete Spannungsteiler

Der Spannungsteiler lässt sich durch zwei Arten von Widerständen aufbauen:

1. Aus einem Schleiferwiderstand R_S , mit dem man in der Lage ist, durch stufenlose Variation der Schleiferstellung eine gewünschte Spannung an den Ausgangsklemmen einzustellen.
2. Aus zwei diskreten Widerständen, womit ein festes Spannungsteilverhältnis vorliegt.

Bild 3.8.1-1 zeigt einen Spannungsteiler mit einem Schleiferwiderstand R_S , der als aufgeteilter Widerstand in die Teilwiderstände R_1 unterhalb des Schleifers parallel zum Ausgang und R_2 oberhalb des Schleifers interpretiert wird.

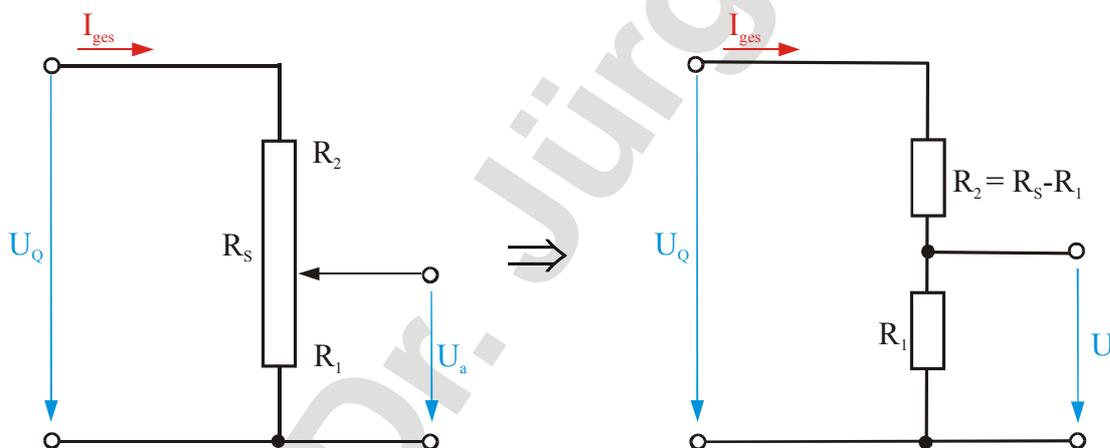


Bild 3.8.1-1: Der unbelastete Spannungsteiler mit Schleiferwiderstand

Durch R_S fließt der Gesamtstrom I_{ges} , der am Teilwiderstand R_1 und damit am Ausgang den Spannungsabfall

$$U_a = I_{ges} \cdot R_1 = \frac{U_Q}{R_S} \cdot R_1 = U_Q \cdot \frac{R_1}{R_1 + R_2} = U_Q \cdot g \quad 3.8.1-1$$

zur Folge hat. Mit dem Schleifer lässt sich nun für U_a jede Spannung zwischen 0 und U_Q einstellen, so dass der eingeführte normierte Wert g wegen

$$g = \frac{R_1}{R_1 + R_2} = \frac{U_a}{U_Q} \quad 3.8.1-2$$

zwischen 0 und 1 liegen kann. Damit scheint der Spannungsteiler nach Bild 3.8.1-1 eine ideale Schaltung zur Erzeugung beliebiger Teilspannungen von U_Q zu sein. Zu bedenken ist jedoch dabei, dass bei dem betrachteten Spannungsteiler über den Schleifer kein Ausgangsstrom fließt und somit die Ausgangsspannung unbelastet im Leerlauf betrieben wird.

3.8.2 Der belastete Spannungsteiler

3.8.2.1 Der belastete Spannungsteiler als Ersatzspannungsquelle

Um die Eigenschaften des belasteten Spannungsteilers zu analysieren, ist es zweckmäßig, den Spannungsteiler als Ersatzspannungsquelle zu interpretieren. Bild 3.8.2.1-1 zeigt diese Interpretation, wobei nicht vergessen werden darf, dass weder die Ersatzquellenspannung wegen

$$U_{QE} = U_Q \cdot \frac{R_1}{R_s} = U_Q \cdot g \quad 3.8.2.1-1$$

noch der Innenwiderstand wegen

$$R_{iE} = R_1 // R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_s} = g \cdot R_2 = g \cdot (1 - g) \cdot R_s \quad 3.8.2.1-2$$

fixe Werte darstellen. Eine Änderung der Schleiferstellung g zieht sofort eine Änderung der Werte der Elemente der Ersatzspannungsquelle nach sich.

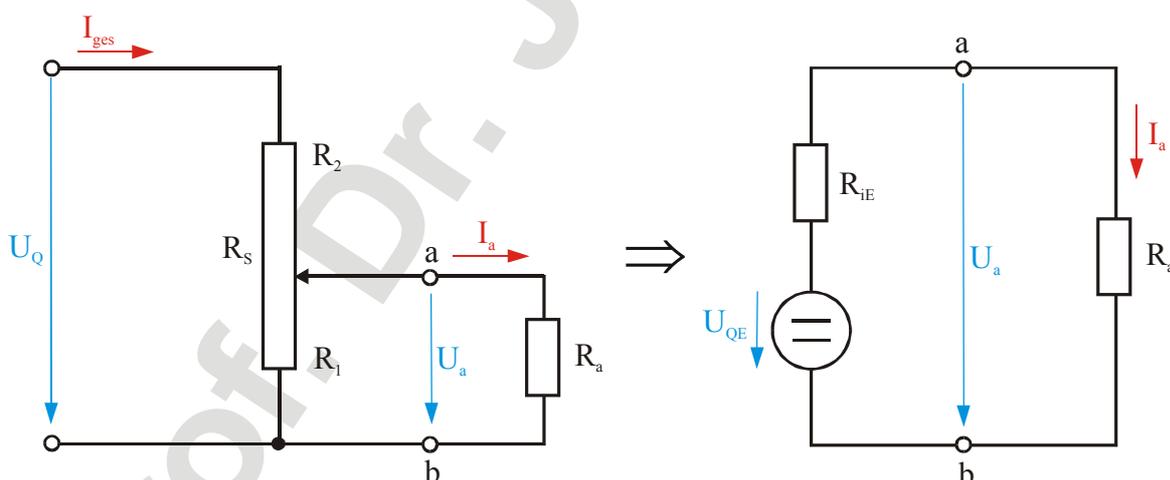


Bild 3.8.2.1-1: Der belastete Spannungsteiler als Ersatzspannungsquelle

3.8.2.2 Die Einstellkennlinie

Durch die Belastung des Spannungsteilers wird die Ausgangsspannung U_a nicht mehr allein von der Schleiferstellung g abhängen. Eine wichtige Rolle spielt jetzt auch der Wert des Ab-

schlusswiderstands R_a im Vergleich zum Wert des Schleiferwiderstands R_s . Deshalb wird für die folgende Betrachtung die normierte Darstellung

$$p = \frac{R_s}{R_a} \quad 3.8.2.2-1$$

eingeführt.

Der maximale Ausgangsstrom $I_{a \max}$ und die maximale Ausgangsspannung $U_{a \max}$ stellen sich bei einer Schleiferstellung $g = 1$ ein. Hier wird der Teilwiderstand $R_1 = R_s$ und der Teilwiderstand $R_2 = 0$. Unter Berücksichtigung der Formeln 3.8.2.1-1 und 3.8.2.1-2 ergeben sich

$$I_{a \max} = \frac{U_Q}{R_a} \quad 3.8.2.2-2$$

und

$$U_{a \max} = U_Q \cdot \quad 3.8.2.2-3$$

Bezieht man nun den Ausgangsstrom I_a und die Ausgangsspannung U_a auf die jeweils maximalen Werte $I_{a \max}$ bzw. $U_{a \max}$ und stellt diese normierten Größen über der Schleiferstellung $g = R_1/R_s$ dar, so ergibt sich die so genannte Einstellkennlinie. Bild 3.8.2.2-1 zeigt das Einstellkennlinienfeld mit dem Parameter $p = R_s/R_a$. Dieses Kennlinienfeld, das die Nichtlinearität der Kennlinie bei Belastung darstellt, berechnet sich unter Berücksichtigung der Formeln 3.8.2.1-1 und 3.8.2.1-2 nach der Gleichung:

$$\frac{I_a}{I_{a \max}} = \frac{U_{QE}}{R_{iE} + R_a} \cdot \frac{R_a}{U_Q} = \frac{g \cdot R_a}{g \cdot (1-g) \cdot R_s + R_a} = \frac{g}{1 + p \cdot g \cdot (1-g)} \quad 3.8.2.2-4$$

Ferner gilt:

$$\frac{U_a}{U_{a \max}} = \frac{I_a \cdot R_a}{U_Q} = \frac{I_a}{I_{a \max}} \quad 3.8.2.2-5$$

Bild 3.8.2.2-1 lässt erkennen, dass mit steigender Belastung durch R_a , die Einstellkennlinie vom linearen und damit optimalen Verlauf immer weiter abweicht. Um einen annähernd linearen Verlauf der Kennlinie zu gewährleisten, muss das Verhältnis p im Bereich von 0 bis 2 gewählt werden. Damit verbunden ist allerdings immer ein nicht zu vernachlässigender Strom

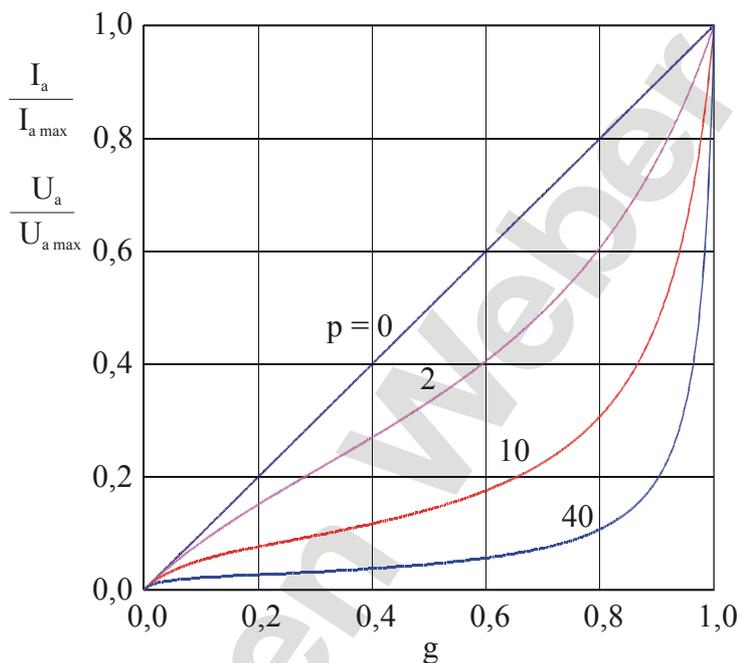


Bild 3.8.2.2-1: Einstellkennlinienfeld mit Parameter p

über den Teilwiderstand R_1 , der zusammen mit dem Ausgangsstrom I_a über den Teilwiderstand R_2 fließen muss. Die damit im Schleiferwiderstand R_S umgesetzte Leistung muss zusätzlich zu der im Abschlusswiderstand R_a umgesetzten Leistung von der Quelle aufgebracht werden.

3.8.3 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Unter welchen Voraussetzungen ist die Schleiferspannung eines Spannungsteilers proportional zur Schleiferstellung?
- 2) Für welche Schleiferstellung g unabhängig von p stellt sich bei einem Spannungsteiler die maximale Ausgangsspannung ein?
- 3) Welchen Wert sollte ein Abschluss R_a , der einen Spannungsteiler mit dem Schleiferwiderstand $R_S = 5\text{k}\Omega$ belastet, nicht unterschreiten, um die Nichtlinearität der Einstellkennlinie tolerable zu halten?
- 4) Für einen Spannungsteiler mit Schleiferwiderstand wird das Verhältnis $p = R_S/R_a = 40$ und damit extrem hoch gewählt, so dass die Einstellkennlinie eine starke Nichtlinearität aufweist. Beschreiben Sie die Beobachtung, die ein Anwender macht, der den Schleifer kontinuierlich über den Schleiferwiderstand bewegt und dabei die Ausgangsspannung U_a betrachtet.
- 5) Zur Analyse eines Spannungsteilers bietet es sich an, den Spannungsteiler als Ersatzspannungsquelle darzustellen. Was ist bei dieser Ersatzspannungsquelle zu beachten?

Aufgabe 3.8.3-1:

Ein Spannungsteiler mit den Widerständen R_1 und R_2 , dessen Ausgangsklemmen parallel zu R_1 angeordnet sind, wird an eine Spannungsquelle $U_Q = 100\text{V}$ gelegt. Bei Belastung mit dem Strom $I_{a1} = 0,5\text{A}$ stellt sich eine Verbraucherspannung $U_{a1} = 54\text{V}$ ein, während eine Belastung mit $I_{a2} = 1,2\text{A}$ zu einer Verbraucherspannung $U_{a2} = 38\text{V}$ führt. Bestimmen Sie die Widerstände R_1 und R_2 . Für welche Leistung müssen diese Widerstände ausgelegt sein?

(Lösung: $R_1 = 66,12\Omega$; $R_2 = 34,92\Omega$; $P_{R1} = 64,8\text{W}$; $P_{R2} = 286,4\text{W}$)

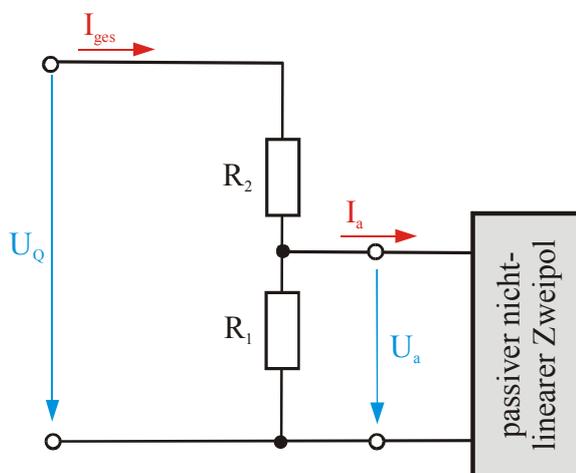
Aufgabe 3.8.3-2:

Der nebenstehende Spannungsteiler mit den Werten

$$\begin{aligned} U_Q &= 20\text{V} \\ R_1 &= 2\text{k}\Omega \\ R_2 &= 1\text{k}\Omega \end{aligned}$$

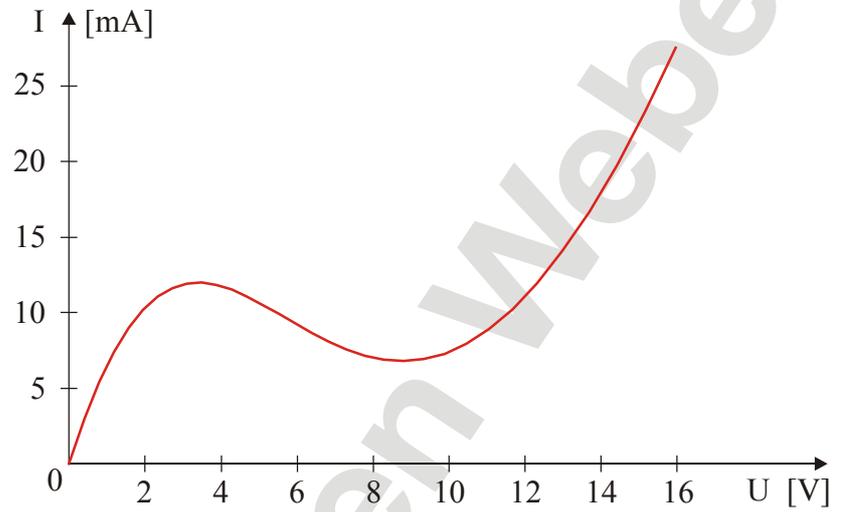
wird mit einem passiven nicht-linearen Zweipol belastet, dessen Strom-Spannungs-Charakteristik durch die nachfolgende Kennlinie gegeben ist.

Bestimmen Sie die Spannung U_a und den



Strom I_a der Schaltung.

(Lösung: $U_a = 8,8\text{V}$; $I_a = 6,5\text{mA}$)



3.9 Analyse von Netzwerken mit linearen Bauelementen

In diesem Abschnitt soll die Analyse gegebener Netzwerke behandelt werden. Unter Analyse versteht man hierbei, dass in einem Netzwerk mit bekannten Quellen und bekannten Widerstandswerten die gesamte Strom- und Spannungsaufteilung sowie die Leistungsverteilung berechnet werden soll. Dabei bietet es sich an, die Matrixschreibweise einzuführen, mit deren Hilfe dann ein Rechner die sonst zeitlich aufwändigen numerischen Berechnungen durchführt.

Bei der Analyse von Netzwerken handelt es sich um ein formales Vorgehen, das am besten an Hand eines Beispiels erklärt werden kann und von dem dann auf allgemeine Netzwerke geschlossen wird. Bild 3.9-1 zeigt ein Netzwerk, das die folgende Abhandlung als Beispiel begleiten wird.

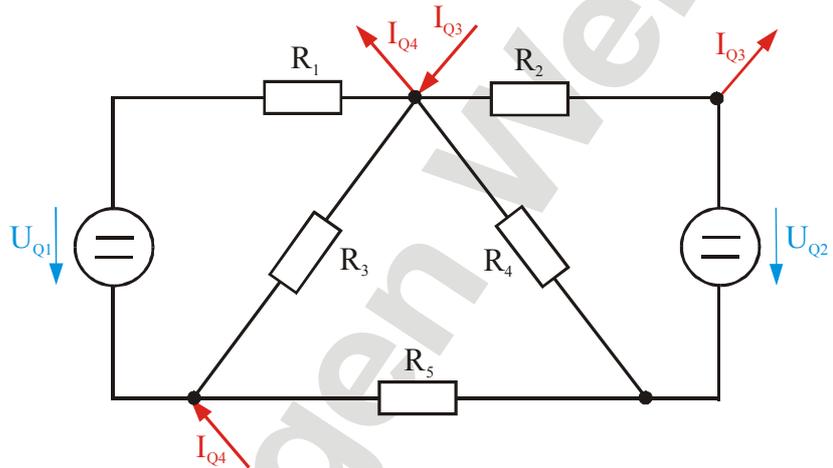


Bild 3.9-1: Beispielnetzwerk zur Behandlung der Netzwerkanalyse

In dem Beispielnetzwerk nach Bild 3.9-1 werden die beiden Spannungsquellen U_{Q1} und U_{Q2} , die beiden Stromquellen I_{Q3} und I_{Q4} sowie die Werte aller 5 Widerstände als bekannt vorausgesetzt. Möchte man jetzt die Leistungsverteilung innerhalb des Netzwerks ermitteln, so benötigt man zunächst alle Strom- und Spannungsaufteilungen. Um hierbei formal vorzugehen, wird zunächst der Graph dieses Netzwerks entwickelt.

3.9.1 Der Graph eines Netzwerks

Der Graph eines Netzwerks stellt ein zweidimensionales Gebilde dar, das mit Linien die Topologie des Netzwerks nachbildet. Das bedeutet, dass alle Zweige des Netzwerks als Linien

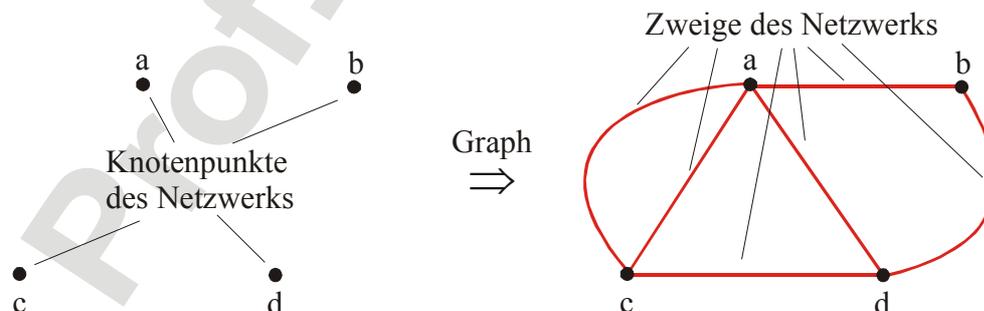


Bild 3.9.1-1: Entwicklung des Graphen für das Beispielnetzwerk

dargestellt werden. Dabei orientiert man sich am besten an den Knotenpunkten. Das Beispielnetzwerk nach Bild 3.9-1 hat 4 Knotenpunkte, die willkürlich durchnummeriert werden. Ausgehend von den 4 Knotenpunkten entwickelt sich der Graph des Netzwerks nach Bild 3.9.1-1.

Aus dem Graphen des Netzwerks entnimmt man, über wie viele Zweige das Netzwerk verfügt. Da jeder Zweig einen Zweigstrom führt, ergibt sich daraus die Anzahl der zu berechnenden Zweigströme. Damit liegt auch die Größe des Gleichungssystems fest.

Das Beispielnetzwerk verfügt über 6 Zweige. Damit benötigt man zur Analyse die 6 entsprechenden Zweigströme, woraus ein Gleichungssystem mit 6 linear unabhängigen Gleichungen für 6 Unbekannte resultiert. Es sei an dieser Stelle daran erinnert, dass über Stromquellen keine Zweige führen.

Hat man die Anzahl der Zweige und der damit verbundenen Zweigströme ermittelt, werden die Zweigströme durch Zählpfeile und entsprechende Bezeichnungen in das ursprüngliche Netzwerk eingezeichnet.

Liegen bereits Zählpfeile für die Zweigströme vor, so werden diese übernommen. Sonst können die Richtungen der Zählpfeile beliebig gewählt werden. Gleichzeitig werden auch die gegebenenfalls auftretenden Spannungsabfälle an den Widerständen in den einzelnen Zweigen durch Zählpfeile und Bezeichnungen eingetragen.

Auch hier sind die Richtungen der einzelnen Zählpfeile für die Spannungsabfälle wieder frei wählbar und brauchen nicht mit der Zählpfeilrichtung der entsprechenden Zweigströme übereinstimmen.

Bild 3.9.1-2 zeigt das Beispielnetzwerk nach der Eintragung aller Zählpfeile für die Zweigströme und die Spannungen.

Ein Netzwerk besteht aus

- k Knoten und
- z Zweigen mit den entsprechenden Zweigströmen.

Stellt man jetzt für alle k Knoten eines Netzwerks die Knotengleichungen auf, so erhält man insgesamt k Gleichungen. Von diesen Gleichungen sind aber nur $r = (k - 1)$ Gleichungen linear unabhängig.

Die Anzahl von k Knoten eines Netzwerks liefert $r = k - 1$ linear unabhängige Gleichungen.

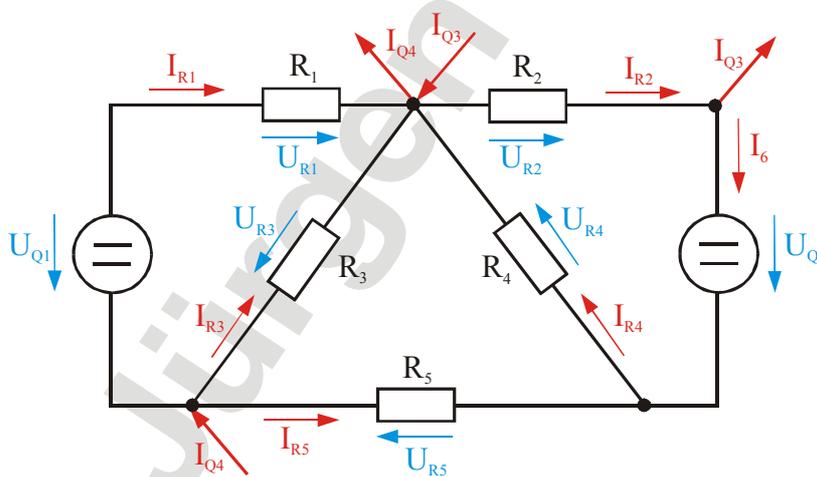


Bild 3.9.1-2: Beispielnetzwerk mit eingetragenen Zählpfeilen

Demnach fehlen noch

$$m = z - r = z - k - 1$$

3.9.1-1

linear unabhängige Gleichungen, um das Netzwerk analysieren zu können.

Für das Beispielnetzwerk erhält man bei $k = 4$ Knoten 3 linear unabhängige Gleichungen. Wegen $m = z - r = 6 - 3 = 3$, benötigt man noch weitere 3 linear unabhängige Gleichungen.

Die noch fehlenden m Gleichungen eines Netzwerks müssen aus Maschengleichungen gewonnen werden. Um hierfür eine formale Vorgehensweise zu zeigen, wird der Graph des Netzwerks in eine Baum- und Cobaumstruktur zerlegt.

3.9.2 Die Baum- und Cobaumstruktur

Der Graph eines Netzwerks wird durch dessen Zweige dargestellt. Eine Untermenge dieser Zweige bildet den vollständigen Baum nach dem folgenden Schema:

Der vollständige Baum eines Netzwerks wird aus den Zweigen gebildet, die maximal benötigt werden, um alle Knotenpunkte des Netzwerks miteinander zu verbinden. Dabei dürfen aber keine geschlossenen Maschen entstehen. Das heißt, dass k Knoten mit $r = k - 1$ Zweigen verbunden werden.

In dem Graphen eines Netzwerks sind abhängig von der Komplexität dieses Netzwerks eine Vielzahl von verschiedenen vollständigen Bäumen enthalten. Bei der Analyse benötigt man nur einen davon, den man frei wählen kann.

Für das Beispielnetzwerk sind als Auswahl im Bild 3.9.2-1 drei verschiedene vollständige Bäume dargestellt.

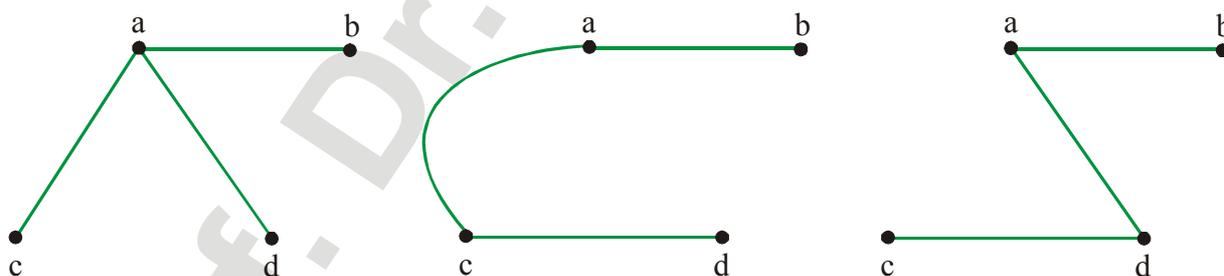


Bild 3.9.2-1: Auswahl von drei vollständigen Bäumen des Beispielnetzwerks

Die Zweige eines Netzwerks, die nicht im vollständigen Baum enthalten sind, bilden den Cobaum.

Der Cobaum eines Netzwerks wird aus den Zweigen gebildet, die nicht im vollständigen Baum enthalten sind. Er bildet ein System von $m = z - r$ unabhängigen Zweigen.

Die Anzahl der Zweige des Cobaums sind damit identisch mit der Anzahl der noch fehlenden linear unabhängigen Gleichungen, um das Netzwerk analysieren zu können (siehe Bild 3.9.2-2).

Für das Beispielnetzwerk ergibt sich für die im Bild 3.9.2-1 dargestellten Bäume das Baum-Cobaum-System nach Bild 3.9.2-3. Die Cobaum-Struktur dient dazu, die noch fehlenden 3 linear unabhängigen Maschengleichungen für das Beispielnetzwerk aufzustellen. Dabei geht man so vor, dass die Maschen entlang der Zweige des Baumes und einem Zweig des Cobaums geführt werden. Wie viele Zweige des Baumes dabei erfasst werden, ist dabei nicht von Bedeutung. In der Natur der Sache liegt, dass mindestens ein

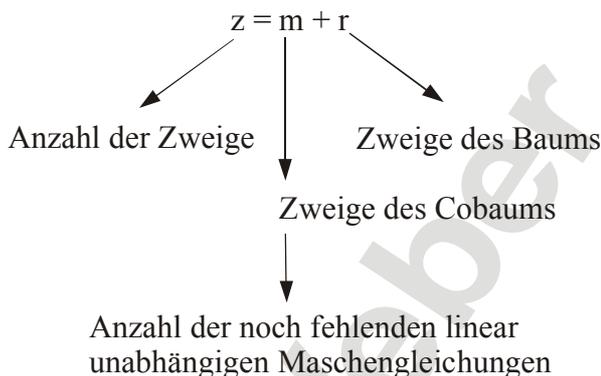


Bild 3.9.2-2: Baum- und Cobaumstruktur

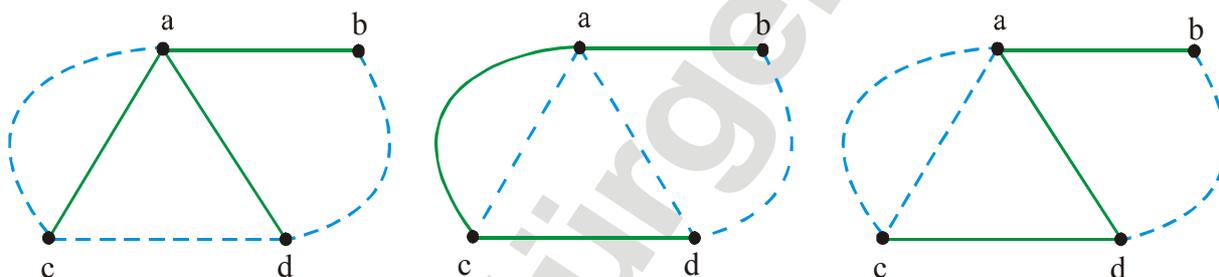


Bild 3.9.2-3: Baum-Cobaum-Struktur

Zweig des Baumes dabei durchlaufen wird. Es darf aber immer nur ein Zweig des Cobaums in jeder Masche enthalten sein. Für die Baum-Cobaum-Strukturen nach Bild 3.9.2-3 ergeben sich somit die im Bild 3.9.2-4 dargestellten Maschen. An dieser Stelle sei nochmals darauf hingewiesen, dass der Umlaufsinn jeder Masche frei gewählt werden kann.

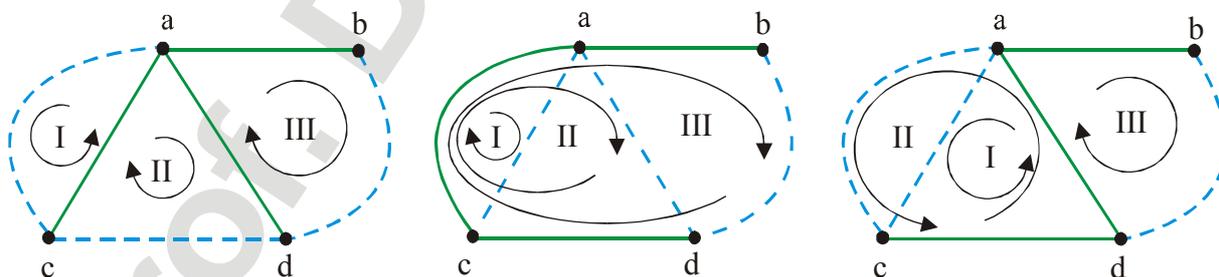


Bild 3.9.2-4: Maschen in der Baum-Cobaum-Struktur des Beispielnetzwerks

Die Cobaum-Struktur liefert die noch fehlenden linear unabhängigen Maschengleichungen. Dabei werden die einzelnen Maschen entlang der Zweige des Baumes und jeweils einem Zweig des Cobaums geführt.

Mit den Knotenpunktgleichungen und den Maschengleichungen liegt das gesamte Gleichungssystem fest. Die nächste Aufgabe besteht darin, dieses Gleichungssystem aufzustellen und in eine Matrix-Struktur zu überführen

3.9.3 Die Netzwerkmatrix

Für das Beispielnetzwerk mit den bereits eingetragenen Zählpfeilen für die Ströme und die Spannungen nach Bild 3.9.1-2 und der nach Bild 3.9.3-1 dargestellten Baum-Cobaum-Struktur sollen jetzt die Gleichungen aufgestellt werden. Für die Knotenpunktgleichungen werden willkürlich die Knotenpunkte a, b und c gewählt. Ferner wird für Ströme, die nach Zählpfeil auf den Knotenpunkt gerichtet sind, ein positives Vorzeichen festgelegt. Mit diesen Festlegungen lauten die Knotenpunktgleichungen wie folgt:

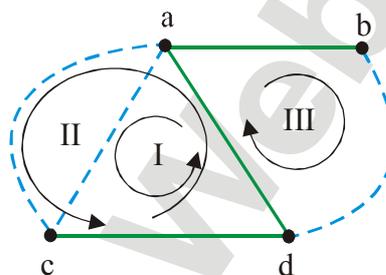


Bild 3.9.3-1: Baum-Cobaum-Struktur für die Analyse

$$\text{a) } I_{R1} - I_{R2} + I_{R3} + I_{R4} + I_{Q3} - I_{Q4} = 0 \quad 3.9.3-1$$

$$\text{b) } I_{R2} - I_{Q3} - I_6 = 0 \quad 3.9.3-2$$

$$\text{c) } -I_{R1} - I_{R3} - I_{R5} + I_{Q4} = 0 \quad 3.9.3-3$$

Für die Maschen I bis III nach Bild 3.9.3-1 ergeben sich ferner:

$$\text{I) } U_{R4} + U_{R3} - U_{R5} = I_{R4} \cdot R_4 - I_{R3} \cdot R_3 + I_{R5} \cdot R_5 = 0 \quad 3.9.3-4$$

$$\text{II) } U_{R4} - U_{R1} + U_{Q1} - U_{R5} = I_{R4} \cdot R_4 - I_{R1} \cdot R_1 + U_{Q1} + I_{R5} \cdot R_5 = 0 \quad 3.9.3-5$$

$$\text{III) } U_{Q2} + U_{R4} + U_{R2} = U_{Q2} + I_{R4} \cdot R_4 + I_{R2} \cdot R_2 = 0 \quad 3.9.3-6$$

Die Gleichungen werden jetzt nach den Strömen sortiert, wobei die Quellen auf die rechte Seite der Gleichungen geschrieben werden. Damit folgt:

$$\begin{array}{rcccccc} +I_{R1} & -I_{R2} & +I_{R3} & +I_{R4} & & = -I_{Q3} + I_{Q4} \\ & +I_{R2} & & & -I_6 & = I_{Q3} \\ -I_{R1} & & -I_{R3} & & -I_{R5} & = -I_{Q4} \\ & & -I_{R3} \cdot R_3 & +I_{R4} \cdot R_4 & +I_{R5} \cdot R_5 & = 0 \\ -I_{R1} \cdot R_1 & & & +I_{R4} \cdot R_4 & +I_{R5} \cdot R_5 & = -U_{Q1} \\ & +I_{R2} \cdot R_2 & & +I_{R4} \cdot R_4 & & = -U_{Q2} \end{array} \quad 3.9.3-7$$

Das Gleichungssystem 3.9.3-7 lässt sich jetzt in einer Matrixgleichung nach 3.9.3-8 formulieren, deren Lösungsmatrix die Spaltenmatrix der Zweigströme ist.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -R_3 & R_4 & R_5 & 0 \\ -R_1 & 0 & 0 & R_4 & R_5 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{R1} \\ I_{R2} \\ I_{R3} \\ I_{R4} \\ I_{R5} \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{Q3} + I_{Q4} \\ I_{Q3} \\ -I_{Q4} \\ 0 \\ -U_{Q1} \\ -U_{Q2} \end{pmatrix} \quad 3.9.3-8$$

Das Gleichungssystem besitzt jetzt die Form

$$\mathbf{M} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{S} \quad 3.9.3-9$$

mit der quadratischen Matrix \mathbf{M} , der Spaltenmatrix \mathbf{I} der zu ermittelnden Zweigströme und der Spaltenmatrix \mathbf{S} der Störungen, die hier durch die Quellen repräsentiert werden. Multipliziert man die Matrixgleichung 3.9.3-9 linksseitig mit der inversen Matrix von \mathbf{M} , so folgt

$$\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{M} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{S} \quad 3.9.3-10$$

und mit

$$\mathbf{I} = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{S} \quad 3.9.3-11$$

die Gleichung für die Zweigströme, die mit Hilfe eines Rechners ermittelt werden können. Zur Lösung dieser Matrixgleichung kann man auf Standardsoftware, wie zum Beispiel Excel zurückgreifen.

Nach der Berechnung der Zweigströme lassen sich die einzelnen Spannungsabfälle an den Widerständen und die Leistungsverteilung auf die einzelnen Bauelemente des Netzwerks ermitteln.

3.9.4 Das Superpositionsverfahren

Das Superpositionsverfahren, auch Überlagerungsverfahren genannt, ist mit der Nutzung der Matrizenberechnung durch einen Rechner bedeutungslos geworden. Trotzdem soll an dieser Stelle kurz auf das Prinzip eingegangen werden, da es für kleine Netzwerke, für die sich das Aufstellen der Netzwerkmatrix nicht lohnt, durchaus Vorteile beinhaltet, um zu einer schnellen Lösung zu finden.

Das Prinzip soll wieder an dem Beispielnetzwerk nach Bild 3.9.1-2 erläutert werden. Das Netzwerk verfügt über vier Quellen; zwei Spannungs- und zwei Stromquellen. Bei dem Superpositionsverfahren werden jetzt nacheinander alle Quellen bis auf eine eliminiert. Dabei werden eliminierte Spannungsquellen durch einen Kurzschluss ersetzt, während eliminierte Stromquellen entfernt werden. Für die Spaltenmatrix \mathbf{S} der Störungen nach Gleichung 3.9.3-8 ergeben sich so vier verschiedene Spaltenmatrizen \mathbf{S}_1 bis \mathbf{S}_4 , bei der in jeder einzelnen nur noch eine Strom- oder Spannungsquelle vorkommt. Löst man jetzt die Matrixgleichung 3.9.3-11 jeweils mit den Spaltenmatrizen \mathbf{S}_1 bis \mathbf{S}_4 , so erhält man ebenfalls vier verschiedene Teillösungen, die dann zum Gesamtergebnis für die Zweigströme addiert werden müssen.

Für die Spaltenmatrizen \mathbf{S}_1 bis \mathbf{S}_4 folgt somit

$$\mathbf{S}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -U_{Q1} \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -U_{Q2} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S}_3 = \begin{pmatrix} -I_{Q3} \\ I_{Q3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{S}_4 = \begin{pmatrix} I_{Q4} \\ 0 \\ -I_{Q4} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 3.9.4-1$$

woraus sich die Matrixgleichungen

$$\mathbf{I}_1 = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{S}_1; \quad \mathbf{I}_2 = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{S}_2; \quad \mathbf{I}_3 = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{S}_3; \quad \mathbf{I}_4 = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{S}_4 \quad 3.9.4-2$$

ergeben. Die Zweigströme erhält man durch

$$\mathbf{I} = \mathbf{I}_1 + \mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3 + \mathbf{I}_4. \quad 3.9.4-3$$

Das Superpositionsverfahren kann nur bei Netzwerken mit linearen Bauelementen angewandt werden. Darüber hinaus dürfen diese Netzwerke keine gesteuerten Quellen enthalten.

3.9.5 Netzwerke mit gesteuerten Quellen

Unter gesteuerten Quellen versteht man Spannungs- und Stromquellen, deren Wert durch externe physikalische Größen eingestellt wird. Als eine solche Größe kann auch ein Strom bzw. ein Spannungsabfall innerhalb eines Netzwerks auftreten, der eine Quelle innerhalb des selben Netzwerks steuert. Die Behandlung eines Netzwerks mit gesteuerten Quellen soll an einem Beispiel in Anlehnung an das

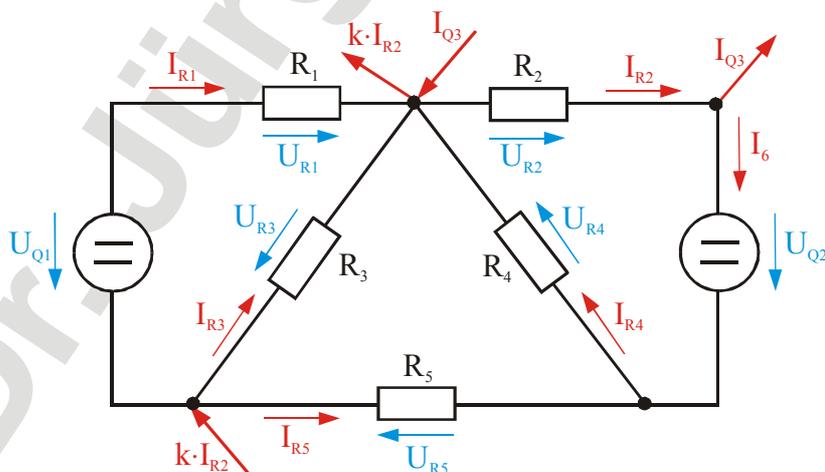


Bild 3.9.5-1: Beispielnetzwerk mit gesteuerte Quelle

Beispielnetzwerk im Bild 3.9.1-2 durchgeführt werden. Bild 3.9.5-1 zeigt ein Beispielnetzwerk, in dem die Stromquelle $k \cdot I_{R2}$ durch den Strom I_{R2} gesteuert wird.

Für die Knotenpunktgleichungen 3.9.3-1 bis 3.9.3-3 ergeben sich dann die folgenden neuen Ansätze:

$$a) \quad I_{R1} - I_{R2} + I_{R3} + I_{R4} + I_{Q3} - k \cdot I_{R2} = 0 \quad 3.9.5-1$$

$$b) \quad I_{R2} - I_{Q3} - I_6 = 0 \quad 3.9.5-2$$

$$c) \quad -I_{R1} - I_{R3} - I_{R5} + k \cdot I_{R2} = 0 \quad 3.9.5-3$$

Für die Netzwerkmatrix folgt dann:

$$\begin{pmatrix} 1 & -(1+k) & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & k & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -R_3 & R_4 & R_5 & 0 \\ -R_1 & 0 & 0 & R_4 & R_5 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & R_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{R1} \\ I_{R2} \\ I_{R3} \\ I_{R4} \\ I_{R5} \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_{Q3} \\ I_{Q3} \\ 0 \\ 0 \\ -U_{Q1} \\ -U_{Q2} \end{pmatrix} \quad 3.9.5-4$$

Das Gleichungssystem nach 3.9.5-4 lässt sich dann wieder mit Hilfe eines Rechners lösen.

Gesteuerte Quellen benutzt man häufig in Ersatzschaltungen für Halbleiterbauelemente, wie zum Beispiel dem Transistor. Diese Ersatzschaltungen, die die physikalischen Eigenschaften der Bauelemente in ihren elektrotechnischen Wirkungen repräsentieren sollen, ermöglichen dann eine Analyse dieser Netzwerke.

3.9.6 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Was versteht man unter dem Graphen eines Netzwerks?
- 2) Was kann dem Graphen eines Netzwerks entnommen werden?
- 3) Wie viele linear unabhängige Gleichungen liefern k Knoten eines Netzwerks?
- 4) Was versteht man unter dem vollständigen Baum eines Netzwerks?
- 5) Was bildet der Cobbaum eines Netzwerks?
- 6) Was liefert die Cobbaum-Struktur eines Netzwerks?
- 7) Wie werden die Maschen in einer Baum-Cobbaum-Struktur geführt?
- 8) Was versteht man unter dem Superpositionsverfahren?
- 9) Welche Bedingungen müssen Netzwerke erfüllen, damit bei ihnen das Superpositionsverfahren angewandt werden kann?
- 10) Was versteht man unter gesteuerten Quellen?
- 11) In welchen Netzwerken trifft man häufig auf gesteuerte Quellen?
- 12) Kann in Netzwerken, in denen sich gesteuerte Quellen befinden, das Superpositionsverfahren angewandt werden?

Aufgabe 3.9.6-1:

Gegeben ist das nachfolgende Netzwerk mit den Werten:

$$\begin{aligned} I_{Q1} &= 5\text{mA} \\ I_{Q2} &= 14\text{mA} \\ U_{Q3} &= 12\text{V} \\ U_{Q4} &= 7\text{V} \end{aligned}$$

$$U_{Q5} = 21V$$

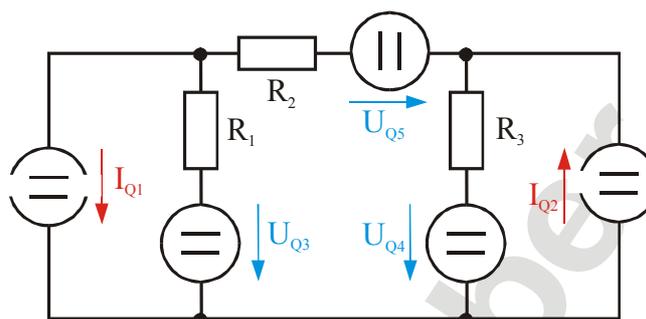
$$R_1 = 2k\Omega$$

$$R_2 = 3k\Omega$$

$$R_3 = 1,5k\Omega$$

Berechnen Sie die Leistungsverteilung innerhalb dieses Netzwerks.

(Lösung: $P_{R1} = 10mW$;
 $P_{R2} = 157mW$;
 $P_{R3} = 69mW$; $P_{Q1} = 82mW$; $P_{Q2} = -240mW$; $P_{Q3} = 27mW$; $P_{Q4} = 47mW$;
 $P_{Q5} = -152mW$)



Aufgabe 3.9.6-2:

Gegeben ist das nebenstehende Netzwerk mit den Werten:

$$U_{Q1} = 35V$$

$$I_{Q2} = 400mA$$

$$R_1 = 30\Omega$$

$$R_2 = 70\Omega$$

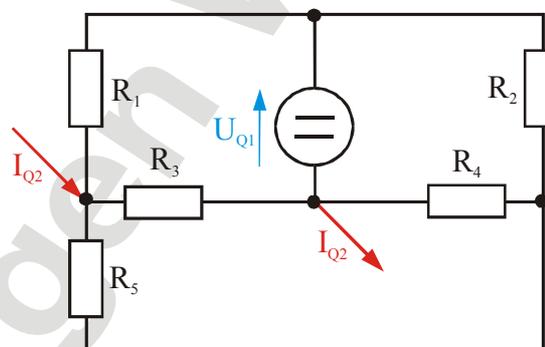
$$R_3 = 200\Omega$$

$$R_4 = 20\Omega$$

$$R_5 = 80\Omega$$

Berechnen Sie die Leistungsumsetzungen der beiden Quellen.

(Lösung: $P_{Q1} = -33,388W$; $P_{Q2} = 6,952W$)



Aufgabe 3.9.6-3:

Gegeben ist das nebenstehende Netzwerk mit den Werten:

$$U_Q = 30V$$

$$k = 3,5$$

$$p = 2mS$$

$$R_1 = 1,2k\Omega$$

$$R_2 = 1,8k\Omega$$

$$R_3 = 3,7k\Omega$$

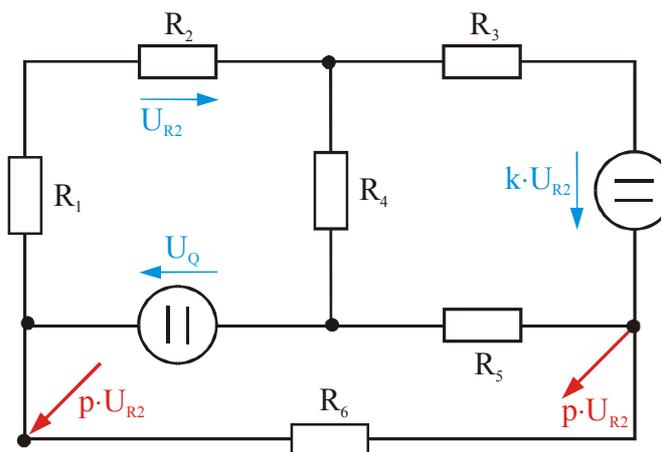
$$R_4 = 1,0k\Omega$$

$$R_5 = 5,4k\Omega$$

$$R_6 = 0,8k\Omega$$

Berechnen Sie die Leistung, die im Widerstand R_6 umgesetzt wird.

(Lösung: $P_{R6} = 674,074mW$)



Aufgabe 3.9.6-4:

Gegeben ist das nachfolgende Netzwerk mit den Werten:

$$U_{Q1} = 50V$$

$$U_{Q2} = 30V$$

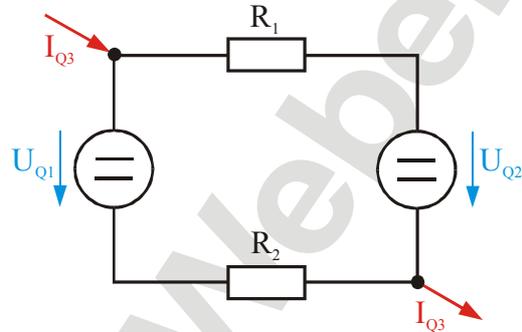
$$I_{Q3} = 2A$$

$$R_1 = 50\Omega$$

$$R_2 = 130\Omega$$

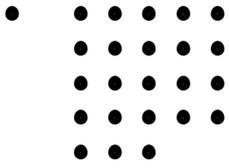
Berechnen Sie mit Hilfe des Superpositionsverfahrens die in den Widerständen R_1 und R_2 umgesetzte Leistung.

(Lösung: $P_{R1} = 120,99W$; $P_{R2} = 25,68W$)



3.10 Literaturhinweise

- | | | |
|----|----------------|---------------------------------|
| 1) | Moeller/Frohne | Grundlagen der Elektrotechnik |
| 2) | Fricke/Vaske | Elektrische Netzwerke |
| 3) | Weißgerber | Elektrotechnik für Ingenieure I |
| 4) | Paul | Elektrotechnik 2 (Netzwerke) |
| 5) | Zastrow | Elektrotechnik |
| 6) | Kories | Taschenbuch der Elektrotechnik |



Fachhochschule Köln
University of Applied Sciences Cologne
Campus Gummersbach

Prof. Dr.-Ing. Jürgen Weber

Dipl.-Ing. Franz Josef Klein

Andreas Wagen

4 Der Wechselstromkreis

Inhaltsverzeichnis

0	Vorbemerkung	
1	Einleitung	
2	Der elektrische Strom	
3	Gleichstromschaltungen mit linearen Bauelementen	
4	DER WECHSELSTROMKREIS	4
4.1	Darstellung sinusförmiger Wechselgrößen	4
4.1.1	Die Darstellung im Zeitbereich	4
4.1.2	Die Darstellung im Frequenzbereich	6
4.1.3	Übergang zur komplexen Darstellung sinusförmiger Wechselgrößen	8
4.1.4	Fragen- und Aufgabensammlung	9
4.2	Grundgesetze im Wechselstromkreis	11
4.2.1	Strom, Spannung und Leistung	11
4.2.2	Die Kirchhoffschen Gesetze	14
4.2.3	Fragen- und Aufgabensammlung	15
4.3	Lineare Bauelemente im Wechselstromkreis	17
4.3.1	Wirkwiderstand und Wirkleitwert	17
4.3.2	Die Induktivität	18
4.3.3	Die Kapazität	21
4.3.4	Der allgemeine lineare passive Zweipol	23
4.3.5	Spannungs- und Stromquellen	24
4.3.6	Fragen- und Aufgabensammlung	25
4.4	Reihen- und Parallelschaltung passiver Zweipole	28
4.4.1	Die komplexe Widerstands- und Leitwertebene	28
4.4.2	Die Serienschaltung passiver Zweipole	30
4.4.3	Die Parallelschaltung passiver Zweipole	32
4.4.4	Gesamtwiderstand oder -leitwert komplexer Widerstandsnetzwerke	34
4.4.5	Fragen- und Aufgabensammlung	36
4.5	Komplexe Netzwerke	38
4.5.1	Berechnungsverfahren	38
4.5.2	Zeigerdiagramme	38
4.5.3	Übertragungsverhalten	42
4.5.4	Fragen- und Aufgabensammlung	46
4.6	Ortskurven	50
4.6.1	Einleitung	50
4.6.2	Elementare Ortskurven als Funktion der Frequenz	50
4.6.3	Ortskurven als Funktion der Variation der Werte der Bauelemente	53
4.6.4	Fragen- und Aufgabensammlung	54

4.7	Schwingkreise.....	56
4.7.1	Der Reihenschwingkreis.....	56
4.7.2	Der Parallelschwingkreis.....	61
4.7.3	Fragen- und Aufgabensammlung	62
4.8	Die Blindstromkompensation	64
4.8.2	Fragen- und Aufgabensammlung	66
4.9	Literaturhinweise.....	68
5	<i>Messtechnik</i>	
6	<i>Dreiphasenwechselstrom</i>	
7	<i>Der Transformator</i>	
Anhang		
Anlage I	Praktika	

4 DER WECHSELSTROMKREIS

4.1 Darstellung sinusförmiger Wechselgrößen

4.1.1 Die Darstellung im Zeitbereich

In diesem Kapitel werden Wechselgrößen betrachtet, die einen zeitlich sinusförmigen Verlauf mit dem linearen Mittelwert Null besitzen. Spannung und Strom lassen sich dann im Zeitbereich wie folgt darstellen:

$$u = u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \quad 4.1.1-1$$

$$i = i(t) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi_i) \quad 4.1.1-2$$

mit

\hat{u} ; \hat{i} : Scheitelwert der Amplitude

$\omega = 2 \cdot \pi \cdot f$: Kreisfrequenz [sec^{-1}]

f : Frequenz [sec^{-1} ; Hz (Hertz)]

$T = \frac{1}{f}$: Periodendauer [sec]

φ_u ; φ_i : Phasenwinkel

Bild 4.1.1-1 zeigt den sinusförmigen Verlauf des Stroms mit den charakteristischen Größen.

Bei Netzwerken mit mehreren Quellen wird die Betrachtung auf den Fall beschränkt, dass alle Quellen auf der gleichen Frequenz f arbeiten, dabei aber unterschiedliche Amplituden und Phasenwinkel besitzen dürfen. Während Quellen mit gleicher Frequenz bei Superposition wieder eine sinusförmige Zeitfunktion liefern (siehe Bild 4.1.1-2), hat die Superposition sinusförmiger Größen mit unterschiedlicher Frequenz keine sinusförmige Zeitfunktion zur Folge (siehe Bild 4.1.1-3).

In diesem Kapitel sollen wiederum nur lineare Bauelemente benutzt werden. Diese haben bei Wechselgrößen eine Linearität zwischen den Effektivwerten der Spannung und des Stroms zur Folge, so dass auch hier keine nicht-linearen Verzerrungen im Zeitverlauf von Spannung oder Strom auftreten können.

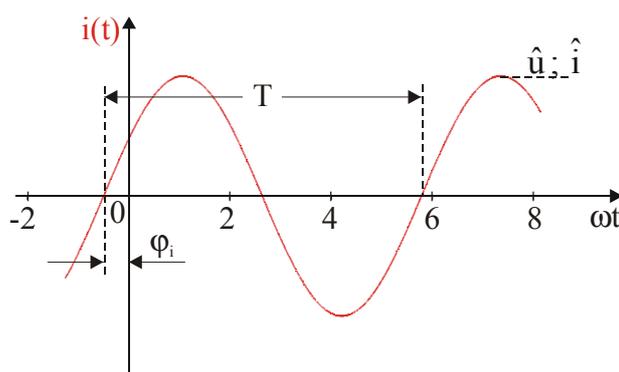


Bild 4.1.1-1: Zeitlich sinusförmiger Strom

Die Überlagerung der beiden sinusförmigen Zeitfunktionen gleicher Frequenz nach Bild 4.1.1-2, lässt sich auch analytisch bestimmen. Überlagert man die beiden Zeitfunktionen

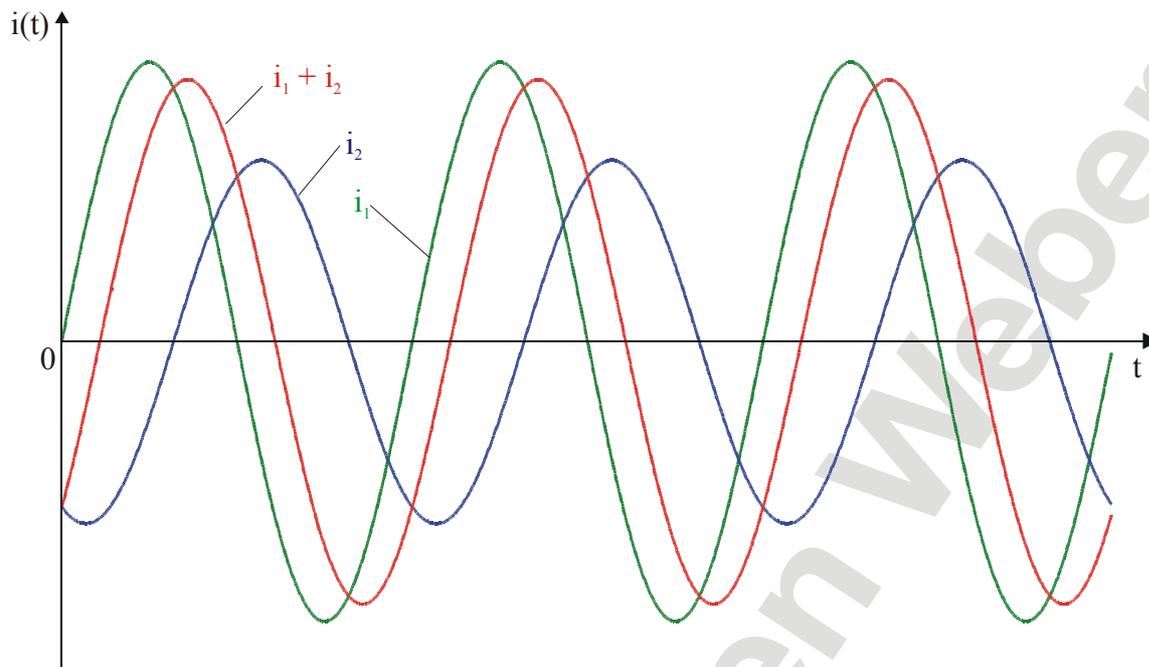


Bild 4.1.1-2: Überlagerung zweier sinusförmiger Zeitfunktionen gleicher Frequenz

$$i_1(t) = \hat{i}_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) \quad \text{und} \quad i_2(t) = \hat{i}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2),$$

so ergibt sich aus den Additionstheoremen der trigonometrischen Funktionen die analytische Lösung

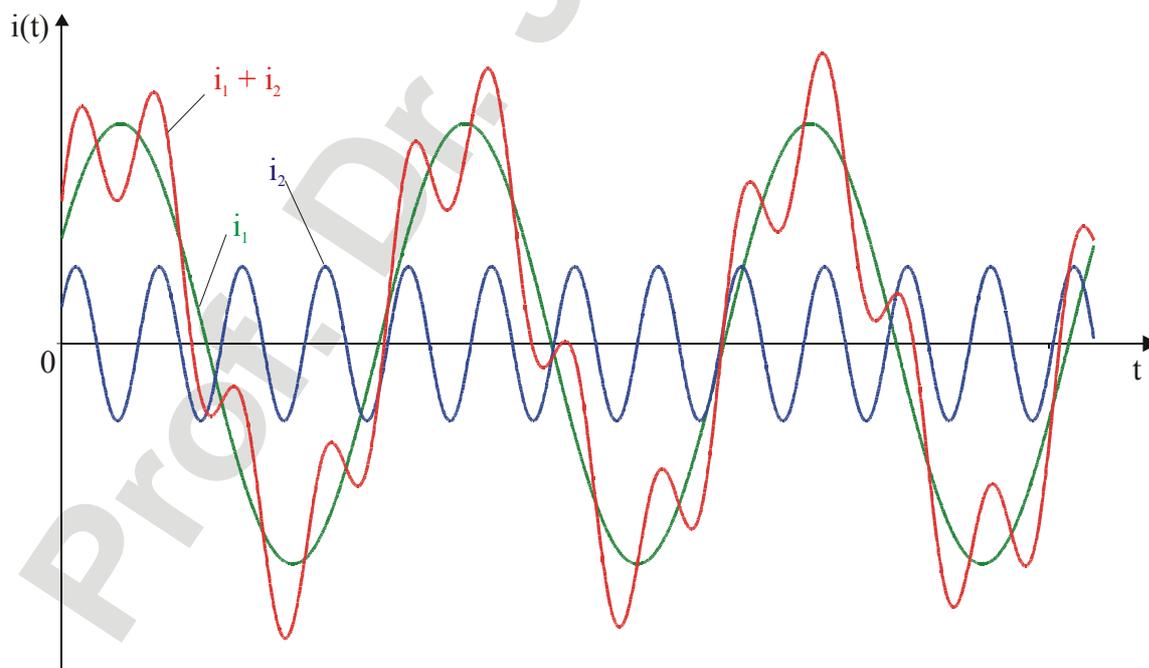


Bild 4.1.1-3: Überlagerung zweier sinusförmiger Zeitfunktionen ungleicher Frequenz

$$i(t) = i_1(t) + i_2(t) = \hat{i}_1 \cdot \sin(\omega t + \varphi_1) + \hat{i}_2 \cdot \sin(\omega t + \varphi_2) = \hat{i} \cdot \sin(\omega t + \varphi) \quad 4.1.1-3$$

mit

$$\hat{i} = \sqrt{\hat{i}_1^2 + \hat{i}_2^2 + 2 \cdot \hat{i}_1 \cdot \hat{i}_2 \cdot \cos(\varphi_1 - \varphi_2)} \quad 4.1.1-4$$

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\hat{i}_1 \cdot \sin \varphi_1 + \hat{i}_2 \cdot \sin \varphi_2}{\hat{i}_1 \cdot \cos \varphi_1 + \hat{i}_2 \cdot \cos \varphi_2} \right) \quad 4.1.1-5$$

Dieses Ergebnis lässt sich so deuten, dass zwei Zeiger der Längen \hat{i}_1 und \hat{i}_2 , die sich in einem xy-Koordinatensystem mit der Geschwindigkeit ωt drehen und zum Zeitpunkt $t = 0$ die unterschiedlichen Phasen φ_1 und φ_2 besitzen, überlagert werden. Bild 4.1.1-4 zeigt die geometrische Addition zum Gesamtzeiger \hat{i} und dem Winkel φ und seine relative Lage zu den anderen Zeigern. Der tatsächliche Augenblickswert der Zeitfunktionen entspricht deren Projektion auf die x-Achse.

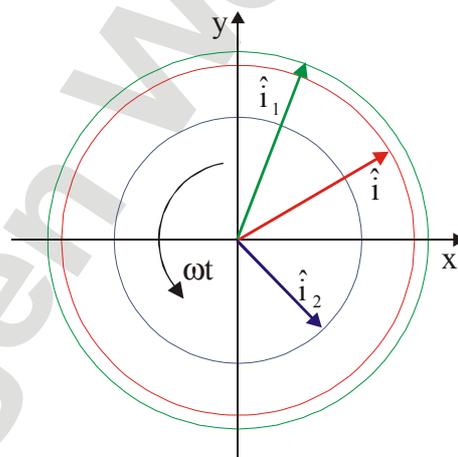


Bild 4.1.1-4: Zeigerdiagramm

Häufig ist der Augenblickswert einer Spannung oder eines Stroms nicht von Bedeutung. Um zum Beispiel die Leistungsumsetzung einer Wechselspannung in einem Ohmschen Widerstand zu berechnen, arbeitet man mit den Effektivwerten U_{eff} und I_{eff} . Diese Effektivwerte berechnen sich aus

$$U_{\text{eff}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \quad 4.1.1-6$$

bzw.

$$I_{\text{eff}} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \quad 4.1.1-7$$

Sie besitzen keine Information mehr über die Phasenlage der Spannung oder des Stroms und sind somit nur eingeschränkt nutzbar und werden deshalb in der Elektrotechnik zur Analyse von Netzwerken kaum angewandt.

4.1.2 Die Darstellung im Frequenzbereich

Neben der Darstellung einer Funktion von ωt im Zeitbereich, besteht auch die Möglichkeit, diese Funktion wegen $\omega t = 2\pi f \cdot t$ im Frequenzbereich darzustellen. Bild 4.1.2-1 zeigt die Darstellungen der Funktion

$$u = u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi_u) \quad 4.1.2-1$$

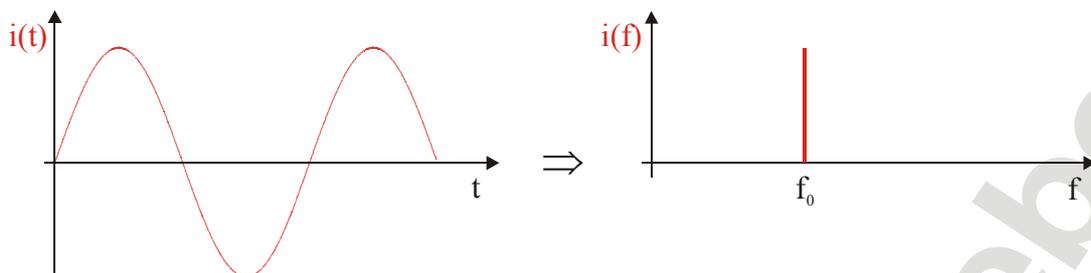


Bild 4.1.2-1: Darstellung einer Sinusfunktion im Zeit- und Frequenzbereich

im Zeitbereich und im Frequenzbereich. Die reine Sinusschwingung zeigt hier eine Spektrallinie bei der Frequenz f_0 . Wie beim Effektivwert geht auch bei der Darstellung im Frequenzbereich die Information über die Phasenlage verloren. Zu welchen Resultaten dies führen kann, zeigt das Bild 4.1.2-2 anhand einer Rechteckfunktion im Zeitbereich. Eine Rechteckspannung lässt sich nach Fourier als Zeitfunktion

$$i(t) = \frac{4 \cdot \hat{i}}{\pi} \left(\sin(\omega_0 t) + \frac{\sin(3\omega_0 t)}{3} + \frac{\sin(5\omega_0 t)}{5} + \frac{\sin(7\omega_0 t)}{7} + \dots \right) \quad 4.1.2-2$$

darstellen. Alle Glieder dieser unendlichen Reihe haben einen festen Phasenbezug. Im Frequenzbereich liefert diese Funktion Spektrallinien bei $f_0, 3f_0, 5f_0, 7f_0$ usw. mit den entsprechenden Amplituden. Obwohl im Bild 4.1.2-2 nur die ersten 10 Glieder der Reihe nach Gleichung 4.1.2-2 berücksichtigt wurden, erkennt man im oberen Teil des Bildes deutlich die Ten-

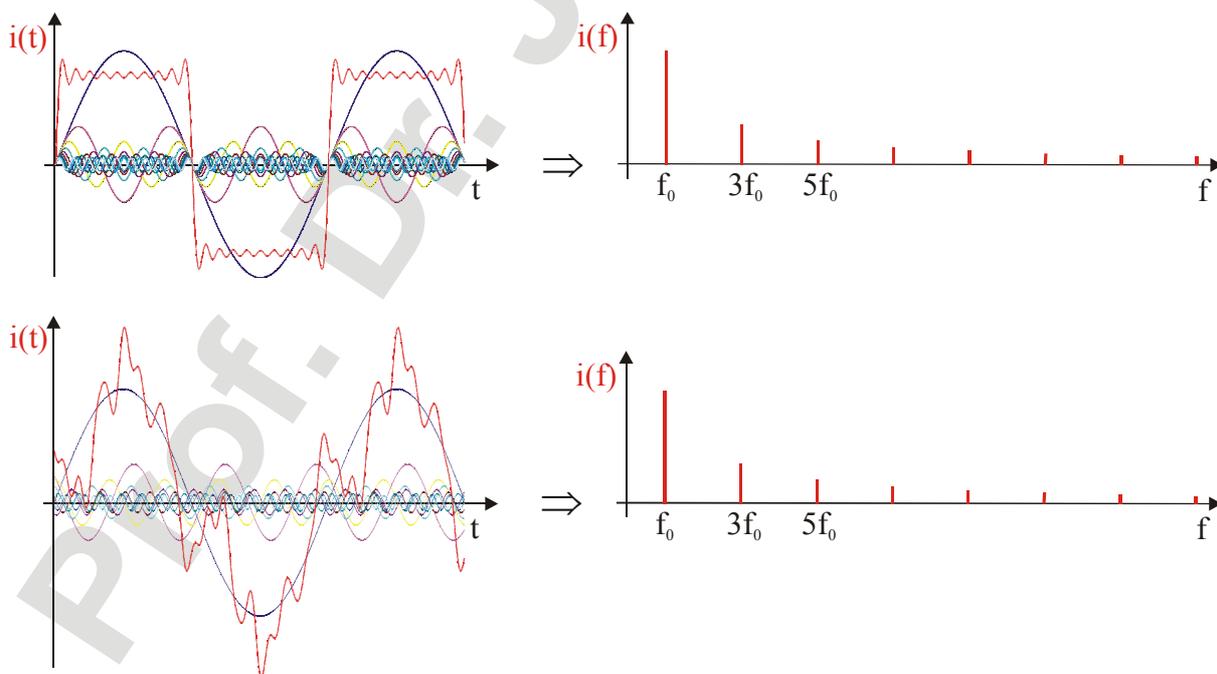


Bild 4.1.2-2: Zeitfunktionen mit und ohne Phasenbezug sowie deren Spektralfunktionen

denz der Rechteckfunktion, weil hier der Phasenbezug stimmt. Im unteren Teil des Bildes ist dagegen der Phasenbezug aufgehoben, womit auch die Tendenz der Rechteckbildung nicht mehr zu erkennen ist. Beide Darstellungen liefern aber die gleiche Spektralfunktion im Frequenzbereich.

In der digitalen Nachrichtenübertragung ergibt sich ein Problem, wenn Rechteckfunktionen als digitale Signale über Übertragungsmedien laufen, in denen verschiedene Frequenzen unterschiedliche Übertragungsgeschwindigkeiten besitzen. Am Ende einer zu langen Übertragungstrecke stimmen dann, wie im unteren Teil von Bild 4.1.2-2 dargestellt, die Phasenbezüge der einzelnen Spektralanteile nicht mehr, wodurch das ursprüngliche Signal nicht zurück gewonnen werden kann.

4.1.3 Übergang zur komplexen Darstellung sinusförmiger Wechselgrößen

Im Abschnitt 4.1.1 wurde bei der Einführung des Effektivwerts darauf verwiesen, dass bei dieser Darstellung der Phasenbezug verloren geht. Dieser Verlust lässt sich dadurch vermeiden, dass man zu einer komplexen Darstellung von sinusförmigen Wechselgrößen übergeht. Man macht sich hier einen Bereich der Mathematik zu nutze, der als Funktionentheorie bezeichnet wird und in der alle elementaren Rechenarten vorhanden sind.

Als Ausgangspunkt der Betrachtung dient die sinusförmige Spannung

$$u = u(t) = \hat{u} \cdot \cos(\omega t + \varphi_u). \quad 4.1.3-1$$

Hier wurde bewusst an Stelle des Sinus der Kosinus als Zeitfunktion gewählt, womit φ_u gegenüber der Darstellung nach Gleichung 4.1.1-1 um 90° verschoben wurde. Schreibt man jetzt die Zeitfunktion komplex, so folgt:

$$\begin{aligned} \underline{u} = \underline{u}(t) &= \hat{u} (\cos(\omega t + \varphi_u) + j \sin(\omega t + \varphi_u)) = \hat{u} \exp(j(\omega t + \varphi_u)) \\ &= \hat{u} \exp(j \varphi_u) \exp(j \omega t) = \underline{\hat{u}} \exp(j \omega t) \end{aligned} \quad 4.1.3-2$$

mit

$$\underline{\hat{u}} = \hat{u} \exp(j \varphi_u). \quad 4.1.3-3$$

Mit dem Realteil von 4.1.3-2 erhält man wieder die ursprüngliche Zeitfunktion 4.1.3-1. Der Übergang zum komplexen Scheitelwert $\underline{\hat{u}}$, der nach Gleichung 4.1.3-3 die Phaseninformation φ_u beinhaltet, lässt jetzt den Übergang zum komplexen Effektivwert \underline{U} zu, ohne die Phaseninformation zu verlieren:

$$\underline{U} = U_{\text{eff}} \exp(j \varphi_u) = \frac{\underline{\hat{u}}}{\sqrt{2}} \quad 4.1.3-4$$

Der komplexe Effektivwert \underline{U} lässt sich als Zeiger der Länge U_{eff} und der Phase φ_u in der komplexen Ebene deuten. Das Ergebnis lässt sich entsprechend auf den Strom übertragen:

$$\underline{I} = I_{\text{eff}} \exp(j\varphi_i) = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}}$$

4.1.3-5

Bild 4.1.3-1 zeigt die Effektivwertzeiger von Spannung und Strom in der komplexen Ebene. In den überwiegenden Fällen ist nur die Phasendifferenz φ zwischen den Effektivwertzeigern von Interesse. In diesem Fall benötigt man auch nicht mehr das komplexe Koordinatensystem. Darüber hinaus kann willkürlich ein Effektivwertzeiger in die horizontale Bezugsebene als Bezugszeiger gelegt werden. Bild 4.1.3-2 zeigt solch ein Zeigerdiagramm, in dem der Spannungszeiger \underline{U} als Bezugszeiger gewählt wurde.

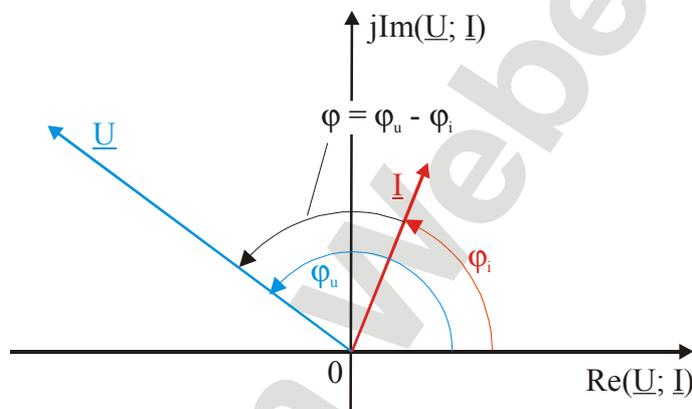


Bild 4.1.3-1: Zeiger in der komplexen Ebene

Bei der Rechnung mit den komplexen Effektivwertzeigern können die Berechnungsmethoden der komplexen Zahlen angewandt werden.

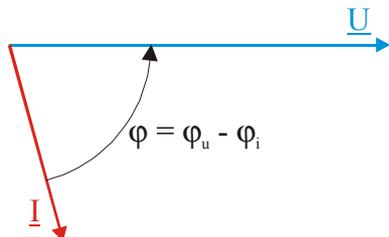


Bild 4.1.3-2: Zeigerdiagramm

Neben den komplexen Effektivwertzeigern gibt es bei der Betrachtung des Wechselstromkreises noch weitere komplexe Festzeiger. Mit diesen Zeigern wird der komplexe Widerstand \underline{Z} bzw. der komplexe Leitwertzeiger \underline{G} beschrieben. Im Gegensatz zu den komplexen Effektivwertzeigern ist die Darstellung des komplexen Widerstands oder des komplexen Leitwerts an das Koordinatensystem gebunden. Deren Berechnung und Darstellung wird in einem späteren Abschnitt behandelt.

4.1.4 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Wie lässt sich eine sinusförmige Spannung im Zeitbereich darstellen?
- 2) Welche Beschränkung gilt im Wechselstromkreis bei der Betrachtung von Netzwerken mit mehreren Quellen?
- 3) Welche resultierende Zeitfunktion entsteht bei der Überlagerung zweier Zeitfunktionen gleicher Frequenz, aber unterschiedlicher Amplituden und Phasen?
- 4) Sinusförmige Zeitfunktionen lassen sich als rotierende Zeiger deuten. Wie erhält man aus diesen Zeigern den tatsächlichen Augenblickswert?
- 5) Welche Information geht bei der reellen Darstellung des Effektivwerts einer Zeitfunktion verloren?

- 6) Welche Informationen einer periodischen Zeitfunktion gehen beim Übergang in den Frequenzbereich verloren?
- 7) Welchen Vorteil bietet die Einführung des komplexen Effektivwerts gegenüber dem reellen Effektivwert?
- 8) Welche Informationen trägt der komplexe Effektivwertzeiger?
- 9) Benötigt man bei der Darstellung der komplexen Effektivwertzeiger die komplexe Ebene?

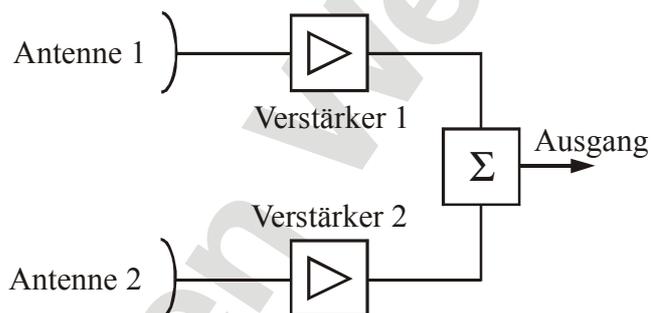
Aufgabe 4.1.4-1:

In der nebenstehenden Empfängerschaltung empfangen die Antennen 1 und 2 Signale der Frequenz 1GHz und der Spannungen

$$u_1 = 10\mu\text{V} \sin(\omega t + 30^\circ)$$

$$u_2 = 15\mu\text{V} \sin(\omega t + 80^\circ).$$

Im Verstärker 1 wird die Spannung u_1 mit dem Faktor 450 verstärkt und die Phase um $+70^\circ$ gedreht. Im Verstärker 2 wird die Spannung u_2 mit dem Faktor 250 verstärkt und die Phase um -120° gedreht.



Bestimmen Sie mit Hilfe der reellen Rechnung die resultierende Spannung u_{ges} am Ausgang des Summierers. Welche Phase φ_1 müsste das Empfangssignal $u_1 = 10\mu\text{V} \sin(\omega t + \varphi_1)$ bei $u_2 = 15\mu\text{V} \sin(\omega t + 80^\circ)$ aufweisen, damit am Ausgang des Summierers der resultierende Scheitelwert der Spannung u_{ges} seine Extremwerte $\hat{u}_{\text{ges max}}$ bzw. $\hat{u}_{\text{ges min}}$ annimmt. Wie groß sind diese Extremwerte?

(Lösung: $u_{\text{ges}} = 2,91\text{mV} \sin(\omega t + 44^\circ)$; $\hat{u}_{\text{ges max}} = 8,25\text{mV}$; $\hat{u}_{\text{ges min}} = 0,75\text{mV}$;
 $\varphi_1|_{\hat{u}_{\text{ges max}}} = -110^\circ$; $\varphi_1|_{\hat{u}_{\text{ges min}}} = 70^\circ$)

Aufgabe 4.1.4-2:

Gegeben sind die komplexen Ströme

$$\underline{I}_1 = (1,5 + j1,8)\text{A}$$

$$\underline{I}_2 = 4\text{A} \exp(-j45^\circ).$$

Bestimmen Sie den komplexen Summenstrom $\underline{I}_S = \underline{I}_1 + \underline{I}_2$ und den komplexen Differenzstrom $\underline{I}_D = \underline{I}_1 - \underline{I}_2$. Stellen Sie die komplexen Ströme in einer komplexen Zahlenebene grafisch dar.

(Lösung: $\underline{I}_S = (4,33 - j1,03)\text{A}$; $\underline{I}_D = (-1,33 + j4,63)\text{A}$)

4.2 Grundgesetze im Wechselstromkreis

Bei einem allgemeinen Wechselstrom $i = i(t)$ ist die exakte Rechnung sehr schwierig. Jeder Strom i verursacht ein magnetisches Feld der Feldstärke H . Ist dieser Strom i als $i = i(t)$ zeitlich veränderlich, so wird auch die magnetische Feldstärke als $H = H(t)$ zeitlich veränderlich sein und damit ein elektrisches Feld der Feldstärke $E = E(t)$ erzeugen, welches seinerseits wieder mit der magnetischen Feldstärke in Wechselwirkung steht. Um hier exakte Betrachtungen anzustellen, muss man auf die Maxwell'schen Gleichungen zurück greifen, die die Wechselwirkungen zwischen dem magnetischen und dem elektrischen Feld beschreiben.

Da die Ableitung der Maxwell'schen Gleichungen auf Grund ihrer Komplexität Gegenstand eines eigenen Kurses wäre, muss an dieser Stelle darauf verzichtet werden. Dies hat aber zur Folge, dass für die weiteren Betrachtungen Vereinfachungen vereinbart werden müssen. Diese Vereinfachungen werden in der Praxis nur zu vernachlässigbaren Fehlern führen.

Die weiteren Betrachtungen in diesem Kapitel sollen sich auf Netzwerke im quasistationären Zustand beschränken. Das bedeutet, dass ein Einschaltvorgang so lange zeitlich zurückliegt, dass sich das Netzwerk auf die Frequenz der Quelle, die eine sinusförmige Spannung oder einen sinusförmigen Strom erzeugt, eingeschwungen hat. In diesem Fall kann die komplexe Schreibweise angewandt werden und mit den komplexen Effektivwerten gearbeitet werden.

Weiterhin sollen alle Bauelemente so aufgebaut sein, dass sie keine magnetischen oder elektrischen Streufelder besitzen. Dadurch entfällt die Berücksichtigung von induzierten Spannungen und Strömen in den Leiterschleifen eines Netzwerks in Abhängigkeit von dessen Geometrie.

Auf Grund dieser Vereinfachungen lassen sich wieder das Ohmsche Gesetz und die Kirchhoffschen Gesetze, wie sie im Kapitel 3 abgeleitet wurden, verwenden.

4.2.1 Strom, Spannung und Leistung

In diesem Abschnitt werden die Beziehungen für den Strom, die Spannung und die Leistung in der reellen und in der komplexen Schreibweise gegenübergestellt.

4.2.1.1 Der Strom

Für die reellen Schreibweisen des Stroms als Zeitfunktion und Effektivwert folgen:

$$i = i(t) = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i) \quad 4.2.1.1-1$$

$$I_{\text{eff}} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} \quad 4.2.1.1-2$$

Für die komplexen Schreibweisen des Stroms als Zeitfunktion und Effektivwert folgen:

$$\begin{aligned} \underline{i} &= \underline{i}(t) = \hat{i} \exp(j(\omega t + \varphi_i)) = \hat{i} \exp(j\varphi_i) \exp(j\omega t) = \underline{\hat{i}} \exp(j\omega t) \\ &= \hat{i} [\cos(\omega t + \varphi_i) + j \sin(\omega t + \varphi_i)] = \underline{\hat{i}} [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)] \end{aligned} \quad 4.2.1.1-3$$

$$\underline{I} = \frac{\hat{i}}{\sqrt{2}} = I_{\text{eff}} \exp(j\varphi_i) \quad 4.2.1.1-4$$

4.2.1.2 Die Spannung

Für die reellen Schreibweisen der Spannung als Zeitfunktion und Effektivwert folgen:

$$u = u(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) \quad 4.2.1.2-1$$

$$U_{\text{eff}} = \frac{\hat{u}}{\sqrt{2}} \quad 4.2.1.2-2$$

Für die komplexen Schreibweisen der Spannung als Zeitfunktion und Effektivwert folgen:

$$\underline{u} = \underline{u}(t) = \hat{u} \exp(j(\omega t + \varphi_u)) = \hat{u} \exp(j\varphi_u) \exp(j\omega t) = \underline{\hat{u}} \exp(j\omega t) \quad 4.2.1.2-3$$

$$= \hat{u} [\cos(\omega t + \varphi_u) + j \sin(\omega t + \varphi_u)] = \underline{\hat{u}} [\cos(\omega t) + j \sin(\omega t)]$$

$$\underline{U} = \frac{\underline{\hat{u}}}{\sqrt{2}} = U_{\text{eff}} \exp(j\varphi_u) \quad 4.2.1.2-4$$

4.2.1.3 Die Leistung

Bei der Betrachtung von Gleichspannung und Gleichstrom im Kapitel 3 ergaben sich für die berechneten Leistungen, die in Widerständen umgesetzt oder von Quellen gespeichert oder aufgebracht wurden, immer so genannte Wirkleistungen P [$\text{VA} = \text{W}$]. An die Stelle der Wirkleistung tritt im Wechselstromkreis zunächst die Scheinleistung S [VA].

Um den Begriff der Scheinleistung im reellen abzuleiten, betrachtet man zunächst die Leistung als Zeitfunktion $p(t)$. Dabei wird von einem Zählpfeilsystem ausgegangen, in dem die Zählpfeile für die Spannung und den Strom gleich gerichtet sind:

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) \cdot \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i) \quad 4.2.1.3-1$$

$$= \hat{u} \cdot \hat{i} \left[\frac{1}{2} \cos(\varphi_u - \varphi_i) - \frac{1}{2} \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) \right]$$

Gleichung 4.2.1.3-1 zerfällt in einen

$$\text{Gleichanteil} \quad \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2} \cos(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2} \cos \varphi \quad 4.2.1.3-2$$

und einen

$$\text{Pendelanteil} \quad \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2} \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i) \quad 4.2.1.3-3$$

mit der doppelten Kreisfrequenz 2ω der Spannung und des Stroms. Der Gleichanteil stellt als der Mittelwert der zeitlichen Leistung die Wirkleistung P dar:

$$\bar{p} = P = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2} \cos \varphi = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \cos \varphi = S \cdot \cos \varphi \quad 4.2.1.3-4$$

$\cos \varphi$ wird als der Leistungs- oder Wirkfaktor bezeichnet.

Wandelt man die Gleichung 4.2.1.3-1 in der Form

$$\begin{aligned} p(t) &= \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2} [\cos(\varphi_u - \varphi_i) - \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)] \\ &= \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2} [\cos \varphi - \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i + \varphi_i - \varphi_i)] \\ &= U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot [\cos \varphi - \cos(2\omega t + 2\varphi_i + \varphi)] & 4.2.1.3-5 \\ &= S \cos \varphi - S \cos(2\omega t + 2\varphi_i) \cos \varphi + S \sin(2\omega t + 2\varphi_i) \sin \varphi \\ &= P - P \cos(2\omega t + 2\varphi_i) + Q \sin(2\omega t + 2\varphi_i) \end{aligned}$$

mit

$$Q = S \sin \varphi \quad \text{Blindleistung [VA = var].} \quad 4.2.1.3-6$$

und

$$\sin \varphi \quad \text{Blindfaktor} \quad 4.2.1.3-7$$

um, so spaltet sich die zeitliche Leistung in die Anteile:

$$\begin{aligned} p(t) &= P & \text{Wirkleistung} \\ &\quad - P \cos(2\omega t + 2\varphi_i) & \text{Wirkleistungsschwingung} & 4.2.1.3-8 \\ &\quad + Q \sin(2\omega t + 2\varphi_i) & \text{Blindleistungsschwingung} \end{aligned}$$

Die Blindleistung Q ist als Amplitude der Leistung am so genannten Blindwiderstand definiert. Wie der Blindwiderstand definiert ist, wird in einem späteren Abschnitt beschrieben.

Addiert man das Quadrat der Wirkleistung und das Quadrat der Blindleistung, so erhält man

$$P^2 + Q^2 = S^2 \cos^2 \varphi + S^2 \sin^2 \varphi = S^2. \quad 4.2.1.3-9$$

Aus Gleichung 4.2.1.3-9 folgt, dass sich die Scheinleistung aus der geometrischen Addition der Wirk- und der Blindleistung ergibt:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad 4.2.1.3-10$$

Wirkleistung und Blindleistung stehen somit senkrecht aufeinander. Dadurch bietet es sich an, auch die Scheinleistung S in die komplexe Schreibweise zu überführen:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U_{\text{eff}} \exp(j\varphi_u) \cdot I_{\text{eff}} \exp(-j\varphi_i) = U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \cdot \exp(j(\varphi_u - \varphi_i)) \\ &= S \exp(j\varphi) = S \cos \varphi + j S \sin \varphi = P + jQ \end{aligned} \quad 4.2.1.3-11$$

Die Wirkleistung P entspricht somit dem Realteil von \underline{S}

$$P = \text{Re}(\underline{S}) = \text{Re}(\underline{U} \cdot \underline{I}^*) \quad 4.2.1.3-12$$

und die Blindleistung Q dem Imaginärteil von \underline{S}

$$Q = \text{Im}(\underline{S}) = \text{Im}(\underline{U} \cdot \underline{I}^*)$$

4.2.1.3-13

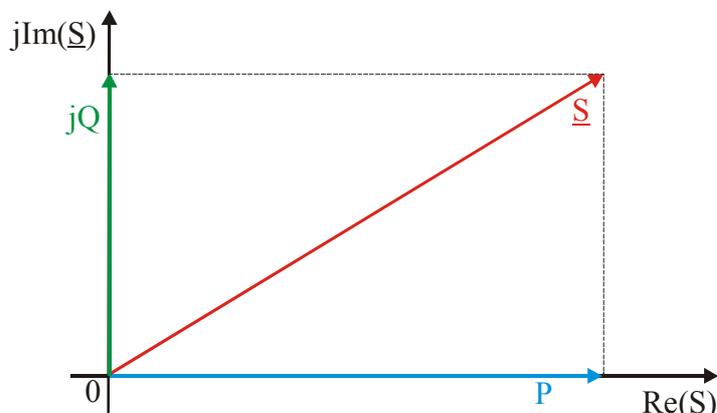


Bild 4.2.1.3-1 zeigt das Zeigerdiagramm der komplexen Scheinleistung.

Im Gegensatz zu dem Zeigerdiagramm der Effektivwertzeiger der komplexen Spannungen und der komplexen Ströme darf man bei der Darstellung der Scheinleistung, die als Zeiger einen Festzeiger darstellt, im Zeigerdiagramm das Koordinatensystem nicht entfernen. Hier haben die Wirkleistungen und die Blindleistungen immer einen festen Bezug zu der reellen Achse bzw. zu der imaginären Achse der komplexen Ebene.

Bild 4.2.1.3-1: Zeigerdiagramm der Scheinleistung

Die Verwendung des konjugierten komplexen Wertes \underline{I}^* in der Gleichung 4.2.1.3-11 lässt sich am einfachsten durch die Wirkleistungsumsetzung in einem Ohmschen Widerstand erklären:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = \underline{I} \cdot R \cdot \underline{I}^* = |\underline{I}|^2 \cdot R = P$$

4.2.1.3-14

4.2.2 Die Kirchhoffschen Gesetze

4.2.2.1 Zählpfeilsysteme

In dem Kapitel 3 wurden Zählpfeilsysteme für Spannung und Strom definiert. Um in Wechselstromnetzwerken die Kirchhoffschen Gesetze definieren zu können, benötigt man ebenfalls Zählpfeilsysteme für die komplexen Effektivwerte \underline{U} und \underline{I} . Alle Vorschriften für die Rechnungen auf Basis der Zählpfeilsysteme, die im Kapitel 3 abgeleitet wurden, werden für die Wechselstromnetzwerke übernommen.

4.2.2.2 Die komplexe Knotenpunktregel

Unter der Voraussetzung des quasistationären Zustands nach Abschnitt 4.2 kann die Knotenpunktregel aus dem Kapitel 3 direkt in komplexer Form übernommen werden:

$$\sum_{i=1}^n \underline{I}_i = \sum_{i=1}^n (\text{Re}(\underline{I}_i) + j \text{Im}(\underline{I}_i)) = 0 \quad 4.2.2.2-1$$

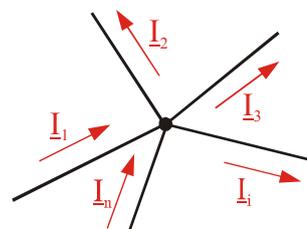


Bild 4.2.2.2-1: Knotenpunkt

Die Gleichung 4.2.2.2-1 zerfällt dabei in die Komponenten-

ten

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{Re}(\underline{I}_i) = 0 \quad 4.2.2.2-2$$

und

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{Im}(\underline{I}_i) = 0. \quad 4.2.2.2-3$$

Ob die Ströme, die über die Zählpfeile auf den Knotenpunkt zufließend definiert wurden, mit einem negativen oder einem positiven Vorzeichen versehen werden, kann wieder willkürlich festgelegt werden.

4.2.2.3 Die komplexe Maschenregel

Unter der Voraussetzung des quasistationären Zustands nach Abschnitt 4.2 kann die Maschenregel aus dem Kapitel 3 direkt in komplexer Form übernommen werden:

$$\sum_{i=1}^n \underline{U}_i = \sum_{i=1}^n (\operatorname{Re}(\underline{U}_i) + j\operatorname{Im}(\underline{U}_i)) = 0 \quad 4.2.2.3-1$$

Die Gleichung 4.2.2.2-1 zerfällt dabei in die Komponenten

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{Re}(\underline{U}_i) = 0 \quad 4.2.2.3-2$$

und

$$\sum_{i=1}^n \operatorname{Im}(\underline{U}_i) = 0. \quad 4.2.2.3-3$$

Der Umlaufsinn der Maschen kann wieder willkürlich festgelegt werden. Dabei werden wieder Spannungen deren Zählpfeile mit dem Umlauf gerichtet sind positiv in der Maschenregel berücksichtigt.

4.2.3 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Was versteht man unter einem quasistationären Zustand?
- 2) Welchen Vorteil bietet die Einführung der komplexen Schreibweise?
- 3) Welche Dimensionen haben die Wirkleistung, die Blindleistung und die Scheinleistung?

Aufgabe 4.2.3-1:

Durch einen Verbraucher fließt der Wechselstrom $\underline{I} = 3,5\text{A} \exp(j30^\circ)$ und verursacht dort bei entgegen gerichteten Zählpfeilen für Strom und Spannung einen Spannungsabfall $\underline{U} = 130\text{V} \exp(-j70^\circ)$. Berechnen Sie die Scheinleistung \underline{S} , die Wirkleistung P und die Blindleistung Q .

(Lösung: $\underline{S} = 455\text{VA} \exp(j80^\circ)$; $P = 79\text{W}$; $Q = 448\text{var}$)

Aufgabe 4.2.3-2:

Für den nebenstehenden Knotenpunkt sind die Ströme

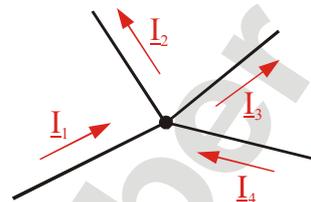
$$\underline{I}_1 = 3\text{A} \exp(j20^\circ)$$

$$\underline{I}_2 = (2,8 + j 0,9)\text{A}$$

$$\underline{I}_3 = -4,6\text{A} \exp(-j70^\circ)$$

bekannt. Berechnen Sie den Strom \underline{I}_4 .

(Lösung: $\underline{I}_4 = (-1,59 + j4,20)\text{A} = 4,49\text{A} \exp(j111^\circ)$)



Aufgabe 4.2.3-3:

Gegeben ist der nebenstehende Ausschnitt aus einem Netzwerk mit den Werten:

$$\underline{U}_1 = 12\text{V} \exp(-j30^\circ)$$

$$\underline{U}_2 = (4,8 - j12,7)\text{V}$$

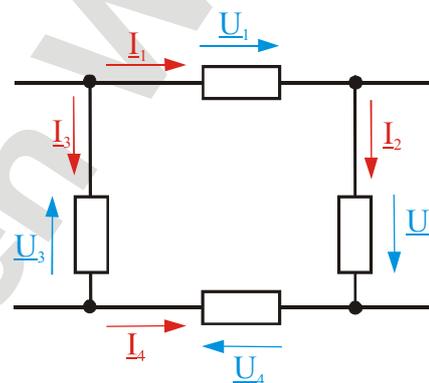
$$\underline{U}_3 = 8,9\text{V} \exp(j135^\circ)$$

$$\underline{I}_1 = (1,16 - j2,67)\text{A}$$

$$\underline{I}_2 = 2,1\text{A} \exp(-j80^\circ)$$

$$\underline{I}_3 = (0,87 - j1,26)\text{A}$$

$$\underline{I}_4 = -1,98\text{A} \exp(-j150^\circ)$$



Berechnen Sie die Spannung \underline{U}_4 und die in den Scheinwiderständen umgesetzten Scheinleistungen, Wirkleistungen und Blindleistungen.

(Lösung: $\underline{U}_4 = (-8,9 + j12,4)\text{V} = 15,3\text{V} \exp(j125,7^\circ)$;
 $\underline{S}_1 = 34,9\text{VA} \exp(j36,5^\circ) = 28,1\text{W} + j20,8\text{var}$;
 $\underline{S}_2 = 28,5\text{VA} \exp(j10,7^\circ) = 28,0\text{W} + j5,3\text{var}$;
 $\underline{S}_3 = 13,6\text{VA} \exp(j10,4^\circ) = 13,4\text{W} + j2,5\text{var}$;
 $\underline{S}_4 = 30,2\text{VA} \exp(-j84,3^\circ) = 3,0\text{W} - j30,1\text{var}$)

4.3 Lineare Bauelemente im Wechselstromkreis

4.3.1 Wirkwiderstand und Wirkleitwert

Nach Bild 4.3.1-1 soll das Verhalten des Ohmschen Widerstands und Ohmschen Leitwerts im Wechselstromkreis untersucht werden. Am Widerstand R bzw. am Leitwert

$$G = \frac{1}{R}, \quad 4.3.1-1$$

der vom komplexen Strom \underline{I} durchflossen wird, liegt die komplexe Spannung \underline{U} . Unter Berücksichtigung des quasi-stationären Zustands und des Zählpfeilsystems nach Bild 4.3.1-1 gilt das Ohmsche Gesetz

$$\underline{U} = \underline{I} \cdot R = \frac{\underline{I}}{G}. \quad 4.3.1-2$$

Schreibt man die Gleichung 4.3.1-2 in die Form

$$U_{\text{eff}} \exp(j\varphi_u) = R \cdot I_{\text{eff}} \exp(j\varphi_i) = \frac{1}{G} \cdot I_{\text{eff}} \exp(j\varphi_i) \quad 4.3.1-3$$

um, so erhält man durch Koeffizientenvergleich die Aussage

$$\varphi_u = \varphi_i = \varphi. \quad 4.3.1-4$$

Das bedeutet, dass bei einem Ohmschen Widerstand und einem Ohmschen Leitwert die Spannung \underline{U} und der Strom \underline{I} den gleichen Phasenwinkel besitzen. Stellt man diese Erkenntnis in einem Zeigerdiagramm dar, so erhält man das Bild 4.3.1-2, in dem die Spannung und der Strom in Phase liegen.



Bild 4.3.1-2: Zeigerdiagramm Widerstand, Leitwert

Die Scheinleistung berechnet sich somit nach:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U_{\text{eff}} \exp(j\varphi_u) \cdot I_{\text{eff}} \exp(-j\varphi_i) = U_{\text{eff}} \exp(j\varphi) \cdot I_{\text{eff}} \exp(-j\varphi) \\ &= U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \exp(j0^\circ) = P + j0 = P \end{aligned} \quad 4.3.1-5$$

Damit wird im Ohmschen Widerstand oder im Ohmschen Leitwert eine reine Wirkleistung P in Wärme umgesetzt. Deshalb spricht man auch von Wirkwiderständen bzw. von Wirkleitwerten.

Für den Wirkwiderstand R oder Wirkleitwert G soll nochmals die Betrachtung auf der Basis des Zählpfeilsystems nach Bild 4.3.1-3 durchgeführt werden.

Hier ergibt sich zunächst

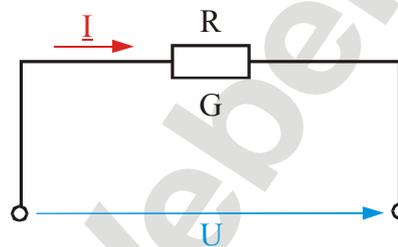


Bild 4.3.1-1: Widerstand; Leitwert

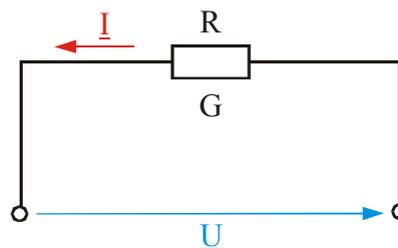


Bild 4.3.1-3: Widerstand; Leitwert

$$\underline{U} = -\underline{I} \cdot R = -\frac{I}{G}, \quad 4.3.1-6$$

woraus

$$U_{\text{eff}} \exp(j\varphi_u) = -R \cdot I_{\text{eff}} \exp(j\varphi_i) = -\frac{1}{G} \cdot I_{\text{eff}} \exp(j\varphi_i) \quad 4.3.1-7$$

resultiert. Mit der Interpretation

$$-1 = \exp(\pm j180^\circ) \quad 4.3.1-8$$

folgt dann

$$U_{\text{eff}} \exp(j\varphi_u) = R \cdot I_{\text{eff}} \exp(j(\varphi_i - 180^\circ)) = \frac{1}{G} \cdot I_{\text{eff}} \exp(j(\varphi_i - 180^\circ)), \quad 4.3.1-9$$

woraus durch Koeffizientenvergleich

$$\varphi_u = \varphi_i - 180^\circ. \quad 4.3.1-10$$

folgt. Für die Darstellung im Zeigerdiagramm ergeben sich jetzt die beiden im Bild 4.3.1-4 gezeigten Möglichkeiten. In diesem Zusammenhang sei bereits darauf hingewiesen, dass bei der Darstellung im Zeigerdiagramm der Zeiger der Spannung nicht den selben Ursprung wie der Zeiger des Stroms besitzen muss. Trotzdem bleibt die Information über die Phasenlage erhalten, die in diesem Fall 180° beträgt. Betrachtet man abschließend die Scheinleistung, so ergibt sich wegen

$$\begin{aligned} \underline{S} &= -\underline{U} \cdot \underline{I}^* = -U_{\text{eff}} \exp(j\varphi_u) \cdot I_{\text{eff}} \exp(-j\varphi_i) \\ &= U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \exp(j(\varphi_i - 180^\circ - \varphi_i - 180^\circ)) \\ &= U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \exp(j0^\circ) = P + j0 = P \end{aligned} \quad 4.3.1-11$$

folgerichtig, dass in einem Wirkwiderstand und einem Wirkleitwert nur positive Wirkleistungen umgesetzt werden können.

4.3.2 Die Induktivität

Fließt ein Strom i durch einen Leiter, so wird dieser Strom im und um den Leiter herum ein magnetisches Feld der Feldstärke H hervorrufen. Wie jedes magnetische Feld besitzt auch dieses eine Energie, die dem Stromkreis entnommen wird. Diese Energie wird nicht in Wärme umgesetzt, wie dies bei einem Wirkwiderstand ge-

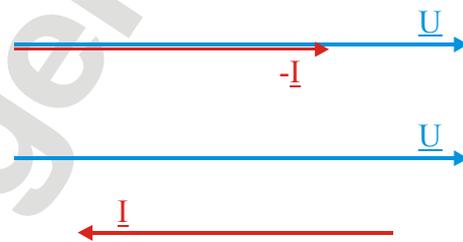


Bild 4.3.1-4: Zeigerdiagramm Widerstand, Leitwert

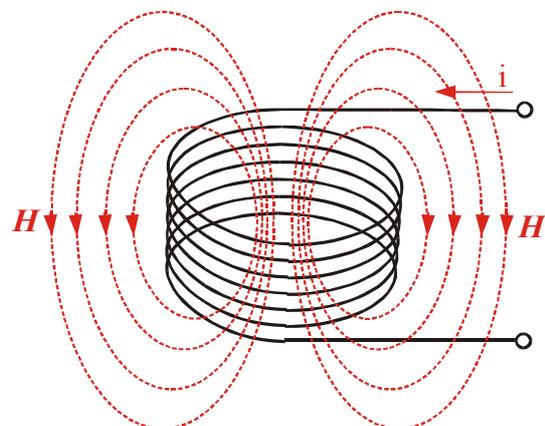


Bild 4.3.2-1: Induktivität

schiebt, sondern gespeichert. Das hat zur Folge, dass sich der Strom i nicht sprunghaft ändern kann, da das magnetische Feld durch seine Energie eine Wechselwirkung mit dem Stromkreis nach dem Induktionsgesetz besitzt.

Bei einer Induktivität handelt es sich um einen metallischen Leiter mit einem vernachlässigbaren Wirkwiderstand, der zu Leiterschleifen in Form einer Spule gewickelt wird, um das magnetische Feld räumlich zu konzentrieren. Dabei kann die im magnetischen Feld gespeicherte Energie durch spezielle magnetisch leitende Werkstoffe (magnetische Kerne) erhöht werden.

Bei einer Induktivität L , deren Wert in Henry [H] angegeben wird, handelt es sich um ein passives Bauelement, dessen Schaltbild und dessen Zusammenhang zwischen Strom und Spannung nach Bild 4.3.2-2 durch

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} \quad 4.3.2-1$$

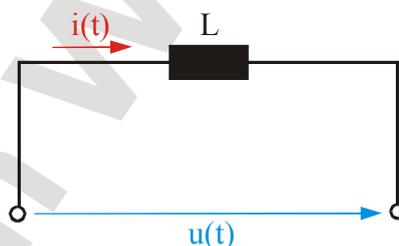


Bild 4.3.2-2: Induktivität

gegeben ist. An der Gleichung 4.3.2-1 erkennt man, dass Sprünge von $i(t)$ zu unendlich hohen Spannungsspitzen führen würden. Beschränkt man dagegen die Betrachtung auf einen sinusförmigen Strom der Form

$$i(t) = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i), \quad 4.3.2-2$$

so folgt für Gleichung 4.3.2-1

$$u(t) = L \hat{i} \cdot \frac{d \sin(\omega t + \varphi_i)}{dt} = L \hat{i} \omega \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) \quad 4.3.2-3$$

und damit für

$$\varphi_u = \varphi_i + 90^\circ. \quad 4.3.2-4$$

An dem Ergebnis erkennt man, dass Spannung und Strom nicht mehr die gleiche Phasenlage besitzen. Die Spannung eilt dem Strom um 90° voraus. Wegen

$$\hat{u} = L \hat{i} \omega \quad 4.3.2-5$$

und

$$U_{\text{eff}} = L \omega I_{\text{eff}} \quad 4.3.2-6$$

handelt es sich bei der Induktivität bei sinusförmigen Zeitfunktionen bezogen auf die Effektivwerte um ein lineares Bauelement.

Geht man zu der komplexen Schreibweise nach Bild 4.3.2-3 über, so folgt für die Gleichung 4.3.2-1

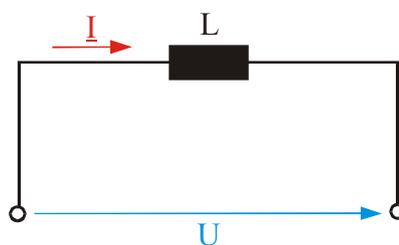


Bild 4.3.2-3: Induktivität

$$\begin{aligned} \underline{u}(t) &= L \cdot \frac{d\hat{i}(t)}{dt} = L \hat{i} \cdot \frac{d \exp(j\omega t)}{dt} = j\omega L \hat{i} \exp(j\omega t) \\ &= j\omega L \hat{i} \exp(j\varphi_i) \exp(j\omega t) = \omega L \hat{i} \exp(j\varphi_i) \exp(j90^\circ) \exp(j\omega t) \\ &= \hat{u} \exp(j\varphi_u) \exp(j\omega t) = \underline{\hat{u}} \exp(j\omega t) \end{aligned} \quad 4.3.2-7$$

mit

$$\underline{\hat{u}} = \hat{u} \exp(j\varphi_u) = \hat{u} \exp(j(\varphi_i + 90^\circ)). \quad 4.3.2-8$$

Für die komplexen Effektivwerte folgt somit:

$$\underline{U} = j\omega L \underline{I} \quad 4.3.2-9$$

Das Zeigerdiagramm für die komplexen Effektivwertzeiger für Strom und Spannung zeigt das Bild 4.3.2-3. Hier wurde der Spannungszeiger, der dem Stromzeiger um 90° voraus eilt, willkürlich in die Bezugsebene gelegt.



Bild 4.3.2-4: Zeigerdiagramm Induktivität

Für die komplexe Scheinleistung, die mit der Induktivität nach Bild 4.3.2-3 verbunden ist, folgt unter Berücksichtigung der Phasenlage zwischen Spannung und Strom:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U_{\text{eff}} \exp(j\varphi_u) \cdot I_{\text{eff}} \exp(-j\varphi_i) \\ &= U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \exp(j(\varphi_i + 90^\circ - \varphi_i)) \\ &= U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \exp(j90^\circ) = jU_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} = 0 + jQ = jQ \end{aligned} \quad 4.3.2-10$$

Damit wird in der Induktivität keine Wirkleistung in Wärme, sondern nur eine Blindleistung umgesetzt, mit der die Speicherung magnetischer Energie verbunden ist. Dabei wird der Induktivität eine positive Blindleistung Q zugeordnet.

Aus Gleichung 4.3.2-9 resultiert die Definition des Blindwiderstands X_L und des Blindleitwerts B_L durch

$$\underline{U} = j\omega L \underline{I} = jX_L \underline{I} = \frac{\underline{I}}{jB_L} \quad 4.3.2-11$$

mit

$$X_L = \omega L = -\frac{1}{B_L}. \quad 4.3.2-12$$

In der Realität besitzt die Spule wegen ihrer Wicklung auch einen Wirkwiderstand. Darüber hinaus besitzt gegebenenfalls auch der Eisenkern Verluste, die der Energie des Stromkreises entzogen und in Wärme umgesetzt wird. Daraus ergibt sich das Ersatzschaltbild einer Spule nach Bild 4.3.2-5, in dem der Ohmsche Widerstand der

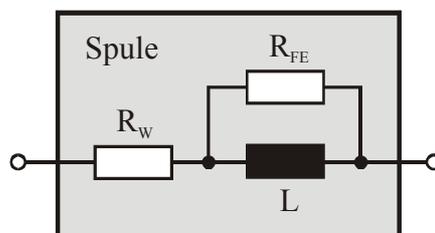


Bild 4.3.2-5: Ersatzschaltbild einer Spule

Wicklung durch R_W und die Verluste des Eisens durch R_{FE} repräsentiert werden.

4.3.3 Die Kapazität

Legt man eine elektrische Spannung u an zwei sich gegenüber liegende Metallplatten, so bilden sich an deren innenliegenden Oberflächen positive und negative Influenzladungen, die zwischen den Platten ein elektrisches Feld der Feldstärke E hervorrufen. Wie jedes elektrische Feld besitzt auch dieses eine Energie, die dem Stromkreis entnommen wird. Auch diese Energie wird nicht in Wärme umgesetzt, sondern gespeichert. Das hat zur Folge, dass sich die Spannung u nicht sprunghaft ändern kann, da das elektrische Feld durch seine Energie eine Wechselwirkung mit dem Stromkreis besitzt.

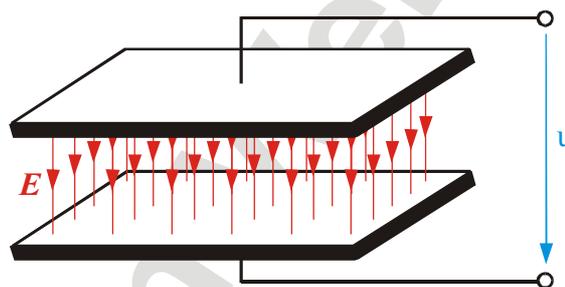


Bild 4.3.3-1: Kapazität

Die Anordnung zweier sich gegenüber liegender Platten bezeichnet man als Kondensator, dem als Wert eine Kapazität C zugeordnet wird. Um den Kondensator auf kleinem Raum zu konzentrieren, können an Stelle der Platten auch metallische Folien verwendet werden, die aufgewickelt werden. Zwischen den Folien wird dann zur Isolierung ein Dielektrikum angeordnet, welches den Wert der Kapazität beeinflusst.

Bei einem Kondensator mit einer Kapazität C , deren Wert in Farad [F] angegeben wird, handelt es sich um ein passives Bauelement, dessen Schaltbild und dessen Zusammenhang zwischen Strom und Spannung nach Bild 4.3.3-2 durch

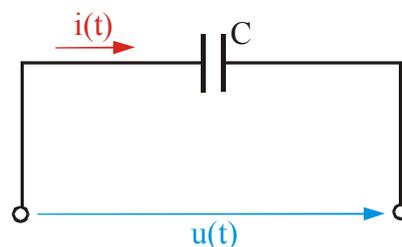


Bild 4.3.3-2: Kapazität

$$u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \quad 4.3.3-1$$

gegeben ist. An der Gleichung 4.3.3-1 erkennt man, dass Sprünge von $u(t)$ unendlich hohe Stromspitzen voraussetzen würden. Beschränkt man dagegen die Betrachtung auf einen sinusförmigen Strom der Form

$$i(t) = \hat{i} \sin(\omega t + \varphi_i), \quad 4.3.3-2$$

so folgt für Gleichung 4.3.3-1

$$u(t) = \frac{1}{C} \hat{i} \int \sin(\omega t + \varphi_i) dt = -\frac{\hat{i}}{\omega C} \cdot \cos(\omega t + \varphi_i) = \hat{u} \sin(\omega t + \varphi_u) \quad 4.3.3-3$$

und damit für

$$\varphi_u = \varphi_i - 90^\circ. \quad 4.3.3-4$$

An dem Ergebnis erkennt man, dass Spannung und Strom nicht mehr die gleiche Phasenlage besitzen. Die Spannung eilt dem Strom um 90° nach. Wegen

$$\hat{u} = \frac{\hat{i}}{\omega C} \quad 4.3.3-5$$

und

$$U_{\text{eff}} = \frac{I_{\text{eff}}}{\omega C} \quad 4.3.3-6$$

handelt es sich bei der Kapazität bei sinusförmigen Zeitfunktionen bezogen auf die Effektivwerte um ein lineares Bauelement.

Geht man nach Bild 4.3.3-3 zu der komplexen Schreibweise über, so folgt für die Gleichung 4.3.3-1

$$\begin{aligned} \underline{u}(t) &= \frac{1}{C} \cdot \int \underline{i}(t) dt = \frac{\hat{i}}{C} \cdot \int \exp(j\omega t) dt = \frac{\hat{i} \exp(j\omega t)}{j\omega C} \\ &= \frac{\hat{i} \exp(j\varphi_i) \exp(j\omega t)}{j\omega C} = \frac{\hat{i} \exp(j\varphi_i) \exp(-j90^\circ) \exp(j\omega t)}{\omega C} \\ &= \hat{u} \exp(j\varphi_u) \exp(j\omega t) = \underline{\hat{u}} \exp(j\omega t) \end{aligned} \quad 4.3.3-7$$

mit

$$\underline{\hat{u}} = \hat{u} \exp(j\varphi_u) = \hat{u} \exp(j(\varphi_i - 90^\circ)). \quad 4.3.3-8$$

Für die komplexen Effektivwerte folgt somit:

$$\underline{U} = \frac{\underline{I}}{j\omega C} = -j \frac{I}{\omega C} = j \frac{I}{-\omega C} \quad 4.3.3-9$$

Das Zeigerdiagramm für die komplexen Effektivwertzeiger für Strom und Spannung zeigt das Bild 4.3.3-4. Hier wurde der Spannungszeiger, der dem Stromzeiger um 90° nach eilt, willkürlich in die Bezugsebene gelegt.



Bild 4.3.3-4: Zeigerdiagramm Kapazität

Für die komplexe Scheinleistung, die mit der Kapazität nach Bild 4.3.3-3 verbunden ist, folgt unter Berücksichtigung der Phasenlage zwischen Spannung und Strom:

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U_{\text{eff}} \exp(j\varphi_u) \cdot I_{\text{eff}} \exp(-j\varphi_i) \\ &= U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \exp(j(\varphi_i - 90^\circ - \varphi_i)) \\ &= U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} \exp(-j90^\circ) = -j U_{\text{eff}} \cdot I_{\text{eff}} = 0 - jQ = -jQ \end{aligned} \quad 4.3.3-10$$

Damit wird in der Kapazität keine Wirkleistung in Wärme umgesetzt, sondern nur Blindleistung, mit der die Speicherung elektrischer Energie verbunden ist. Dabei wird der Kapazität eine negative Blindleistung Q zugeordnet.

Aus Gleichung 4.3.3-9 resultiert die Definition des Blindwiderstands X_C und des Blindleitwerts B_C durch

$$\underline{U} = j \frac{I}{-\omega C} = jX_C I = -j \frac{I}{B_C} \quad 4.3.3-11$$

mit

$$X_C = -\frac{1}{\omega C} = -\frac{1}{B_C}. \quad 4.3.3-12$$

In der Realität besitzt der Kondensator durch das Dielektrikum Verluste. Diese Verluste bestehen darin, dass ein kleiner Strom über das Dielektrikum zwischen den Platten bzw. den Folien des Kondensators fließt, wodurch sich ein aufgeladener Kondensator langsam entlädt. Bild 4.3.3-5 zeigt das Ersatzschaltbild des realen Kondensators, in dem die Verluste des Dielektrikums durch den Widerstand R_D repräsentiert werden.

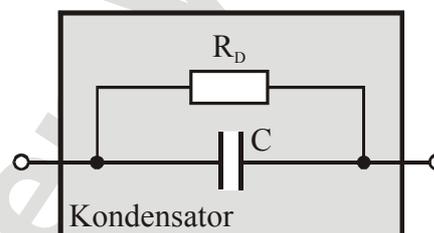


Bild 4.3.3-5: Ersatzschaltbild eines Kondensators

4.3.4 Der allgemeine lineare passive Zweipol

Im Wechselstromkreis stellt ein allgemeiner linearer passiver Zweipol eine Kombination der Bauelemente Widerstand R , Induktivität L und Kapazität C dar. Sie bilden in ihrer Wirkung den allgemeinen komplexen Widerstand \underline{Z} (Scheinwiderstand oder Impedanz) oder den allgemeinen komplexen Leitwert \underline{Y} (Scheinleitwert oder Admittanz) nach den Beziehungen

$$\underline{Z} = R + jX = Z \exp(j\varphi) \quad 4.3.4-1$$

und

$$\underline{Y} = G + jB = Y \exp(j\varphi_Y) = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{Z} \exp(-j\varphi). \quad 4.3.4-2$$

Über die Spannung und den Strom nach Bild 4.3.4-1 definiert sich der komplexe Widerstand durch

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U_{\text{eff}} \exp(j\varphi_u)}{I_{\text{eff}} \exp(j\varphi_i)} = \frac{U_{\text{eff}}}{I_{\text{eff}}} \exp(j(\varphi_u - \varphi_i)) = Z \exp(j\varphi) = R + jX \quad 4.3.4-3$$

und der komplexe Leitwert durch

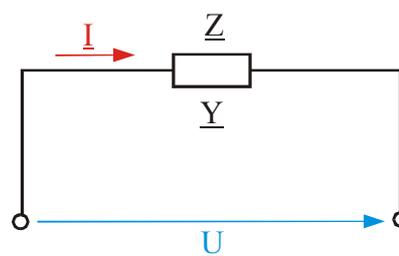


Bild 4.3.4-1: Widerstand; Leitwert

$$\underline{Y} = \frac{\underline{I}}{\underline{U}} = \frac{I_{\text{eff}} \exp(j\varphi_i)}{U_{\text{eff}} \exp(j\varphi_u)} = \frac{I_{\text{eff}}}{U_{\text{eff}}} \exp(-j(\varphi_u - \varphi_i)) = Y \exp(-j\varphi) = G + jB. \quad 4.3.4-4$$

Im Zeigerdiagramm stellen sich der komplexe Spannungszeiger und der komplexe Stromzeiger nach Bild 4.3.4-2 dar, in dem der Stromzeiger willkürlich in die Bezugsebene gelegt wurde. Legt man das Zählpfeilsystem nach Bild 4.3.4-1 zu Grunde, kann der Winkel φ im Bereich zwischen $+90^\circ$ und -90° variieren. Für positive Werte von φ eilt die Spannung dem Strom voraus, womit der komplexe Widerstand oder Leitwert ein induktives Verhalten aufweist. Für negative Werte von φ eilt die Spannung dem Strom nach, womit der komplexe Widerstand oder Leitwert ein kapazitives Verhalten aufweist. Die Scheinleistung wird dann allgemein wegen



Bild 4.3.4-2: Zeigerdiagramm

$$\begin{aligned} \underline{S} &= \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U_{\text{eff}} \exp(j\varphi_u) \cdot I_{\text{eff}} \exp(-j\varphi_i) = S \exp(j\varphi) \\ &= S \cos \varphi + jS \sin \varphi = P + jQ \end{aligned} \quad 4.3.4-5$$

einen Wirkleistungsanteil und einen Blindleistungsanteil enthalten. Dabei wird der Blindleistungsanteil einen positiven Wert bei einem induktiven Verhalten des komplexen Widerstands oder Leitwerts aufweisen. Mit einem negativen Wert des Blindleistungsanteil ist dann entsprechend ein kapazitives Verhalten des komplexen Widerstands oder Leitwerts verbunden.

4.3.5 Spannungs- und Stromquellen

Wie die Gleichspannungs- und Gleichstromquellen, besitzen auch die Quellen der Wechselstromnetzwerke eine innere Quelle \underline{U}_Q bzw. \underline{I}_Q und einen Innenwiderstand \underline{Z}_{iQ} bzw. einen Innenleitwert \underline{Y}_{iQ} . Bild 4.3.5-1 zeigt beide Quellen mit ihren Ersatzschaltungen. Beide Quellen müssen in der Lage sein, Wirkleistungen und Blindleistungen zur Verfügung zu stellen, wenn

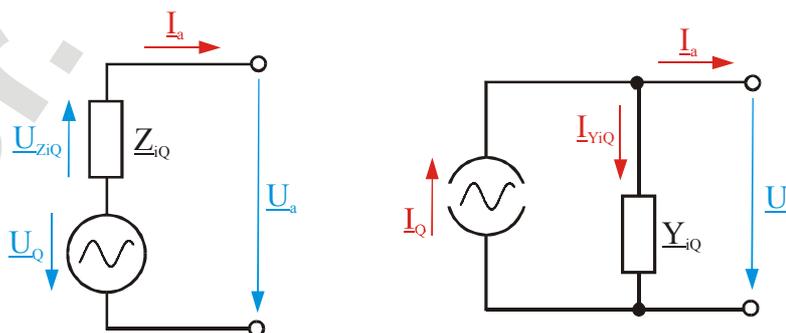


Bild 4.3.5-1: Komplexe Spannungs- und Stromquelle

deren Belastung mit einem komplexen Abschlusswiderstand \underline{Z}_a dies verlangt. Für die im Bild 4.3.5-1 dargestellten Quellen macht die Darstellung einer Quellenkennlinie in der Strom-Spannungs-Charakteristik keinen Sinn mehr, da es sich hier um komplexe Spannungen und Ströme handelt, die zusammen in einem zweidimensionalen Bild nicht mehr dargestellt werden können.

4.3.6 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Welche Phasenlage besitzen Strom und Spannung an einem Ohmschen Widerstand R , wenn das Zählpfeilsystem für Strom und Spannung gleich gerichtet ist?
- 2) Welche Phasenlage besitzen Strom und Spannung an einem Ohmschen Widerstand R , wenn das Zählpfeilsystem für Strom und Spannung entgegen gerichtet ist?
- 3) Welche Komponenten besitzt die komplexe Scheinleistung, die in einem Ohmschen Leitwert umgesetzt wird?
- 4) Welche Phase besteht zwischen Strom und Spannung an einer Induktivität L , wenn das Zählpfeilsystem für Strom und Spannung gleich gerichtet ist?
- 5) Welche Phase besteht zwischen Strom und Spannung an einer Induktivität L , wenn das Zählpfeilsystem für Strom und Spannung entgegen gerichtet ist?
- 6) Welche Komponenten besitzt die komplexe Scheinleistung, die in einer Induktivität L umgesetzt wird?
- 7) Welches Vorzeichen wird der Blindleistung Q einer Induktivität zugeordnet?
- 8) Wie berechnet sich der Blindwiderstand X_L der Induktivität L ?
- 9) Wie berechnet sich der Blindleitwert B_L der Induktivität L ?
- 10) Welche Phase besteht zwischen Strom und Spannung an einer Kapazität C , wenn das Zählpfeilsystem für Strom und Spannung gleich gerichtet ist?
- 11) Welche Phase besteht zwischen Strom und Spannung an einer Kapazität C , wenn das Zählpfeilsystem für Strom und Spannung entgegen gerichtet ist?
- 12) Welche Komponenten besitzt die komplexe Scheinleistung, die in einer Kapazität C umgesetzt wird?
- 13) Welches Vorzeichen wird der Blindleistung Q einer Kapazität zugeordnet?
- 14) Wie berechnet sich der Blindwiderstand X_C der Kapazität C ?
- 15) Wie berechnet sich der Blindleitwert B_C der Kapazität C ?
- 16) Wie verhalten sich die Zeiger von Strom und Spannung bei gleich gerichteten Zählpfeilen an einem komplexen Widerstand \underline{Z} , der ein kapazitives Verhalten aufweist?
- 17) Wie verhalten sich die Zeiger von Strom und Spannung bei entgegen gerichteten Zählpfeilen an einem komplexen Leitwert \underline{Y} , der ein induktives Verhalten aufweist?
- 18) Warum lassen sich für Quellen im Wechselstromkreis keine Kennlinien in der Strom-Spannungs-Charakteristik definieren?
- 19) Welche Fähigkeiten müssen Quellen im Wechselstromkreis besitzen?

Aufgabe 4.3.6-1:

Eine Kapazität hat den Wert $C = 100\mu\text{F}$. Wie groß ist deren Blindwiderstand X_C und deren Blindleitwert B_C bei einer Frequenz f von 1kHz ?

(Lösung: $X_C = -1,59\Omega$; $B_C = 628\text{mS}$)

Aufgabe 4.3.6-2:

Eine Induktivität hat den Wert $L = 150\text{mH}$. Wie groß ist deren Blindwiderstand X_L und deren Blindleitwert B_L bei einer Frequenz f von 15kHz ?

(Lösung: $X_L = 14,14\text{k}\Omega$; $B_L = -70,7\mu\text{S}$)

Aufgabe 4.3.6-3:

An einer Spule mit einem vernachlässigbaren Wirkwiderstand wird bei einer Frequenz f von 100Hz und einem durch die Spule fließenden sinusförmigen Strom mit dem Scheitelwert $\hat{i} = 15\text{A}$ eine Spannung von $U_{\text{eff}} = 180\text{V}$ gemessen. Wie groß ist die Induktivität L der Spule? Wie groß sind der Blindwiderstand X_L und die Blindleistung Q der Spule?

(Lösung: $L = 27\text{mH}$; $X_L = 16,97\Omega$; $Q = 1,909\text{kvar}$)

Aufgabe 4.3.6-4:

Bei welcher Frequenz f wird die Kapazität $C = 25\mu\text{F}$ betrieben, wenn der Scheitelwert der Spannung 220V und der Scheitelwert des Stroms 200mA betragen? Wie groß ist der Blindwiderstand und die Blindleistung der Kapazität? Wie groß ist der Scheitelwert der Augenblicksleistung $p(t)$?

(Lösung: $f = 5,79\text{Hz}$; $X_C = -1,1\text{k}\Omega$; $Q = -22\text{var}$; $\hat{p} = 22\text{W}$)

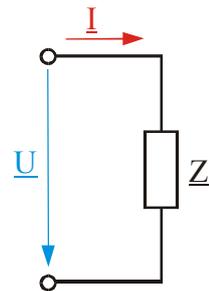
Aufgabe 4.3.6-5:

An dem nebenstehenden komplexen Widerstand

$$\underline{Z} = (150 - j280)\Omega$$

wird die Spannung $\underline{U} = 25\text{V} \exp(j30^\circ)$ gelegt. Berechnen Sie den Strom \underline{I} und die Scheinleistung \underline{S} . Zeichnen Sie ferner das Zeigerdiagramm und das Diagramm der Scheinleistung.

(Lösung: $\underline{I} = 78,7\text{mA} \exp(j91,8^\circ)$; $\underline{S} = 1,97\text{VA} \exp(-j61,8^\circ) = 0,93\text{W} - j1,74\text{var}$)



Aufgabe 4.3.6-6:

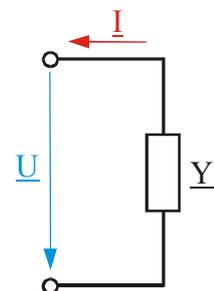
Für den nebenstehenden Leitwert ergibt sich die Spannung und der Strom zu:

$$\underline{U} = 14\text{V} \exp(j50^\circ)$$

$$\underline{I} = (-250 + j50)\text{mA}$$

Berechnen Sie den Leitwert \underline{Y} . Zeichnen Sie das Zeigerdiagramm. Berechnen Sie die Scheinleistung und stellen Sie diese im Diagramm dar.

(Lösung: $\underline{Y} = 18,2\text{mS} \exp(-j61,3^\circ)$; $\underline{S} = 3,57\text{W} \exp(j61,3^\circ) = 1,71\text{W} + j3,13\text{var}$)



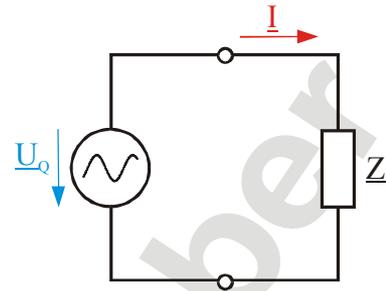
Aufgabe 4.3.6-7:

Eine Spannungsquelle mit dem Innenwiderstand $Z_{iQ} = 0$ und $\underline{U}_Q = 15\text{V exp}(j20^\circ)$ wird laut nebenstehender Schaltung an den Widerstand

$$\underline{Z} = (15 + j85)\Omega$$

angeschlossen. Berechnen Sie den Strom \underline{I} . Welche Wirkleistung und welche Blindleistung muss die Quelle aufbringen?

(Lösung: $\underline{I} = 173,8\text{mA exp}(-j60^\circ)$; $\underline{S}_Q = -0,453\text{W} - j2,57\text{var}$)



4.4 Reihen- und Parallelschaltung passiver Zweipole

4.4.1 Die komplexe Widerstands- und Leitwertebene

4.4.1.1 Die komplexe Widerstandsebene

Betrachtet man den komplexen Widerstand

$$\underline{Z} = R + jX = Z \exp(j\varphi), \quad 4.4.1.1-1$$

so kann sein komplexer Wert als Zeiger in der komplexen z-Ebene dargestellt werden. Da es sich hier um die Darstellung eines Widerstands handelt, bezeichnet man die Darstellungsebene als komplexe Widerstandsebene. Mit der Aufteilung

Wirkwiderstand	R
Blindwiderstand	$X = X_C = -\frac{1}{\omega C}$
	$X = X_L = \omega L$

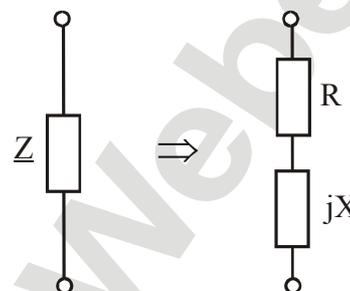


Bild 4.4.1.1-1: Komplexer Widerstand

folgt die allgemeine Darstellung nach Bild 4.4.1.1-2. Positive Imaginärteile sind dabei der Induktivität L und negative Imaginärteile der Kapazität C zugeordnet.

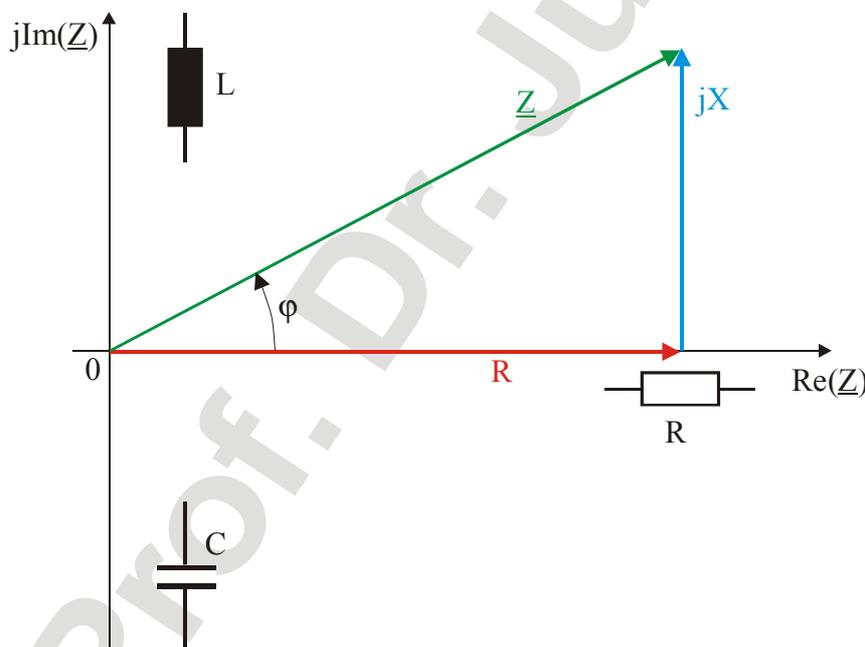


Bild 4.4.1.1-2: Komplexe Widerstandsebene

4.4.1.2 Die komplexe Leitwertebene

Betrachtet man den komplexen Leitwert

$$\underline{Y} = G + jB = Y \exp(j\varphi_y), \quad 4.4.1.2-1$$

so kann sein komplexer Wert als Zeiger in der komplexen y-Ebene dargestellt werden. Da es sich hier um die Darstellung eines Leitwerts handelt, bezeichnet man die Darstellungsebene als komplexe Leitwertebene. Mit der Aufteilung

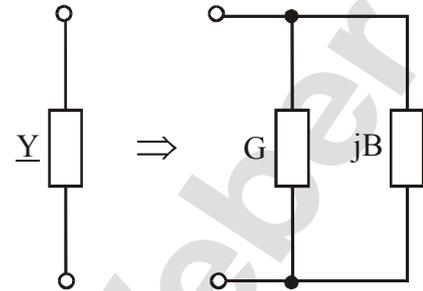


Bild 4.4.1.2-1: Komplexer Leitwert

Wirkleitwert G
Blindleitwert $B = B_C = \omega C$

$$B = B_L = -\frac{1}{\omega L}$$

folgt die allgemeine Darstellung nach Bild 4.4.1.2-2. Positive Imaginärteile sind dabei der Kapazität C und negative Imaginärteile der Induktivität L zugeordnet.

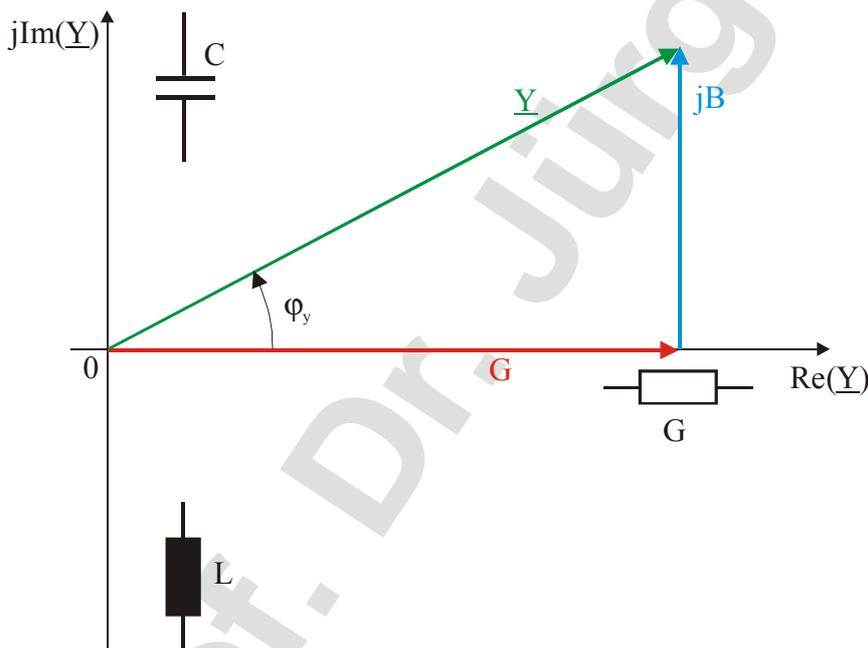


Bild 4.4.1.2-2: Komplexe Leitwertebene

4.4.2 Die Serienschaltung passiver Zweipole

Für die Serienschaltung von passiven Zweipolen gilt weiterhin die bereits im Kapitel 3 für Ohmsche Widerstände abgeleitete Beziehung, dass sich der Gesamtwiderstand $\underline{Z}_{\text{ges}}$ aus der Summe der Widerstände der Einzelzweipole zusammensetzt:

$$\underline{Z}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n \underline{Z}_i = \sum_{i=1}^n (\text{Re}(\underline{Z}_i) + j \text{Im}(\underline{Z}_i)) = \sum_{i=1}^n \text{Re}(\underline{Z}_i) + j \sum_{i=1}^n \text{Im}(\underline{Z}_i) \quad 4.4.2-1$$

Betrachtet man als Beispiel eine Serienschaltung der Zweipole Widerstand R, Induktivität L und Kapazität C nach Bild 4.4.2-1, so gilt:

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C \\ &= (R + jX_L + jX_C) \cdot \underline{I} \\ &= \left(R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right) \cdot \underline{I} \quad 4.4.2-2 \\ &= \underline{Z}_{\text{ges}} \cdot \underline{I} \end{aligned}$$

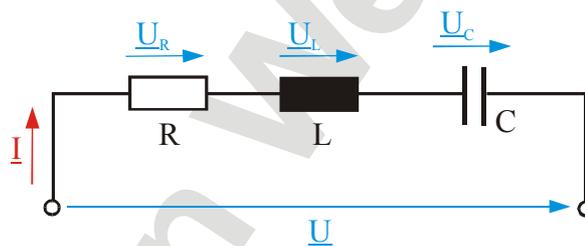


Bild 4.4.2-1: Serienschaltung

Damit folgen für $\underline{Z}_{\text{ges}}$ die Beziehungen:

$$\underline{Z}_{\text{ges}} = R + jX_L + jX_C = R + j \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right) = Z_{\text{ges}} \exp(j\varphi) \quad 4.4.2-3$$

mit

$$Z_{\text{ges}} = \sqrt{R^2 + (X_L + X_C)^2} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} \quad 4.4.2-4$$

und

$$\varphi = \arctan \left(\frac{X_L + X_C}{R} \right) = \arctan \left(\frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R} \right) \quad 4.4.2-5$$

$\underline{Z}_{\text{ges}}$ lässt sich nach Bild 4.4.2-2 in die komplexe Widerstandsebene zeichnen. Darüber hinaus kann man, wie im Bild 4.4.2-3 gezeigt, die Gleichung 4.4.2-2 als Zeigerdiagramm darstellen. In diesem Zeigerdiagramm, in dem der Strom \underline{I} in die Bezugsebene gelegt und in einem eigenen System dargestellt wurde, lässt sich die Maschenregel

$$\underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C - \underline{U} = 0 \quad 4.4.2-6$$

nach Bild 4.4.2-1 erkennen. Bildet man einen Umlauf entlang der Spannungszeiger und addiert alle Spannungszeiger in deren Pfeilrichtung man läuft und subtrahiert alle Spannungszeiger gegen deren Pfeilrichtung man läuft, so erhält man folgerichtig die Gleichung 4.4.2-6.

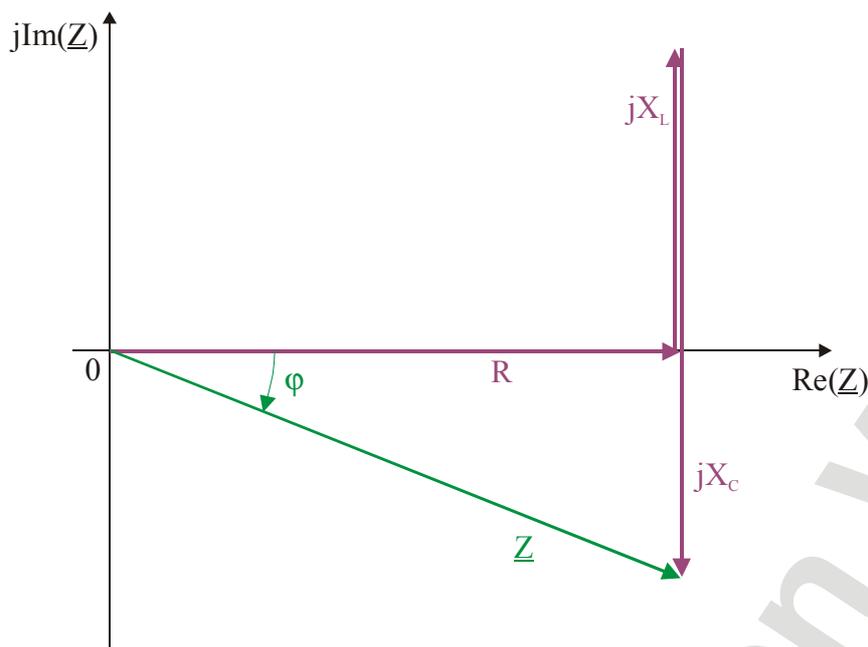


Bild 4.4.2-2: Darstellung in der komplexen Widerstandsebene

Werden beliebige komplexe Widerstände in Serie geschaltet, so lassen sich die einzelnen Widerstände nach Abschnitt 4.4.1.1 in die Realteile und Imaginärteile zerlegen, so dass nach Gleichung 4.4.2-1 der Gesamtwiderstand berechnet werden kann. Für diese Gleichung

$$\underline{Z}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n \underline{Z}_i = \sum_{i=1}^n (\text{Re}(\underline{Z}_i) + j\text{Im}(\underline{Z}_i))$$

lässt sich dann der Betrag von $\underline{Z}_{\text{ges}}$ nach

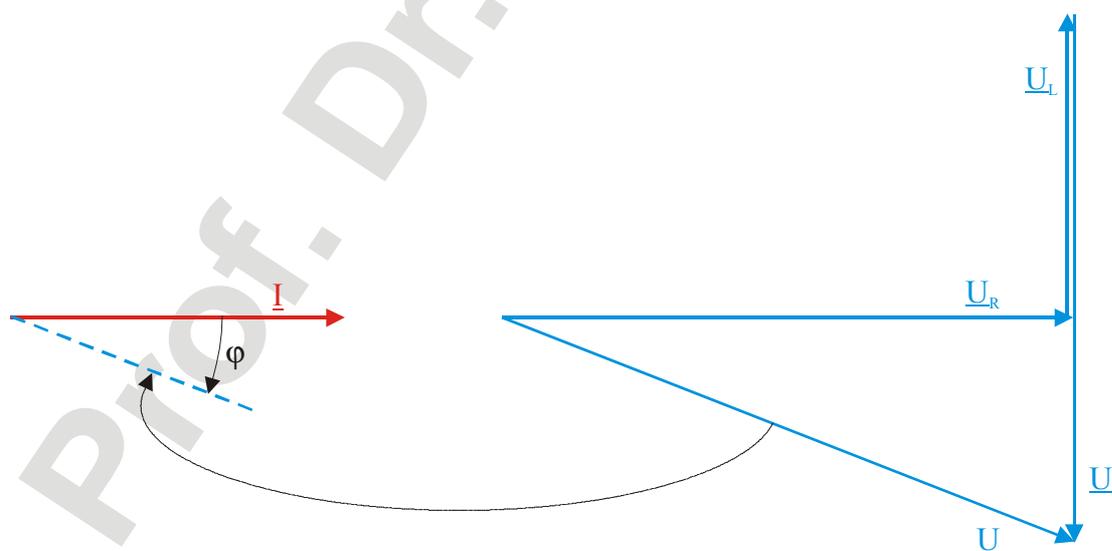


Bild 4.4.2-3: Zeigerdiagramm

$$Z_{\text{ges}} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n R_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^2} \quad 4.4.2-7$$

und der Phasenwinkel φ nach

$$\varphi = \arctan \left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{\sum_{i=1}^n R_i} \right) \quad 4.4.2-8$$

berechnen.

4.4.3 Die Parallelschaltung passiver Zweipole

Für die Parallelschaltung von passiven Zweipolen gilt weiterhin die bereits im Kapitel 3 für Ohmsche Leitwerte abgeleitete Beziehung, dass sich der Gesamtleitwert $\underline{Y}_{\text{ges}}$ aus der Summe der Leitwerte der Einzelzweipole zusammensetzt:

$$\underline{Y}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n \underline{Y}_i = \sum_{i=1}^n (\text{Re}(\underline{Y}_i) + j \text{Im}(\underline{Y}_i)) = \sum_{i=1}^n \text{Re}(\underline{Y}_i) + j \sum_{i=1}^n \text{Im}(\underline{Y}_i) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{Z_i}} \quad 4.4.3-1$$

Betrachtet man als Beispiel eine Parallelschaltung der Zweipole Leitwert G , Induktivität L und Kapazität C nach Bild 4.4.3-1, so gilt:

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C \\ &= (G + jB_L + jB_C) \cdot \underline{U} \\ &= \left(G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) \right) \cdot \underline{U} \\ &= \underline{Y}_{\text{ges}} \cdot \underline{U} \end{aligned} \quad 4.4.3-2$$

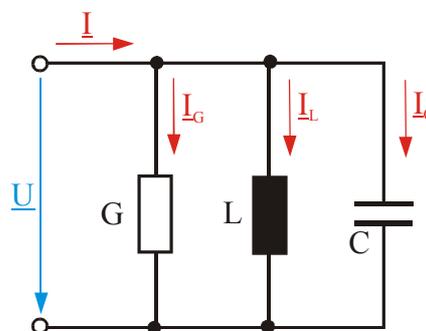


Bild 4.4.3-1: Parallelschaltung

Damit folgen für $\underline{Y}_{\text{ges}}$ die Beziehungen:

$$\underline{Y}_{\text{ges}} = G + jB_L + jB_C = G + j \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right) = Y_{\text{ges}} \exp(j\varphi_y) \quad 4.4.3-3$$

mit

$$Y_{\text{ges}} = \sqrt{G^2 + (B_L + B_C)^2} = \sqrt{G^2 + \left(\omega C - \frac{1}{\omega L} \right)^2} \quad 4.4.3-4$$

und

$$\varphi = \arctan\left(\frac{B_L + B_C}{G}\right) = \arctan\left(\frac{\omega C - \frac{1}{\omega L}}{G}\right) \quad 4.4.3-5$$

$\underline{Y}_{\text{ges}}$ lässt sich nach Bild 4.4.3-2 in die komplexen Leitwertebene zeichnen. Darüber hinaus kann man, wie im Bild 4.4.3-3 gezeigt, die Gleichung 4.4.3-2 als Zeigerdiagramm darstellen. In diesem Zeigerdiagramm, in dem die Spannung \underline{U} in die Bezugsebene gelegt und in einem eigenen System dargestellt wurde, lässt sich die Knotenpunktregel

$$\underline{I}_R + \underline{I}_L + \underline{I}_C - \underline{I} = 0 \quad 4.4.3-6$$

nach Bild 4.4.3-1 erkennen. Bildet man im Bild 4.4.3-3 einen Phad entlang der Stromzeiger und addiert alle Stromzeiger in deren Pfeilrichtung man läuft und subtrahiert alle Stromzeiger gegen deren Pfeilrichtung man läuft, so erhält man folgerichtig die Gleichung 4.4.3-6.

Werden beliebige komplexe Leitwerte parallel geschaltet, so lassen sich die einzelnen Leitwerte nach Abschnitt 4.4.1.2 in die Realteile und Imaginär-

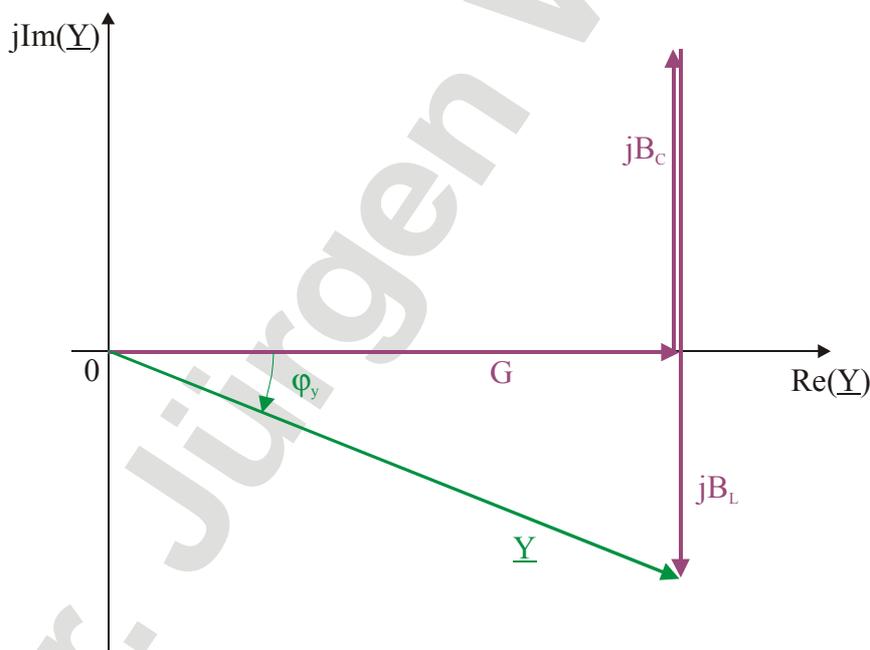


Bild 4.4.3-2: Darstellung in der komplexen Leitwertebene

der Gesamtleitwert berechnet werden kann. Für die Gleichung

$$\underline{Y}_{\text{ges}} = \sum_{i=1}^n \underline{Y}_i = \sum_{i=1}^n (\text{Re}(\underline{Y}_i) + j\text{Im}(\underline{Y}_i))$$

lässt sich dann der Betrag von $\underline{Y}_{\text{ges}}$ nach

$$Y_{\text{ges}} = \sqrt{\left(\sum_{i=1}^n G_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n B_i\right)^2} \quad 4.4.3-7$$

und der Phasenwinkel φ_y nach

$$\varphi_y = \arctan \left(\frac{\sum_{i=1}^n B_i}{\sum_{i=1}^n G_i} \right)$$

4.4.3-8

berechnen.

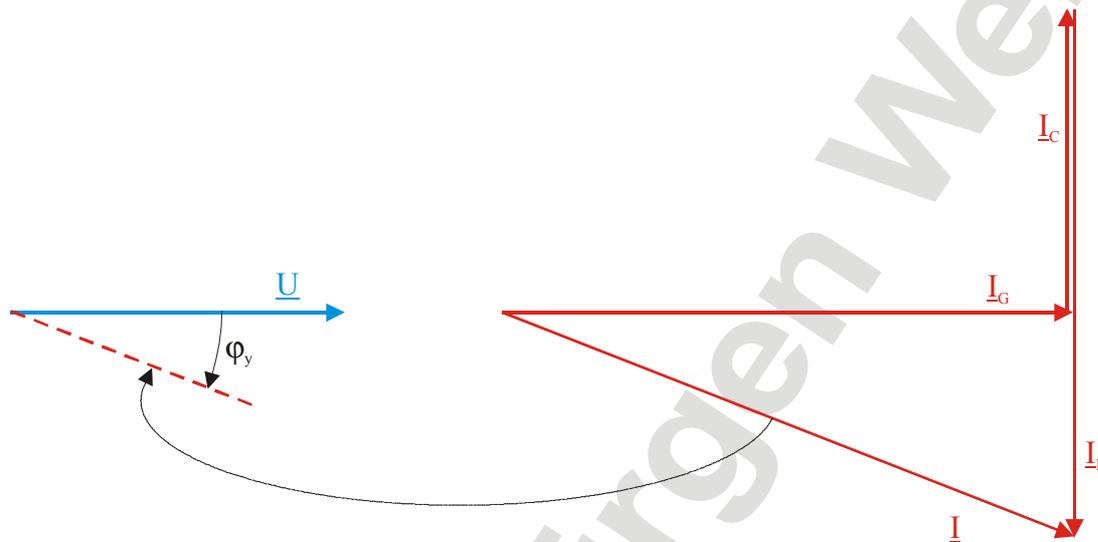


Bild 4.4.3-3: Zeigerdiagramm

4.4.4 Gesamtwiderstand oder -leitwert komplexer Widerstandsnetzwerke

Betrachtet man Netzwerke mit komplexen Widerständen oder Leitwerten, in denen sowohl Serienschaltungen als auch Parallelschaltungen auftreten, so muss man, wie bereits im Kapitel 3 beschrieben, die einzelnen Widerstände und Leitwerte entsprechend zusammenfassen. Möchte man diese Zusammenfassung mit Hilfe der komplexen Widerstands- und Leitwertebenen durchführen, so sind Transformationen aus der Widerstandsebene in die Leitwertebene und umgekehrt notwendig.

Die Transformation erfolgt entweder nach

$$\underline{Z} = Z \exp(j\varphi) \quad \Rightarrow \quad \underline{Y} = Y \exp(j\varphi_y) \quad 4.4.4-1$$

mit

$$Y = \frac{1}{Z}$$

und

$$\varphi_y = -\varphi$$

oder nach

$$\underline{Y} = Y \exp(j\varphi_y) \quad \Rightarrow \quad \underline{Z} = Z \exp(j\varphi) \tag{4.4.4-2}$$

mit

$$Z = \frac{1}{Y}$$

und

$$\varphi = -\varphi_y.$$

Die Vorgehensweise soll an einem Beispiel nach Bild 4.4.4-1 gezeigt werden. Für das Widerstandsnetzwerk nach Bild 4.4.4-1 gilt:

$$\underline{Z}_{\text{ges}} = \underline{Z}_1 // (\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3 // \underline{Z}_4)$$

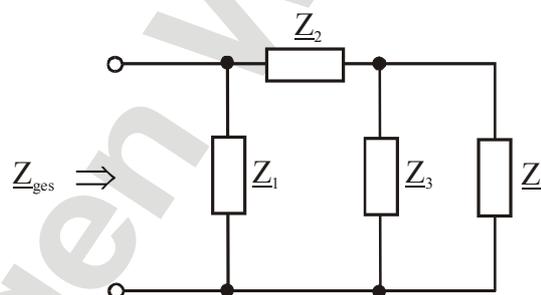


Bild 4.4.4-1: Widerstandsnetzwerk

Zunächst rechnet man die Widerstände \underline{Z}_3 und \underline{Z}_4 in die Leitwerte \underline{Y}_3 und \underline{Y}_4 um und stellt die Parallelschaltung von \underline{Y}_3 und \underline{Y}_4 in der Leitwertebene als \underline{Y}_{34} dar (siehe Bild 4.4.4-2). Dann folgt die Transformation von \underline{Y}_{34} nach \underline{Z}_{34} in die Widerstandsebene. In der Widerstandsebene wird der Widerstand \underline{Z}_2 addiert, woraus sich der Widerstand \underline{Z}_{234} ergibt, der nach \underline{Y}_{234} in die Leitwertebene transformiert wird. Anschließend

die Transformation von \underline{Y}_{234} nach \underline{Z}_{234} in die Widerstandsebene. In der Widerstandsebene wird der Widerstand \underline{Z}_2 addiert, woraus sich der Widerstand \underline{Z}_{234} ergibt, der nach \underline{Y}_{234} in die Leitwertebene transformiert wird. Anschließend

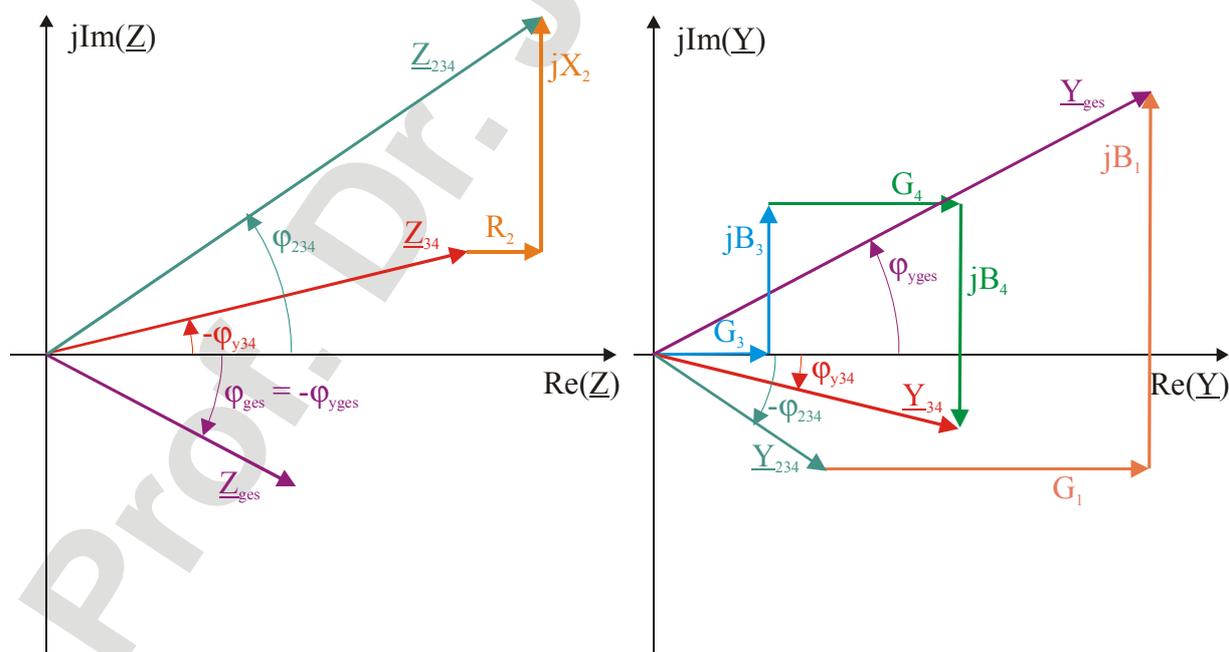


Bild 4.4.4-2: Darstellung in der komplexen Widerstands- und Leitwertebene

wird der aus \underline{Z}_1 berechnete Leitwert \underline{Y}_1 in der Leitwertebene zu \underline{Y}_{234} addiert, womit der Gesamtleitwert $\underline{Y}_{\text{ges}}$ des Widerstandsnetzwerks entsteht, der zuletzt in die Widerstandsebene nach $\underline{Z}_{\text{ges}}$ transformiert wird.

4.4.5 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) In welche Komponenten kann der komplexe Widerstand \underline{Z} zerlegt werden?
- 2) Welchem Bauelement ist ein negativer Blindwiderstand zugeordnet?
- 3) Welchem Bauelement ist ein positiver Blindwiderstand zugeordnet?
- 4) In welche Komponenten kann der komplexe Leitwert \underline{Y} zerlegt werden?
- 5) Welchem Bauelement ist ein negativer Blindleitwert zugeordnet?
- 6) Welchem Bauelement ist ein positiver Blindleitwert zugeordnet?
- 7) Welche Gesetze findet man in dem Zeigerdiagramm der Spannungen und Ströme wieder?
- 8) Wie wird der Widerstand \underline{Z} von der Widerstandsebene in die Leitwertebene transformiert?
- 9) Wie wird der Leitwert \underline{Y} von der Leitwertebene in die Widerstandsebene transformiert?

Aufgabe 4.4.5-1:

Die komplexen Widerstände

$$\underline{Z}_1 = (100 + j74)\Omega$$

$$\underline{Z}_2 = 250\Omega \exp(-j40^\circ)$$

$$\underline{Z}_3 = 58\Omega \exp(j78^\circ)$$

sind in Serie geschaltet. Berechnen Sie den Gesamtwiderstand $\underline{Z}_{\text{ges}}$ nach Betrag und Phase sowie den Wirkwiderstand R_{ges} den Blindwiderstand X_{ges} . Überprüfen Sie das Ergebnis mit Hilfe der komplexen Widerstandsebene.

(Lösung: $\underline{Z}_{\text{ges}} = 305,05\Omega \exp(-j5,64^\circ)$; $R = 303,57\Omega$; $X = -29,96\Omega$)

Aufgabe 4.4.5-2

Gegeben ist das nebenstehende Widerstandsnetzwerk mit den Werten:

$$\underline{Z}_1 = (305 - j467)\Omega$$

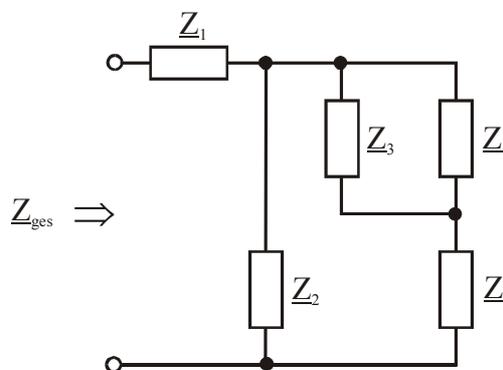
$$\underline{Z}_2 = 456\Omega \exp(j68^\circ)$$

$$\underline{Z}_3 = (249 + j567)\Omega$$

$$\underline{Z}_4 = 298\Omega \exp(-j32^\circ)$$

$$\underline{Z}_5 = 700\Omega \exp(j16^\circ)$$

Berechnen Sie den Gesamtwiderstand $\underline{Z}_{\text{ges}}$ nach Betrag und Phase sowie den Wirkwiderstand R_{ges}



den Blindwiderstand X_{ges} . Überprüfen Sie das Ergebnis mit Hilfe der komplexen Widerstands- und Leitwertebene. Wirkt die Schaltung induktiv, kapazitiv oder rein ohmsch?

(Lösung: $Z_{ges} = 564\Omega \exp(-j21^\circ)$; $R_{ges} = 527\Omega$; $X_{ges} = -200\Omega$; kapazitiv)

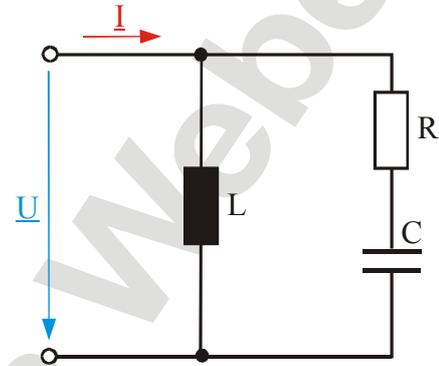
Aufgabe 4.4.5-3

Gegeben ist das nebenstehende Netzwerk mit den Werten:

- $L = 3\text{mH}$
- $C = 10\mu\text{F}$
- $R = 10\Omega$
- $f = 1\text{kHz}$
- $\underline{U} = 10\text{V} \exp(j0^\circ)$

Berechnen Sie den Strom \underline{I} .

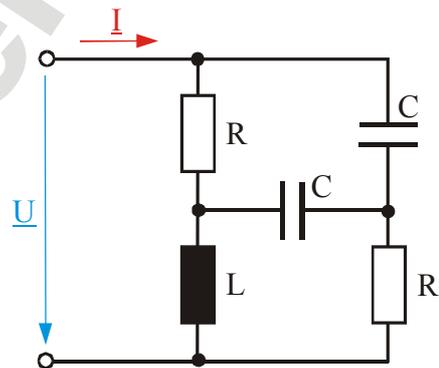
(Lösung: $\underline{I} = 294\text{mA} \exp(-j15,8^\circ)$)



Aufgabe 4.4.5-4

In der nebenstehenden Schaltung betragen die Wirkwiderstände $R = 100\Omega$ und die Blindwiderstände $X_L = 250\Omega$ und $X_C = -120\Omega$. Berechnen Sie den Strom \underline{I} bei $\underline{U} = 50\text{V}$.

(Lösung: $\underline{I} = (330,6 + j80,3)\text{mA}$)



4.5 Komplexe Netzwerke

4.5.1 Berechnungsverfahren

Für komplexe Netzwerke können alle Berechnungsverfahren aus dem Kapitel 3 übernommen werden. So lassen sich aus den komplexen Netzwerken Ersatzspannungsquellen und Ersatzstromquellen aus dem Kurzschlussstrom, der Leerlaufspannung und dem Innenwiderstand entwickeln. Darüber hinaus lässt sich auch für komplexe Netzwerke die Netzwerkmatrix zur Berechnung aller Zweigströme aufstellen.

Im Zusammenhang mit der Netzwerkmatrix, die nach der Gleichung

$$\underline{M}^{-1} \cdot \underline{S} = \underline{I} \quad 4.5.1-1$$

die komplexen Zweigströme berechnet, sei an dieser Stelle auf ein Berechnungsverfahren hingewiesen, falls man nicht über ein Programm verfügt, welches komplexe Matrizenrechnungen beherrscht. Die Gleichung 4.5.1-1 lässt sich zunächst in der Form

$$(\underline{M}_r + j\underline{M}_i)^{-1} \cdot (\underline{S}_r + j\underline{S}_i) = (\underline{I}_r + j\underline{I}_i) \quad 4.5.1-2$$

mit den Realteilen und Imaginärteilen schreiben. Für ein Programm, welches nur reelle Matrixgleichungen lösen kann, muss die Matrixgleichung wie folgt umgeschrieben werden:

$$\begin{pmatrix} \underline{M}_r & -\underline{M}_i \\ \underline{M}_i & \underline{M}_r \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} \underline{S}_r \\ \underline{S}_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{I}_r \\ \underline{I}_i \end{pmatrix} \quad 4.5.1-3$$

Hier handelt es sich um Matrizen, deren Elemente selbst wieder Matrizen sind. Nach der Lösung der Spaltenmatrix der Ströme, muss man die Zuordnung der Real- und Imaginärteile vornehmen.

4.5.2 Zeigerdiagramme

Oft ist bei komplexen Widerstandsnetzwerken von Interesse, wie die Quelle belastet wird und wie die Amplituden- und Phasenbezüge der Spannungen und Ströme der Bauelemente untereinander sind. Hier ist die Entwicklung eines Zeigerdiagramms der einzelnen Spannungen und Ströme ein nützliches Mittel, um sich einen Überblick zu verschaffen.

Bei der Entwicklung des Zeigerdiagramms kann man nach zwei verschiedenen Methoden vorgehen:

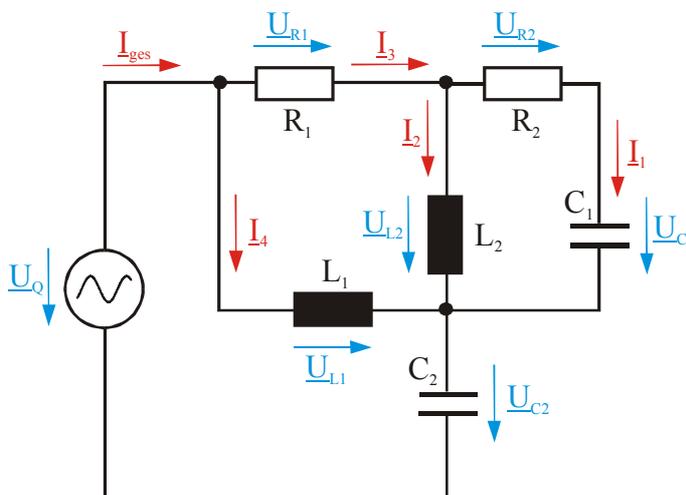


Bild 4.5.2-1: Beispielnetzwerk

- Entwicklung des Zeigerdiagramms durch exakte komplexe Berechnungen für die Amplituden und die Phasen der Effektivwerte der Spannungen und Ströme.
- Entwicklung des Zeigerdiagramms durch Berechnung der Amplituden der Effektivwerte der Spannungen und Ströme sowie die Ermittlung der Phasen aus a priori Informationen.

Beide Verfahren sollen an Hand eines Beispielnetzwerks nach Bild 4.5.2-1 mit den Werten

$$\begin{aligned}R_1 &= 15\Omega \\R_2 &= 25\Omega \\X_{L1} &= 20\Omega \\X_{L2} &= 30\Omega \\X_{C1} &= -10\Omega \\X_{C2} &= -10\Omega\end{aligned}$$

erläutert werden. Dazu werden zunächst in dem Beispielnetzwerk alle Strompfeile und Spannungspfeile eingezeichnet. Für den Strom I_1 wird der Wert 1A mit der Phase 0° vorgegeben.

Aus der exakten Berechnung folgt:

$$\begin{aligned}\underline{U}_{C1} &= \underline{I}_1 \cdot jX_{C1} = 10V \exp(-j90^\circ) = (0 - j10)V \\ \underline{U}_{R2} &= \underline{I}_1 \cdot R_2 = 25V \exp(j0^\circ) = (25 + j0)V \\ \underline{U}_{L2} &= \underline{U}_{R2} + \underline{U}_{C1} = (25 - j10)V = 26,9V \exp(-j21,8^\circ) \\ \underline{I}_2 &= \frac{\underline{U}_{L2}}{jX_{L2}} = 0,897A \exp(-j111,8^\circ) = (-0,333 - j0,833)A \\ \underline{I}_3 &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 = (0,667 - j0,833)A = 1,067A \exp(-j51,3^\circ) \\ \underline{U}_{R1} &= \underline{I}_3 \cdot R_1 = 16,0V \exp(-j51,3^\circ) = (10 - j12,5)V \\ \underline{U}_{L1} &= \underline{U}_{R1} + \underline{U}_{L2} = (35 - j22,5)V = 41,6V \exp(-j32,7^\circ) \\ \underline{I}_4 &= \frac{\underline{U}_{L1}}{jX_{L1}} = 2,080A \exp(-j122,7^\circ) = (-1,125 - j1,750)A \\ \underline{I}_{ges} &= \underline{I}_3 + \underline{I}_4 = (-0,458 - j2,583)A = 2,623A \exp(-j100,0^\circ) \\ \underline{U}_{C2} &= \underline{I}_{ges} \cdot jX_{C2} = 26,2V \exp(-j190,1^\circ) = (-25,8 + j4,6)V \\ \underline{U}_Q &= \underline{U}_{L1} + \underline{U}_{C2} = (9,2 - j17,9)V = 20,1V \exp(-j62,9^\circ)\end{aligned}$$

Bei der Berechnung wurden die Maschen und die Knoten des Netzwerks berücksichtigt. Aus den Ergebnissen lässt sich nun das Zeigerdiagramm nach Bild 4.5.2-2 aufbauen. In dem Zeigerdiagramm findet man alle Knotenpunkt- und Maschengleichungen des Netzwerks wieder. Das Zeigerdiagramm wurde im Maßstab $10V \hat{=} 2,5cm; 1A \hat{=} 5cm$ dargestellt. Als Ergebnis kann aus dem Zeigerdiagramm entnommen werden, dass die Schaltung die Quelle induktiv belastet. Der Winkel zwischen der Quellenspannung und den Gesamtstrom beträgt

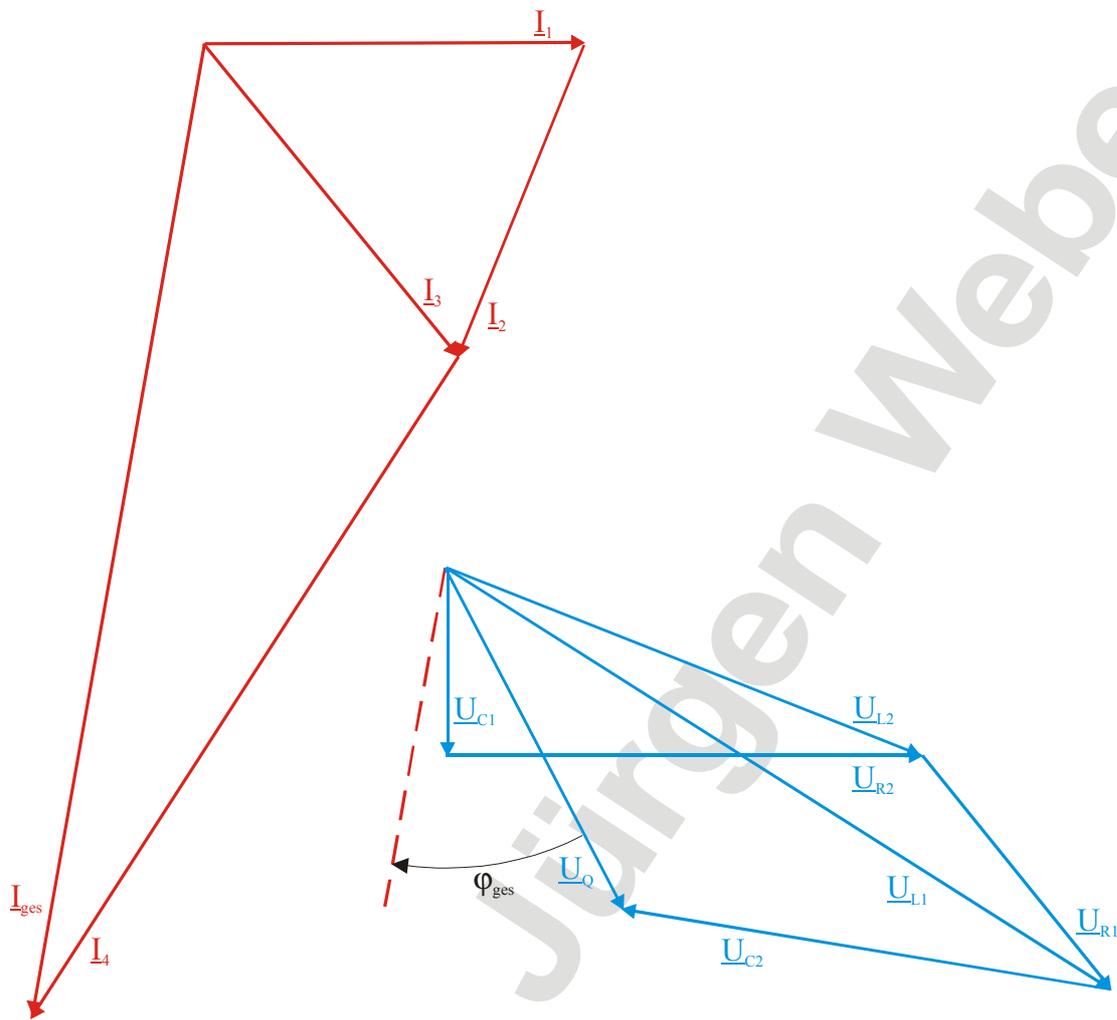


Bild 4.5.2-2: Zeigerdiagramm für das Beispielnetzwerk

$$\varphi_{ges} = -100^\circ + 62,9^\circ = -37,1^\circ .$$

Da mit dem Zeigerdiagramm alle Verhältnisse fest liegen, kann man jetzt eine beliebige Spannung \underline{U}_Q vorgeben, die zu einer neuen Skalierung der Spannungen und der Ströme führt. Das gesamte Zeigerdiagramm kann auch beliebig gedreht werden, so dass zum Beispiel die Quellenspannung \underline{U}_Q in der Bezugsebene liegt. Selbstverständlich lassen sich auch alle Spannungen und Ströme durch die Netzwerkmatrix ermitteln.

Um nach der zweiten Methode das Zeigerdiagramm zu entwickeln, benötigt man nur die Beträge der Spannungen und Ströme. Die entsprechenden Phasenwinkel ergeben sich dann aus der Überlegung,

- dass an einem Widerstand Spannung und Strom in Phase sind,
- dass an einer Induktivität die Spannung dem Strom um 90° voreilt

- dass an einer Kapazität der Strom der Spannung um 90° voreilt.

Im Einzelnen ergibt sich dann folgende Rechnung und Vorgehensweise, die mit dem Zeigerdiagramm nach Bild 4.5.2-2 korrespondiert:

$|\underline{I}_1|$ wird in die Bezugsebene gelegt.

$|\underline{U}_{C1}| = |\underline{I}_1 \cdot jX_{C1}| = 10V$ eilt dem Strom \underline{I}_1 um 90° nach.

$|\underline{U}_{R2}| = |\underline{I}_1 \cdot R_2| = 25V$ liegt mit \underline{I}_1 in Phase.

$|\underline{U}_{L2}|$ wird mit 26,9V durch Messung dem Zeigerdiagramm entnommen.

$|\underline{I}_2| = \left| \frac{\underline{U}_{L2}}{jX_{L2}} \right| = 0,897A$ eilt der Spannung \underline{U}_{L2} um 90° nach.

$|\underline{I}_3|$ wird mit 1,067A durch Messung dem Zeigerdiagramm entnommen.

$|\underline{U}_{R1}| = |\underline{I}_3 \cdot R_1| = 16,0V$ liegt mit \underline{I}_3 in Phase.

$|\underline{U}_{L1}|$ wird mit 41,6V durch Messung dem Zeigerdiagramm entnommen.

$|\underline{I}_4| = \left| \frac{\underline{U}_{L1}}{jX_{L1}} \right| = 2,080A$ eilt der Spannung \underline{U}_{L1} um 90° nach.

$|\underline{I}_{ges}|$ wird mit 2,624A durch Messung dem Zeigerdiagramm entnommen.

$|\underline{U}_{C2}| = |\underline{I}_{ges} \cdot jX_{C2}| = 26,2V$ eilt dem Strom \underline{I}_{ges} um 90° nach.

$|\underline{U}_Q|$ wird mit 20,1V durch Messung dem Zeigerdiagramm entnommen.

φ_{ges} wird mit -37° durch Messung dem Zeigerdiagramm entnommen.

Wie man sieht, erspart man sich bei dem zweiten Weg eine mitunter aufwändige Rechnung. Wie bereits erwähnt, möchte man mit Hilfe des Zeigerdiagramms eine Übersicht über die Verhältnisse der Spannungen und Ströme innerhalb des Netzwerkes erhalten, so dass die Ungenauigkeiten, die sich durch das Messen und Ablesen im Zeigerdiagramm zwangsläufig ergeben, tolerabel sind.

Auf eine Besonderheit bei der Entwicklung des Zeigerdiagramms aus den Beträgen der Spannungen und Ströme sei abschließend noch hingewiesen. Als Beispiel dient das Teilnetzwerk nach Bild 4.5.2-3. Ist nach diesem Bild die Spannung \underline{U}_L und der Strom \underline{I}_3 bekannt und sollen aus diesen Vorgaben die Spannungen \underline{U}_C und \underline{U}_R ermittelt werden,

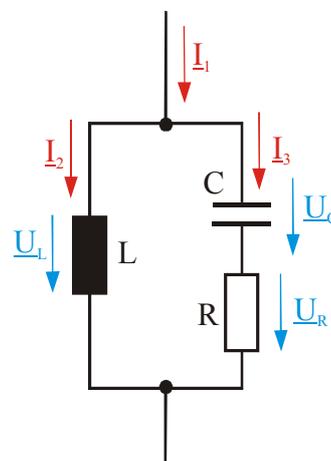


Bild 4.5.2-3: Teilnetzwerk

so muss der Taleskreis, der durch den Spannungszeiger \underline{U}_L nach Bild 4.5.2-4 definiert wird, herangezogen werden. Da

$$\underline{U}_L = \underline{U}_C + \underline{U}_R$$

gilt und die Zeiger von \underline{U}_R und \underline{U}_C senkrecht aufeinander stehen, muss \underline{U}_R in Phase zu \underline{I}_3 in den Taleskreis eingezeichnet werden. Welchen Teil des Taleskreises man nimmt, ist hierbei uninteressant. \underline{U}_C schließt dann die Masche. Folgerichtig eilt die Spannung am Kondensator dem Strom um 90° nach.

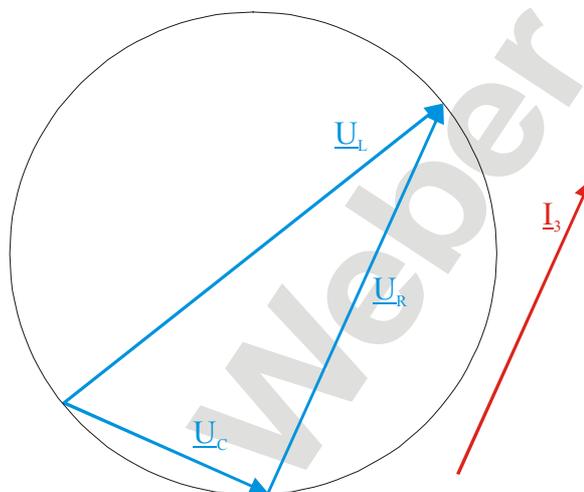


Bild 4.5.2-4: Zeigerdiagramm des Teilnetzwerks

4.5.3 Übertragungsverhalten

Bisher wurde das Verhalten eines Netzwerks an zwei Klemmen analysiert. Dazu wurde das Netzwerk als ein Zweipol betrachtet. Besitzt ein Netzwerk wie im Bild 4.5.3-1 dargestellt zwei Eingangsklemmen und zwei Ausgangsklemmen, so bezeichnet man das Netzwerk als einen Vierpol. Zu den Vierpolen gibt es eine umfangreiche Theorie, die aber im Rahmen dieses Kurses nicht erläutert werden soll. An dieser Stelle soll nur das Übertragungsverhalten

$$\frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_1} = \underline{F}(\omega) \quad 4.5.3-1$$

elementarer Vierpole in Abhängigkeit der Kreisfrequenz ω und damit wegen $\omega = 2\pi f$ auch in Abhängigkeit der Frequenz f betrachtet werden.

Allgemeine Betrachtungen des Übertragungsverhaltens von Vierpolen benutzen die Laplace-Transformation und das Pol- und Nullstellenverhalten in der komplexen s -Ebene. Auch diese Betrachtung soll nicht Gegenstand dieses Kurses sein, so dass die folgenden Analysen nur im Frequenzbereich durchgeführt werden.

Zunächst soll der elementare komplexe Vierpol nach Bild 4.5.3-2 betrachtet werden. Sein Übertragungsverhalten lässt sich nach der komplexen Spannungsteilerregel durch die Übertragungsfunktion

$$\underline{F}(\omega) = \frac{\underline{Z}_2(\omega)}{\underline{Z}_1(\omega) + \underline{Z}_2(\omega)} \quad 4.5.3-2$$

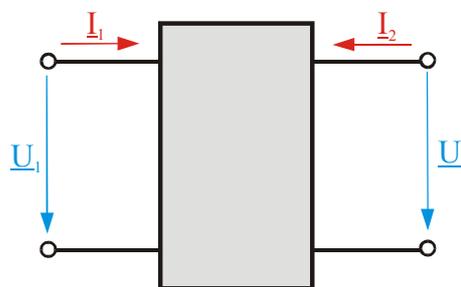


Bild 4.5.3-1: Vierpol

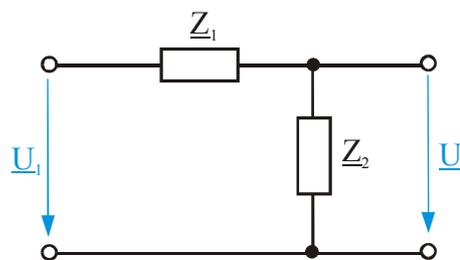


Bild 4.5.3-2: Elementarer Vierpol

beschreiben. Gleichung 4.5.3-2 bildet die Basis der folgenden Betrachtungen, in denen die komplexen Widerstände \underline{Z} durch Ohmsche Widerstände R, Induktivitäten L und Kapazitäten C ersetzt werden.

4.5.3.1 RC-Vierpole

Für den RC-Vierpol nach Bild 4.5.3.1-1 folgt die Übertragungsfunktion

$$\underline{F}(\omega) = \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} = |\underline{F}(\omega)| \exp(j\varphi_F(\omega)) \quad 4.5.3.1-1$$

mit

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}. \quad 4.5.3.1-2$$

Bild 4.5.3.1-2 zeigt das Übertragungsverhalten des Betrages $|\underline{F}(\omega)|$ und der Phase $\varphi_F(\omega)$ (Amplituden- und Phasengang) der Übertragungsfunktion über dem Logarithmus der Kreisfrequenz. Aus dem Amplitudengang geht hervor, dass bei niedrigen Frequenzen der Betrag der Ausgangsspannung $|\underline{U}_2|$ identisch mit dem Betrag der Eingangsspannung $|\underline{U}_1|$ ist. Bei hohen Frequenzen nimmt der Betrag der Ausgangsspannung ab. Diese Frequenzen werden nur gedämpft an den Ausgang übertragen. Dieses Verhalten nennt man Tiefpass. Der Tiefpass besitzt die Eckfrequenz $\omega = \omega_0$. An dieser Stelle ist die Amplitude auf den Wert

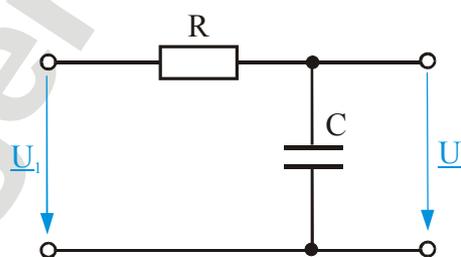


Bild 4.5.3.1-1: RC-Vierpol

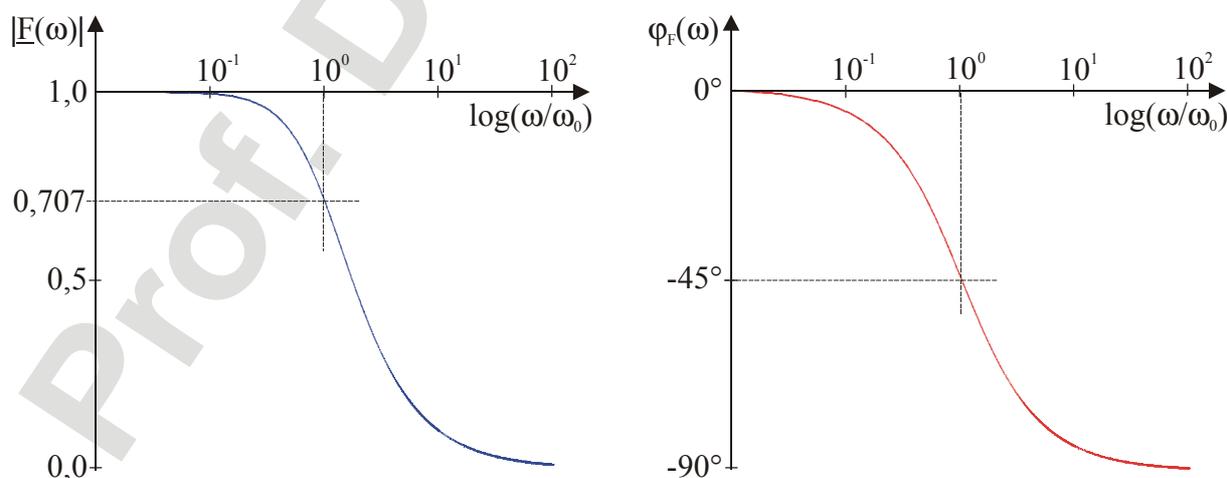


Bild 4.5.3.1-2: Amplituden- und Phasengang der Übertragungsfunktion

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$$

4.5.3.1-3

abgesunken. Der Phasengang läuft über der Kreisfrequenz von 0° bis -90° . Bei der Eckfrequenz hat die Phase den Wert -45° .

Da die Kreisfrequenz in der Übertragungsfunktion nur in der ersten Potenz auftritt, nennt man das Übertragungsverhalten einen Tiefpass 1. Ordnung. Der Tiefpass stellt ein Filter dar, das niedrige Frequenzen an den Ausgang gelangen lässt, hohe Frequenzen aber sperrt.

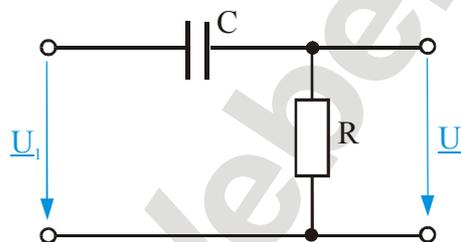


Bild 4.5.3.1-3: RC-Vierpol

Vertauscht man im Bild 4.5.3.1-1 die beiden Bauelemente, so erhält man den Vierpol nach Bild 4.5.3.1-3 mit der Übertragungsfunktion

$$\underline{F}(\omega) = \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad 4.5.3.1-4$$

Der Amplituden- und Phasengang ist im Bild 4.5.3.1-4 dargestellt. Es handelt sich hier um einen Hochpass 1. Ordnung. Der Hochpass stellt ein Filter dar, das hohe Frequenzen an den Ausgang gelangen lässt, niedrige Frequenzen aber sperrt.

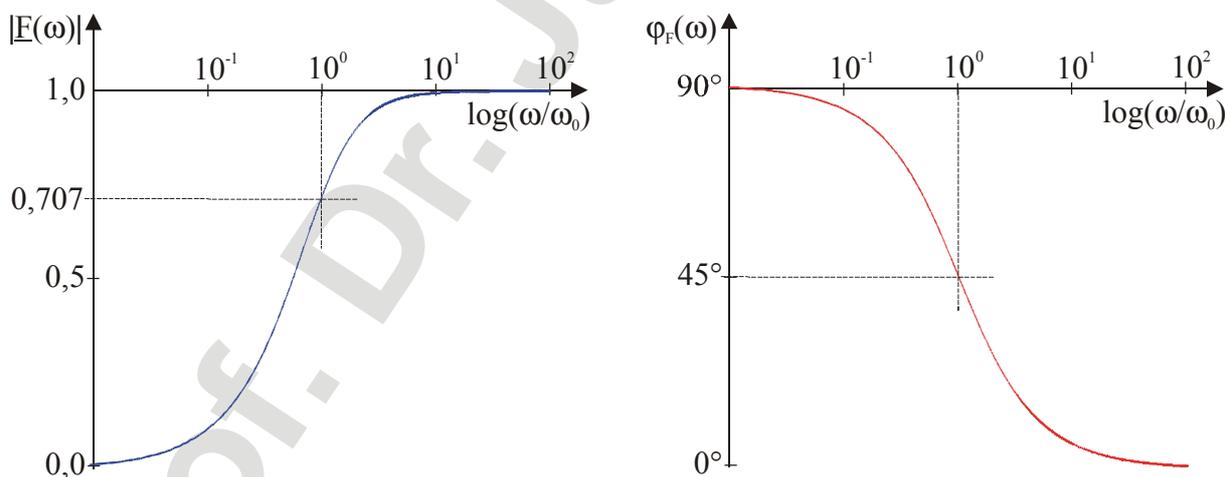


Bild 4.5.3.1-4: Amplituden- und Phasengang der Übertragungsfunktion

4.5.3.2 RL-Vierpole

Für den RL-Vierpol nach Bild 4.5.3.2-1 folgt die Übertragungsfunktion

$$\underline{F}(\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega \frac{L}{R}}{1 + j\omega \frac{L}{R}} = \frac{j \frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \quad 4.5.3.2-1$$

mit

$$\omega_0 = \frac{R}{L} \quad 4.5.3.2-2$$

Da die Übertragungsfunktion identisch mit der Übertragungsfunktion nach Gleichung 4.5.3.1-4 ist, ergibt sich der Amplituden- und Phasengang nach Bild 4.5.3.1-4, womit es sich bei dem Vierpol um einen Hochpass 1. Ordnung handelt.

Vertauscht man im Bild 4.5.3.2-1 die beiden Bauelemente, so ergibt sich der Vierpol nach Bild 4.5.3.2-2 mit der Übertragungsfunktion

$$\underline{F}(\omega) = \frac{R}{R + j\omega L} = \frac{1}{1 + j\omega \frac{L}{R}} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_0}} \quad 4.5.3.2-3$$

Da die Übertragungsfunktion identisch mit der Übertragungsfunktion nach Gleichung 4.5.3.1-1 ist, ergibt sich der Amplituden- und Phasengang nach Bild 4.5.3.1-2, womit es sich bei dem Vierpol um einen Tiefpass 1. Ordnung handelt.

4.5.3.3 Tief- und Hochpässe höherer Ordnung

Kombinationen mehrerer RC- oder RL-Vierpole führen zu Tief- oder Hochpässen höherer Ordnung, deren Amplitudengänge im Vergleich zu Tief- und Hochpässen 1. Ordnung einen steileren Verlauf über der Frequenz aufweisen und die Phase über 90° hinaus drehen. Tief- und Hochpässe 2. Ordnung entstehen durch RLC-Vierpole. Kombinationen von Tiefpässen und Hochpässen führen zu Bandpässen, die nur einen Frequenzbereich zwischen einer unteren und oberen Grenzfrequenz am Ausgang ungedämpft passieren lassen.

Eine dem Thema gebührende Analyse der Tief-, Hoch- und Bandpässe höherer Ordnung, lässt sich nur mit Hilfe der Laplace-Transformation durchführen. Deshalb soll an dieser Stelle nicht näher auf deren Amplituden- und Phasengänge eingegangen werden.

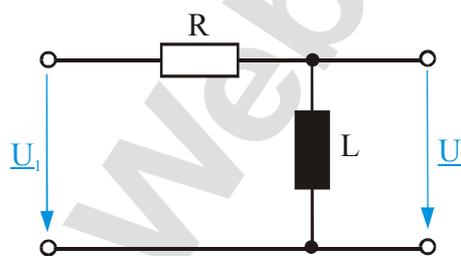


Bild 4.5.3.2-1: RL-Vierpol

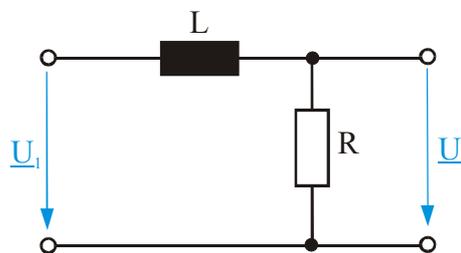


Bild 4.5.3.2-2: RL-Vierpol

4.5.4 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Wie lautet die Matrixgleichung zur Berechnung der Zweigströme komplexer Netzwerke?
- 2) Wie kann die Matrixgleichung zur Berechnung der Zweigströme komplexer Netzwerke formuliert werden, wenn man über kein Programm verfügt, welches komplexe Matrizen berechnen kann?
- 3) Welchen Zweck erfüllt das Zeigerdiagramm der komplexen Spannungen und Ströme?
- 4) Nach welchen Methoden kann das Zeigerdiagramm der komplexen Spannungen und Ströme entwickelt werden?
- 5) Was ist ein Tiefpass?
- 6) Was ist ein Hochpass?
- 7) Was charakterisiert einen Tief- oder Hochpass 1. Ordnung?
- 8) Welchen Wert besitzt die Amplitude der Übertragungsfunktion eines Tief- und Hochpasses 1. Ordnung an der Stelle der Eckfrequenz?
- 9) Welchen Wert besitzt die Phase der Übertragungsfunktion eines Tiefpasses 1. Ordnung an der Stelle der Eckfrequenz?
- 10) Welchen Wert besitzt die Phase der Übertragungsfunktion eines Hochpasses 1. Ordnung an der Stelle der Eckfrequenz?

Aufgabe 4.5.4-1:

Von dem nebenstehenden Netzwerk sind die folgenden Werte bekannt:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= (1 + j0)\text{A} \\ \underline{U}_L &= (0 + j3)\text{V} \\ R_1 &= 4\Omega \\ R_2 &= 10\Omega \\ X_C &= -2\Omega \end{aligned}$$

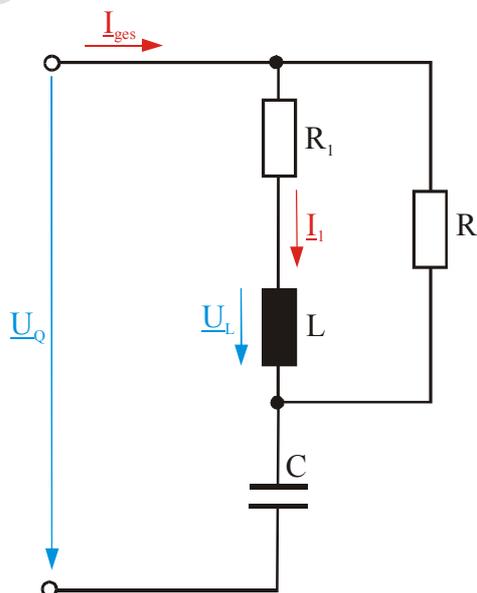
Ermitteln Sie mit Hilfe eines Zeigerdiagramms grafisch die Quellenspannung \underline{U}_Q und den Gesamtstrom $\underline{I}_{\text{ges}}$ des Netzwerks und den Phasenwinkel φ zwischen $\underline{I}_{\text{ges}}$ und \underline{U}_Q . Belastet das Netzwerk die Quelle induktiv, kapazitiv oder rein ohmsch?

Benutzen Sie folgende Maßstäbe:

- 1A \Rightarrow 5cm
- 1V \Rightarrow 2cm

Überprüfen Sie anschließend das Ergebnis mit Hilfe der Netzwerkmatrix.

(Lösung: $\underline{U}_Q = 4,6\text{V exp}(j2,5^\circ)$; $\underline{I}_{\text{ges}} = 1,43\text{A exp}(j12,1^\circ)$; $\varphi = 9,6^\circ$)



Aufgabe 4.5.4-2:

Von dem nebenstehenden Netzwerk sind die folgenden Werte bekannt:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= (1 + j1)\text{A} \\ \underline{U}_C &= (3 - j3)\text{V} \\ R &= 2\Omega \\ X_{L1} &= 2\Omega \\ X_{L2} &= 4\Omega \end{aligned}$$

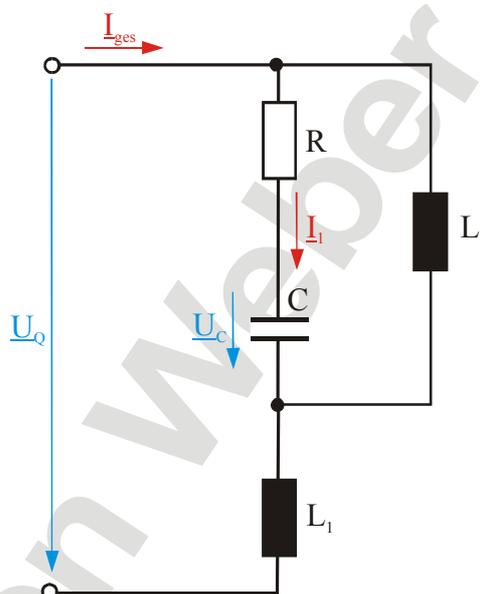
Ermitteln Sie mit Hilfe eines Zeigerdiagramms grafisch die Quellenspannung \underline{U}_Q und den Gesamtstrom $\underline{I}_{\text{ges}}$ des Netzwerks und den Phasenwinkel φ zwischen $\underline{I}_{\text{ges}}$ und \underline{U}_Q . Belastet das Netzwerk die Quelle induktiv, kapazitiv oder rein ohmsch?

Benutzen Sie folgende Maßstäbe:

- 1A \Rightarrow 5cm
- 1V \Rightarrow 2cm

Überprüfen Sie anschließend das Ergebnis mit Hilfe der Netzwerkmatrix.

(Lösung: $\underline{U}_Q = 5,53\text{V} \exp(j5,2^\circ)$; $\underline{I}_{\text{ges}} = 0,791\text{A} \exp(-j18,4^\circ)$; $\varphi = 23,6^\circ$)



Aufgabe 4.5.4-3:

Von dem nebenstehenden Netzwerk sind die folgenden Werte bekannt:

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= (0 + j2)\text{A} \\ R_1 &= 10\Omega \\ R_2 &= 10\Omega \\ X_L &= 20\Omega \\ X_C &= -20\Omega \end{aligned}$$

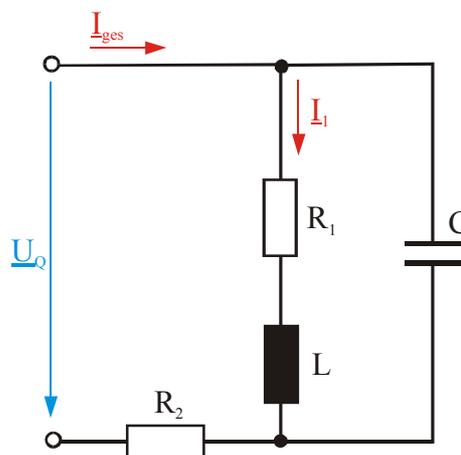
Ermitteln Sie mit Hilfe eines Zeigerdiagramms grafisch die Quellenspannung \underline{U}_Q und den Gesamtstrom $\underline{I}_{\text{ges}}$ des Netzwerks und den Phasenwinkel φ zwischen $\underline{I}_{\text{ges}}$ und \underline{U}_Q . Belastet das Netzwerk die Quelle induktiv, kapazitiv oder rein ohmsch?

Benutzen Sie folgende Maßstäbe:

- 1A \Rightarrow 3cm
- 10V \Rightarrow 2,5cm

Überprüfen Sie anschließend das Ergebnis mit Hilfe der Netzwerkmatrix.

(Lösung: $\underline{U}_Q = 54\text{V} \exp(j158,2^\circ)$; $\underline{I}_{\text{ges}} = 1\text{A} \exp(j180^\circ)$; $\varphi = -21,8^\circ$)



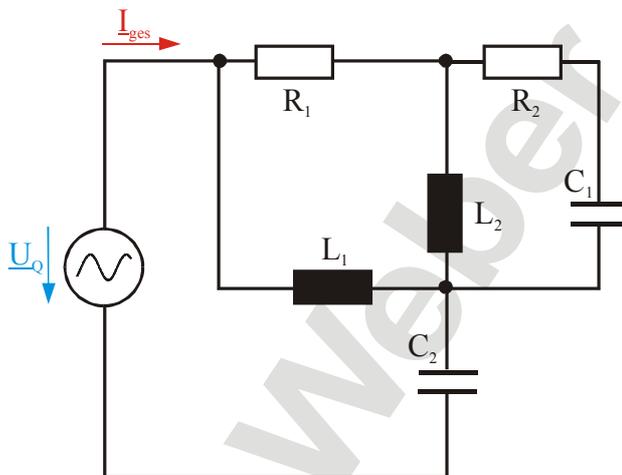
Aufgabe 4.5.4-4:

Gegeben ist das nebenstehende Netzwerk mit den Werten:

- $R_1 = 30\Omega$
- $R_2 = 17\Omega$
- $X_{L1} = 24\Omega$
- $X_{L2} = 12\Omega$
- $X_{C1} = -8\Omega$
- $X_{C2} = -22\Omega$
- $\underline{U}_Q = 20V \exp(-j45^\circ)$

Berechnen Sie den Gesamtstrom \underline{I}_{ges} mit Hilfe der Netzwerkmatrix. Belastet das Netzwerk die Quelle induktiv, kapazitiv oder rein ohmsch?

(Lösung: $\underline{I}_{ges} = 1,99A \exp(-j11,6^\circ)$; kapazitiv)



Aufgabe 4.5.4-5:

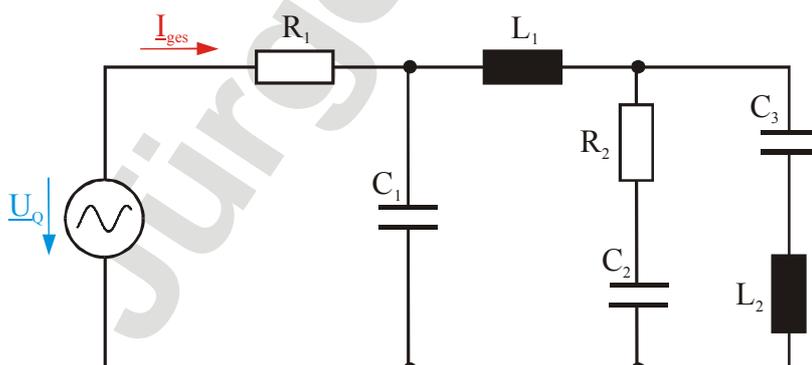
Gegeben ist das nebenstehende Netzwerk mit den Werten:

- $R_1 = 10\Omega$
- $R_2 = 20\Omega$
- $X_{L1} = 30\Omega$
- $X_{L2} = 15\Omega$
- $X_{C1} = -40\Omega$
- $X_{C2} = -20\Omega$
- $X_{C3} = -50\Omega$

Ermitteln Sie mit Hilfe eines Zeigerdiagramms grafisch den Phasenwinkel φ zwischen \underline{I}_{ges} und \underline{U}_Q . Belastet das Netzwerk die Quelle induktiv, kapazitiv oder rein ohmsch?

Überprüfen Sie anschließend das Ergebnis mit Hilfe der Netzwerkmatrix.

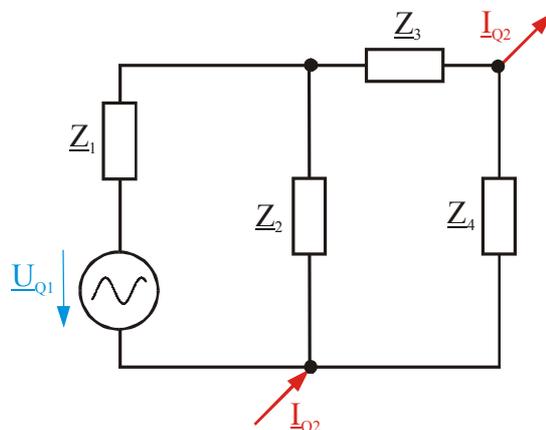
(Lösung: $\varphi = -34,9^\circ$, kapazitiv)



Aufgabe 4.5.4-6:

Gegeben ist das nebenstehende Netzwerk mit den Werten:

- $\underline{Z}_1 = (20 - j65)\Omega$
- $\underline{Z}_2 = (30 + j15)\Omega$
- $\underline{Z}_3 = (40 - j18)\Omega$



$$\underline{Z}_4 = (13 + j28)\Omega$$

$$\underline{U}_{Q1} = 120\text{V} \exp(j110^\circ)$$

$$\underline{I}_{Q2} = 2,8\text{A} \exp(-j45^\circ)$$

Berechnen Sie die in den komplexen Widerständen umgesetzte Scheinleistungen.

(Lösung: $\underline{S}_1 = 69,1\text{W} - j224,5\text{var}$; $\underline{S}_2 = 124,1\text{W} + j62,0\text{var}$; $\underline{S}_3 = 7,5\text{W} - j3,4\text{var}$;
 $\underline{S}_4 = 103,3\text{W} + j222,4\text{var}$; $\underline{S}_{Q1} = -168,6\text{W} + j146,0\text{var}$;
 $\underline{S}_{Q2} = -135,3\text{W} - j202,6\text{var}$)

Aufgabe 4.5.4-7:

Von dem nebenstehenden Netzwerk sind die folgenden Werte bekannt:

$$\underline{I}_1 = (0,8 + j1,4)\text{A}$$

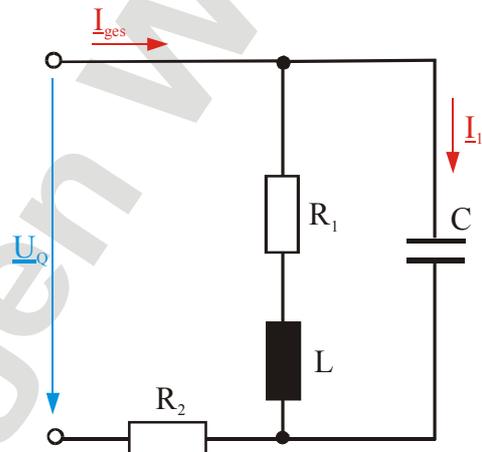
$$R_1 = 20\Omega$$

$$R_2 = 13\Omega$$

$$X_L = 19\Omega$$

$$X_C = -12\Omega$$

Ermitteln Sie mit Hilfe eines Zeigerdiagramms grafisch die Quellenspannung \underline{U}_Q und den Gesamtstrom $\underline{I}_{\text{ges}}$ des Netzwerks und den Phasenwinkel φ zwischen $\underline{I}_{\text{ges}}$ und \underline{U}_Q . Belastet das Netzwerk die Quelle induktiv, kapazitiv oder rein ohmsch?



Benutzen Sie folgende Maßstäbe:

- 1A \Rightarrow 3cm
- 10V \Rightarrow 2,5cm

Überprüfen Sie anschließend das Ergebnis mit Hilfe der Netzwerkmatrix.

(Lösung: $\underline{U}_Q = 30\text{V} \exp(j0^\circ)$; $\underline{I}_{\text{ges}} = 1,25\text{A} \exp(j36,3^\circ)$; $\varphi = -36,3^\circ$)

4.6 Ortskurven

4.6.1 Einleitung

Die bisher betrachteten Zeigerdiagramme für die Spannungen, die Ströme, die Scheinleistungen und die komplexen Widerstände und Leitwerte in den komplexen Widerstands- und Leitwertebenen entstanden unter der Voraussetzung fester Werte der Bauelemente und einer festen Frequenz. Mit der Änderung des Wertes mindestens eines Bauelements eines Netzwerks oder der Frequenz, werden die Zeigerdiagramme Veränderungen unterliegen. Variiert man die Werte kontinuierlich, so beschreiben die Zeigerspitzen in der komplexen Zahlenebene eine Ortskurve. Es handelt sich damit um eine Abbildungsfunktion, die allgemein in der Form

$$f(p) = \frac{\underline{A} + \underline{B}p + \underline{C}p^2 + \underline{D}p^3 + \dots}{\underline{A}^* + \underline{B}^*p + \underline{C}^*p^2 + \underline{D}^*p^3 + \dots} \quad -\infty \leq p \leq +\infty \quad 4.6.1-1$$

geschrieben werden kann. Aus der Funktionentheorie (Theorie der komplexen Zahlen) folgen die Darstellungen für elementare geometrische Formen:

Gerade $f(p) = \underline{A} + \underline{B}p \quad 4.6.1-2$

Kreis $f(p) = \frac{1}{\underline{A}^* + \underline{B}^*p} \quad 4.6.1-3$

Parabel $f(p) = \underline{A} + \underline{B}p + \underline{C}p^2 \quad 4.6.1-4$

Die folgenden Betrachtungen sollen sich nur auf einfache Netzwerke beziehen. Zur Ermittlung der Ortskurven umfangreicher Netzwerke greift man heute auf Rechner zurück.

4.6.2 Elementare Ortskurven als Funktion der Frequenz

Die Ortskurven, die sich als Funktion der Frequenz ergeben, sollen anhand komplexer Widerstände und Leitwerte in Beispielen erklärt werden. Stellt die Frequenz bzw. die Kreisfrequenz die variable Größe dar, so geht in der allgemeinen Abbildungsfunktion nach Gleichung 4.6.1-1 die Variable p in die Variable ω mit dem Wertebereich $0 \leq \omega \leq \infty$ über.

Zunächst soll die Impedanz \underline{Z} nach Bild 4.6.2-1 betrachtet werden. Sie ergibt sich aus

$$\underline{Z} = R + j\omega L \quad 4.6.2-1$$



Bild 4.6.2-1: Impedanz \underline{Z}

und stellt damit eine Funktion der Kreisfrequenz ω dar, die durch Koeffizientenvergleich mit Gleichung 4.6.1-2 eine Gerade als Ortskurve liefert:

$$\underline{A} = A_{re} + jA_{im} \quad \Rightarrow \quad A_{re} = R \quad 4.6.2-2$$

$$\underline{B} = B_{re} + jB_{im} \quad \Rightarrow \quad jB_{im} = jL \quad 4.6.2-3$$

Die Ortskurve ist im Bild 4.6.2-2 dargestellt.

Bildet man den Kehrwert der Impedanz \underline{Z} nach Gleichung 4.6.2-1, so erhält man die Admittanz \underline{Y} in der Form

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R + j\omega L} \quad 4.6.2-4$$

Durch Koeffizientenvergleich mit der Gleichung 4.6.1-3 besitzt die Ortskurve der Admittanz eine Kreisform, die ebenfalls im Bild 4.6.2-2 dargestellt ist.

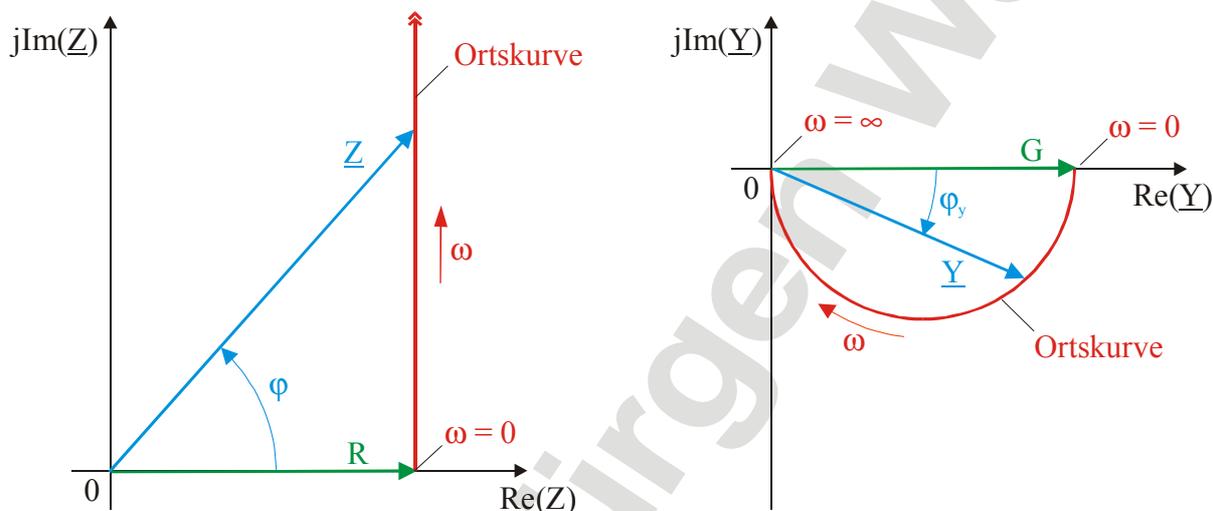


Bild 4.6.2-2: Ortskurve der Impedanz \underline{Z} und der Admittanz \underline{Y}

Als nächstes soll die Impedanz \underline{Z} nach Bild 4.6.2-3 betrachtet werden. Sie ergibt sich aus

$$\underline{Z} = R + \frac{1}{j\omega C} = R - j\frac{1}{\omega C} \quad 4.6.2-5$$

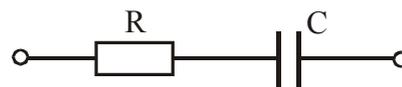


Bild 4.6.2-3: Impedanz \underline{Z}

und stellt damit eine Funktion des Kehrwerts der Kreisfrequenz ω dar, die durch Koeffizientenvergleich mit Gleichung 4.6.1-2 eine Gerade als Ortskurve liefert:

$$\underline{A} = A_{re} + jA_{im} \quad \Rightarrow \quad A_{re} = R \quad 4.6.2-6$$

$$\underline{B} = B_{re} + jB_{im} \quad \Rightarrow \quad jB_{im} = -j\frac{1}{C} \quad 4.6.2-7$$

Die Ortskurve ist im Bild 4.6.2-4 dargestellt.

Bildet man den Kehrwert der Impedanz nach Gleichung 4.6.2-5, so erhält man die Admittanz \underline{Y} in der Form

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R - j\frac{1}{\omega C}} \quad 4.6.2-8$$

Durch Koeffizientenvergleich mit der Gleichung 4.6.1-3 besitzt die Ortskurve der Admittanz eine Kreisform, die ebenfalls im Bild 4.6.2-4 dargestellt ist.

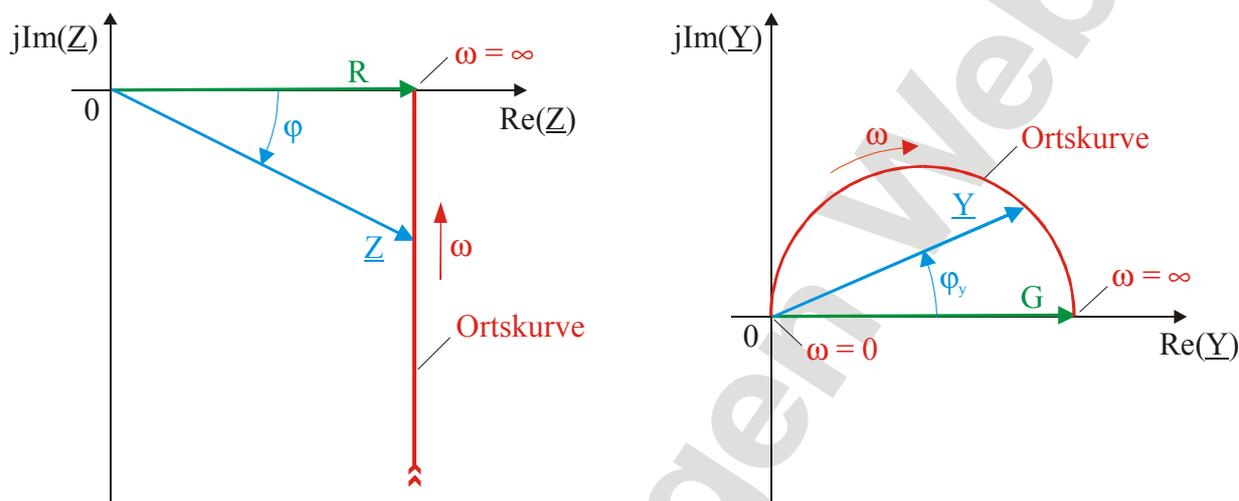


Bild 4.6.2-4: Ortskurve der Impedanz \underline{Z} und der Admittanz \underline{Y}

Abschließend soll die Impedanz \underline{Z} nach Bild 4.6.2-5 betrachtet werden. Sie ergibt sich aus

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad 4.6.2-9$$

und stellt damit eine Funktion der Kreisfrequenz ω sowie deren Kehrwerts dar. Hier fällt zunächst auf, dass für die Kreisfrequenz ω_0 der Imaginärteil von 4.6.2-9 nach

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad 4.6.2-10$$

verschwindet und somit als Gesamtwiderstand nur der Realteil R übrig bleibt. Diese Frequenz nennt man die Resonanzfrequenz. Sie wird Gegenstand der Betrachtung im nächsten Abschnitt „Schwingkreise“ sein.



Bild 4.6.2-5: Impedanz \underline{Z}

Dass die Ortskurve der Gleichung 4.6.2-9 eine Gerade ist, erhält man am einfachsten aus der Aufspaltung

$$\underline{Z} = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = \left(\frac{1}{2}R + j\omega L\right) + \left(\frac{1}{2}R - j\frac{1}{\omega C}\right). \quad 4.6.2-11$$

Beide Funktionen stellen im Bereich $0 \leq \omega \leq \infty$ Geraden dar, so dass eine Überlagerung zu der Ortskurve der Impedanz nach Bild 4.6.2-6 führt. Aus deren Kehrwertbildung lässt sich

dann die Ortskurve der Admittanz bilden, die hier, wie im Bild 4.6.2-6 dargestellt, einen vollen Kreis beschreibt.

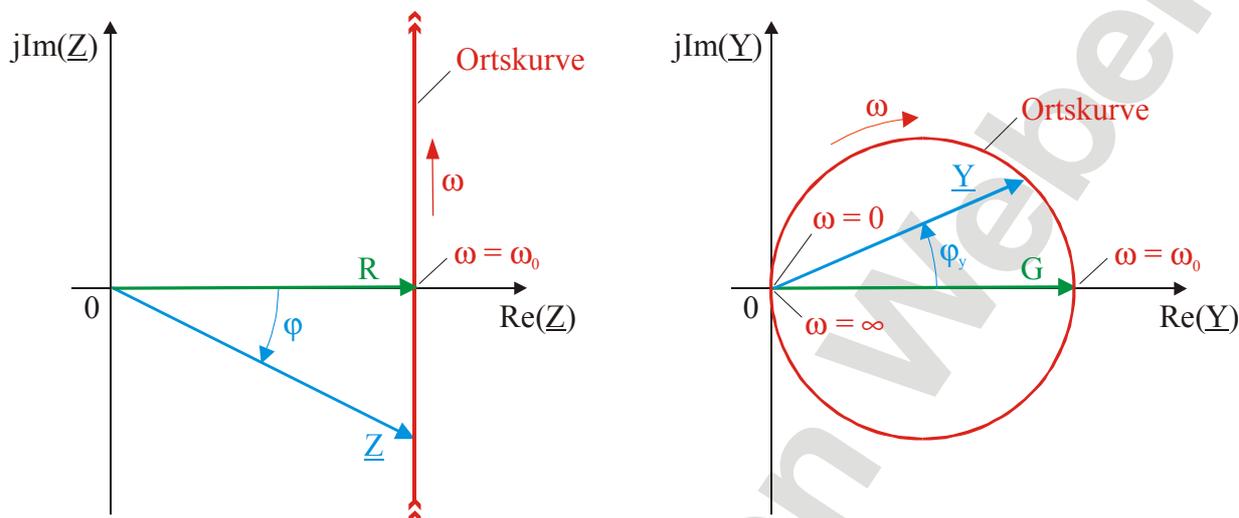


Bild 4.6.2-6: Ortskurve der Impedanz \underline{Z} und der Admittanz \underline{Y}

4.6.3 Ortskurven als Funktion der Variation der Werte der Bauelemente

Die Ortskurven, die sich als Funktion der Variation der Werte der Bauelemente bei einer festen Frequenz ergeben können, sollen anhand eines Beispielnetzwerks nach Bild 4.6.3-1 erklärt werden. In dem Netzwerk ist der Widerstand R_1 im Bereich

$$R_1 = k \cdot R_{1\max} \quad 4.6.3-1$$

mit

$$0 \leq k \leq 1$$

einstellbar. Ermittelt werden soll die Ortskurve des Gesamtleitwerts \underline{Y} des Netzwerks als Funktion von k .

Hierzu wird erst einmal das Beispielnetzwerk, wie im Bild 4.6.3-1 gezeigt, aufgeteilt. Für die Impedanz \underline{Z}_1 folgt dann

$$\underline{Z}_1 = k \cdot R_1 + j\omega L \quad 4.6.3-2$$

und für die Admittanz \underline{Y}_1

$$\underline{Y}_1 = \frac{1}{k \cdot R_1 + j\omega L} \quad 4.6.3-3$$

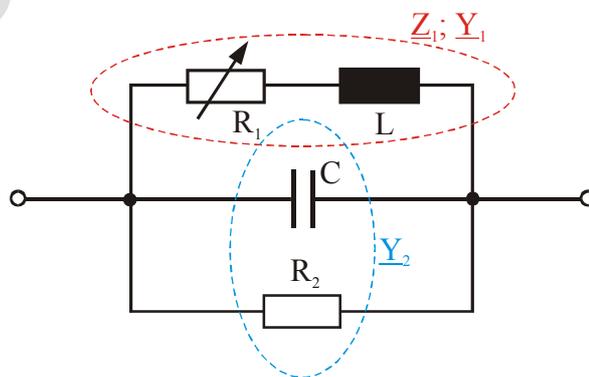


Bild 4.6.3-1: Beispielnetzwerk

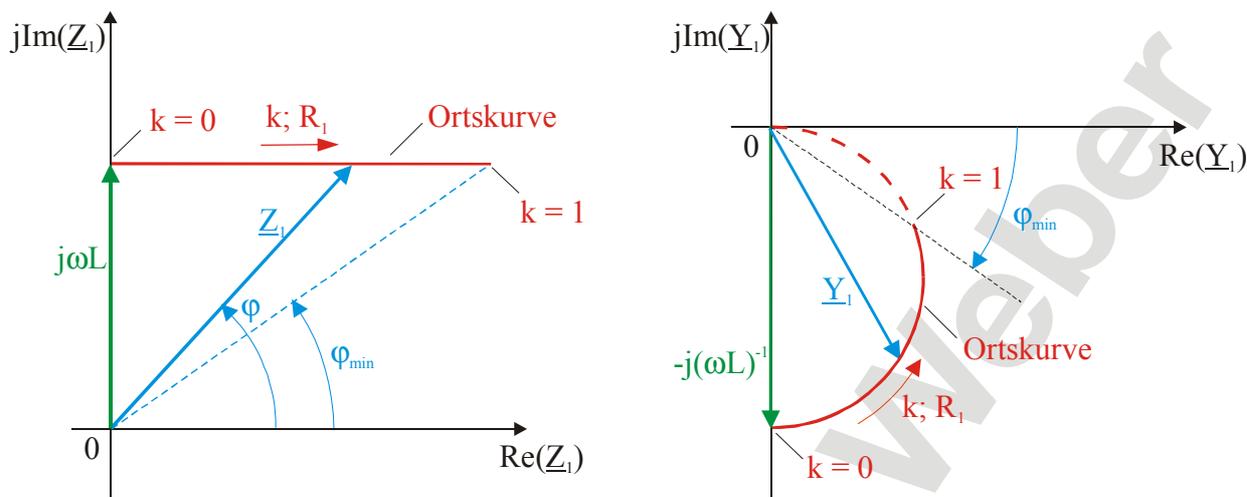


Bild 4.6.3-2: Ortskurve der Impedanz \underline{Z}_1 und der Admittanz \underline{Y}_1

Während \underline{Z}_1 eine Gerade darstellt, beschreibt \underline{Y}_1 einen Teilkreis. Beide Ortskurven sind im Bild 4.6.3-2 dargestellt. In der komplexen Leitwertebene muss jetzt noch der feste Zeiger der Parallelschaltung \underline{Y}_2 zu der Ortskurve von \underline{Y}_1 addiert werden. Bild 4.6.3-3 zeigt die resultierende Ortskurve des Leitwertes \underline{Y} des Beispielnetzwerks. Diesen Leitwert kann man selbstverständlich in die komplexe Widerstandsebene transformieren, was aber mit einem erheblichen Aufwand verbunden ist.

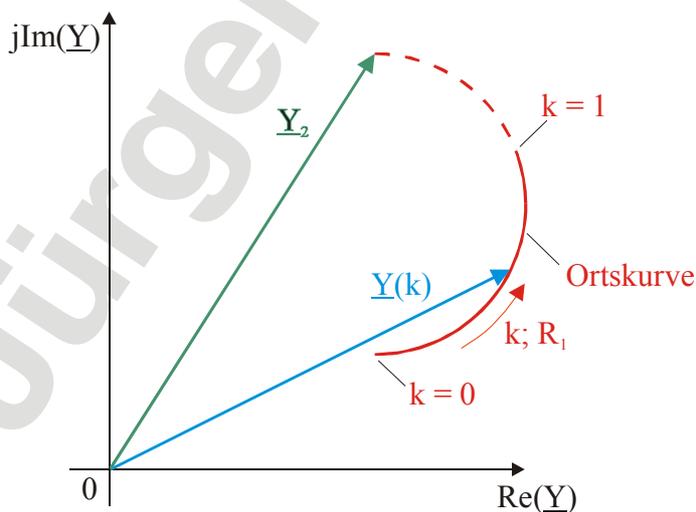


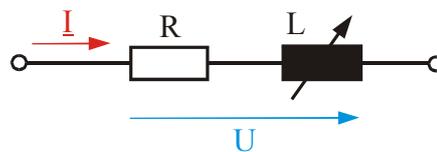
Bild 4.6.3-3: Ortskurve der Admittanz \underline{Y}

4.6.4 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Wie entstehen im Allgemeinen Ortskurven?
- 2) Welche elementaren Ortskurven liefern einfache Impedanzen und Admittanzen als Funktion der Frequenz?

Aufgabe 4.6.4-1:

Ermitteln Sie für die nebenstehende Reihenschaltung eines Ohmschen Widerstands $R = 200\Omega$ und einer variablen Induktivität $L = 100 \dots 300\text{mH}$ die Ortskurve für die Gesamtspannung \underline{U} bei einem konstanten Strom $\underline{I} = 10\text{mA}$ bei $f = 200\text{Hz}$.



(Lösung: Gerade mit den Eckpunkten $(2 + j1,26)V$ und $(2 + j3,77)V$)

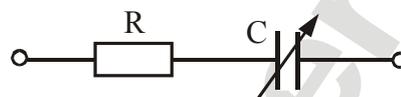
Aufgabe 4.6.4-2:

Für den nebenstehenden komplexen Widerstand mit den Werten

$$R = 100\Omega$$

$$C = 10 \dots 100\mu F$$

$$f = 1\text{kHz}$$



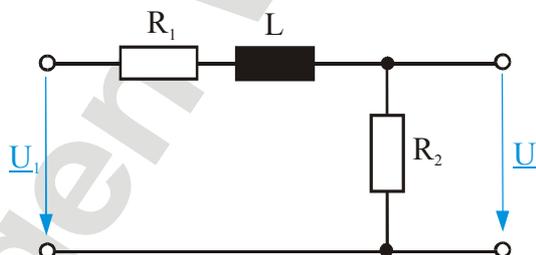
soll die Ortskurve als Funktion von C konstruiert werden.

(Lösung: Gerade mit den Eckpunkten $(100 - j15,9)\Omega$ und $(100 - j1,59)\Omega$)

Aufgabe 4.6.4-3:

An den Eingang des nebenstehenden Netzwerks wird die Spannung \underline{U}_1 mit veränderlicher Frequenz gelegt.

- Stellen Sie die Gleichung der Übertragungsfunktion $\underline{U}_2/\underline{U}_1$ auf.
- Vereinfachen Sie die Gleichung durch $R_1 = R_2 = R$ und $\omega_0 = R_2/L$ und konstruieren Sie die Ortskurve der Übertragungsfunktion als Funktion von ω .



(Lösung: Halbkreis mit negativen Imaginärteilen mit den Eckpunkten $(0,5 + j0)$ und $(0 + j0)$)

4.7 Schwingkreise

In komplexen Netzwerken, in denen Induktivitäten und Kapazitäten vorhanden sind, können sich deren Blindwiderstände wegen derer unterschiedlichen Vorzeichen für bestimmte Frequenzen kompensieren. Diese Frequenzen bezeichnet man als die Resonanzfrequenzen des Netzwerks. Für die Quelle, die dem Netzwerk die Frequenz aufträgt, wirkt das Netzwerk bei Resonanz wie ein Ohmscher Widerstand oder Leitwert.

Im Folgenden soll der Reihenschwingkreis genauer betrachtet werden. Aus seinem Verhalten sollen die Gesetzmäßigkeiten und Definitionen abgeleitet werden, die auf allgemeine Netzwerke übertragen werden können.

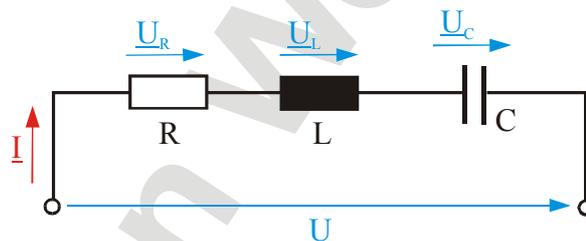


Bild 4.7.1-1: Der Reihenschwingkreis

4.7.1 Der Reihenschwingkreis

Der Reihenschwingkreis besteht aus der Serienschaltung der Bauelemente Widerstand R, Induktivität L und Kapazität C nach Bild 4.7.1-1. Der Scheinwiderstand $\underline{Z}_{\text{ges}}$ des Reihenschwingkreises ergibt sich somit zu:

$$\underline{Z}_{\text{ges}} = R + jX_L + jX_C = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = |\underline{Z}_{\text{ges}}| \exp(j\varphi) \quad 4.7.1-1$$

4.7.1.1 Die Resonanzfrequenz

Betrachtet man den Imaginärteil, also den Blindwiderstand des Reihenschwingkreises nach Gleichung 4.7.1-1, so wird sich dieser für eine bestimmte Kreisfrequenz ω_0 wegen

$$\omega_0 L - \frac{1}{\omega_0 C} = 0 \quad 4.7.1.1-1$$

mit

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad 4.7.1.1-2$$

zu Null ergeben. Die Blindwiderstände X_L der Induktivität und X_C der Kapazität kompensieren sich bei der Resonanzfrequenz

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad 4.7.1.1-3$$

Durch den Energieaustausch zwischen der Induktivität und der Kapazität wirkt das System ähnlich wie ein mechanisches Federsystem. Wird das mechanische Federsystem nach Bild 4.7.1.1-1 durch einen Impuls angeregt, so schwingt es auf einer Frequenz mit einer je nach Größe der Dämpfung abklingenden Amplitude. Auf den Schwingkreis übertragen, stellt der Widerstand R die Dämpfung des Systems dar. Setzt man eine verlustfreie Induktivität und

Kapazität voraus, so stellt die Resonanzfrequenz f_0 die Frequenz dar, mit der das ungedämpfte System ($R = 0$) selbst schwingt.

Resonanz bedeutet, dass ein dämpfungsarmes schwingfähiges System mit der gleichen Frequenz angeregt wird, bei der es in der Lage ist selbst zu schwingen.

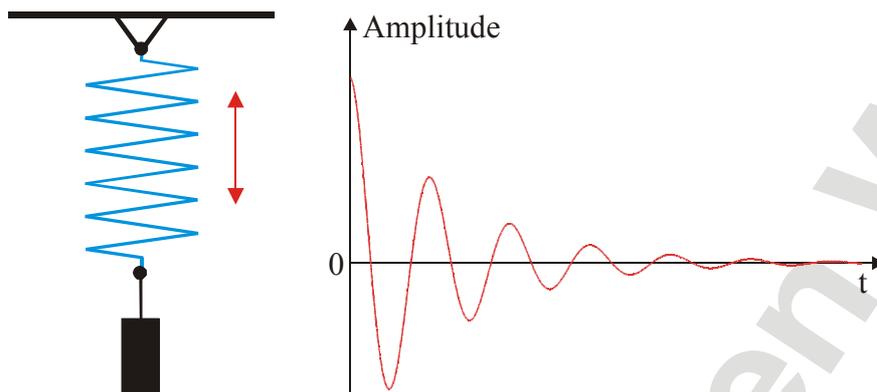


Bild 4.7.1.1-1: Gedämpftes Federsystem

Bei der Resonanzfrequenz des Schwingkreises nach Bild 4.7.1-1 geht der Scheinwiderstand Z_{ges} in den Ohmschen Widerstand R über. Daraus ergibt sich der Strom als $\underline{I} = \underline{I}(\omega_0) = \underline{I}_0$ zu

$$\underline{I}_0 = \frac{\underline{U}}{R}$$

Für die einzelnen

Bauelemente folgen dann die Spannungsabfälle:

$$\underline{U}_R = \underline{U}_R(\omega_0) = R \cdot \underline{I}_0 = \underline{U} \tag{4.7.1.1-4}$$

$$\underline{U}_L = \underline{U}_L(\omega_0) = jX_L \cdot \underline{I}_0 = j\omega_0 L \cdot \underline{I}_0 \neq 0 \tag{4.7.1.1-5}$$

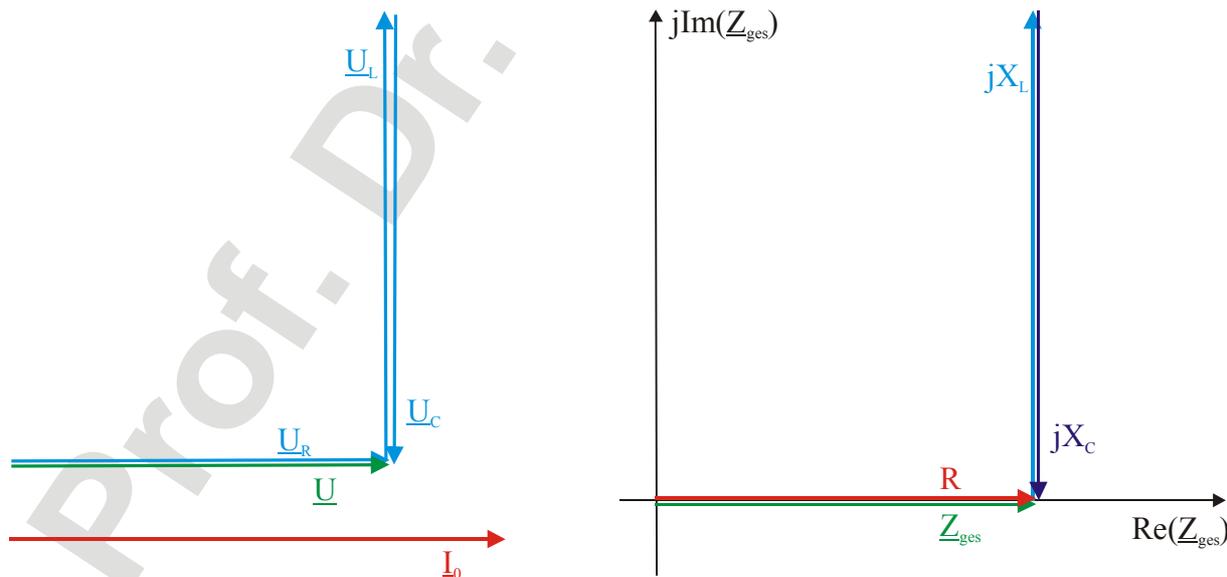


Bild 4.7.1.1-2: Zeiger- und Widerstandsdiagramm bei Resonanz

$$\underline{U}_C = \underline{U}_C(\omega_0) = jX_C \cdot \underline{I}_0 = -j \frac{1}{\omega_0 C} \cdot \underline{I}_0 \neq 0 \quad 4.7.1.1-6$$

Aus dem Maschenumlauf

$$-\underline{U} + \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = 0$$

folgt wegen $\underline{U}_R = \underline{U}$ für die Resonanzfrequenz:

$$\underline{U}_L(\omega_0) = j\omega_0 L \cdot \underline{I}_0 = -j \frac{1}{\omega_0 C} \cdot \underline{I}_0 = \underline{U}_C(\omega_0) \quad 4.7.1.1-7$$

Das Zeigerdiagramm der Spannungen und Ströme sowie das Widerstandsdiagramm in der komplexen Widerstandsebene sind für den Resonanzfall im Bild 4.7.1.1-2 dargestellt. Es sei an dieser Stelle darauf hingewiesen, dass die Beträge der Spannungen an der Induktivität und an der Kapazität größer werden können, als der Betrag der Gesamtspannung \underline{U} .

4.7.1.2 Der Kennwiderstand

Dem Reihenschwingkreis wird nach Definition der Kennwiderstand

$$Z_0 = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}} \quad 4.7.1.2-1$$

zugeordnet.

4.7.1.3 Die Güte

Allgemein gibt die Güte Q das Verhältnis zwischen der maximalen gespeicherten Energie und der in Wärme umgesetzten Verlustenergie innerhalb eines Netzwerks während einer Periodendauer des sinusförmigen Wechselstroms an. Für den Reihenschwingkreis lässt sich die Güte aber auch durch den Quotienten

$$Q = \frac{Z_0}{R} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 C R} \quad 4.7.1.3-1$$

angeben. Erweitert man die Gleichung 4.7.1.3-1 mit dem Betrag des Stroms \underline{I}_0 , so folgt:

$$Q = \frac{\omega_0 L \cdot |\underline{I}_0|}{R \cdot |\underline{I}_0|} = \frac{|\underline{U}_L(\omega_0)|}{|\underline{U}_R(\omega_0)|} = \frac{|\underline{U}_L(\omega_0)|}{|\underline{U}(\omega_0)|} = \frac{|\underline{U}_C(\omega_0)|}{|\underline{U}(\omega_0)|} \quad 4.7.1.3-2$$

Die Güte ist damit auch ein Maß für die Verhältnisse zwischen den Beträgen der Spannung an der Induktivität oder Kapazität und der Gesamtspannung, die an den Reihenschwingkreis gelegt wurde.

4.7.1.4 Resonanzkurven

Da der Scheinwiderstand $\underline{Z}_{\text{ges}}$ des Reihenschwingkreises eine Funktion der Frequenz ist, wird auch der Strom \underline{I} bei einer festen Spannung \underline{U} , die an den Schwingkreis nach Bild 4.7.1-1 angelegt wird, eine Funktion der Frequenz sein. Da im Resonanzfall nur noch der Wirkwider-

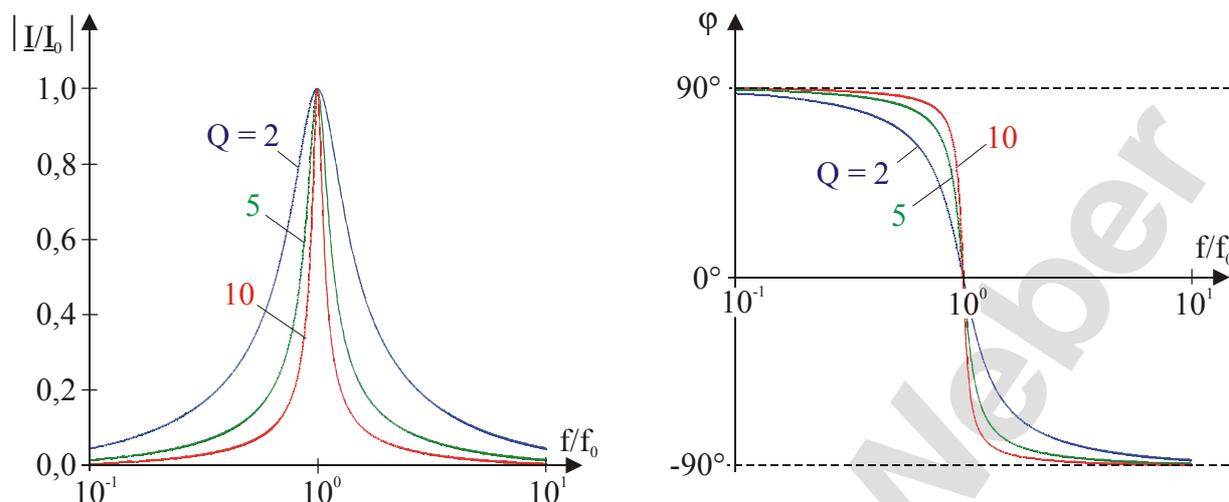


Bild 4.7.1.4-1: Resonanzkurven des Betrags des normierten Stroms und dessen Phase

stand nach außen hin in Erscheinung tritt, wird das Maximum des Betrages des Stroms I für den Resonanzfall erreicht:

$$|I|_{\max} = |I_0| \tag{4.7.1.4-1}$$

Stellt man den normierten Strom

$$\frac{I}{I_0} = \left| \frac{I}{I_0} \right| \cdot \exp(j\phi) \tag{4.7.1.4-2}$$

über dem Logarithmus der normierten Frequenz f/f_0 nach Betrag und Phase für verschiedene Werte der Güte Q dar, so erhält man das Bild 4.7.1.4-1. Im Bild 4.7.1.4-1 erkennt man, dass für größere Werte der Güte Q die Resonanzkurve schmäler ausfällt und damit die Resonanz über der Frequenz schärfer ausgeprägt ist. Der Phasengang, der zwischen $+90^\circ$ und -90° variiert, zeigt für größere Werte der Güte Q einen steileren Verlauf um den Wert der Resonanz-

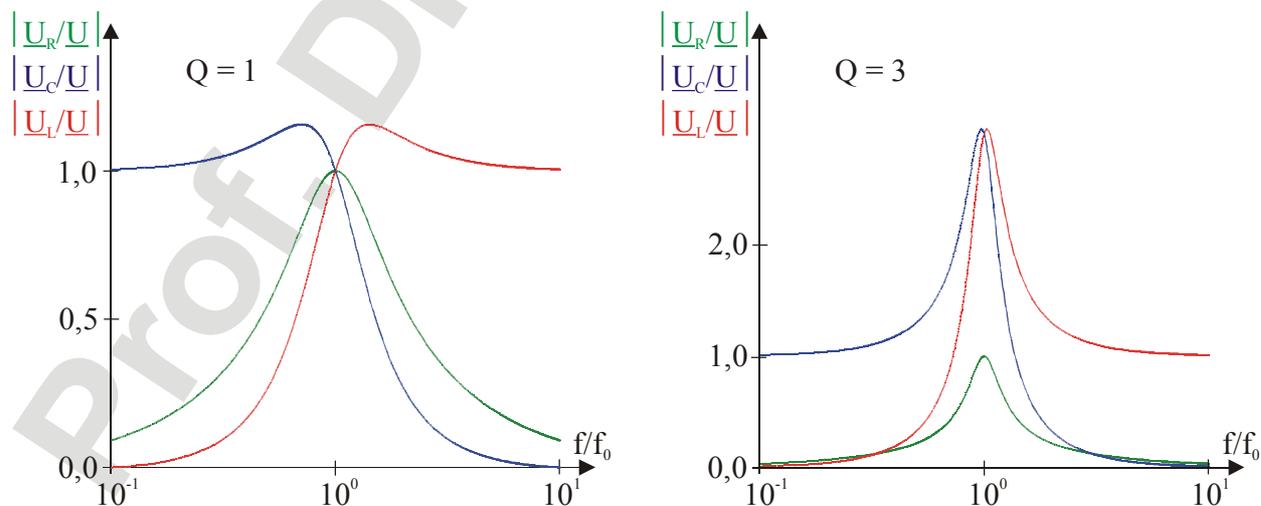


Bild 4.7.1.4-2: Resonanzkurven des Betrags der normierten Spannungen

frequenz. Diese Steilheit ist beim Bau von Oszillatoren, wie sie zum Beispiel bei Uhren als Zeitmaß benötigt werden, ein Kriterium für deren Stabilität. Oszillatoren sind Systeme, die auf einer festen Frequenz schwingen. Dabei treten bei Oszillatoren mit Schwingkreisen niedriger Güte Schwankungen um die Resonanzfrequenz auf. Während man mit diskret aufgebauten Schwingkreisen wegen des Wicklungswiderstands der Spule nur Werte kleiner 100 für die Güte realisieren kann, erhält man bei der Verwendung eines Quarzes, dessen Ersatzschaltbild einen Reihenschwingkreis darstellt, Werte über 1000. Deshalb sind Quarze, die eine Wechselwirkung einer mechanischen Schwingung mit dem Stromkreis eingehen, für präzise Uhren notwendig.

Wie bereits erwähnt, können die Beträge der Spannungen an der Induktivität und an der Kapazität den Betrag der Spannung, die an dem Schwingkreis liegt, weit überschreiten. Bild 4.7.1.4-2 zeigt die Spannungsverläufe über dem Logarithmus der Frequenz für zwei verschiedene Werte der Güte Q . Das Bild zeigt, dass die Güte, wie es in Gleichung 4.7.1.3-2 bereits abgeleitet wurde, den Multiplikator für die Spannungsüberhöhung an der Induktivität und Kapazität bei der Resonanzfrequenz f_0 darstellt:

$$\left| \frac{U_L(\omega_0)}{U(\omega_0)} \right| = \left| \frac{U_C(\omega_0)}{U(\omega_0)} \right| = Q$$

Darüber hinaus erkennt man, dass der maximale Betrag der Spannung an der Kapazität vor der Resonanzfrequenz und der maximale Betrag der Spannung an der Induktivität nach der Resonanzfrequenz erreicht wird. Der Wert dieser Maxima lässt sich durch die Näherungsformel

$$\left| \frac{U_L}{U} \right|_{\max} = \left| \frac{U_C}{U} \right|_{\max} \approx \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \quad 4.7.1.4-4$$

berechnen.

4.7.1.5 Die Bandbreite

Betrachtet man den Reihenschwingkreis nach Bild 4.7.1.5-1 als Vierpol, so ergibt sich als Übertragungsfunktion

$$\underline{F}(\omega) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{R}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{f}{f_0} - \frac{f_0}{f}\right)} = \underline{F}(f). \quad 4.7.1.5-1$$

Diese Übertragungsfunktion liefert die Resonanzkurve $\left| \frac{U_R}{U} \right|$ nach Bild 4.7.1.4-2 und ist als Beispiel für die Güte $Q = 3$ nach Betrag und Phase im Bild 4.7.1.5-2 dargestellt. Interessant sind in dem Zusammenhang die Werte $1/\sqrt{2} = 0,707$ im Verlauf des Betrags $|\underline{F}(f)|$ der Übertragungsfunktion. An diesen Stellen werden die Grenzfrequenzen definiert, die die Begrenzungen der Bandbreite B [Hz] darstellen.

Bei der Betrachtung des Reihenschwingkreises als Vierpols nach Bild 4.7.1.5-1 handelt es sich also um ein einfaches Frequenzfilter, das nur ein bestimmtes Frequenzband unterhalb und oberhalb der Resonanzfrequenz an den Ausgang gelangen lässt. Die Bandbreite lässt sich dabei über die Näherungsformel

$$B \approx \frac{f_0}{Q} \quad 4.7.1.5-2$$

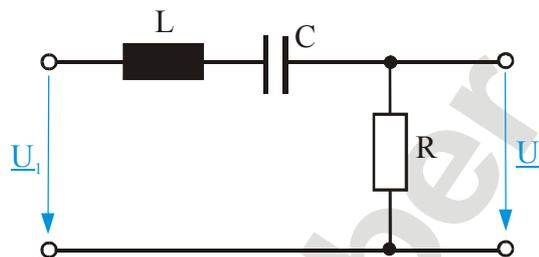


Bild 4.7.1.5-1: Frequenzfilter

berechnen.

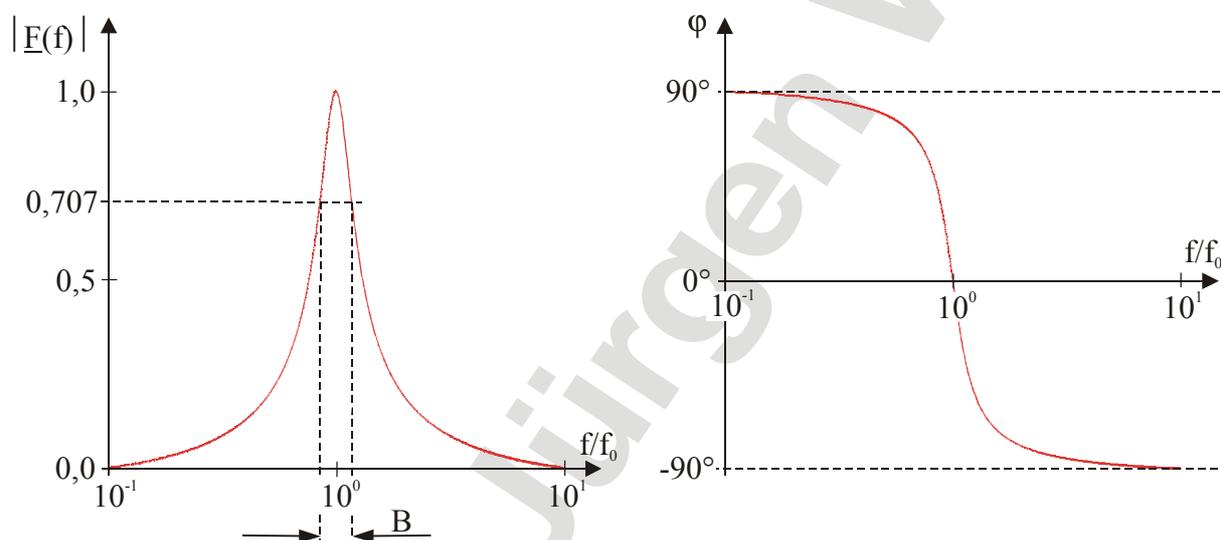


Bild 4.7.1.5-2: Filterkurve des Vierpols und dessen Bandbreite

4.7.2 Der Parallelschwingkreis

Der Parallelschwingkreis besteht aus der Parallelschaltung der Bauelemente Leitwert G , Induktivität L und Kapazität C nach Bild 4.7.2-1. Der Scheinleitwert $\underline{Y}_{\text{ges}}$ des Parallelschwingkreises ergibt sich somit zu:

$$\underline{Y}_{\text{ges}} = G + jB_C + jB_L = G + j\left(\omega C - \frac{1}{\omega L}\right) = |\underline{Y}_{\text{ges}}| \exp(j\phi_y) \quad 4.7.2-1$$

Formal gilt die gleiche Betrachtung wie bei dem Reihenschwingkreis nach Abschnitt 4.7.1 mit den folgenden Umbenennungen:

$$\begin{array}{lcl} \underline{Z} & \Rightarrow & \underline{Y} \\ \underline{R} & \Rightarrow & \underline{G} \\ \underline{L} & \Rightarrow & \underline{C} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} C & \Rightarrow & L \\ \underline{I} & \Rightarrow & \underline{U} \\ \underline{U} & \Rightarrow & \underline{I} \end{array}$$

Reihen- und Parallelschwingkreis verhalten sich zueinander dual. Insbesondere gilt weiterhin:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad 4.7.2-2$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad 4.7.2-3$$

Bei der Resonanzfrequenz f_0 gilt

$$\underline{I} = \underline{I}_G = \underline{I}_0. \quad 4.7.2-4$$

Bei entsprechender Güte treten im Parallelschwingkreis Stromüberhöhungen auf. Das bedeutet, dass die Beträge der Ströme \underline{I}_L und \underline{I}_C erheblich größere Werte als der Betrag des Stroms \underline{I} annehmen können. Dies hat Auswirkungen auf die Anwendung der so genannten Blindstromkompensation, die im nächsten Abschnitt betrachtet wird.

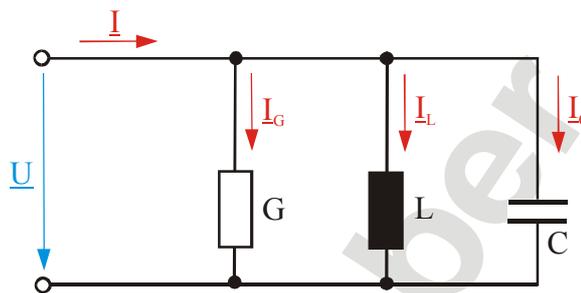


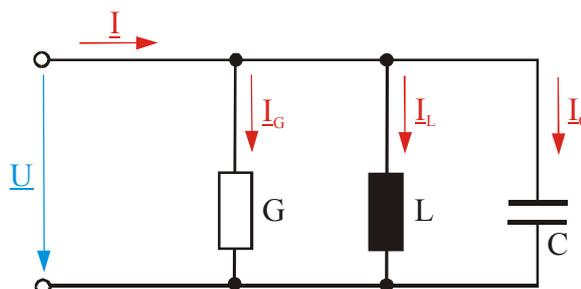
Bild 4.7.2-1: Parallelschwingkreis

4.7.3 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Was versteht man unter Resonanz?
- 2) Was passiert, wenn ein Netzwerk von einer Quelle seine Resonanzfrequenz aufgeprägt bekommt?
- 3) Aus welchen Bauelementen besteht ein Reihenschwingkreis?
- 4) Welche Spannungsverhältnisse sind ein Maß für die Güte des Reihenschwingkreises?
- 5) Welche Eigenschaften der Resonanzkurve des Betrags und der Phase des Stroms durch den Reihenschwingkreis werden durch den Wert der Güte Q beeinflusst?
- 6) Zwischen welchen Werten variiert die Phase des Stroms, der durch den Reihenschwingkreis fließt?
- 7) Welche Bauelemente eines diskret aufgebauten Schwingkreises begrenzen die Güte zu hohen Werten hin?
- 8) Können die Beträge der Spannungen an der Kapazität und an der Induktivität eines Reihenschwingkreises größer werden als der Betrag der Spannung, die an den Schwingkreis gelegt wurde?

Aufgabe 4.7.3-1:

Gegeben ist der nebenstehende Parallelschwingkreis mit den Werten:



$$R = 31,42\text{k}\Omega$$

$$L = 1\text{mH}$$

$$C = 25,33\text{pF}$$

Der Parallelschwingkreis wird an einer Spannung $\underline{U} = 20\text{V}$ betrieben.

Berechnen Sie für den Parallelschwingkreis:

- die Resonanzfrequenz f_0
- den Kennleitwert Y_0
- die Güte Q
- die Bandbreite B
- die normierten Ströme $\frac{I_G}{I}$, $\frac{I_L}{I}$ und $\frac{I_C}{I}$ im Resonanzfall

(Lösung: $f_0 = 1\text{MHz}$; $Y_0 = 159,2\mu\text{S}$; $Q = 5$; $B = 200\text{kHz}$; $\frac{I_G}{I} = 1$; $\frac{I_L}{I} = -j5$; $\frac{I_C}{I} = j5$)

Aufgabe 4.7.3-2:

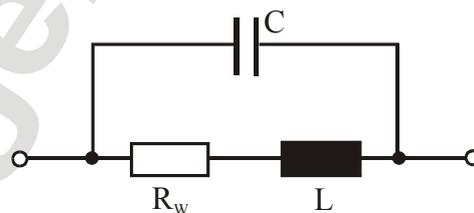
Die nebenstehende Schaltung zeigt die Zusammenschaltung einer Kapazität mit einer Spule mit dem Wicklungswiderstand R_W . Berechnen Sie die Resonanzfrequenz f_0 der Schaltung für die folgenden Werte der Bauelemente:

$$R_W = 50\Omega$$

$$L = 1\text{mH}$$

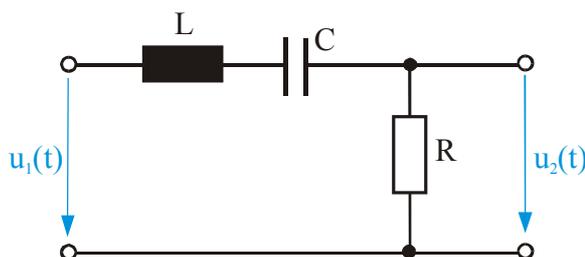
$$C = 100\text{nF}$$

(Lösung: $f_0 = 13,8\text{kHz}$)



Aufgabe 4.7.3-3:

An den nebenstehenden Vierpol wird an den Eingang eine periodische Rechteckspannung mit der Periodendauer $T = 1\text{ms}$ und dem Scheitelwert 4V gelegt. Der Vierpol hat eine hohe Güte und eine Resonanzfrequenz von $f_0 = 3\text{kHz}$.



Welche Spannung $u_2(t)$ ergibt sich am Ausgang des Vierpols?

(Lösung: Sinusförmige Spannung mit dem Scheitelwert $1,7\text{V}$ und der Frequenz 3kHz)

4.8 Die Blindstromkompensation

Die Blindstromkompensation ist ein Begriff, der unmittelbar mit der elektrischen Energietechnik zusammenhängt. Ziel der elektrischen Energieübertragung ist die Vermeidung unnötiger elektrischer Verluste auf den Zuleitungen vom Energieerzeuger zum Abnehmer oder Verbraucher. Neben dem Energietransport mit Hilfe von hohen elektrischen Wechselspannungen, die dann verbraucherseitig durch Transformatoren auf gebräuchliche Spannungen wie z.B. $\underline{U}_{\text{Netz}} = 230\text{V}$ reduziert werden müssen, trägt auch die Vermeidung eines Transports von Blindleistung zur Reduktion der Leitungsverluste bei. Dieser Sachverhalt soll an einem Beispiel gezeigt werden.

Allgemein besitzen Verbraucher, die an der Netzspannung $\underline{U}_{\text{Netz}} = 230\text{V}$ mit der Frequenz 50Hz betrieben werden, neben Wirkwiderständen oder Wirkleitwerten auch Blindwiderstände bzw. Blindleitwerte. Damit verbunden ist die Umsetzung von Wirkleistungen und Blindleistungen. Im Beispiel sollen zwei Verbraucher betrachtet werden, die vom Hersteller die Leistungsangabe „P = 1kW bei 230V Wechselspannung“ tragen. Daraus ergibt sich für beide Verbraucher ein Wirkleitwert von

$$G_V = \frac{P}{|\underline{U}_{\text{Netz}}|^2} = 18,9\text{mS}. \quad 4.8-1$$

Während nach Bild 4.8-1 der erste Verbraucher allein diesen Wirkleitwert besitzt, soll beim zweiten Verbraucher in seiner Ersatzschaltung eine zusätzliche Induktivität mit dem Blindleitwert $B_{LV} = -18,9\text{mS}$ parallel geschaltet werden.

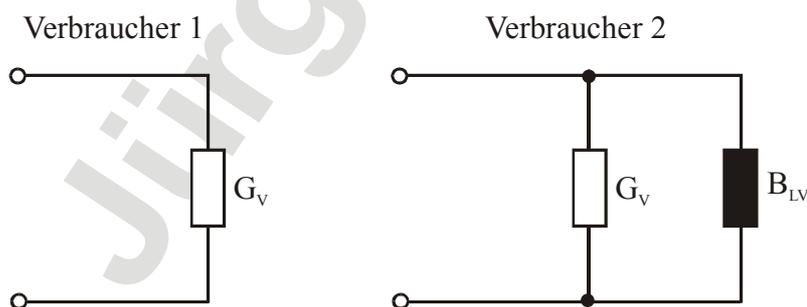


Bild 4.8-1: Verbraucher für die Beispielrechnung

Blindleitwerte treten bei vielen handelsüblichen Verbrauchern, wie zum Beispiel Staubsaugern, Haarföhnen usw., aber auch bei PC's wegen ihrer Lüfter und Transformatoren, auf. Die Blindanteile sind in den Fällen systeminhärent. Das bedeutet, dass diese Blindanteile nicht mechanisch aus den Verbrauchern entfernt werden können.

Beide Verbraucher werden jetzt über relativ lange Verbindungsleitungen mit den Leitungswiderständen $R_L = 2\Omega$ an die Netzspannung 230V/50Hz nach Bild 4.8-2 angeschlossen.

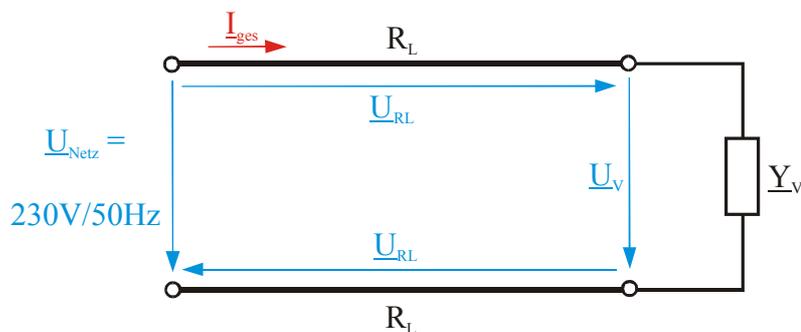


Bild 4.8-2: Verbraucher an der Netzspannung

Für den Verbraucher 1 nach Bild 4.8-1 ergeben sich dann die folgenden Berechnungen, um zu den Verlustleistungen P_{RL} auf den Verbindungsleitungen zu gelangen:

Verbraucher 1:

$$2 \cdot P_{RL} = 2 \cdot \underline{U}_{RL} \cdot \underline{I}_{ges}^* = 2 \cdot |\underline{I}_{ges}|^2 \cdot R_L = 65,33 \text{ W} \quad 4.8-2$$

mit

$$|\underline{I}_{ges}|^2 = \left| \frac{\underline{U}_{Netz}}{2 \cdot R_L + \frac{1}{G_V}} \right|^2 = 16,33 \text{ A}^2 \quad 4.8-3$$

Für den Verbraucher 2 nach Bild 4.8-1 ergeben sich die folgenden Berechnungen, um zu den Verlustleistungen P_{RL} auf den Verbindungsleitungen zu gelangen:

Verbraucher 2:

$$2 \cdot P_{RL} = 2 \cdot \underline{U}_{RL} \cdot \underline{I}_{ges}^* = 2 \cdot |\underline{I}_{ges}|^2 \cdot R_L = 130,03 \text{ W} \quad 4.8-4$$

mit

$$|\underline{I}_{ges}|^2 = \left| \frac{\underline{U}_{Netz}}{2 \cdot R_L + \frac{1}{G_V + jB_{LV}}} \right|^2 = 32,51 \text{ A}^2 \quad 4.8-5$$

An den Ergebnissen erkennt man die Zunahme der Verlustleistung auf den Verbindungsleitungen im Fall des Verbrauchers 2, in dem gegenüber dem Verbraucher 1 eine zusätzliche Blindleistung umgesetzt wird. Überträgt man das Beispiel auf größere Energieübertragungen, so erkennt man, dass die Übertragung von Blindleistung wegen der hohen Leitungsverluste für den Stromerzeuger unattraktiv ist. Er fordert deshalb eine verbraucherseitige Blindstromkompensation.

Zur Erläuterung der Blindstromkompensation soll wieder der Verbraucher 2 nach Bild 4.8-3 herangezogen werden. Im Bild 4.8-3 stellt der Strom durch den Wirkleitwert G_V den Wirkstrom I_w und der Strom durch den Blindleitwert B_{LV} den Blindstrom I_b dar:

$$\underline{I}_{GV} = \underline{I}_w \quad 4.8-6$$

$$\underline{I}_{BLV} = \underline{I}_b \quad 4.8-7$$

Das entsprechende Zeigerdiagramm der Spannung und der Ströme ist im Bild 4.8-4 dargestellt. Der darin eingetragene Winkel φ wird als Argument des Kosinus nach Definition zum Wirkfaktor $\cos(\varphi)$.

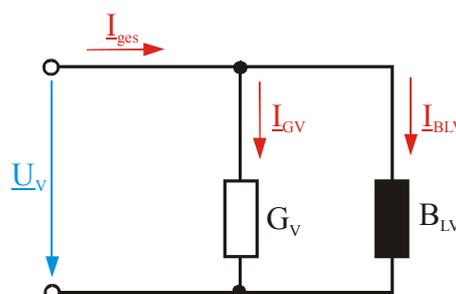


Bild 4.8-3: Verbraucher mit Blindleitwert

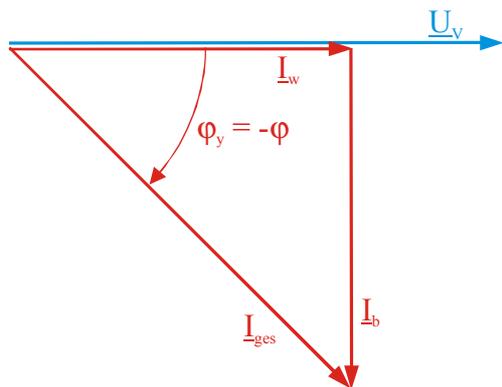


Bild 4.8-4: Zeigerdiagramm

Das Ziel der Blindstromkompensation ist die Veränderung des Wirkfaktors $\cos(\varphi)$ zum Wert 1 hin. Dies geschieht mit Hilfe eines Kompensationskondensators C_K , der dem Verbraucher nach Bild 4.8-5 parallel geschaltet wird. Durch den Kompensationskondensator entsteht die Parallelschaltung zweier Blindleitwerte mit entgegengesetzten Vorzeichen, wodurch der Gesamtblindleitwert verändert wird. Das Zeigerdiagramm für die Spannung und die Ströme nach der Blindstromkompensation nach Bild 4.8-5 ist im Bild 4.8-6 dargestellt.

Üblich ist die Blindstromkompensation auf den Wirkfaktor

$$\cos(\varphi_K) \approx 0,9 \quad \text{mit } \varphi_K \geq 0. \quad 4.8-9$$

Damit wird eine Überkompensation vermieden, die im Fall $\varphi_K = 0$ zum Resonanzfall des Systems „Verbraucher und Kompensationskondensator“ führen würde. Von Überkompensation spricht man im Fall

$$|I_{bK}| \geq |I_{BLV}|,$$

wenn der Betrag des Kompensationsblindstroms größer als der Betrag des zu kompensierenden Blindstroms ist.

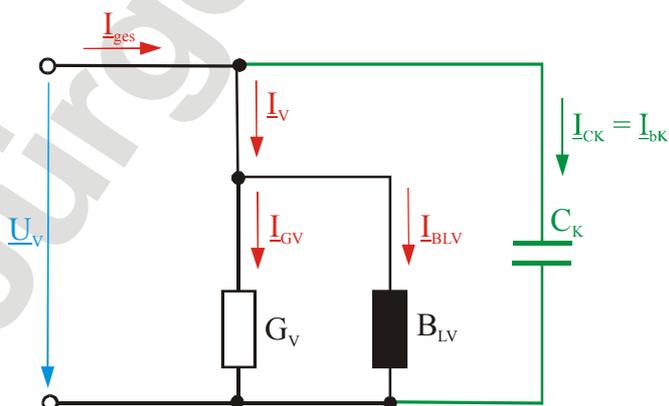


Bild 4.8-5: Verbraucher mit Blindstromkompensation

4.8.2 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Welches Ziel hat die Blindstromkompensation?
- 2) Was versteht man unter dem Wirkfaktor?
- 3) Auf welchen Wert wird der Wirkfaktor eingestellt?
- 4) Was bedeutet Überkompensation?

Aufgabe 4.8.2-1:

Ein Wechselstrommotor mit der mechanischen Nennleistung von 30kW und dem Wirkungsgrad $\eta = 80\%$ liegt an der Spannung 220V/50Hz. Der Wirkfaktor $\cos(\varphi)$ des Motors beträgt 0,7.

Bestimmen Sie die Kompensationskapazität C_K ,

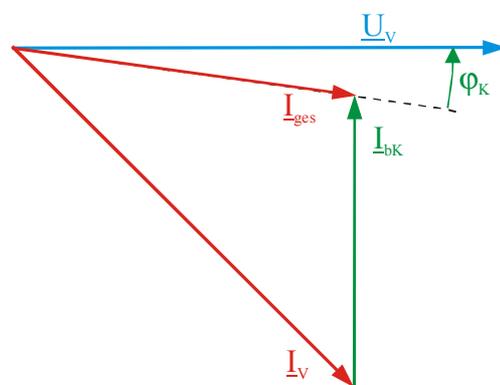


Bild 4.8-6: Blindstromkompensation

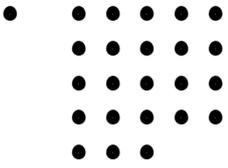
um einen Wirkungsgrad von $\cos(\varphi) = 0,9$ zu erreichen.

(Lösung: $C_K = 1,32\text{mF}$)

Prof. Dr. Jürgen Weber

4.9 Literaturhinweise

- 1) Fricke/Vaske Elektrische Netzwerke
- 2) Moeller/Frohne Grundlagen der Elektrotechnik
- 3) Weißgerber Elektrotechnik für Ingenieure II
- 4) Pregla Grundlagen der Elektrotechnik I
- 5) Paul Elektrotechnik 2 (Netzwerke)
- 6) Zastrow Elektrotechnik
- 7) Linse Elektrotechnik für Maschinenbauer
- 8) Kories Taschenbuch der Elektrotechnik



Fachhochschule Köln
University of Applied Sciences Cologne
Campus Gummersbach

Prof. Dr.-Ing. Jürgen Weber

Dipl.-Ing. Franz Josef Klein

Andreas Wagen

Inhaltsverzeichnis

0	<i>Vorbemerkung</i>	
1	<i>Einleitung</i>	
2	<i>Der elektrische Strom</i>	
3	<i>Gleichstromschaltungen mit linearen Bauelementen</i>	
4	<i>Der Wechselstromkreis</i>	
5	MESSTECHNIK	3
5.1	Messinstrumente	3
5.1.1	Das Drehspulinstrument	3
5.1.2	Das Dreheiseninstrument	4
5.1.3	Das Digitalmultimeter	5
5.1.4	Das Oszilloskop	5
5.1.5	Fragen- und Aufgabensammlung	15
5.2	Messung elektrischer Größen	17
5.2.1	Die Strommessung	17
5.2.2	Die Spannungsmessung	20
5.2.3	Indirekte Strommessung	22
5.2.4	Gleichzeitiges Messen von Strom und Spannung	22
5.2.5	Die Frequenzmessung	23
5.2.6	Die Phasenmessung	23
5.2.7	Die Widerstandsmessung	24
5.2.8	Der Messfehler	25
5.2.9	Die Aufnahme von Kennlinien	26
5.2.10	Fragen- und Aufgabensammlung	26
5.3	Literaturhinweise	29
6	<i>Dreiphasenwechselstrom</i>	
7	<i>Der Transformator</i>	
	<i>Anhang</i>	
	<i>Anlage I</i>	<i>Praktika</i>

5 MESSTECHNIK

5.1 Messinstrumente

5.1.1 Das Drehspulinstrument

Das Drehspulinstrument ist ein Zeigerinstrument, das auch heute noch in vielen Laboren und Einrichtungen zur Messung von elektrischen Spannungen und Strömen benutzt wird. Das Kernstück des Instruments ist das Drehspulmesswerk. Um das Prinzip des Drehspulmesswerks zu verstehen, soll zunächst die Kraftwirkung eines stromdurchflossenen Leiters im magnetischen Feld eines Permanentmagneten betrachtet werden. Bild 5.1.1-1 zeigt einen vom Gleichstrom I durchflossenen dünnen Leiter, der sich auf der Länge l im magnetischen Feld der Flussdichte B eines Permanentmagneten befindet. Das eingezeichnete magnetische Feld weist als Vektor dabei aus der Ebene. Auf den Leiter wird eine Kraft F ausgeübt, deren Betrag sich wie folgt ergibt:

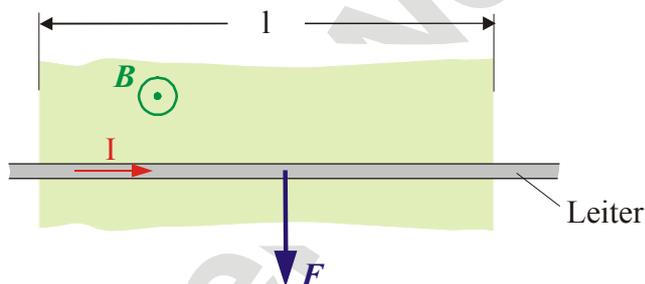


Bild 5.1.1-1: Kraft auf einen stromdurchflossenen Leiter

$$|\mathbf{F}| = F = I \cdot l \cdot |\mathbf{B}| = I \cdot l \cdot B \quad 5.1.1-1$$

Befestigt man den Leiter an einem Federsystem, so wird die Auslenkung des Leiters in Richtung der Kraft F ein Maß für den Strom darstellen. Dies ist das Prinzip des Drehspulmesswerks, in dem eine drehbar gelagerte Spule, an der ein Zeiger befestigt ist, im Feld eines Permanentmagneten je nach Stärke des Gleichstroms I über ein Drehmoment ausgelenkt wird. Das auf den Zeiger wirkende Drehmoment ist proportional dem arithmetischen Mittelwert des durch die Spule fließenden Stroms. Bei reinen Wechselströmen ist deshalb kein Zeigerausschlag zu registrieren, während bei Mischströmen der Gleichstromanteil zur Anzeige kommt.

**Beim Drehspulmesswerk dreht sich eine stromdurchflossene Spule im Feld eines Permanentmagneten. Die Richtung der Auslenkung ist von der Stromrichtung abhängig.
Das Drehspulmesswerk zeigt den arithmetischen Mittelwert des Stroms an.**

Das Messwerk hat bereits bei wenigen μA Vollausschlag. Um den Messbereich zu erweitern und die Messung von Strom und Spannung zu ermöglichen, werden im Instrument zuschaltbare Widerstände angeordnet, die für die Strommessung parallel zum Messwerk und für die Spannungsmessung im Serie zum Messwerk geschaltet werden.

Damit man mit dem Drehspulinstrument auch sinusförmige Wechselströme oder Wechselspannungen messen kann, verfügen diese Instrumente über Gleichrichter, die den Wechselstrom in einen Gleichstrom umwandeln. Die Skala des Instruments ist dabei so geeicht, dass

der Effektivwert des Wechselstroms oder der Wechselspannung angezeigt wird. Dies führt zu systembedingten Fehlern, falls die zu messende Wechselgröße keinen sinusförmigen Zeitverlauf aufweist.

Ein Drehspulmesswerk erkennt man an der im Bild 5.1.1-2 dargestellten Kennzeichnung. In dem Bild ist ebenfalls die Kennzeichnung eines Drehspulmesswerks mit Gleichrichter abgebildet.

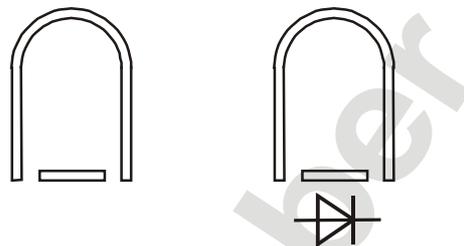


Bild 5.1.1-2: Kennzeichnungen

5.1.2 Das Dreheiseninstrument

Das Dreheiseninstrument ist ein sehr robustes Zeigerinstrument, das auch heute noch in vielen Schalttafeln alter Laboreinrichtungen zur Messung von elektrischen Spannungen und Strömen benutzt wird. Das Kernstück des Instruments ist das Dreheisenmesswerk. Das Prinzip des Messwerks ist die Magnetisierung eines festen und eines an einem Zeiger befestigten magnetisch weichen Eisenstücks, welches drehbar mit einem Federsystem gelagert ist. Beide Eisenstücke werden durch eine stromdurchflossene Spule gleichsinnig in Abhängigkeit der Stärke des Stroms polarisiert. Damit stoßen sich die beiden polarisierten Eisenstücke ab und erzeugen ein Drehmoment, welches über das Federsystem zu einer Auslenkung des Zeigers führt. Die abstoßende Kraft, die auf die beiden Eisenstücke wirkt, ist proportional dem Quadrat der magnetischen Feldstärke und damit proportional dem Quadrat des durch die Spule fließenden Stroms. Durch die Trägheit des Systems entsteht eine Mittelwertbildung, die immer einen positiven Ausschlag des Messwerks zur Folge hat. Über die Skala des Messinstruments wird der Effektivwert des Stroms angezeigt.

Beim Dreheisenmesswerk stoßen sich magnetisierte Eisenstücke ab. Dreheisenmesswerke bilden den Mittelwert des Quadrates des Stroms.

Das Dreheisenmesswerk ist relativ unempfindlich. Es benötigt für den Vollausschlag mehrere mA, womit das Dreheiseninstrument nicht zur Messung kleiner Ströme im Bereich von μA geeignet ist. Um den Messbereich zu erweitern und die Messung von Strom und Spannung zu ermöglichen, werden im Dreheiseninstrument dem Messwerk Widerstände zuschaltbar parallel und in Serie angeordnet. Die Skala ist dabei so geeicht, dass der Effektivwert der Spannung oder des Stroms angezeigt wird.

Wegen der Ummagnetisierung der Eisenstücke und der damit verbundenen Trägheit, ist das Dreheiseninstrument nur für niedrige Frequenzen $< 1\text{kHz}$ geeignet.

Ein Dreheisenmesswerk erkennt man an der im Bild 5.1.2-1 dargestellten Kennzeichnung.

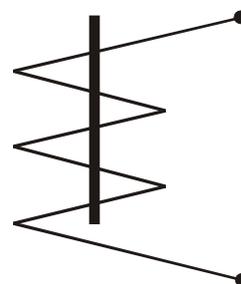


Bild 5.1.2-1: Kennzeichnung

5.1.3 Das Digitalmultimeter

Moderne Messinstrumente für die Spannungs- und Strommessung arbeiten heute nach dem Prinzip der Analog-Digital-Wandlung. Dabei wird der Funktionsverlauf des zu messenden Signals zeitlich hintereinander abgetastet und digitalisiert. Das bedeutet, dass dem abgetasteten Wert eine seiner Größe entsprechende Zahl zugeordnet wird. Die daraus entstehenden Zahlenfolgen werden digital verarbeitet. Danach erscheint das Ergebnis in der numerischen Anzeige des Messinstruments, das man allgemein als Digitalmultimeter bezeichnet. Auf das Prinzip der Analog-Digital-Wandlung wird in einem Kapitel des 2. Teils des Skriptes eingegangen.

Digitalmultimeter sind heute in der Lage, sehr genau Ströme und Spannungen über einen weiten Amplitudenbereich zu messen. Dies gilt sowohl für Gleichgrößen als auch für Wechselgrößen bis in den Bereich hoher Frequenzen hinein. Bei periodischen Wechselgrößen wird der jeweilige Effektivwert unabhängig vom zeitlichen Verlauf der Amplitude angezeigt.

Digitalmultimeter haben heute die mechanischen Messinstrumente weit gehend verdrängt. Dies hängt zum einen mit der höheren Genauigkeit, wobei hier auch die Ablesegenauigkeit berücksichtigt ist, zusammen und zum anderen mit der Möglichkeit, über eine Schnittstelle den digitalisierten Wert der Messung zur automatisierten Messdatenverarbeitung dem Digitalmultimeter zu entnehmen.

Viele Digitalmultimeter bieten über die Messungen von Spannungen und Strömen hinausgehend die Möglichkeit, auch Widerstände und die Frequenz einer periodischen Zeitfunktion zu messen.

5.1.4 Das Oszilloskop

Oszilloskope (der Name kommt aus dem Griechischen und bedeutet „Schwingungsbetrachter“) sind als Messwerkzeuge zur Darstellung von Zeitfunktionen und Messung im Zeitbereich nicht mehr wegzudenken. Mit Hilfe des Oszilloskops können auch mehrere Zeitfunktionen betrachtet und verglichen werden.

Das Oszilloskop besitzt einen relativ komplexen Aufbau, der prinzipiell im nächsten Abschnitt beschrieben werden soll.

5.1.4.1 Der Prinzipielle Aufbau eines Oszilloskops

5.1.4.1.1 Die Oszilloskopröhre

Die Oszilloskopröhre, auch Kothodenstrahl- oder Elektronenstrahlröhre genannt, ist eine Weiterentwicklung der nach ihrem Erfinder K. F. Braun benannten Braunschen Röhre, mit der es im Jahr 1897 erstmals gelang, die Zeitverläufe elektrischer Ströme sichtbar zu machen. Sie ist der wichtigste Bestandteil eines Oszilloskops und besteht vereinfacht betrachtet aus einem trichterförmigen, evakuierten Glaskolben. In diesem Glaskolben wird ein Elektronenstrahl erzeugt. Das System zur Erzeugung des Elektronenstrahls befindet sich im Kolbenhals. Der Kolbenboden, der den Leuchtschirm darstellt, trägt eine Lumineszenzschicht, die jeweils dort zum Leuchten angeregt wird, wo der Elektronenstrahl auf sie trifft. Hierbei hängt die Hellig-

keit des Leuchtpunktes von der Menge und der Geschwindigkeit der auf die Luminiszenzschicht auftreffenden Elektronen ab. Bild 5.1.4.1.1-1. zeigt das Prinzipschaltbild eines Oszilloskops. Anhand dieses Bildes soll die Wirkungsweise erklärt werden.

Die Elektronen treten durch thermische Emission aus der Kathode K aus, welche durch einen Heizfaden h erwärmt wird. Auf Grund des Kraftwirkungsgesetzes der Elektrostatik (Gesetz von Coulomb)

$$F = Q \cdot E$$

5.1.4.1.1-1

mit

- Q: elektrische Ladung
- F: Vektor der Kraft auf die elektrische Ladung
- E: Vektor der elektrischen Feldstärke

werden die negativ geladenen Elektronen von der gegenüber der Kathode positiv geladenen Gegenelektrode, der Anode a angezogen. Zwischen der Kathode und der Anode befindet sich

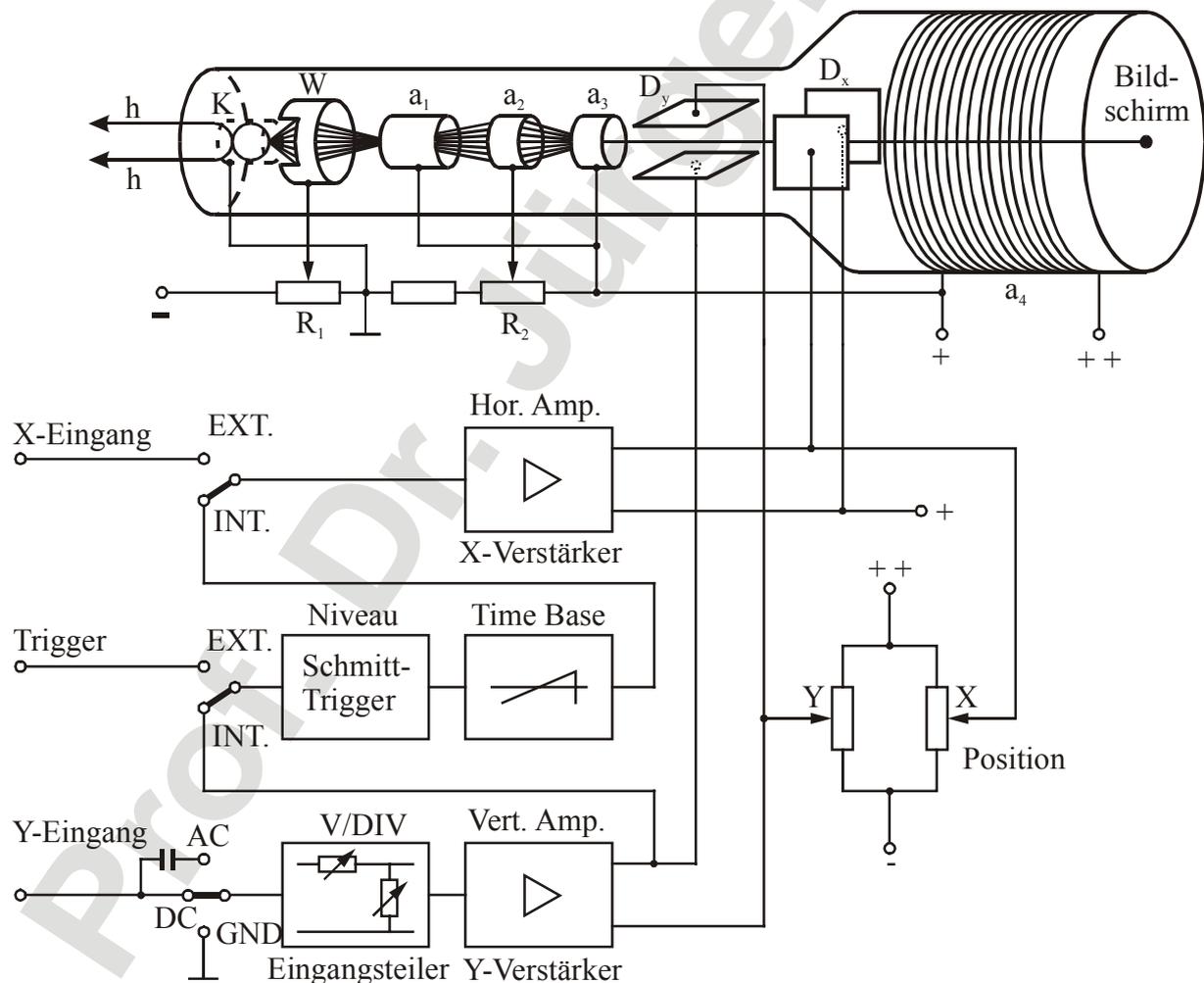


Bild 5.1.4.1.1-1: Aufbau eines Oszilloskops

eine dritte Elektrode, der sogenannte Wehneltzylinder, mit dem man die Menge der zum Leuchtschirm gelangenden Elektronen und damit die Helligkeit des Leuchtpunkts steuert. Je nach Höhe der mittels des Potentiometers R_1 eingestellten, gegenüber der Spannung an der Kathode negativen Spannung am Wehneltzylinder, werden von diesem mehr oder weniger Elektronen abgestoßen oder zum Leuchtschirm durchgelassen.

Die Kombination von drei auf den Wehneltzylinder folgenden, zylindrischen Elektroden, den Anoden a_1 , a_2 , a_3 wirkt auf den Elektronenstrahl wie eine Linse zur Fokussierung. Der Brennpunkt dieser Linse kann durch Verändern der Potentialdifferenz zwischen der Anode a_2 und den beiden miteinander verbundenen Anoden a_1 und a_3 mit Hilfe des Potentiometers R_2 so gelegt werden, dass auf dem Leuchtschirm ein scharfer Leuchtpunkt entsteht.

Mit Hilfe von zwei Plattenpaaren, den Vertikalablenkplatten (Y-Richtung) und den Horizontalablenkplatten (X-Richtung) kann der Elektronenstrahl aus seiner Richtung abgelenkt werden. Legt man eine Spannung an diese Platten, so werden auch hier auf Grund des schon erwähnten Kraftwirkungsgesetzes der Elektrostatik die negativ geladenen Elektronen sowohl in Y- wie in X-Richtung von der positiv geladenen Platte angezogen und von der negativ geladenen Platte abgestoßen.

Bei geringer Elektronengeschwindigkeit sind die Elektronen den Ablenkungskräften zwischen den Ablenkplatten relativ lange ausgesetzt. Das hat zur positiven Folge, dass man schon mit relativ niedrigen Spannungen große Ablenkungen erzielt. Die negative Folge der geringen Geschwindigkeit ist aber eine nur geringe Helligkeit (Intensität) des Leuchtpunkts. Diesen Nachteil hilft die Nachbeschleunigungsanode a_4 auszugleichen. Sie besteht aus einer an der Innenseite des Glaskolbens wendelförmig aufgebrachtten Bahn schlecht leitenden Widerstandsmaterials. Dadurch sind die Elektronen auf ihrem Weg zum Leuchtschirm einer immer höheren Beschleunigungsspannung ausgesetzt, so dass sie mit der nötigen kinetischen Energie auf den Leuchtschirm treffen.

5.1.4.1.2 Der Y-Kanal

Die Eingangskopplung

Über den Y-Kanal gelangt das zu messende Signal vom Y-Eingang über die Eingangskopplung, den Eingangsteiler und den Verstärker auf die Y-Ablenkplatten. Die Eingangskopplung besteht aus einem Schalter mit den drei Stellungen GND, DC und AC.

- Ground (GND = Masse, Nullpegel)
In dieser Stellung wird das Messsignal vom Messkanal getrennt und dieser auf Masse gelegt. Damit liegen 0V am nachfolgenden Verstärker und auf dem Bildschirm wird der Nullpegel angezeigt, der Elektronenstrahl befindet sich in Nulllage. Diese Nulllage lässt sich mit Hilfe des „POS“-Drehknopfes auf eine bestimmte Höhe auf dem Bildschirm einstellen, z. B. auf die in der Mitte liegende fein gestrichelte Linie. Stellt man dann die Kopplung wieder auf AC oder DC, so sind von dieser Linie aus nach oben und nach unten die positiven und negativen Spannungswerte abzumessen.
- Gleichspannungskopplung (DC = Direct Current = Gleichstrom)
In dieser Stellung wird das Signal direkt durchgeschaltet. Auf dem Bildschirm ist somit der gesamte Signalinhalt (Gleich- und Wechselspannungsanteile) zu sehen.

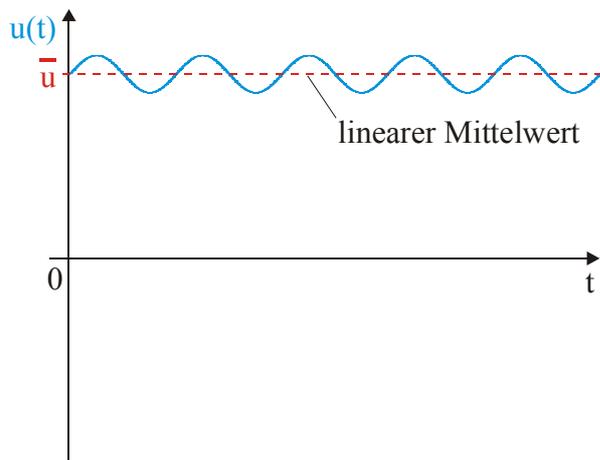


Bild 5.1.4.1.2-1a: Mischspannung

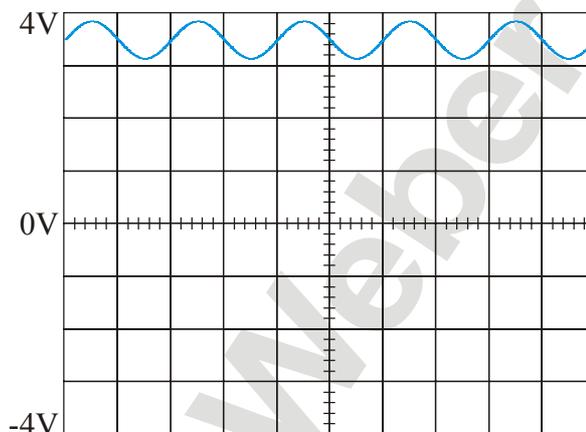


Bild 5.1.4.1.2-1b: Eingangskopplung in Stellung DC

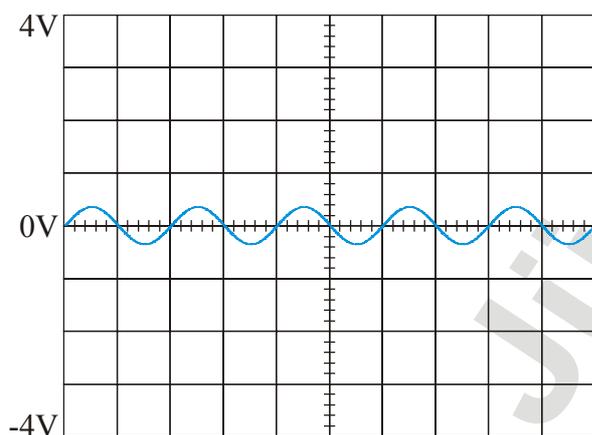


Bild 5.1.4.1.2-1c: Eingangskopplung in Stellung AC

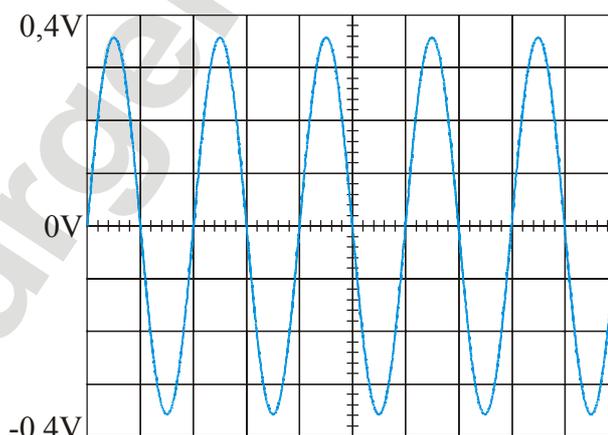


Bild 5.1.4.1.2-1d: Eingangskopplung in Stellung AC und Änderung der Empfindlichkeit

- Wechselfspannungskopplung (AC = Alternating Current = Wechselstrom)
 In dieser Stellung wird das Signal über einen Kondensator auf den Verstärker gegeben. Der Kondensator blockt die Gleichspannungsanteile des Signals ab. Zu sehen sind also nur die Wechselfspannungsanteile.

Will man bei einer Mischspannung mit hohem Gleichanteil und kleiner Amplitude der Wechselfspannung (Bild 5.1.4.1.2-1a) diese Amplitude messen, so wäre diese Messung in Stellung DC (Bild 5.1.4.1.2-1b) sehr nachteilig. In Stellung AC (Bild 5.1.4.1.2-1c) hingegen wird der Gleichspannungsanteil abgeblockt und der verbleibende Wechselfspannungsanteil kann so verstärkt werden, dass die Darstellung auf dem Bildschirm (Bild 5.1.4.1.2-1d) eine genaue Messung zulässt.

Der Eingangsspannungsteiler

Der Eingangsspannungsteiler dient dazu, die Messspannung auf einen für den nachfolgenden Verstärker geeigneten Wert herabzusetzen. Diese vom Prinzip her sehr einfache Funktion erfordert wegen der nicht idealen Eigenschaften technischer Bauelemente und der messtechnischen Anforderungen an das Oszilloskop ein kompliziertes Netzwerk aus Widerständen, Kondensatoren und Schaltern, auf das hier nicht eingegangen werden soll. Mit Hilfe eines Stufenschalters lässt sich die Eingangsempfindlichkeit z. B. zwischen 5V/DIV und 5mV/DIV in einem 1-2-5-Raster (z. B. 10mV/DIV, 20mV/DIV, 50mV/DIV, 100mV/DIV usw.) einstellen. Das heißt, dass das Signal auf dem Bildschirm zwischen 5V pro DIV (DIV = Division = Teileinheit) und 5mV pro DIV angezeigt werden kann.

Der Y-Verstärker

Der Y-Verstärker ist meist in mehreren Stufen aufgebaut, um die an ihn gestellten hohen Anforderungen (Verstärkung, breiter Frequenzbereich...) zu erfüllen. Näheres soll hier nicht behandelt werden.

5.1.4.1.3 Die X-Ablenkung

Normalerweise werden mit dem Oszilloskop Zeitverläufe von Signalen dargestellt. Das heißt, dass auf dem Bildschirm in X-Richtung die Zeit dargestellt wird. Der auf dem Bildschirm gezeigte Kurvenverlauf ist somit $u_y = f(t)$. Diese Betriebsweise nennt man „Y-t-Betrieb“.

Daneben gibt es aber auch die Möglichkeit zwei Signale in Abhängigkeit voneinander darzustellen, also $u_y = f(u_x)$. Diese Betriebsweise nennt man „X-Y-Betrieb“.

Der Y-t-Betrieb

Soll der zeitliche Verlauf eines in Y-Richtung eingegebenen Signals gezeigt werden, so muss sich der Elektronenstrahl und damit verbunden der Leuchtpunkt in X-Richtung zeitabhängig von links nach rechts über den Bildschirm bewegen. Diese Zeitabhängigkeit wird in der „Time Base“ durch einen sogenannten Sägezahngenerator hergestellt. Üblicherweise werden heute hierzu digitale Schaltkreise und Digital-Analog-Umsetzung verwendet. Im einfachsten Fall wird mit Hilfe eines Kondensators, der mit konstantem Strom geladen wird, eine zeitlich ansteigende, lineare Spannungsrampe (Sägezahn) erzeugt. Gibt man diese der Zeit proportionale Spannungsrampe auf die X-Ablenkplatten, so wird der Elektronenstrahl abgelenkt und damit der Leuchtpunkt auf dem Bildschirm in X-Richtung proportional zur Zeit bewegt. Ist der Kondensator vollständig geladen, so wird er entladen und der Ladevorgang beginnt erneut, womit sich auch der Elektronenstrahl erneut von links nach rechts über den Bildschirm bewegt. Während des Entladens des Kondensators muss sich auch der Elektronenstrahl vom rechten Bildrand zum linken Bildrand zurück bewegen. Um diese störende Bewegung auf dem Bildschirm nicht sichtbar werden zu lassen, wird während der Entladezeit $t_{Rü}$ des Kondensators die Strahlerzeugung z. B. durch Spannungsänderung am Wehneltzylinder verhindert. Der Rücklauf wird „dunkelgetastet“.

Durch Verändern der Ladezeit des Kondensators ändert sich der Anstieg der Spannungsrampe und damit die Geschwindigkeit mit der der Strahl abgelenkt wird. Mit dem Zeitwahlschalter

des Oszilloskops kann man diese Veränderungen vornehmen und damit den Zeitmaßstab in „TIME/DIV“ einstellen. Da der Elektronenstrahl auf dem Bildschirm ein kurzes Nachleuchten bewirkt, erhält man eine Kurve des Signals auf dem Bildschirm.

Die Triggerung

In Bild 5.1.4.1.3-1 ist der zeitliche Verlauf der Spannung u_y und ihre Darstellung auf dem Bildschirm gezeigt. Während der Hinlaufzeit t_{Hi} bewegt sich der Elektronenstrahl auf dem Bildschirm mit von der Spannungsrampe u_x vorgegebener gleichmäßiger Geschwindigkeit vom linken zum rechten Bildschirmrand. Während der Rücklaufzeit $t_{Rü}$ wird der Elektronenstrahl dunkelgetastet wieder zum linken Rand geführt und der Vorgang beginnt erneut. Wie man sieht, wird bei jedem Durchlauf des Elektronenstrahls ein anderer Kurvenverlauf gezeigt, wodurch bei schnellen Bildfolgen eine Beobachtung des Signals unmöglich wird. Um das zu verhindern und ein sogenanntes „stehendes Bild“ zu erzeugen, muss gewährleistet sein, dass man bei einem periodischen Signalverlauf immer den gleichen Abschnitt des Kurvenzuges auf dem Bildschirm darstellt. Dies wird mit der „Triggerung“ (to trigger = auslösen, ansteuern) erreicht. Hierbei wird mit Hilfe elektronischer Schaltungen abgefragt, wann das so ge-

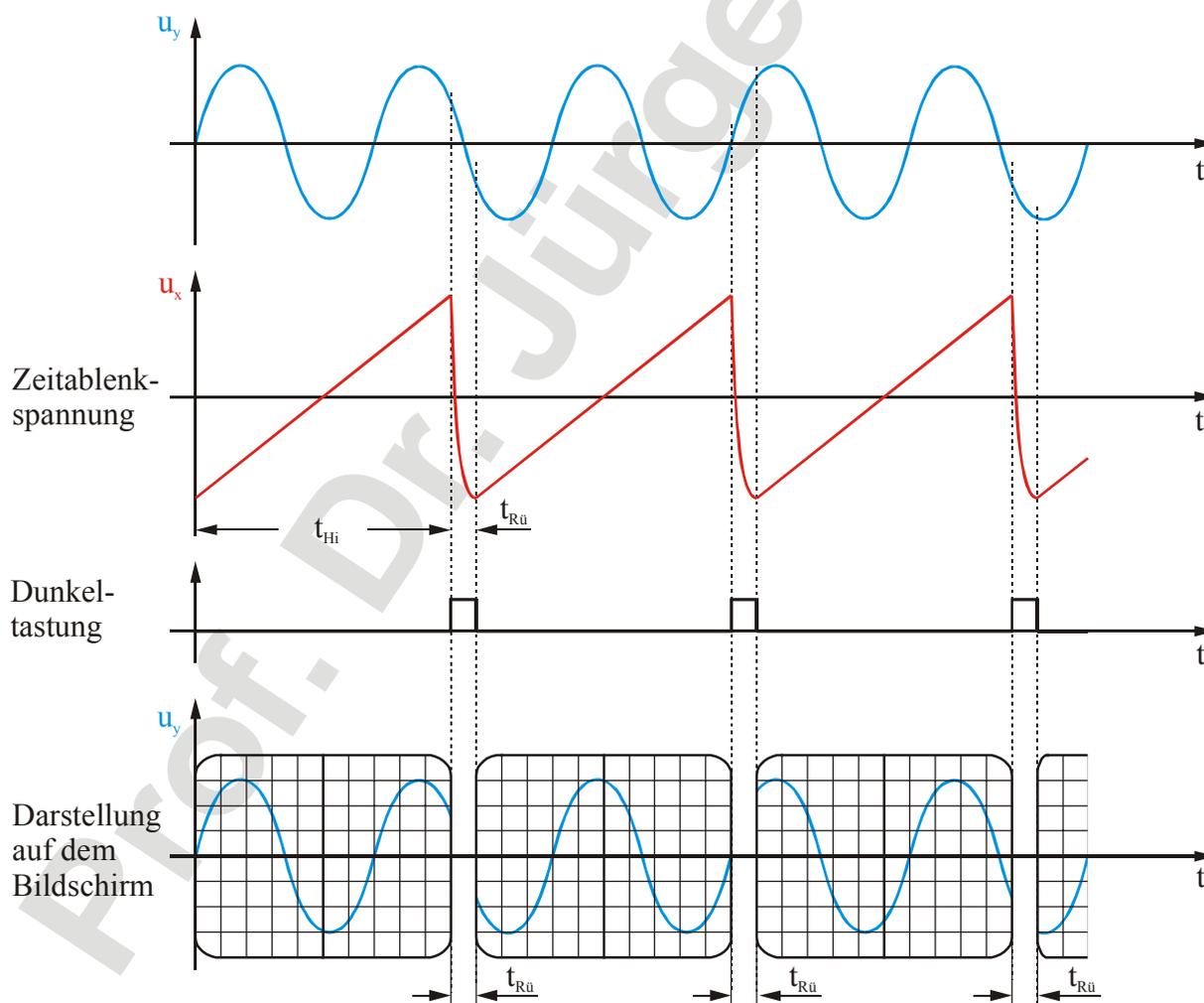


Bild 5.1.4.1.3-1: Zeitablenkung ohne Triggerung

nannte Triggersignal einen bestimmten Spannungspegel oder Triggerlevel erreicht hat. Bei Erreichen dieses Triggerlevels wird ein Impuls erzeugt, der wiederum bewirkt, dass der Elektronenstrahl vom linken Bildschirmrand nach rechts losläuft. Den Triggerlevel kann man mit dem Drehknopf „LEVEL“ am Oszilloskop vorwählen. Als Triggersignal bietet sich meist die zu messende Spannung u_y selbst an.

Im Bild 5.1.4.1.3-2 wird der Signalverlauf mit Triggerung gezeigt. Als Triggersignal wird hier die zu messende Spannung u_y genutzt. Der „LEVEL“ u_T ist auf ca. 2/3 der positiven maximalen Amplitude eingestellt. Bei Punkt A hat der Leuchtpunkt den rechten Bildrand erreicht. Der Elektronenstrahl wird dunkelgetastet zum linken Bildrand zurück gelenkt und wartet nun bis er einen Triggerimpuls erhält. Dies wäre bei Punkt B der Fall, denn dort hat die Spannung u_y genau den eingestellten Triggerlevel erreicht. Würde der Elektronenstrahl aber nun loslaufen, so sähe man ein anderes Bild als beim ersten Durchlauf. Um wieder genau den

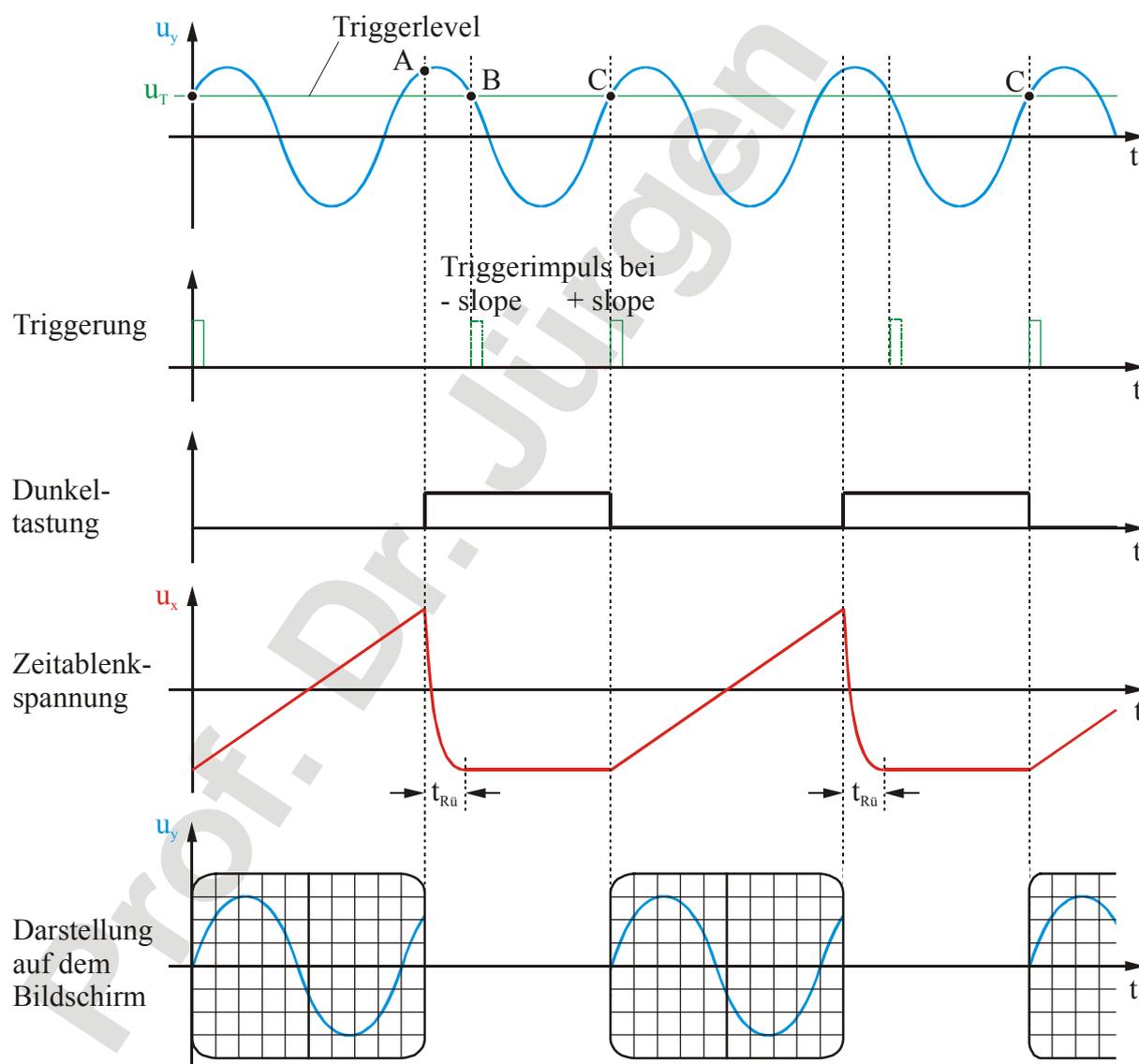


Bild 5.1.4.1.3-2: Zeitablenkung mit Triggerung

gleichen Kurvenabschnitt zu sehen, darf der Elektronenstrahl erst bei Punkt C loslaufen. Man muss also zusätzlich zum „LEVEL“ auch bestimmen, ob dieser Triggerlevel positiv oder negativ steigend erreicht werden soll. Diese Einstellung wird mit dem Schalter „SLOPE“ (Slope = Steigung, Anstieg) vorgenommen. Man stellt „+“ für positiven und „-“ für negativen Anstieg ein.

Im Bild 5.1.4.1.3-2 ist der Slope auf positiven Anstieg (+) eingestellt und der Elektronenstrahl läuft erst bei Punkt C erneut los.

Nutzt man die zu messende Spannung u_y als Triggerquelle, so spricht man von interner Triggerung. Das Triggersignal wird intern an der zu messenden Spannung abgegriffen. Hierzu stellt man den Schalter zur Wahl der Triggerquelle „SOURCE“ (source = Quelle) oder „TRIG“ in die Stellung „INT“. Würde man eine andere, externe Spannung als Triggerquelle benutzen, so müsste diese über der Eingang „EXT“ angeschlossen werden. Der Schalter „SOURCE“ („TRIG“) stände entsprechend in Stellung „EXT“. Auch die das Oszilloskop versorgende Netzspannung kann als Triggerquelle genutzt werden. Das hat immer dann Vorteile, wenn Signale mit der Netzspannungsfrequenz von 50 Hz ausgemessen werden sollen. Der Schalter „SOURCE“ („TRIG“) ist dann in Stellung „LINE“ (line = Leitung, Stromnetz) zu bringen.

Steht nun der Schalter „SOURCE“ z. B. in Stellung „INT“, aber es liegt keine Spannung am Y-Eingang des Oszilloskops an, so kann auch kein Triggerimpuls erzeugt werden. Nach dem bisher Gesagten bedeutet das, dass kein Bild auf dem Schirm zu sehen ist, da der Elektronenstrahl dunkelgetastet am linken Bildschirmrand auf ein Triggersignal wartet. Um dennoch den Elektronenstrahl auch bei Nichtvorhandensein eines Triggersignals sehen zu können, unterscheidet man zwischen „normaler“ und „automatischer“ Triggerung.

Alles bisher Gesagte bezog sich auf die normale Triggerung. Bei der automatischen Triggerung läuft der Elektronenstrahl auch dann los, wenn kein Triggersignal vorhanden ist. Es wird die Nulllinie angezeigt. Ist dann ein Signal vorhanden, so sucht sich die Triggereinrichtung automatisch einen Triggerpegel, man sieht ein stehendes Bild.

Die Einstellung für normale oder automatische Triggerung wird meist mit dem Drehknopf „LEVEL“ vorgenommen. Dreht man ihn in die linke, eingerastete Position, so ist die automatische Triggerung eingeschaltet. Dreht man ihn aus dieser Position heraus, ist die normale Triggerung eingestellt und der Elektronenstrahl ist nur dann zu sehen, wenn ein Triggersignal vorhanden ist und der mit dem gleichen Drehknopf eingestellte Pegel erreicht wird.

Der X-Y-Betrieb

Die „Time Base“ lässt sich von der X-Ablenkung trennen. Es besteht dann die Möglichkeit ein externes zweites Signal auf die X-Ablenkung zu geben, womit dieses Signal die horizontale Aussteuerung übernimmt. Mit Hilfe dieser Betriebsart lassen sich unter anderem Kennlinien in der Strom-Spannungs-Charakteristik aufnehmen.

In der Regel besitzen die heutigen Oszilloskope keinen gesonderten X-Eingang mehr, sondern nach Betätigen eines Schalters wird einer der beiden Y-Eingänge als X-Eingang genutzt. So kann man ohne Umstecken der Leitungen komfortabel zwischen dem Y-t-Betrieb und dem X-Y-Betrieb schalten.

5.1.4.1.4 Der Zweikanalbetrieb

In aller Regel ist bei einem Oszilloskop der Y-Kanal zweimal vorhanden, so dass gleichzeitig zwei verschiedene Signale beobachtet werden können. Dazu bedarf es einer Oszilloskopröhre in der zwei Elektronenstrahlen erzeugt und unterschiedlich abgelenkt werden können oder einer elektronischen Schaltung, die es ermöglicht, durch zeitliche Aufteilung des Elektronenstrahls auf die beiden Y-Eingangskanäle zwei Signale darzustellen. Aus Kostengründen wird

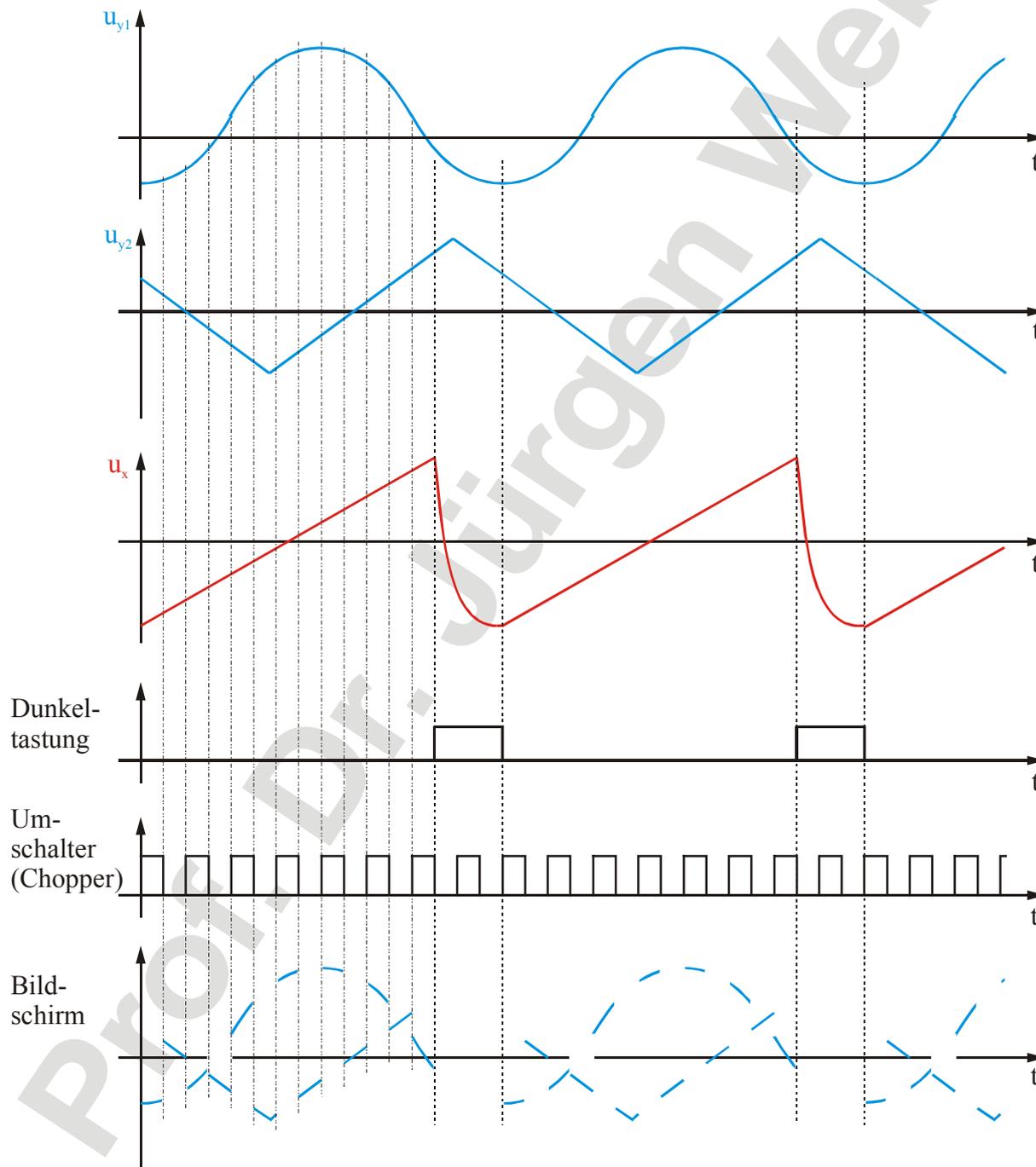


Bild 5.1.4.1.4-1: Zeitlicher Ablauf bei der Betriebsart "CHOPPED"

überwiegend das letztere Verfahren angewendet. Hierbei gibt es zwei verschiedene Methoden, die Betriebsart „CHOPPED“ (Zerhackerverfahren) und die Betriebsart „ALTERNATE“, um mit einem Elektronenstrahl zwei zeitlich unterschiedliche Kurvenverläufe zu zeigen, die vom trägen menschlichen Auge als gleichzeitig und vollständig aufgenommen werden.

- Bei der Betriebsart „CHOPPED“ wird der Elektronenstrahl während des Durchlaufs vom linken zum rechten Bildrand mit einer Frequenz von z. B. 250 kHz zwischen den

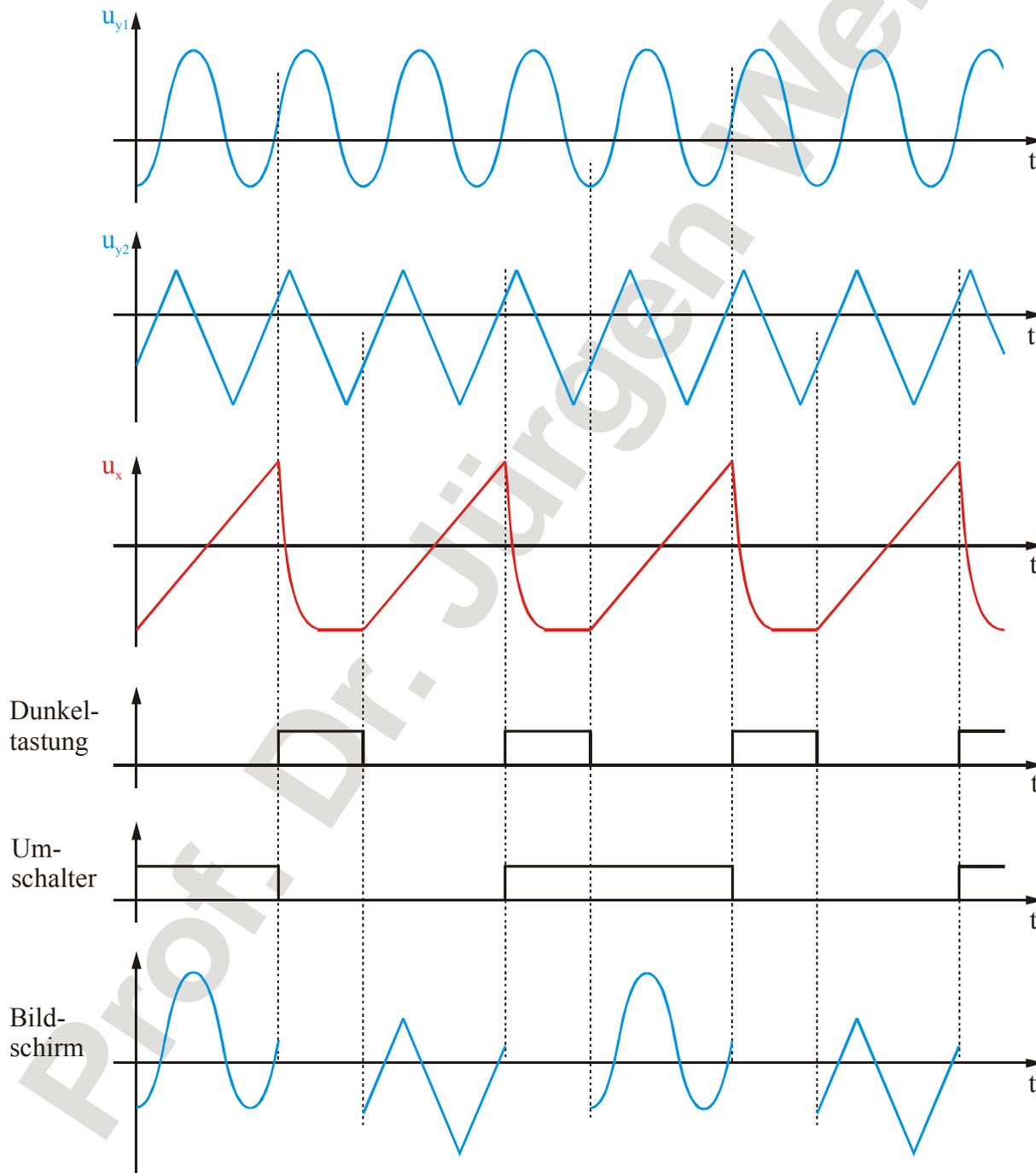


Bild 5.1.4.1.4-2: Zeitlicher Ablauf bei der Betriebsart „ALTERNATE“

beiden Y-Eingängen hin und hergeschaltet. Er wird „zerhackt“, so dass er während eines Durchlaufs aufeinanderfolgend abwechselnd -in von der Choppfrequenz vorgegebenen Zeitabschnitten- entweder das Signal vom ersten oder vom zweiten Y-Eingang zeigt. Der zeitliche Ablauf bei dieser Betriebsart ist im Bild 5.1.4.1.4-1 dargestellt.

- Bei der Betriebsart „ALTERNATE“ wird während des gesamten Durchlaufs des Strahls von links nach rechts das Signal eines Y-Eingangs gezeigt, während beim nächsten Durchlauf das Signal des anderen Y-Eingangs dargestellt wird. Man sieht also abwechselnd (alternierend) das gesamte Bild des einen Kanals und dann das gesamte Bild des anderen Kanals. Der zeitliche Ablauf bei dieser Betriebsart ist im Bild 5.1.4.1.4-2 dargestellt.

Damit das Auge die zeitliche Abfolge nicht wahrnehmen kann, ist die Betriebsart „CHOPPED“ immer dann vorzuziehen, wenn -wegen relativ niedriger Frequenz der zu messenden Signale- mit dem Zeitwahlschalter relativ lange Zeiten ($> \text{ca. } 2\text{ms/DIV}$) für einen Durchlauf des Strahls eingestellt sind. Die hierzu im Verhältnis sehr kleinen Zeitabschnitte der Choppfrequenz sind dann auch wegen des Überstrahlens des Bildpunktes auf dem Bildschirm nicht zu erkennen. Wäre hier die Betriebsart „ALTERNATE“ eingestellt, so würde das Auge wegen der relativ langen Durchlaufzeiten des Strahls die abwechselnde Darstellung der beiden Signale erkennen.

Im Gegensatz dazu muss bei relativ hohen Frequenzen der zu messenden Signale die Betriebsart „ALTERNATE“ eingestellt sein. Bei diesen Frequenzen müssen mit dem Zeitwahlschalter relativ niedrige Durchlaufzeiten ($< \text{ca. } 1\text{ms/DIV}$) eingestellt werden. Als Folge wäre dann auch die Aufteilung des Strahls in die kleinen Zeitabschnitte der Choppfrequenz störend wahrzunehmen (Bild 5.1.4.1.4-1). Das „Alternieren“ ist nun wegen der geringen Durchlaufzeiten und der damit einhergehenden schnellen Abfolge nicht mehr zu erkennen.

5.1.4.2 Messen mit dem Oszilloskop

Die Eingänge eines Oszilloskops sind ausschließlich spannungsempfindlich. Will man andere physikalische Größen (z. B.: Strom, Kraft, Weg, Temperatur...) darstellen, so müssen diese durch geeignete Messumformer erst in entsprechend proportionale Spannungen umgewandelt werden. Soll z. B. ein Strom gemessen werden, so lässt man diesen Strom durch einen bekannten Ohmschen Widerstand fließen. Die an diesem Widerstand daraufhin abfallende Spannung kann dann als ein direktes Maß für den Strom gemessen werden.

5.1.5 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Welchen Werten ist die Kraft auf einen stromdurchflossenen dünnen Leiter proportional?
- 2) Was ist das Funktionsprinzip eines Drehspulmesswerks?
- 3) Für welche Stromarten ist das Drehspulmesswerk geeignet?
- 4) Wie lassen sich mit dem Drehspulinstrument Wechselspannungen und Wechselströme messen?
- 5) Was ist das Funktionsprinzip eines Dreheisenmesswerks?

- 6) Für welche Stromarten ist das Dreheisenmesswerk geeignet?
- 7) Bis zu welchen Frequenzen kann mit dem Dreheiseninstrument gemessen werden?
- 8) Wie nimmt man bei Zeigerinstrumenten die Messbereichserweiterung zur Messung von Spannungen vor?
- 9) Wie nimmt man bei Zeigerinstrumenten die Messbereichserweiterung zur Messung von Strömen vor?
- 10) Nach welchem Prinzip arbeitet das Digitalmultimeter?
- 11) Erläutern Sie die Funktionsweise der Oszilloskopröhre.
- 12) Erläutern Sie die Eingangskopplungen „Ground“, „DC“ und „AC“ des Y-Kanals eines Oszilloskops.
- 13) Welche Aufgabe hat der Eingangsspannungsteiler des Y-Kanals eines Oszilloskops?
- 14) Was bedeutet beim Oszilloskop der Y-t-Betrieb?
- 15) Zu was dient bei einem Oszilloskop die Triggerung?
- 16) Erläutern Sie die Betriebsarten „CHOPPED“ und „ALTERNATE“ bei einem Zweikanaloszilloskop.
- 17) Wann wählt man im Allgemeinen die Betriebsart „CHOPPED“ bei einem Zweikanaloszilloskop?
- 18) Wann wählt man im Allgemeinen die Betriebsart „ALTERNATE“ bei einem Zweikanaloszilloskop?
- 19) Was bedeutet beim Oszilloskop der X-Y-Betrieb?
- 20) Was kann ein Oszilloskop prinzipiell nur messen?

5.2 Messung elektrischer Größen

5.2.1 Die Strommessung

Die Strommessung in einem Zweig eines Netzwerks soll anhand eines einfachen Beispiels nach Bild 5.2.1-1 erläutert werden.

Soll der Wert eines Stroms I gemessen werden, so erfolgt dies in der Regel mit Hilfe eines Strommessgerätes, eines so genannten Amperemeters. Hierzu muss der Strom durch dieses Amperemeter fließen. Das setzt voraus, dass das Amperemeter in den Stromkreis eingebracht wird, wozu der Stromkreis aufgetrennt werden muss. An welcher Stelle eines Stromkreises oder eines Zweiges das geschieht, spielt dabei keine Rolle. Im Bild 5.2.1-2 wurde das Amperemeter in den Stromkreis eingefügt.

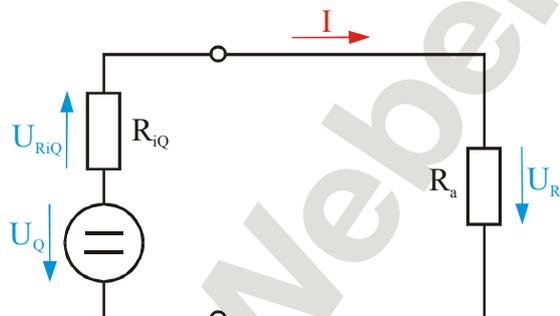


Bild 5.2.1-1: Einfacher Stromkreis

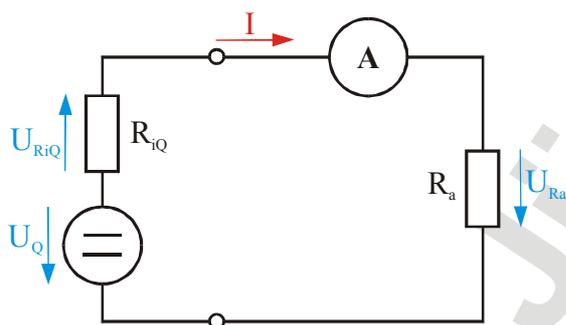


Bild 5.2.1-2: Einfacher Stromkreis mit Amperemeter

Durch das Einbringen des Messgerätes wird allerdings ein zusätzlicher Widerstand nämlich der Innenwiderstand des Messgerätes R_{iA} in den Stromkreis eingebracht und dadurch der Wert des zu messenden Stroms verändert. Damit diese Änderung möglichst klein und damit vernachlässigbar bleibt, muss der Innenwiderstand eines Amperemeters möglichst klein sein. Wie groß der Einfluss des Innenwiderstands des Messinstrumentes auf die Messung ist, hängt von dem Innenwiderstand R_{iA} des Amperemeters, aber auch von den Werten der Widerstände R_{iQ} und R_a ab, wie die Gleichungen 5.2.1-1 und 5.2.1-2 zeigen:

$$I = \frac{U_Q}{R_{iQ} + R_a} \quad \text{ohne Messinstrument} \quad 5.2.1-1$$

$$I = \frac{U_Q}{R_{iQ} + R_a + R_{iA}} < \frac{U_Q}{R_{iQ} + R_a} \quad \text{mit Messinstrument} \quad 5.2.1-2$$

Das ideale Amperemeter hat den Innenwiderstand $R_{iA} = 0$.

5.2.1.1 Gleich- und Wechselstrommessung mit dem Drehspulinstrument

Bei der Gleichstrommessung mit dem Drehspulinstrument muss auf die richtige Polung der Anschlüsse geachtet werden. Jede Strommessung mit dem Drehspulinstrument beginnt man zum Schutz des Messwerks im größten Strommessbereich und schaltet dann gegebenenfalls

in kleinere Messbereiche zurück, um den größtmöglichen Zeigerausschlag auf der Skala zu erhalten. Die zum Messgerät führenden Leitungen sind an dessen Klemmen so anzuschließen, dass ein positiver Zeigerausschlag entsteht. Andernfalls könnten Schäden am Messwerk entstehen. Ist die Stromrichtung vor der Messung nicht eindeutig bekannt, so muss die Messung mit dem größten Messbereich begonnen und dann eventuell ebenfalls auf kleine Messbereiche zurückgeschaltet werden. Bemerkt man einen leichten Ausschlag des Zeigers in die negative Richtung, muss eine Umpolung erfolgen.

Der Innenwiderstand des Drehspulinstruments nimmt für kleine Messbereiche bei der Gleichstrommessung zu. Mit dem kleinsten Messbereich, der im μA -Bereich liegt, ist somit der größte Innenwiderstand verbunden. Dieser Innenwiderstand entspricht dem Leitungswiderstand der Spule des Messwerks des Drehspulinstruments.

Sofern das Drehspulmessinstrument über eine Gleichrichtung verfügt, lässt sich damit der Betrag des Effektivwertes eines sinusförmigen Wechselstroms messen. Auf eine Polung des Messinstruments ist dann nicht zu achten. Zum Schutz des Messwerks ist die Strommessung wiederum im größten Strombereich zu beginnen.

Durch die Gleichrichtung, die einen zusätzlichen Spannungsabfall an den Klemmen des Messinstruments zur Folge hat, ist die Messung kleiner Wechselströme stark eingeschränkt.

5.2.1.2 Gleich- und Wechselstrommessung mit dem Dreheiseninstrument

Beim Einsatz eines Dreheiseninstruments spielt die Polung der Anschlüsse keine Rolle. Jede Strommessung mit dem Dreheiseninstrument beginnt man im größten Strommessbereich und schaltet dann gegebenenfalls in kleinere Messbereiche zurück, um den größtmöglichen Zeigerausschlag auf der Skala zu erhalten. Eine Aussage über die Stromrichtung lässt sich beim Dreheiseninstrument wegen des immer positiven Zeigerausschlags, gleich welche Polung der Anschlüsse man vornimmt, nicht treffen.

Der Innenwiderstand des Dreheiseninstruments nimmt für kleine Messbereiche bei der Strommessung zu. Mit dem kleinsten Messbereich, der im mA-Bereich liegt, ist somit der größte Innenwiderstand verbunden. Dieser Innenwiderstand entspricht dem Leitungswiderstand der Spule des Messwerks und ist verglichen mit dem Innenwiderstand des Drehspulinstruments wesentlich größer.

Bei der Wechselstrommessung erhält man unabhängig von der Kurvenform immer den Betrag des Effektivwertes eines Wechselstroms. Zum Schutz des Messwerks ist die Strommessung wiederum im größten Strombereich zu beginnen.

5.2.1.3 Gleich- und Wechselstrommessung mit dem Digitalmultimeter

Beim Einsatz eines Digitalmultimeters spielt die Polung der Anschlüsse keine Rolle. Über das Vorzeichen in der numerischen Anzeige erhält man eine Aussage über die vorliegende Stromrichtung bei Gleichstrom. In vielen Fällen stellt sich der optimale Messbereich automatisch ein. Andernfalls lässt sich der optimale Bereich manuell wählen. Dabei nimmt das Instrument bei falscher Wahl auf Grund elektronischer Sicherungsvorrichtungen keinen Schaden.

Der Innenwiderstand des Digitalmultimeters bei der Strommessung ist in der Regel vernachlässigbar. Trotzdem sollte man sich vor der Messung anhand des Datenblattes davon überzeugen.

Bei der Wechselstrommessung wird der Betrag des Effektivwertes des Wechselstroms angezeigt.

5.2.1.4 Gleich- und Wechselstrommessung mit dem Oszilloskop

Da die Eingangsschaltungen eines Oszilloskops nur Spannungsmessungen zulassen, muss zur Gleich- und Wechselstrommessung mit dem Oszilloskop in den Zweig des Netzwerks ein bekannter Widerstand vorhanden sein oder ein zusätzlicher Messwiderstand R_{mess} eingefügt werden, über dessen Spannungsabfall der Strom ermittelt werden kann. Während die Zeigerinstrumente und das Digitalmultimeter an jeden Punkt des Netzwerks eingefügt werden können, legt das Oszilloskop in das Netzwerk einen Massepunkt fest. Unter dem Massepunkt versteht man das Bezugspotential $\varphi = 0$. Probleme können entstehen, wenn ein weiteres Instrument oder Bauelement ebenfalls einen Massepunkt festlegt. Bild 5.2.1.4-1 zeigt diese Problematik. Hier wird durch einen Massekonflikt der Widerstand R_a überbrückt und damit das Netzwerk wesentlich verändert. Dieser Konflikt ist im Bild 5.2.1.4-2 durch eine andere Lage des Messwiderstands behoben.

Gleichstrommessungen mit dem Oszilloskop sind wegen der im Vergleich zu Zeigerinstrumenten und Multimetern geringeren Ablesegenauigkeit unüblich. Dies gilt prinzipiell auch bei Wechselstrommessungen mit dem Oszilloskop, solange man nur den Betrag des Stroms ermitteln möchte. Mit dem Oszilloskop lässt sich der Scheitelwert der Spannung am Messwiderstand R_{mess} und damit der Scheitelwert des Stroms ermitteln. Bei der Anwendung des Oszilloskops steht gegenüber der Messung mit Zeigerinstrumenten und Digitalmultimetern in den überwiegenden Fällen die Visualisierung der Zeitfunktion auf dem Bildschirm im Vordergrund.

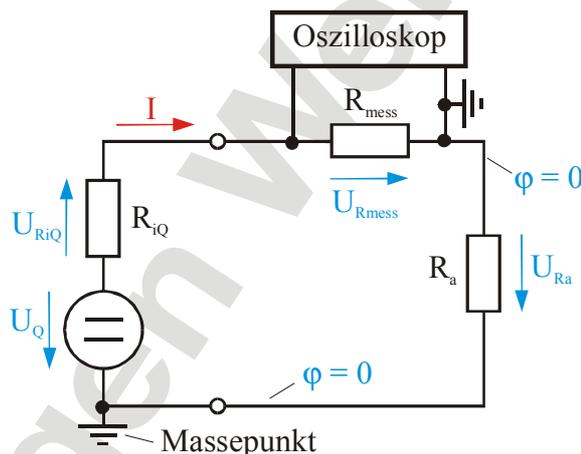


Bild 5.2.1.4-1: Massekonflikt

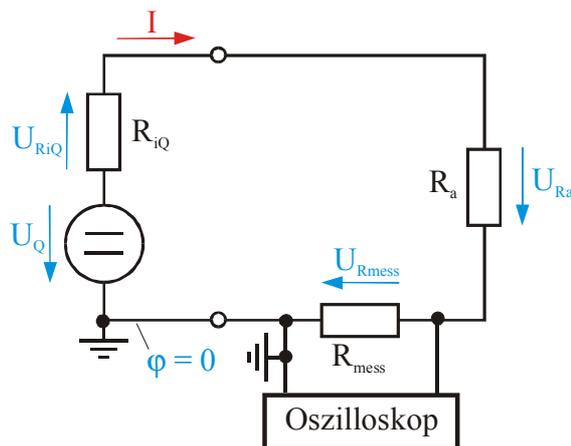


Bild 5.2.1.4-2: Messanordnung ohne Massekonflikt

5.2.2 Die Spannungsmessung

Die Spannungsmessung erfolgt immer unmittelbar parallel zu dem Bauelement, dessen Spannung gemessen werden soll. Bild 5.2.2-1 zeigt wieder das Beispielnetzwerk des vorangegangenen Abschnitts, in dem die Spannung U_{Ra} mit einem Voltmeter gemessen wird. Das Voltmeter besitzt einen Innenwiderstand R_{iV} , der sich jetzt parallel zu dem Widerstand schaltet, dessen Spannung gemessen werden soll. Dadurch verändert sich das Netzwerk und die zu messende Spannung. Damit die Änderung möglichst klein und damit vernachlässigbar bleibt, muss der Innenwiderstand eines Voltmeters möglichst groß sein. Wie groß der Einfluss des Innenwiderstands des Messinstruments auf die Messung ist, hängt von dem Innenwiderstand R_{iV} des Voltmeters, aber auch von den Werten der Widerstände R_{iQ} und R_a ab, wie die Gleichungen 5.2.2-1 und 5.2.2-2 zeigen:

$$U_{Ra} = \frac{U_Q \cdot R_a}{R_{iQ} + R_a} \quad \text{ohne Messinstrument} \quad 5.2.2-1$$

$$U_{Ra} = \frac{U_Q \cdot R_a}{R_{iQ} \left(\frac{R_a}{R_{iV}} + 1 \right) + R_a} < \frac{U_Q \cdot R_a}{R_{iQ} + R_a} \quad \text{mit Messinstrument} \quad 5.2.2-2$$

Das ideale Voltmeter hat den Innenwiderstand $R_{iV} = \infty$.

5.2.2.1 Gleich- und Wechselspannungsmessung mit dem Drehspulinstrument

Bei der Gleichspannungsmessung mit dem Drehspulinstrument muss auf die richtige Polung der Anschlüsse geachtet werden. Jede Spannungsmessung mit dem Drehspulinstrument beginnt man zum Schutz des Messwerks im größten Spannungsmessbereich und schaltet dann gegebenenfalls in kleinere Messbereiche zurück, um den größtmöglichen Zeigerausschlag auf der Skala zu erhalten. Die zum Messgerät führenden Leitungen sind an dessen Klemmen so anzuschließen, dass ein positiver Zeigerausschlag entsteht. Andernfalls könnten Schäden am Messwerk entstehen. Ist der Potenzialverlauf vor der Messung nicht eindeutig bekannt, so muss die Messung mit dem größten Messbereich begonnen und dann gegebenenfalls auf kleinere Messbereiche zurückgeschaltet werden. Bemerkt man einen leichten Ausschlag des Zeigers in die negative Richtung, muss eine Umpolung erfolgen.

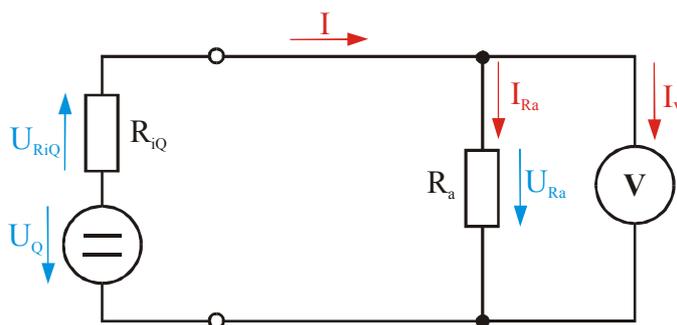


Bild 5.2.2-1: Spannungsmessung

Der Innenwiderstand des Drehspulinstruments bei der Gleichspannungsmessung nimmt für kleine Messbereiche ab. Mit dem kleinsten Messbereich, der im mV-Bereich liegt, ist somit der kleinste Innenwiderstand verbunden. Dieser Innenwiderstand entspricht dem Leitungswiderstand der Spule des Messwerks des Drehspulinstruments.

Sofern das Drehspulmessinstrument über eine Gleichrichtung verfügt, lässt sich damit der Betrag des Effektivwertes einer sinusförmigen Wechselspannung messen. Auf eine Polung des Messinstruments ist nicht zu achten. Zum Schutz des Messwerks ist die Spannungsmessung wiederum im größten Spannungsbereich zu beginnen.

Durch die Gleichrichtung, die einen zusätzlichen Spannungsabfall an den Klemmen des Messinstruments zur Folge hat, ist die Messung kleiner Wechselspannungen stark eingeschränkt.

5.2.2.2 Gleich- und Wechselspannungsmessung mit dem Dreheiseninstrument

Beim Einsatz eines Dreheiseninstruments spielt die Polung der Anschlüsse keine Rolle. Jede Spannungsmessung mit dem Dreheiseninstrument beginnt man im größten Spannungsbereich und schaltet dann gegebenenfalls in kleinere Messbereiche zurück, um den größtmöglichen Zeigerausschlag auf der Skala zu erhalten. Eine Aussage über den Potenzialverlauf lässt sich beim Dreheiseninstrument wegen des immer positiven Zeigerausschlags, gleich welche Polung der Anschlüsse man vornimmt, nicht treffen.

Der Innenwiderstand des Dreheiseninstruments bei der Gleichspannungsmessung nimmt für größere Messbereiche zu. Mit dem kleinsten Messbereich, der im V-Bereich liegt, ist somit der kleinste Innenwiderstand verbunden. Dieser Innenwiderstand entspricht dem Leitungswiderstand der Spule des Messwerks und ist verglichen mit dem Innenwiderstand des Drehspulinstruments wesentlich größer.

Bei der Wechselspannungsmessung erhält man den Betrag des Effektivwertes einer Wechselspannung. Zum Schutz des Messwerks ist die Spannungsmessung wiederum im größten Spannungsbereich zu beginnen.

5.2.2.3 Gleich- und Wechselspannungsmessung mit dem Digitalmultimeter

Beim Einsatz eines Digitalmultimeters spielt die Polung der Anschlüsse keine Rolle. Über das Vorzeichen in der numerischen Anzeige erhält man eine Aussage über den vorliegenden Potenzialverlauf. In vielen Fällen stellt sich der optimale Messbereich automatisch ein. Andernfalls lässt sich der optimale Bereich manuell wählen. Dabei nimmt das Instrument bei falscher Wahl auf Grund elektronischer Sicherungsvorrichtungen keinen Schaden.

Der Innenwiderstand des Digitalmultimeters bei der Spannungsmessung ist in der Regel sehr groß und liegt im Bereich von $10\text{M}\Omega$.

Bei der Wechselspannungsmessung erhält man den Betrag des Effektivwertes der Wechselspannung.

5.2.2.4 Gleich- und Wechselspannungsmessung mit dem Oszilloskop

Die Spannungsmessung mit dem Oszilloskop unterscheidet sich im Prinzip nicht von der Strommessung, da die Strommessung bereits über die Spannungsmessung definiert wurde.

Die Spannungsmessung an einem Bauelement an einer beliebigen Stelle innerhalb eines Netzwerks kann auch wie bei der Strommessung zu unlösbaren Konflikten mit dem vom Oszilloskop festgelegten Massepunkt führen.

5.2.3 Indirekte Strommessung

Besitzt ein Messinstrument für die Strommessung einen zu hohen Innenwiderstand, so lässt sich ein zu messender Zweigstrom in einem Netzwerk durch den Spannungsabfall an einem passiven Bauelement ermitteln. Dabei muss vorausgesetzt werden, dass zum einen der Innenwiderstand des Messinstruments für die Spannungsmessung ausreichend groß ist, so dass auf diese Art der Messfehler verringert wird, und zum anderen der Wert des passiven Bauelements genaustens bekannt ist. Dann lässt sich über das Ohmsche Gesetz aus der Spannung der Strom berechnen.

5.2.4 Gleichzeitiges Messen von Strom und Spannung

Möchte man den Strom durch ein Bauelement und die an dem Bauelement abfallende Spannung gleichzeitig messen, so ergeben sich für die Messanordnung zwei Möglichkeiten. Beide

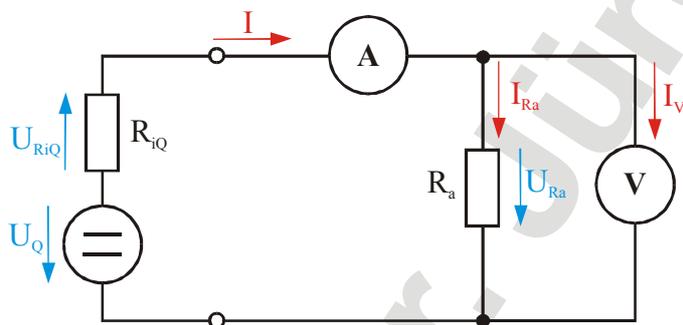


Bild 5.2.4-1: Stromfehlerschaltung

zum Widerstand R_a geschaltete Voltmeter mit misst. Man nennt diese Messanordnung „spannungsrichtige Messung“ oder „Stromfehlerschaltung“.

Die zweite Messanordnung zeigt das Bild 5.2.4-2. Hier liegt der zusätzliche Messfehler darin, dass mit dem Amperemeter zwar der Strom I_{Ra} direkt gemessen wird, das Voltmeter aber den Spannungsabfall U_{Amp} am Amperemeter mit misst. Man nennt diese Messanordnung „stromrichtige Messung“ oder „Spannungsfehlerschaltung“.

Messanordnungen sind zusätzlich zu den bereits für die Strom- und Spannungsmessung beschriebenen Fehlern mit einem weiteren Messfehler auf Grund des gleichzeitigen Einbringens der Messinstrumente behaftet.

Die erste Messanordnung zeigt das Bild 5.2.4-1. Hier liegt der zusätzliche Messfehler darin, dass mit dem Voltmeter zwar die Spannung U_{Ra} direkt gemessen wird, das Amperemeter aber den Strom I_V durch das parallel

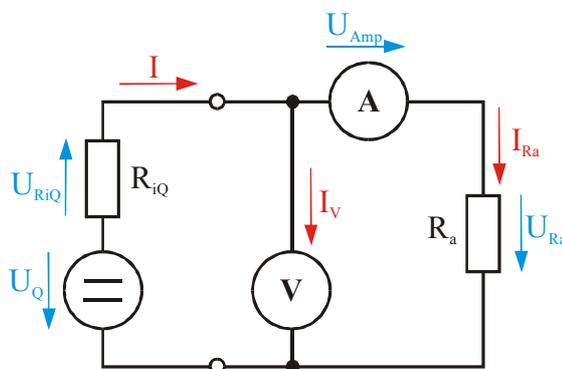


Bild 5.2.4-2: Spannungsfehlerschaltung

Wann welche Messanordnung zur Minimierung des Messfehlers vorzuziehen ist, hängt von den Quotienten R_{iV}/R_a und R_a/R_{iA} ab.

Die Stromfehlerschaltung ist überschlägig im Fall

$$\frac{R_{iV}}{R_a} > \frac{R_a}{R_{iA}} \quad 5.2.4-1$$

vorzuziehen.

Die Spannungsfehlerschaltung ist überschlägig im Fall

$$\frac{R_{iV}}{R_a} < \frac{R_a}{R_{iA}} \quad 5.2.4-2$$

vorzuziehen.

5.2.5 Die Frequenzmessung

Einige Digitalmultimeter können die Frequenz einer periodischen Zeitfunktion direkt messen. Dazu werden sie parallel zu einem beliebigen Bauelement eines Netzwerks angeschlossen.

Die Frequenzmessung ist auch mit Hilfe des Oszilloskops möglich. Hierzu wird das Oszilloskop ebenfalls parallel zu einem Bauelement eines Netzwerks geschaltet. Dabei ist wieder auf die Vermeidung eines Massekonflikts zu achten. Nach der Einstellung der Nulllinie am Bildschirm wird über die Zeitablenkung und die interne Triggerung eine vollständige Periode der periodischen Zeitfunktion wie im Bild 5.2.5-1 am Bildschirm dargestellt. Über die Nulldurchgänge ermittelt man dann die Periodendauer T , die dann als Kehrwert die Frequenz f liefert.

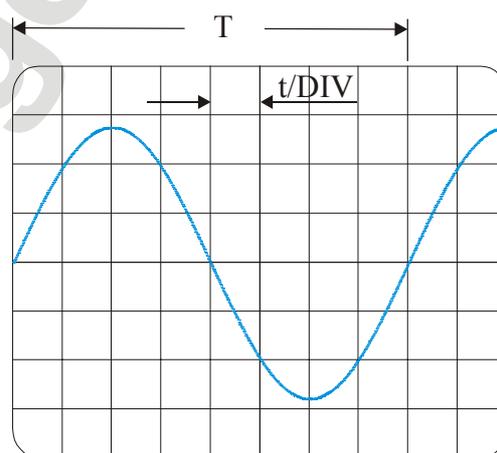


Bild 5.2.5-1: Frequenzmessung am Oszilloskop

5.2.6 Die Phasenmessung

Mit Hilfe des Oszilloskops lässt sich der Phasenwinkel zwischen zwei Zeitfunktionen gleicher Frequenz messen. Meist wird die Phase zwischen einem Bezugssignal, wie zum Beispiel die Phase des Generators innerhalb eines Netzwerks, und einer beliebigen Spannung an einem Bauelement des Netzwerks gemessen. Auch hier ist wieder auf die Vermeidung eines Massekonflikts zu achten. Das Oszilloskop muss dazu mindestens zwei Y-Eingänge besitzen.

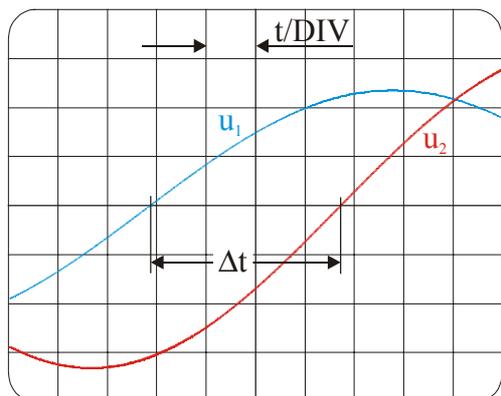


Bild 5.2.6-1: Phasenmessung am Oszilloskop

Nach der Einstellung der Nulllinie beider Y-Kanäle am Bildschirm, wobei unbedingt auf die gleiche Nulllage beider Kanäle zu achten ist, werden über die Zeitablenkung und die interne Triggerung die Nulldurchgänge der periodischen Zeitfunktionen wie im Bild 5.2.6-1 am Bildschirm dargestellt. Über die Zeitdifferenz Δt und bei Kenntnis der Periodendauer T lässt sich nun der Phasenwinkel über die Beziehung

$$\varphi = \frac{360^\circ}{T} \cdot \Delta t \quad 5.2.6-1$$

berechnen.

Im Bild 5.2.6-1 eilt die Spannung u_1 der Spannung u_2 um den Winkel φ voraus. Stellt die Spannung u_1 das Bezugssignal dar, so hat die gemessene Phase ein negatives Vorzeichen. Stellt die Spannung u_2 das Bezugssignal dar, so hat die gemessene Phase ein positives Vorzeichen.

5.2.7 Die Widerstandsmessung

5.2.7.1 Die einfache Widerstandsmessung

Viele Digitalmultimeter verfügen über die Möglichkeit einer direkten Widerstandsmessung, indem man den zu messenden Widerstand R an die dafür vorgesehenen Anschlüsse legt.

Benutzt man zur Bestimmung des Widerstands R Zeigerinstrumente, so benötigt man die Strom- und Spannungsmessung am Widerstand. Dies kann mit den bereits im Abschnitt 5.2.4 beschriebenen Alternativen geschehen.

Benutzt man die Stromfehlerschaltung nach Bild 5.2.7.1-1, so errechnet sich der Widerstand aus den Messergebnissen der Instrumente nach

$$R = \frac{U}{I - \frac{U}{R_{iA}}} \quad 5.2.7.1-1$$

Benutzt man die Spannungsfehlerschaltung nach Bild 5.2.7.1-2, so errechnet

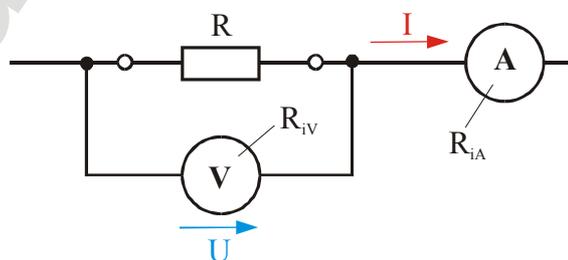


Bild 5.2.7.1-1: Widerstandsmessung mit der Stromfehlerschaltung

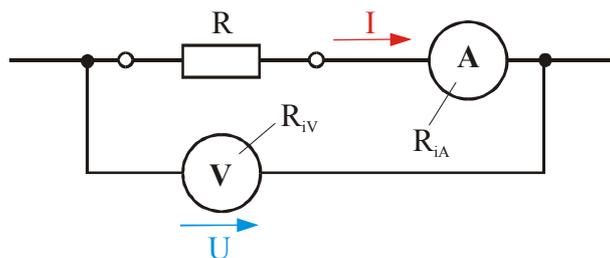


Bild 5.2.7.1-2: Widerstandsmessung mit der Spannungsfehlerschaltung

sich der Widerstand aus den Messergebnissen der Instrumente nach

$$R = \frac{U}{I} - R_{iA} \quad 5.2.7.1-2$$

5.2.7.2 Die Widerstandsmessung mit der Wheatstonschen Brücke

Die Wheatstonsche Brücke arbeitet nach dem Prinzip eines Nullindikators. Bild 5.2.7.2-1 zeigt die Wheatstonsche Brücke, bei der das Widerstandsverhältnis variiert wird, bis der Strom durch das Amperemeter auf Null abgeglichen ist. Damit hat der Innenwiderstand R_{iA} des Amperemeters bei der Berechnung des Widerstandswerts R keinen Einfluss.

Im abgeglichenen Zustand $I_A = 0$ folgt:

$$I_R = I_{R3} \quad \text{und} \quad I_{R1} = I_{R2} \quad 5.2.7.2-1$$

Wegen $U_A = 0$ gilt ferner:

$$U_R = U_{R1} \quad \text{und} \quad U_{R2} = U_{R3} \quad 5.2.7.2-2$$

Nach elementarer Umformung ergibt sich das Widerstandsverhältnis

$$\frac{R}{R_3} = \frac{R_1}{R_2},$$

woraus sich der Widerstand R durch

$$R = \frac{R_1 \cdot R_3}{R_2} \quad 5.2.7.2-4$$

berechnet. Für den Schleiferwiderstand und den Widerstand R_3 werden Präzisionswiderstände benötigt, damit der Messfehler minimiert wird.

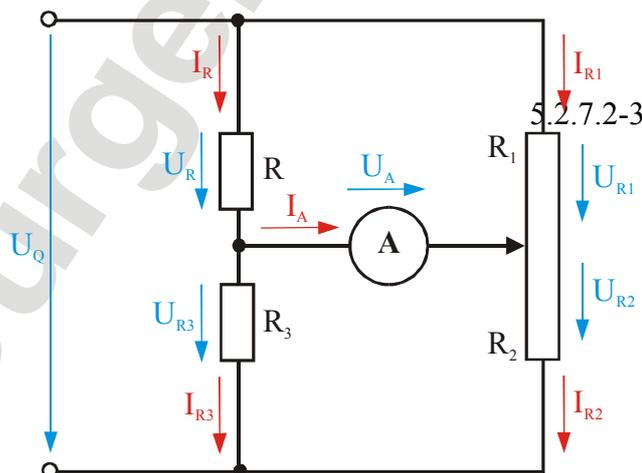


Bild 5.2.7.2-1: Widerstandsmessung mit der Wheatstonschen Brücke

5.2.8 Der Messfehler

Messungen sind immer mit einer Ungenauigkeit behaftet. Sie können zum einen durch Ablesefehler bei Zeigerinstrumenten und dem Oszilloskop oder durch Rundungsfehler beim Digitalmultimeter und zum anderen durch die inhärenten Fehler der Messanordnungen entstehen.

Definiert man den Istwert des Messergebnisses mit X_i und den wahren Wert mit X_w , so lässt sich der absolute Fehler F_{abs} einer Messung wie folgt definieren:

$$F_{abs} = X_i - X_w \quad 5.2.8-1$$

Der relative Fehler F_{rel} einer Messung definiert sich über die Beziehung

$$F_{rel} = \frac{X_i - X_w}{X_w} \quad 5.2.8-2$$

Beide Definitionen der Fehler setzen voraus, dass der wahre Wert X_w bei der Fehlerrechnung zur Verfügung steht.

5.2.9 Die Aufnahme von Kennlinien

Möchte man die Strom-Spannungs-Charakteristik eines passiven Zweipols aufnehmen, so benötigt man ein Oszilloskop, das in den X-Y-Betrieb geschaltet ist. Bild 5.2.9-1 zeigt hierfür die prinzipielle Messanordnung. In dieser Messanordnung wird eine Spannungsquelle verwendet, die eine beliebige periodische Zeitfunktion als Spannung $u_Q(t)$ generiert. Als Zeitfunktionen eignen sich sinusförmige oder dreieckförmige Spannungen, während rechteckförmige Spannungen ungeeignet sind. Bei rechteckförmigen Spannungen würde man nur die Endpunkte der Kennlinien erhalten.

Um die Kennlinie in einem gewünschten Bereich auf dem Bildschirm des Oszilloskops darstellen zu können, muss sich die Amplitude der Spannungsquelle variieren lassen. Darüber hinaus muss eine ausreichend hohe Frequenz verwendet werden, damit auf dem Bildschirm die Kennlinie als stehendes Bild erscheint. Um einen Massekonflikt zu vermeiden, darf die Spannungsquelle auch keinen Massepunkt besitzen. Andernfalls muss die Spannungsquelle über einen Übertrager an die Messanordnung geschaltet werden.

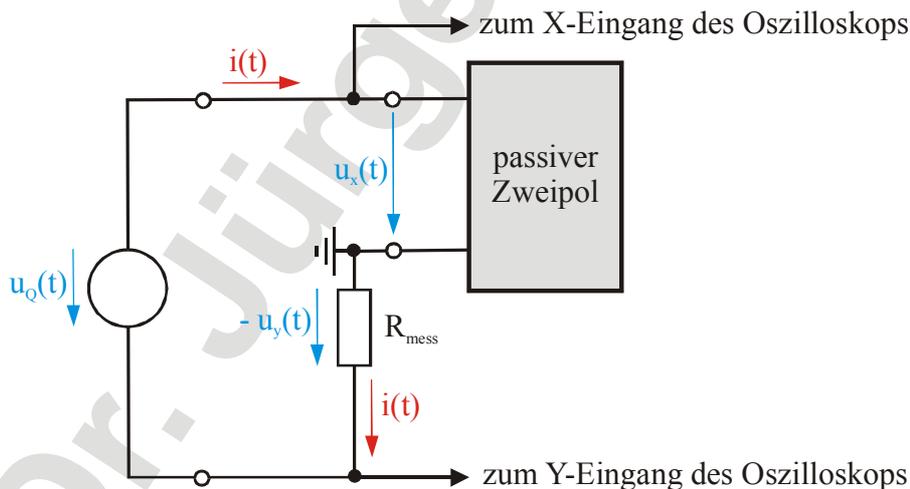


Bild 5.2.9-1: Messanordnung zur Aufnahme von Kennlinien

Parallel zu den Klemmen des Zweipols wird die Spannung $u_x(t)$ für die X-Auslenkung der Kennlinie gemessen, die damit die Spannungsachse der Strom-Spannungs-Charakteristik beschreibt. Die Stromachse übernimmt die dem Strom proportionale Spannung $u_y(t)$, die über einem Messwiderstand abfällt. Dabei ergibt sich auf Grund der Messanordnung das Problem, dass die Spannung am Y-Eingang des Oszilloskops invertiert werden muss. Dies ist beim Oszilloskop über eine einfache Schalterumstellung möglich.

5.2.10 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Erläutern Sie das Prinzip der Strommessung.

- 2) Welcher Fehler muss bei einer Strommessung berücksichtigt werden?
- 3) Welchen Innenwiderstand R_{iA} hat das ideale Amperemeter?
- 4) Erläutern Sie die Vorgehensweise bei einer Gleichstrommessung mit einem Drehspulinstrument.
- 5) Erläutern Sie die Vorgehensweise bei einer Gleichstrommessung mit dem Oszilloskop.
- 6) Was bedeutet bei Messungen mit dem Oszilloskop der Begriff „Massekonflikt“?
- 7) Erläutern Sie das Prinzip der Spannungsmessung.
- 8) Welcher Fehler muss bei einer Spannungsmessung berücksichtigt werden?
- 9) Welchen Innenwiderstand R_{iV} hat das ideale Voltmeter?
- 10) Erläutern Sie die Vorgehensweise bei einer Gleichspannungsmessung mit einem Drehspulinstrument.
- 11) Was versteht man unter einer „indirekten Strommessung“?
- 12) Welche Messanordnungen gibt es für die gleichzeitige Messung von Strom und Spannung?
- 13) Erläutern Sie die Frequenzmessung mit dem Oszilloskop.
- 14) Erläutern Sie die Phasenmessung mit dem Oszilloskop.
- 15) Erläutern Sie das Prinzip der einfachen Widerstandsmessung.
- 16) Erläutern Sie das Prinzip der Widerstandsmessung mit der Wheatstonschen Brücke.
- 17) Erläutern Sie das Prinzip der Kennlinienaufnahme mit dem Oszilloskop.

Aufgabe 5.2.10-1:

Gegen ist der nebenstehende Stromkreis mit den folgenden Werten:

$$U_Q = 11\text{V}$$

$$R_{iQ} = 10\Omega$$

$$R_a = 100\Omega$$

In dem Stromkreis sollen der Strom I und die Spannung U_{Ra} gemessen werden. Für die Messung stehen ein Amperemeter mit den Werten

$$R_{iA} = 10\Omega \quad \text{im Messbereich bis } 10\text{mA}$$

$$R_{iA} = 1\Omega \quad \text{im Messbereich bis } 100\text{mA}$$

$$R_{iA} = 0,1\Omega \quad \text{im Messbereich bis } 1\text{A}$$

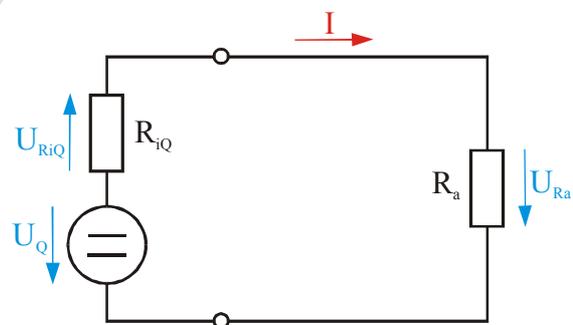
und ein Voltmeter mit den Werten

$$R_{iV} = 10\text{k}\Omega \quad \text{im Messbereich bis } 100\text{V}$$

$$R_{iV} = 1\text{k}\Omega \quad \text{im Messbereich bis } 10\text{V}$$

$$R_{iV} = 0,1\text{k}\Omega \quad \text{im Messbereich bis } 1\text{V}$$

zur Verfügung. Berechnen Sie für die Messungen



- Strommessung
- Spannungsmessung
- indirekte Strommessung
- gleichzeitiges Messen von Strom und Spannung nach der Stromfehlerschaltung
- gleichzeitiges Messen von Strom und Spannung nach der Spannungsfehlerschaltung

den absoluten Fehler F_{abs} und den relativen Fehler F_{rel} . Die Messinstrumente sollen jeweils den größten Zeigerausschlag bei der jeweiligen Messung liefern.

- (Lösung:
- $F_{\text{abs}} = -900\mu\text{A}; F_{\text{rel}} = -9,01 \cdot 10^{-3}$
 - $F_{\text{abs}} = -90,1\text{mV}; F_{\text{rel}} = -9,01 \cdot 10^{-3}$
 - $F_{\text{abs}} = -900\mu\text{A}; F_{\text{rel}} = -9,01 \cdot 10^{-3}$
 - $F_{I_{\text{abs}}} = 8,9\text{mA}; F_{I_{\text{rel}}} = 89 \cdot 10^{-3}; F_{U_{\text{abs}}} = -0,1\text{V}; F_{U_{\text{rel}}} = -1 \cdot 10^{-2}$
 - $F_{I_{\text{abs}}} = -1,8\text{mA}; F_{I_{\text{rel}}} = -18 \cdot 10^{-3}; F_{U_{\text{abs}}} = -0,08\text{V}; F_{U_{\text{rel}}} = -8 \cdot 10^{-3}$)

Aufgabe 5.2.10-2:

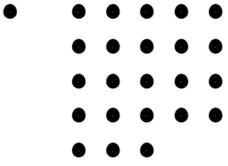
Ein Drehspulmesswert hat den Widerstand 1Ω und bei einem Strom von $300\mu\text{A}$ Vollausschlag.

- Welche Beschaltung mit einem zusätzlichen Widerstand R_V muss vorgenommen werden, um einen Messbereich von 10V zu erhalten?
- Welche Beschaltung mit einem zusätzlichen Widerstand R_A muss vorgenommen werden, um einen Messbereich von 100mA zu erhalten?

- (Lösung: $R_V = 33332,33\Omega; R_A = 3\text{m}\Omega$)

5.3 Literaturhinweise

- 1) Moeller/Frohne Grundlagen der Elektrotechnik
- 2) Weißgerber Elektrotechnik für Ingenieure I
- 3) Pregla Grundlagen der Elektrotechnik I
- 4) Zastrow Elektrotechnik
- 5) Drachsel Grundlagen der elektrischen Messtechnik
- 6) Frohne Grundlagen der elektrischen Messtechnik
- 7) Kories Taschenbuch der Elektrotechnik



Fachhochschule Köln
University of Applied Sciences Cologne
Campus Gummersbach

Prof. Dr.-Ing. Jürgen Weber

Dipl.-Ing. Franz Josef Klein

Andreas Wagen

6 Dreiphasenwechselstrom

Inhaltsverzeichnis

<i>0</i>	<i>Vorbemerkung</i>	
<i>1</i>	<i>Einleitung</i>	
<i>2</i>	<i>Der elektrische Strom</i>	
<i>3</i>	<i>Gleichstromschaltungen mit linearen Bauelementen</i>	
<i>4</i>	<i>Der Wechselstromkreis</i>	
<i>5</i>	<i>Messtechnik</i>	
6	DREIPHASENWECHSELSTROM.....	3
6.1	Mehrphasensysteme	3
6.1.1	Erzeugung einer Wechselspannung.....	3
6.1.2	Offene Mehrphasensysteme	4
6.1.3	Verkettete Mehrphasensysteme.....	5
6.1.4	Bezeichnungen.....	5
6.1.5	Symmetrische Mehrphasensysteme.....	6
6.1.3	Fragen- und Aufgabensammlung	7
6.2	Das Dreiphasensystem.....	8
6.2.1	Das symmetrische Dreiphasensystem	8
6.2.2	Das unsymmetrisch belastete Dreiphasensystem	12
6.2.3	Fragen- und Aufgabensammlung	16
6.3	Literaturhinweise.....	18
<i>7</i>	<i>Der Transformator</i>	
<i>Anhang</i>		
<i>Anlage I</i>	<i>Praktika</i>	

6 DREIPHASENWECHSELSTROM

6.1 Mehrphasensysteme

6.1.1 Erzeugung einer Wechselspannung

Befindet sich eine Leiterschleife, die die Fläche A nach Bild 6.1.1-1 aufspannt, im Feld der zeitlich veränderlichen magnetischen Induktion $\mathbf{B}(t)$, so wird die Fläche A vom zeitlich veränderlichen magnetischen Fluss

$$\psi_m(t) = \iint_A \mathbf{B}(t) d\mathbf{A} \quad 6.1.1-1$$

durchsetzt. Dieser zeitlich veränderliche Fluss induziert in der Leiterschleife eine elektrische Spannung

$$u(t) = -\frac{d\psi_m(t)}{dt} \quad 6.1.1-2$$

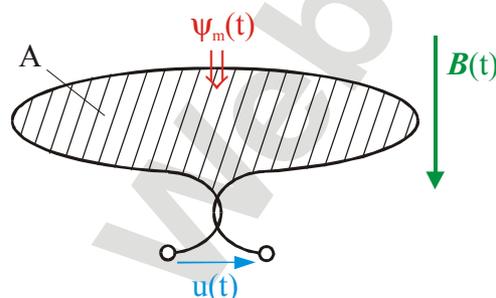


Bild 6.1.1-1: Leiterschleife im Feld $\mathbf{B}(t)$

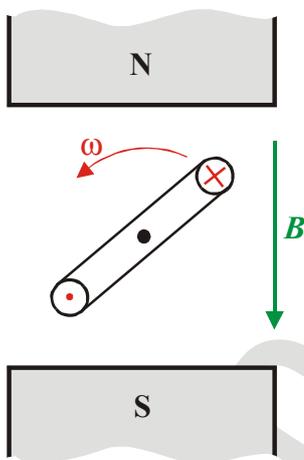


Bild 6.1.1-2: Erzeugung einer Sinusspannung

Leiterschleife nach Bild 6.1.1-2 in Bild 6.1.1-3 dargestellt.

Schließt man an die rotierende Leiterschleife einen Ohmschen Widerstand an, so fließt ein elektrischer Strom, der im Ohmschen Widerstand die zeitliche Wirkleistung

Die Gleichung 6.1.1-2 setzt allein die zeitliche Änderung des magnetischen Flusses durch die Fläche A voraus. Diese Änderung kann auch dadurch erreicht werden, dass sich die Leiterschleife im Feld einer zeitlich konstanten magnetischen Induktion $\mathbf{B} \neq \mathbf{B}(t)$ bewegt.

Um eine sinusförmige Spannung zu erzeugen, wird, wie im Bild 6.1.1-2 dargestellt, eine Leiterschleife im Feld der permanenten magnetischen Induktion \mathbf{B} gedreht. Die induzierte Spannung

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \quad 6.1.1-3$$

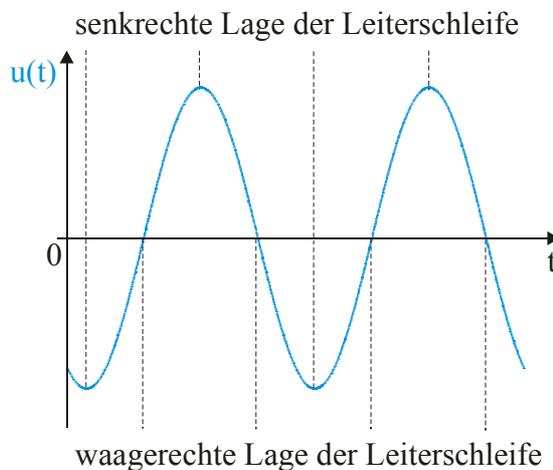


Bild 6.1.1-3: Induzierte Spannung

$$p(t) = \frac{\hat{u} \cdot \hat{i}}{2} [1 - \cos(2\omega t + 2\varphi_u)] \quad 6.1.1-4$$

umsetzt. Der zeitliche Leistungsverlauf nach Gleichung 6.1.1-4 hat seine Maxima jeweils dann, wenn die rotierende Leiterschleife die senkrechte Lage durchläuft. Für einen Spannungsgenerator bedeutet dies eine nicht-konstante mechanische Belastung beim Antrieb der Leiterschleife.

Verbindet man mechanisch äquidistant mehrere elektrisch nicht verbundene Leiterschleifen, wie dies im Bild 6.1.1-4 als Beispiel für 4 Leiterschleifen dargestellt wurde, und belastet jeweils jede Leiterschleife mit dem gleichen Ohmschen Widerstand R , so ergibt sich die Summe der in allen Widerständen umgesetzten zeitlichen Leistung in einem System mit m Leiterschleifen zu:

$$p(t) = \sum_{k=1}^m u_k(t) \cdot i_k(t) \quad 6.1.1-5$$

$$= \frac{m}{2} \cdot \hat{u} \cdot \hat{i} \quad \text{für } m \geq 3$$

mit

$$u_k(t) = \hat{u} \cdot \sin\left(\omega t + 2\pi \cdot \frac{k}{m}\right) \quad 6.1.1-6$$

und

$$i_k(t) = \hat{i} \cdot \sin\left(\omega t + 2\pi \cdot \frac{k}{m}\right) \quad 6.1.1-7$$

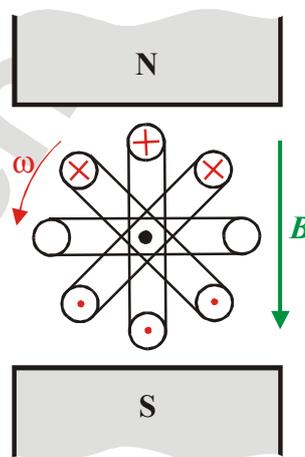


Bild 6.1.1-4: Erzeugung mehrerer Sinusspannungen

Die Gleichung 6.1.1-5 liefert als Ergebnis, dass ab drei mechanisch äquidistant verbundenen Leiterschleifen, in denen die selben Scheitelwerte der Spannungen und der Ströme induziert werden, die Summe der in den Widerständen umgesetzten Wirkleistungen zeitlich konstant ist. Das bedeutet auch, dass in dem Fall ein Generator eine konstante mechanische Belastung beim Antrieb erfährt. Dies ist der Grund, warum man in der Energieerzeugung symmetrische Dreiphasensysteme benutzt.

In Generatoren werden die Leiterschleifen durch Wicklungen mit n Windungen ersetzt. Damit wird in den einzelnen Wicklungen die n -fache Spannung einer einzelnen Leiterschleife induziert. Im Schaltbild eines Generators werden deshalb die einzelnen Wicklungen als Spulen gezeichnet. Die Wicklungen bilden generatorseitig die so genannten Stränge.

6.1.2 Offene Mehrphasensysteme

In offenen Mehrphasensystemen besitzt der Generator m Stränge, die ohne Bezug zueinander wie einzelne Wechselspannungsquellen mit verschiedenen Phasenlagen betrachtet werden. Das System, das im Bild 6.1.2-1 dargestellt ist, benötigt $2 \cdot m$ Leitungen.

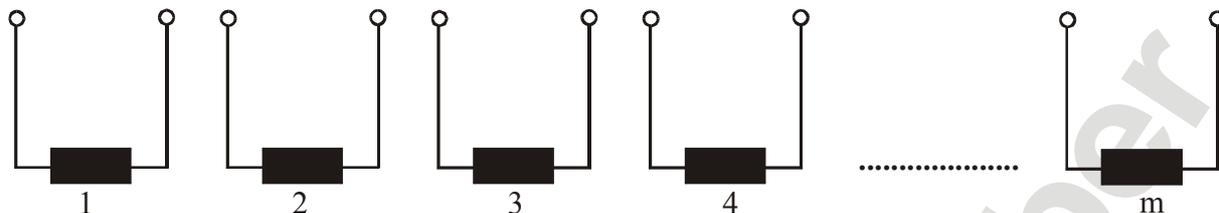


Bild 6.1.2-1: Offenes Mehrphasensystem

6.1.3 Verkettete Mehrphasensysteme

In verketteten Mehrphasensystemen besitzt der Generator m Stränge, die einen festen Bezug zueinander haben. Die Systeme können auf zwei Arten verkettet werden, die im Folgenden kurz erläutert werden.

6.1.3.1 Die Sternschaltung

Die Stränge einer Sternschaltung besitzen einen gemeinsamen Sternpunkt. Die Sternschaltung, die im Bild 6.1.3.1-1 dargestellt ist, benötigt $m + 1$ Leitungen. Eine dieser Leitungen bildet den Mittelleiter, der vom Sternpunkt aus geführt wird.

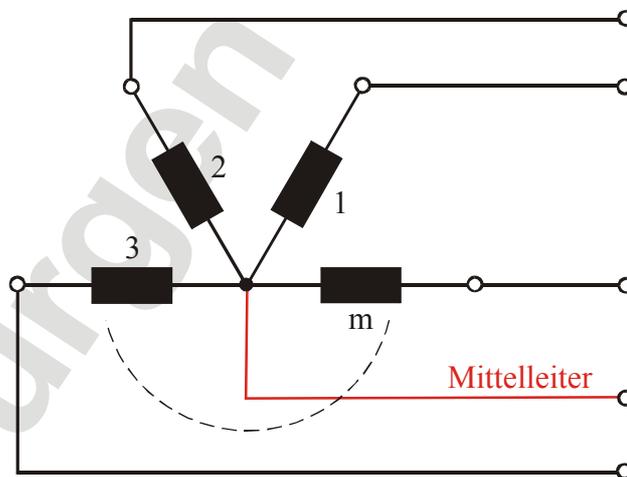


Bild 6.1.3.1-1: Sternschaltung

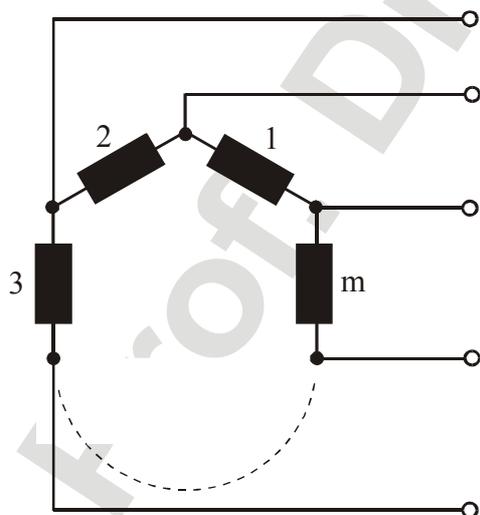


Bild 6.1.3.2-1: Ringschaltung

6.1.3.2 Die Ringschaltung

Die Stränge einer Ringschaltung, die für $m = 3$ auch Dreieckschaltung genannt wird, befinden sich in einer Summenreihenschaltung. Die Ringschaltung, die im Bild 6.1.3.2-1 dargestellt ist, benötigt m Leitungen.

6.1.4 Bezeichnungen

Im Folgenden sind die gebräuchlichsten Bezeichnungen für Mehrphasensysteme zusammengestellt. Dabei liegt einem Generator in Stern- oder Ringschaltung ein Verbrauchersystem in der entsprechenden Schaltung gegenüber.

Im einzelnen bezeichnet man:

- Wicklungen und Widerstände in der Strombahn → Stränge
- Leiter zum Verbraucher → Außenleiter
- gemeinsamer Mittelpunkt → Sternpunkt
- gemeinsamer Mittelpunkt für $m = 3$ → Mittelpunkt
- Leiter vom Sternpunkt → Mittelleiter
- Spannungen an den Klemmen der Stränge → Strangspannungen
- Ströme durch die Stränge → Strangströme
- Spannung zwischen 2 Außenleitern → Außenleiterspannung
- Ströme durch die Außenleiter → Außenleiterströme
- Strom durch den Mittelleiter → Mittelleiterstrom
- m → Strang- oder Phasenzahl

6.1.5 Symmetrische Mehrphasensysteme

Bei symmetrischen Mehrphasensystemen sind alle Strangspannungen gleich groß und gegeneinander um den Winkel $2\pi/m$ phasenverschoben. Darüber hinaus besteht eine symmetrische Belastung. Eine symmetrische Belastung bedeutet, dass identische Scheinwiderstände in den Strängen des Verbrauchers liegen. In diesem Fall gilt:

$$\sum_{k=1}^m \underline{U}_k = 0 \quad 6.1.5-1$$

und

$$\sum_{k=1}^m \underline{I}_k = 0 \quad 6.1.5-2$$

Für das Beispiel $m = 4$ ergibt sich dann das Zeigerdiagramm der Spannungen und Ströme nach Bild 6.1.5-1.

Symmetrische Mehrphasensysteme können sowohl in Ringschaltung als auch in Sternschaltung betrieben werden. Befindet sich ein symmetrisches Mehrphasensystem in Sternschaltung, so wird der Mittelleiterstrom zu Null und kann damit entfallen.

Betrachtet man die Leistungsverhältnisse eines symmetrischen Mehrphasensystems, so folgt eine zeitlich konstante Leistung für das Gesamtsystem:

$$p(t) = \sum_{k=1}^m u_k(t) \cdot i_k(t) = \frac{m}{2} \cdot \hat{u} \cdot \hat{i} \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_i) = \frac{m}{2} \cdot \hat{u} \cdot \hat{i} \cdot \cos \varphi \quad \text{für } m \geq 3 \quad 6.1.5-3$$

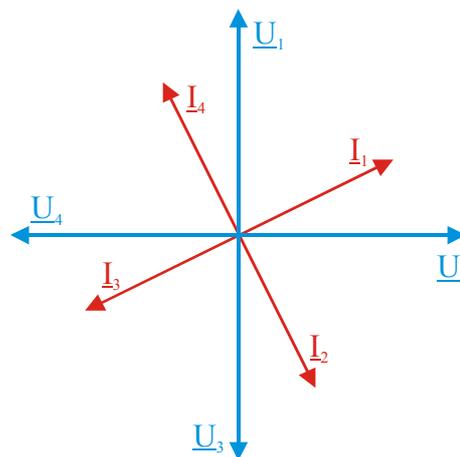


Bild 6.1.5.-1: Symmetrisches System

mit

$$u_k(t) = \hat{u} \cdot \sin\left(\omega t + 2\pi \cdot \frac{k}{m} + \varphi_u\right) \quad 6.1.5-4$$

und

$$i_k(t) = \hat{i} \cdot \sin\left(\omega t + 2\pi \cdot \frac{k}{m} + \varphi_i\right) \quad 6.1.5-5$$

Symmetrische Mehrphasensysteme erzeugen ein so genanntes Drehfeld, auf das in diesem Skript nicht näher eingegangen werden soll. Durch das erzeugte Drehfeld ist der Begriff „Drehstrom“ für diese Mehrphasensysteme entstanden.

6.1.3 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Wodurch wird in einer Leiterschleife eine elektrische Spannung induziert?
- 2) Wie kann eine sinusförmige elektrische Spannung erzeugt werden?
- 3) Eine rotierende Leiterschleife im Feld der permanenten Induktion \mathbf{B} induziert eine sinusförmige Spannung. In welcher Lage der Leiterschleife wird die maximale Spannung induziert?
- 4) Was ist der Grund für die Verwendung eines symmetrischen Dreiphasensystems?
- 5) Was versteht man unter einem offenen Mehrphasensystem?
- 6) Wie viele Zuleitungen benötigt ein offenes Mehrphasensystem?
- 7) Was versteht man unter einem verketteten Mehrphasensystem?
- 8) Wie viele Zuleitungen benötigt ein verkettetes Mehrphasensystem in Sternschaltung?
- 9) Wie viele Zuleitungen benötigt ein verkettetes Mehrphasensystem in Ringschaltung?
- 10) Wie bezeichnet man in einem verketteten Mehrphasensystem die Ringschaltung mit einer Strangzahl $m = 3$?
- 11) Erläutern Sie den Begriff „Symmetrisches Mehrphasensystem“.
- 12) Welche Besonderheit besteht bei einem symmetrischen System in Sternschaltung?
- 13) Wie ist der Begriff „Drehstrom“ entstanden?

6.2 Das Dreiphasensystem

6.2.1 Das symmetrische Dreiphasensystem

Das symmetrische Dreiphasensystem besitzt generatorseitig drei Wicklungen, die, wie im Bild 6.2.1-1 dargestellt, jeweils um 120° versetzt auf der Drehachse angeordnet sind. Die drei Wicklungen, die mit den Buchstaben U_1-U_2 , V_1-V_2 und W_1-W_2 gekennzeichnet sind, erzeugen damit die drei im

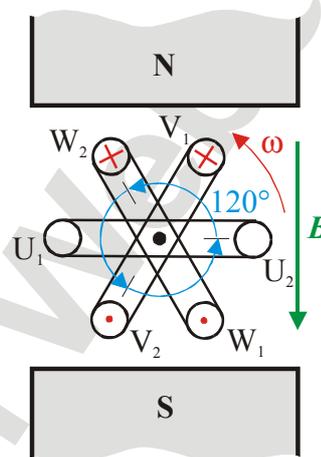


Bild 6.2.1-1: Dreiphasen-Generator

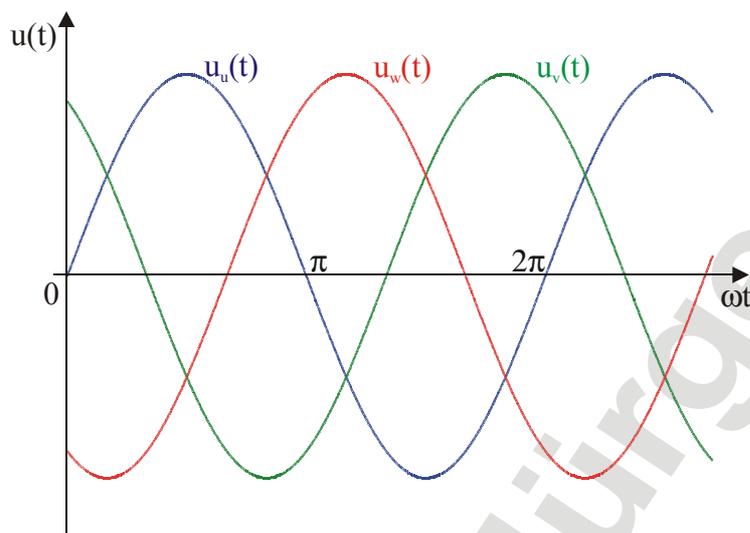


Bild 6.2.1-2: Zeitverlauf der Spannungen im symmetrischen Dreiphasensystem

Bild 6.2.1-2 dargestellten sinusförmigen Spannungen $u_u(t)$, $u_v(t)$ und $u_w(t)$, die jeweils um 120° phasenverschoben sind.

Die Spannungen sind auch in der komplexen Schreibweise \underline{U}_U , \underline{U}_V und \underline{U}_W definiert, wo sie als komplexe Effektivwertzeiger dargestellt werden können. Das Zeigerdiagramm der komplexen Spannungen ist im Bild 6.2.1-3 gezeigt.

6.2.1.1 Die Sternschaltung

Bei der Sternschaltung handelt es sich allgemein um ein Vierleitersystem, das im Bild 6.2.1.1-1 dargestellt ist. Die Spannungen zwischen den Außenleitern und dem Mittelleiter bezeichnet man als die Strangspannungen.

Strangspannungen:

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 & \\ \underline{U}_2 &= \underline{U}_1 \exp(-j120^\circ) & 6.2.1.1-1 \\ \underline{U}_3 &= \underline{U}_1 \exp(+j120^\circ) \end{aligned}$$

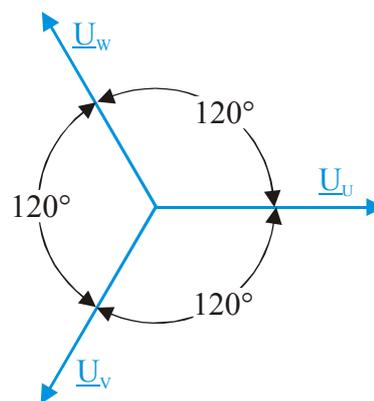


Bild 6.2.1-3: Zeigerdiagramm

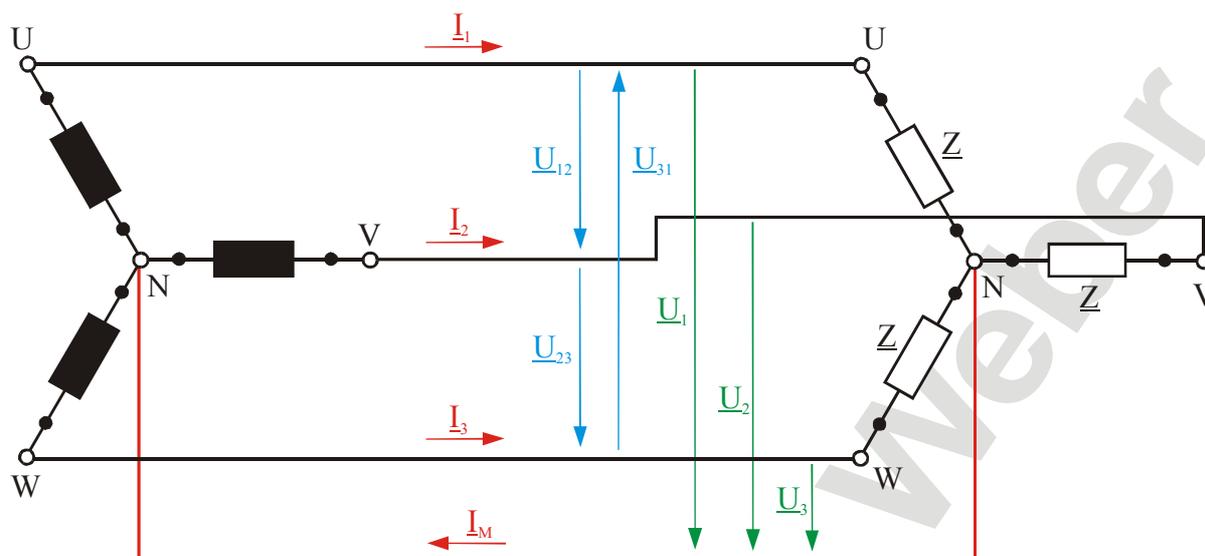


Bild 6.2.1.1-1: Symmetrisches Dreiphasensystem im Sternschaltung

Die Spannungen zwischen den einzelnen Außenleitern bezeichnet man als die Außenleiterspannungen.

Außenleiterspannungen:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{U} \exp(-j120^\circ)$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{U} \exp(+j120^\circ)$$

6.2.1.1-2

Die Ströme, die über die Außenleiter vom Generator zum Verbraucher fließen, bezeichnet man als Außenleiterströme.

Außenleiterströme:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I} \exp(-j120^\circ)$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I} \exp(+j120^\circ)$$

6.2.1.1-3

Da es sich hier um ein symmetrisches Dreiphasensystem handelt, gilt für den Mittelleiterstrom

$$\underline{I}_M = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0,$$

6.2.1.1-4

womit der Mittelleiter stromlos ist und damit entfallen kann.

Betrachtet man die Verhältnisse zwischen den Außenleiterspannungen und den Strangspannungen, so gilt:

$$\underline{U}_{12} = \underline{U}_1 - \underline{U}_2$$

$$\underline{U}_{23} = \underline{U}_2 - \underline{U}_3$$

$$\underline{U}_{31} = \underline{U}_3 - \underline{U}_1$$

6.2.1.1-5

Daraus leitet sich das im Bild 6.2.1.1-2 dargestellte Zeigerdiagramm der Spannungen des symmetrischen Dreiphasensystems in Sternschaltung ab. Die Verhältnisse der Beträge der einzelnen Außenleiterspannungen \underline{U}_{kl} zu den entsprechenden Strangspannungen \underline{U}_k ergeben sich zu

$$\left| \frac{\underline{U}_{kl}}{\underline{U}_k} \right| = 2 \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3}. \quad 6.2.1.1-6$$

Für unsere Hausnetzspannung bedeutet dies:

$$|\underline{U}_k| = 230\text{V} \quad 6.2.1.1-7$$

und

$$|\underline{U}_{kl}| = 398\text{V} \quad 6.2.1.1-8$$

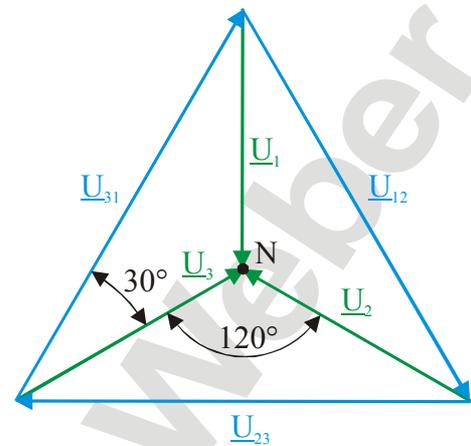


Bild 6.2.1.1-2: Spannungzeigerdiagramm

6.2.1.2 Die Dreieckschaltung

Bei der Dreieckschaltung handelt es sich um ein Dreileitersystem, das im Bild 6.2.1.2-1 dargestellt ist. Die Spannungen zwischen den einzelnen Außenleitern bezeichnet man als die Außenleiterspannungen.

Außenleiterspannungen:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} &= \underline{U} \\ \underline{U}_{23} &= \underline{U} \exp(-j120^\circ) \\ \underline{U}_{31} &= \underline{U} \exp(+j120^\circ) \end{aligned} \quad 6.2.1.2-1$$

Die Ströme, die über die Außenleiter vom Generator zum Verbraucher fließen, bezeichnet man als Außenleiterströme.

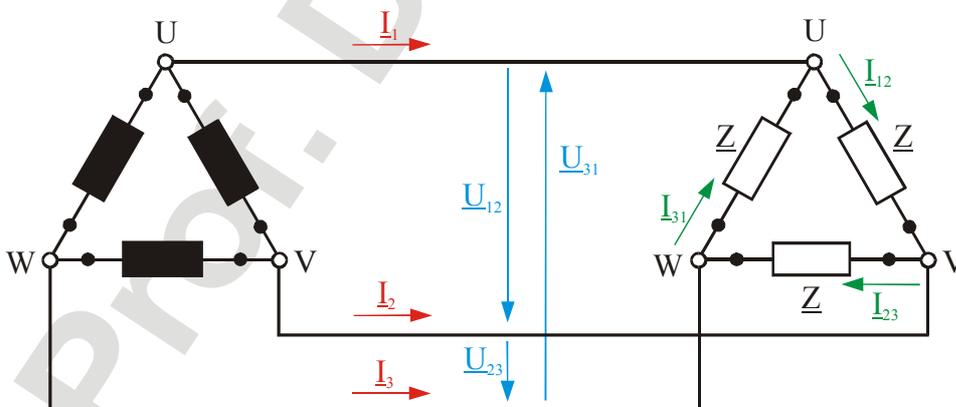


Bild 6.2.1.2-1: Symmetrisches Dreiphasensystem im Dreieckschaltung

Außenleiterströme:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I} \exp(-j120^\circ)$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I} \exp(+j120^\circ)$$

6.2.1.2-2

Die Ströme, die in den Strängen fließen, bezeichnet man als Strangströme.

Strangströme:

$$\underline{I}_{12} = \frac{\underline{U}_{12}}{\underline{Z}}$$

$$\underline{I}_{23} = \frac{\underline{U}_{23}}{\underline{Z}} = \underline{I}_{12} \exp(-j120^\circ)$$

$$\underline{I}_{31} = \frac{\underline{U}_{31}}{\underline{Z}} = \underline{I}_{12} \exp(+j120^\circ)$$

6.2.1.2-3

Betrachtet man die Verhältnisse zwischen den Außenleiterströmen und den Strangströmen, so gilt:

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31}$$

$$\underline{I}_2 = \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12}$$

$$\underline{I}_3 = \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23}$$

6.2.1.2-4

Daraus leitet sich das im Bild 6.2.1.2-2 dargestellte Zeigerdiagramm der Ströme des symmetrischen Dreiphasensystems in Dreieckschaltung ab. Die Verhältnisse der Beträge der einzelnen Außenleiterströme \underline{I}_k zu den entsprechenden Strangströmen \underline{I}_{kl} ergeben sich zu

$$\left| \frac{\underline{I}_k}{\underline{I}_{kl}} \right| = 2 \cdot \cos 30^\circ = \sqrt{3}.$$

6.2.1.2-5

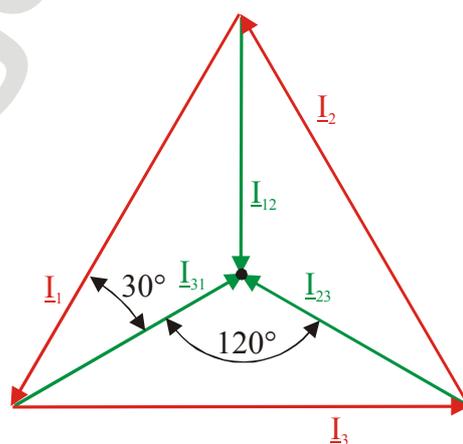


Bild 6.2.1.2-2: Stromzeigerdiagramm

6.2.1.3 Die Leistungen

Im symmetrischen Dreiphasensystem wird in jedem Strang des Generators die gleiche Scheinleistung erzeugt und in jedem Strang des Verbrauchers die gleiche Scheinleistung umgesetzt. Um diese Scheinleistungen zu ermitteln, müssen die Strangströme und die Strangspannungen herangezogen werden. Deshalb ist es auch sinnvoll, einen Phasenwinkel φ zu definieren, der die Phasendifferenz zwischen dem Strangstrom $\underline{I}_{\text{Str}}$ und der entsprechenden Strangspannung $\underline{U}_{\text{Str}}$ beschreibt:

$$\underline{U}_{\text{Str}} = |\underline{U}_{\text{Str}}| \exp(j\varphi_u)$$

6.2.1.3-1

$$\underline{I}_{\text{Str}} = |\underline{I}_{\text{Str}}| \exp(j\varphi_i)$$

6.2.1.3-2

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i \quad 6.2.1.3-3$$

In der Sternschaltung sind die Strangströme $\underline{I}_{\text{Str}}$ identisch mit den Außenleiterströmen \underline{I}_k , so dass folgendes gilt:

Sternschaltung

$$\begin{aligned} \underline{I}_{\text{Str}} &= \underline{I}_k \\ \underline{U}_{\text{Str}} &= \underline{U}_k \end{aligned} \quad 6.2.1.3-4$$

In der Dreieckschaltung sind die Strangspannungen $\underline{U}_{\text{Str}}$ identisch mit den Außenleiterspannungen \underline{U}_{kl} , so dass folgendes gilt:

Dreieckschaltung

$$\begin{aligned} \underline{I}_{\text{Str}} &= \underline{I}_{kl} \\ \underline{U}_{\text{Str}} &= \underline{U}_{kl} \end{aligned} \quad 6.2.1.3-5$$

Für die Schein-, Wirk- und Blindleistung des gesamten Verbrauchersystems gilt dann unabhängig von der Schaltungsart:

$$\underline{S} = 3 \cdot \underline{U}_{\text{Str}} \cdot \underline{I}_{\text{Str}}^* \quad 6.2.1.3-6$$

$$P = 3 \cdot |\underline{U}_{\text{Str}}| \cdot |\underline{I}_{\text{Str}}| \cdot \cos \varphi \quad 6.2.1.3-7$$

$$Q = 3 \cdot |\underline{U}_{\text{Str}}| \cdot |\underline{I}_{\text{Str}}| \cdot \sin \varphi \quad 6.2.1.3-8$$

6.2.2 Das unsymmetrisch belastete Dreiphasensystem

Eine symmetrische Belastung des Dreiphasensystems geht immer auf einen sehr kompakten und leistungsstarken Verbraucher zurück, wie zum Beispiel einen elektrischen Antrieb oder eine Elektroheizung im 2-stelligen Kilowattbereich.

Kleinere Verbraucher schließt man nur an einen Strang des Dreiphasensystems meist in Sternschaltung an. So arbeitet zum Beispiel unser allgemeines Hausnetz. Hier werden einzelne Bereiche von Wohnungen oder von Häusern an verschiedene Stränge angeschlossen. Statistisch gesehen entsteht so eine annähernd symmetrische Belastung für den Generator. Dies setzt aber voraus, dass für den Fall der Unsymmetrie entsprechende Vorkehrungen geschaffen sind. In den folgenden Abschnitten sollen deshalb zu-

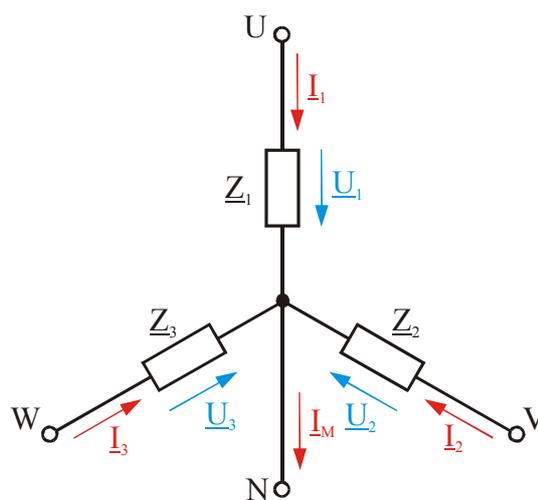


Bild 6.2.2.1-1: Vierleitersystem in Sternschaltung

nächst die Auswirkungen einer unsymmetrischen Belastung im Vierleitersystem in Sternschaltung und danach im Dreileitersysteme abgehandelt werden.

6.2.2.1 Das Vierleitersystem

Bei dem Vierleitersystem handelt es sich um eine Sternschaltung mit Mittelleiter. Befinden sich wie im Bild 6.2.2.1-1 gezeigt in den Strängen des Verbrauchers unterschiedliche Belastungen, so bleiben dennoch die Strangspannungen

$$\underline{U}_{\text{Str}} = \underline{U}_k \text{ erhalten.}$$

Demgegenüber werden sich die Strangströme $\underline{I}_{\text{Str}} = \underline{I}_k$ in Betrag und Phase nach den einzelnen Belastungen richten. Dies führt dazu, dass der Mittelleiterstrom \underline{I}_M , wie im Bild 6.2.2.1-2 dargestellt, nicht mehr Null wird.

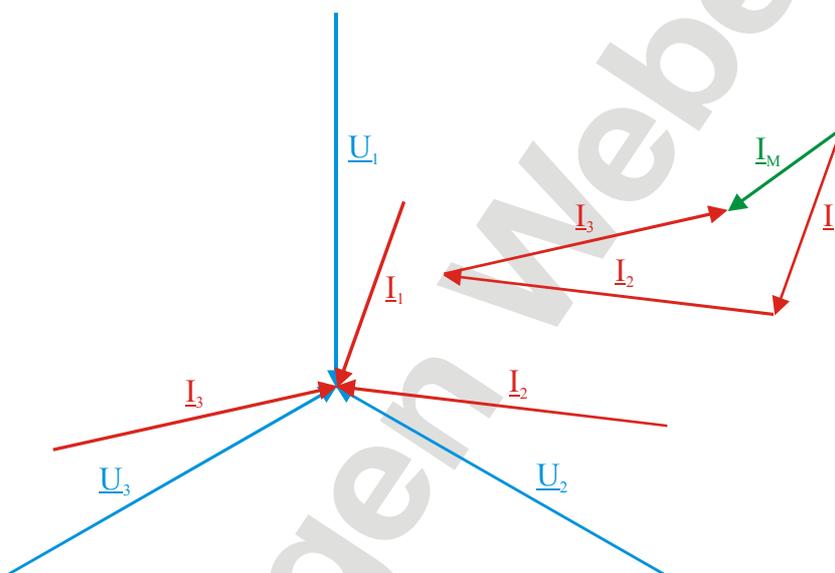


Bild 6.2.2.1-2: Zeigerdiagramm des Vierleitersystems bei unsymmetrischer Belastung

$$\underline{I}_M = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 \neq 0$$

6.2.2.1-1

Bei unsymmetrischer Belastung fließt im Vierleitersystem ein Mittelleiterstrom $\underline{I}_M \neq 0$.

6.2.2.2 Das Dreileitersystem

6.2.2.2.1 Die Dreieckschaltung

Wird die Dreieckschaltung wie im Bild 6.2.2.2.1-1 dargestellt in den Strängen des Verbrauchers unterschiedlich belastet, so bleiben die Strangspannungen $\underline{U}_{\text{Str}} = \underline{U}_{kl}$ erhalten. Demgegenüber werden sich die Strangströme $\underline{I}_{\text{Str}} = \underline{I}_{kl}$ in Betrag und Phase nach den einzelnen Belastungen richten. Dies führt auch zu unterschiedlichen Außenleiterströmen \underline{I}_k :

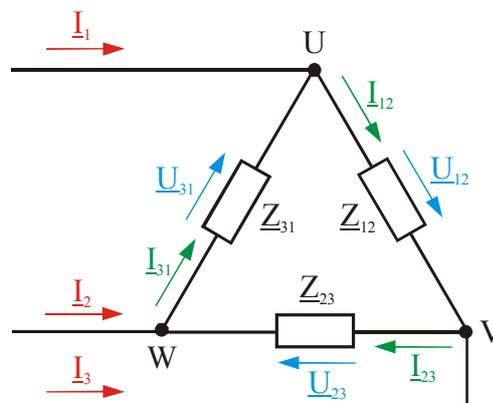


Bild 6.2.2.2.1-1: Dreileitersystem in Dreieckschaltung

$$\begin{aligned} \underline{I}_1 &= \underline{I}_{12} - \underline{I}_{31} \\ \underline{I}_2 &= \underline{I}_{23} - \underline{I}_{12} \\ \underline{I}_3 &= \underline{I}_{31} - \underline{I}_{23} \end{aligned}$$

Das entsprechende Zeigerdiagramm ist im Bild 6.2.2.2.1-2 dargestellt.

6.2.2.2.2 Die Sternschaltung

Verfügt die Sternschaltung wie im Bild 6.2.2.2.2-1 dargestellt über keinen Mittelleiter und werden die Stränge des Verbrauchers unterschiedlich belastet, so wird trotzdem die Bedingung

$$\underline{I}_M = \underline{I}_1 + \underline{I}_2 + \underline{I}_3 = 0$$

erzwungen. Auf Grund des Aufbaus des Generators wird dieser seine Strangspannungen \underline{U}_k aufrecht erhalten und dem System aufprägen, so dass auch weiterhin die Außenleiterspannungen \underline{U}_{kl} erhalten bleiben:

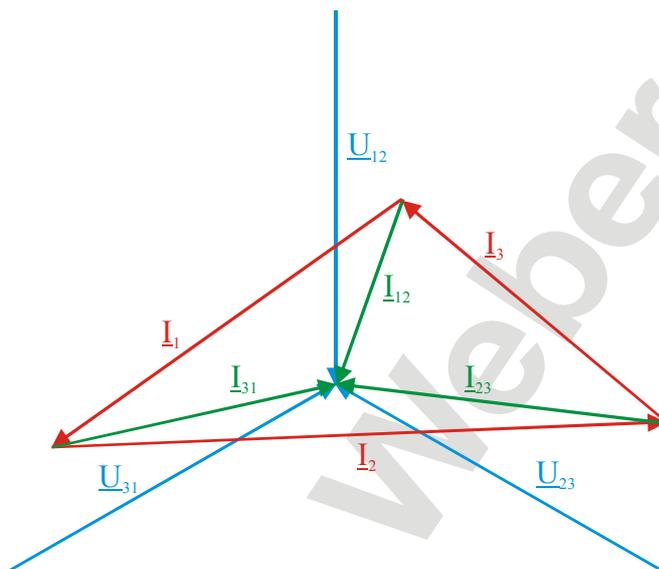


Bild 6.2.2.2.1-2: Zeigerdiagramm des Dreileitersystems in Dreieckschaltung bei unsymmetrischer Belastung

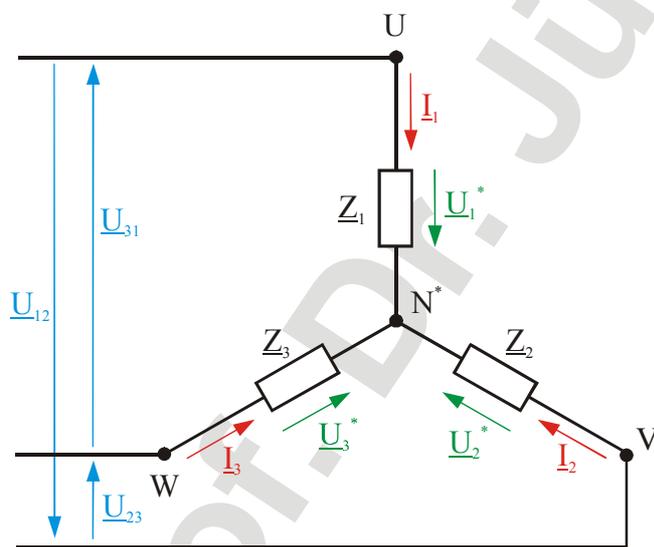


Bild 6.2.2.2.2-1: Dreileitersystem in Sternschaltung

Generatorseitig

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} &= \underline{U}_1 - \underline{U}_2 \\ \underline{U}_{23} &= \underline{U}_2 - \underline{U}_3 \\ \underline{U}_{31} &= \underline{U}_3 - \underline{U}_1 \end{aligned}$$

Mit einem Mittelleiter wären auch verbraucherseitig die Strangspannungen aufgeprägt. Ohne Mittelleiter gilt lediglich:

Verbraucherseitig

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} &= \underline{U}_1^* - \underline{U}_2^* \\ \underline{U}_{23} &= \underline{U}_2^* - \underline{U}_3^* \\ \underline{U}_{31} &= \underline{U}_3^* - \underline{U}_1^* \end{aligned}$$

mit

$$\underline{U}_k^* \neq \underline{U}_k$$

Die Kennzeichnung mit dem Stern soll die Verbraucherseite verdeutlichen. Sie bedeutet hier nicht die konjugiert komplexe Form.

Da die Strangspannungen des Generators und des Verbrauchers nicht mehr identisch sind, existiert eine Potenzialdifferenz \underline{U}_M zwischen dem Sternpunkt N des Generators und dem

Sternpunkt N^* des Verbrauchers (Bild 6.2.2.2.2-2). Daraus lassen sich die noch fehlenden Beziehungen

$$\underline{U}_k^* = \underline{U}_k - \underline{U}_M$$

ableiten, wodurch eine Berechnung des Systems durch die folgenden Vorgehensweisen möglich wird:

- 1) Mit Hilfe der Stern-Dreieck-Transformation muss zunächst der Verbraucher in eine Dreieckschaltung umgewandelt werden.

Im Dreieck sind die Außenleiterspannungen gleich den Strangspannungen, womit die Strangströme und danach die Außenleiterströme berechnet werden können. An dieser Stelle kann bereits die Gesamtscheinleistung des Verbrauchersystems berechnet werden.

Danach erfolgt die Rücktransformation in die Sternschaltung, in der die berechneten Außenleiterströme identisch mit den Strangströmen sind. Daraus lassen sich wiederum die Strangspannungen sowie die Potentialdifferenz \underline{U}_M zwischen den Sternpunkten berechnen.

Über die Strangströme und die Strangspannungen lassen sich die Einzelleistungen der Stränge ermitteln, womit das Gesamtsystem berechnet ist.

- 2) Das Gesamtsystem wird mit Hilfe der allgemeinen komplexen Rechnung über die Netzwerkmatrix gelöst.

Im Bild 6.2.2.2.2-3 ist das Zeigerdiagramm der unsymmetrischen Sternschaltung dargestellt. Man erkennt, dass für den Generator die Symmetrie erhalten bleibt, während der Verbraucher weder eine Symmetrie in den Strangspannungen noch in den Strangströmen aufweist.

Damit im unserem Hausnetz die konstante Spannung von $|\underline{U}| = 230\text{V}$ zur Verfügung steht, besitzt das Netz einen Mittelleiter. Probleme treten auf, falls dieser Mittelleiter bei unsymmetrischer Belastung, von der man im Allgemeinen Betrieb ausgehen darf, entfernt wird. In dem Fall wird die Strangspannung des Strangs, der zur Zeit dieses Ereignisses am niedrigsten belastet war, verbraucherseitig einen wesentlich höheren Wert als 230V annehmen, was zur Zerstörung der betriebenen Elektrogeräte und Glühlampen führt und den Strangstrom auf Null reduziert. Unmittelbar anschließend wird die Strangspannung des Strangs, der die zweitniedrigste Belastung hatte, verbraucherseitig einen wesentlich höheren Wert annehmen, womit die gleiche Konsequenz für die betriebenen Elektrogeräte verbunden ist. Da der letzte Strang nun keinen Strangstrom mehr führen kann, bleiben dessen Geräte verschont.

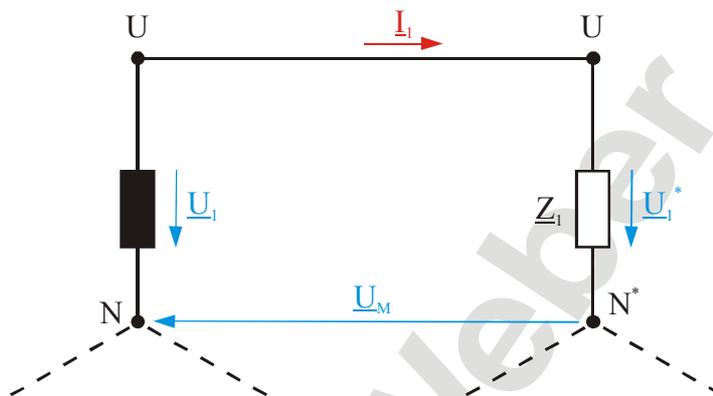


Bild 6.2.2.2.2-2:

Potentialdifferenz zwischen den Sternpunkten

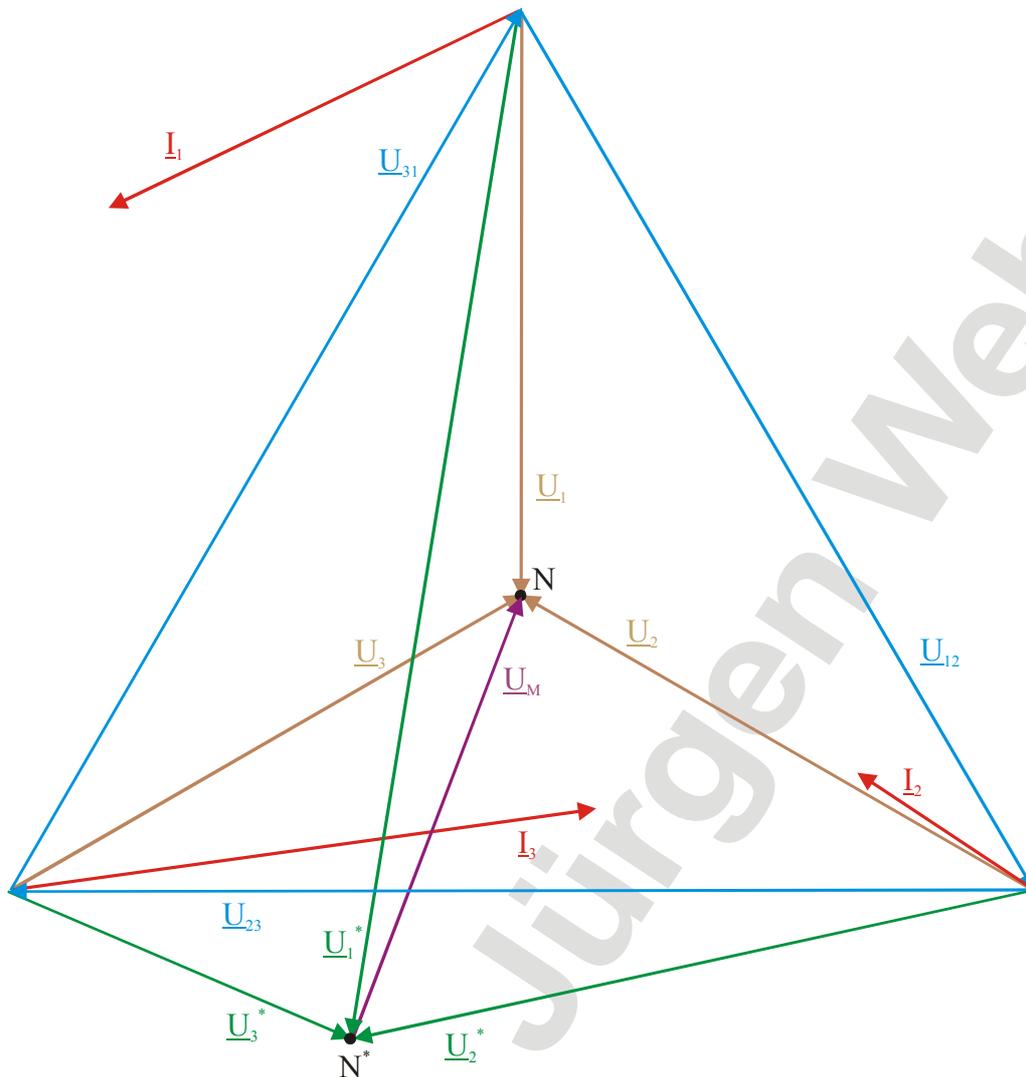


Bild 6.2.2.2.2-3: Zeigerdiagramm eines unsymmetrischen Dreileitersystems in Sternschaltung

6.2.3 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Was versteht man unter einem symmetrischen Dreiphasensystem?
- 2) Um wie viel Grad sind in einem symmetrischen Dreiphasensystem die einzelnen Spannungen phasenverschoben?
- 3) Welchen Strom führt der Mittelleiter in einem symmetrischen Vierleitersystem?
- 4) In welcher Schaltung im Dreiphasensystem sind die Strangströme identisch mit den Außenleiterströmen?
- 5) In welcher Schaltung im Dreiphasensystem sind die Strangspannungen identisch mit den Außenleiterspannungen?
- 6) Wieso wird das Hausnetz mit einem Vierleitersystem betrieben?

- 7) Was versteht man unter einem unsymmetrisch belasteten Dreiphasensystem?
- 8) In welchem Fall existiert im Dreiphasensystem eine Potenzialdifferenz zwischen dem Sternpunkt des Generators und dem Sternpunkt des Verbrauchers?
- 9) Welche Konsequenz hat der abrupte Wegfall des Mittelleiters in einem unsymmetrisch belasteten Dreiphasensystem in Sternschaltung?

Aufgabe 6.2.3-1:

Gegeben ist ein unsymmetrisch belastetes Vierleitersystem mit den Verbraucherwiderständen

$$\begin{aligned}R_1 &= 10\Omega \\R_2 &= 100\Omega \\R_3 &= 1k\Omega,\end{aligned}$$

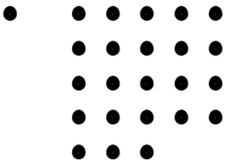
Dem vom Generator die festen Strangspannungen $|\underline{U}_{\text{Str}}| = 230\text{V}$ aufgeprägt werden. Berechnen Sie die einzelnen Strangströme und den Mittelleiterstrom. Berechnen Sie ferner die in den Strängen des Verbrauchers umgesetzten Leistungen und die Gesamtleistung des Verbrauchersystems.

Durch ein Missgeschick löst sich die Verbindung zwischen dem Sternpunkt des Generators und dem Sternpunkt des Verbrauchers. Berechnen Sie für diesen Fall die einzelnen Strangströme und Strangspannungen des Verbrauchers und die Spannung zwischen den beiden Sternpunkten. Berechnen Sie ferner die jetzt in den Strängen des Verbrauchers umgesetzten Leistungen und die Gesamtleistung des Verbrauchersystems.

(Lösung: $\underline{I}_1 = 23\text{A exp}(j0^\circ)$; $\underline{I}_2 = 2,3\text{A exp}(-j120^\circ)$; $\underline{I}_3 = 0,23\text{A exp}(j120^\circ)$;
 $\underline{I}_M = 21,8\text{A exp}(-j4,7^\circ)$;
 $P_{R1} = 5,29\text{kW}$; $P_{R2} = 529\text{W}$; $P_{R3} = 52,9\text{W}$; $P_{\text{ges}} = 5,87\text{kW}$;
 $\underline{I}_1 = 3,78\text{A exp}(j25^\circ)$; $\underline{U}_1 = 37,8\text{V exp}(j25^\circ)$; $\underline{I}_2 = 3,61\text{A exp}(j210^\circ)$;
 $\underline{U}_2 = 360,5\text{V exp}(j210^\circ)$; $\underline{I}_3 = 0,38\text{A exp}(j145^\circ)$; $\underline{U}_3 = 378\text{V exp}(j145^\circ)$;
 $\underline{U}_M = 198,11\text{V exp}(-j5^\circ)$;
 $P_{R1} = 143\text{W}$; $P_{R2} = 1,3\text{kW}$; $P_{R3} = 144\text{W}$; $P_{\text{ges}} = 1,59\text{kW}$)

6.3 Literaturhinweise

- 1) Moeller/Frohne Grundlagen der Elektrotechnik
- 2) Linse Elektrotechnik für Maschinenbauer
- 3) Zastrow Elektrotechnik
- 4) Kories Taschenbuch der Elektrotechnik



Fachhochschule Köln
University of Applied Sciences Cologne
Campus Gummersbach

Prof. Dr.-Ing. Jürgen Weber

Dipl.-Ing. Franz Josef Klein

Andreas Wagen

7 Der Transformator

Inhaltsverzeichnis

0	<i>Vorbemerkung</i>	
1	<i>Einleitung</i>	
2	<i>Der elektrische Strom</i>	
3	<i>Gleichstromschaltungen mit linearen Bauelementen</i>	
4	<i>Der Wechselstromkreis</i>	
5	<i>Messtechnik</i>	
6	<i>Dreiphasenwechselstrom</i>	
7	DER TRANSFORMATOR	3
7.1	Einleitung	3
7.1.1	Fragen- und Aufgabensammlung	4
7.2	Theoretische Grundlagen	5
7.2.1	Fragen- und Aufgabensammlung	7
7.3	Der ideale Transformator	8
7.3.1	Fragen- und Aufgabensammlung	12
7.4	Der reale Transformator	13
7.4.1	Das Ersatzschaltbild des realen Transformators	13
7.4.2	Die Entwicklung des Zeigerdiagramms des realen Transformators	17
7.4.3	Spezielle Arten von Transformatoren	24
7.4.4	Fragen- und Aufgabensammlung	27
7.5	Literaturhinweise	28

Anhang

Anlage I Praktika

7 DER TRANSFORMATOR

7.1 Einleitung

Transformatoren findet man in fast allen elektronischen Geräten. Sie bilden dort den Übergang zwischen unserem Hausnetz und der Elektronik der Geräte, indem sie die Netzspannung in eine niedrigere Wechselspannung transformieren. Nach einer Gleichrichtung kann jede beliebige Gleichspannung zur Verfügung

stehen. Aber auch unser Hausnetz mit seiner sinusförmigen Wechselspannung mit dem Effektivwert von 230V und einer Frequenz von 50Hz wird von einer wesentlich höheren Wechselspannung durch Transformatoren

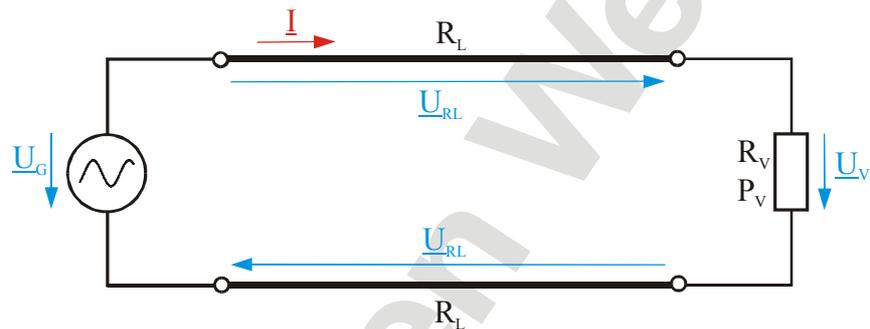


Bild 7.1-1: Stromkreis mit Leitungswiderständen

gewonnen. Weshalb zur Energieübertragung hohe Wechselspannungen benötigt werden und dadurch der Einsatz von Transformatoren notwendig wird, soll das folgende Beispiel zeigen.

Nach Bild 7.1-1 soll in einem Wirkwiderstand R_V die Wirkleistung $P_V = 1\text{kW}$ umgesetzt werden. Zwischen dem Generator und dem Verbraucher befinden sich lange Zuleitungen mit dem Leitungswiderstand $R_L = 1\Omega$. Vergleicht man die Verlustleistungen auf den Zuleitungen in Abhängigkeit der Höhe der Verbraucherspannung, so erhält man folgendes Resultat:

- 1) Im ersten Fall soll die Verbraucherspannung $\underline{U}_V = 100\text{V}$ betragen. Daraus resultiert:

$$\underline{I} = 10\text{A}; \quad \underline{U}_{RL} = 10\text{V}; \quad \underline{U}_G = 120\text{V}; \quad P_G = -1,2\text{kW}$$

Die Verluste auf den Zuleitungen betragen danach 16,6%.

- 2) Im zweiten Fall soll die Verbraucherspannung $\underline{U}_V = 100\text{kV}$ betragen. Daraus resultiert:

$$\underline{I} = 10\text{mA}; \quad \underline{U}_{RL} = 10\text{mV}; \quad \underline{U}_G = 100.000,02\text{V}; \quad P_G = -1.000,0002\text{W}$$

Die Verluste auf den Zuleitungen betragen danach $2 \cdot 10^{-5}\%$.

Das Beispiel zeigt, dass die Leitungsverluste wesentlich geringer sind, wenn die Energie mit einer hohen Spannung transportiert wird. Deshalb wird in der Energietechnik bei den Fernverbindungen mit hohen Spannungen gearbeitet. Diese Spannungen werden dann über Transformatoren, die in der Energietechnik auch als Umformer bezeichnet werden, über mehrere Stufen herab transformiert. Diese Transformationen sind notwendig, um Spannungsüberschläge bei zunehmend engerer Leitungsführung (Überlandleitungen, Erdleitungen, Hausinstallation) zu vermeiden.

Wie in einem späteren Abschnitt noch gezeigt wird, können Transformatoren auch zur Leistungsanpassung benutzt werden. Dies ist in der Nachrichtentechnik üblich, wo der Transformator auch Übertrager genannt wird. Beim Einsatz als Spannungstransformierer in der Messtechnik bezeichnet man ihn als Wandler.

Das Grundprinzip des Transformators ist die magnetische Flussverketzung zweier Leiter-schleifen. Dabei kann diese Flussverketzung entweder durch eine lose Kopplung über den Luftraum oder durch eine feste Kopplung über Eisen erfolgen.

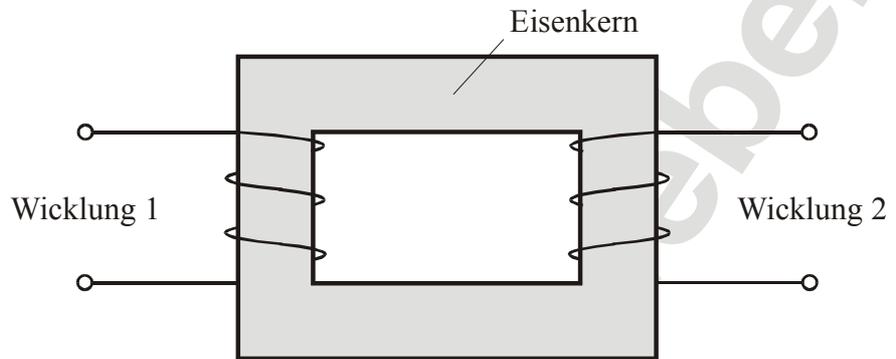


Bild 7.1-2: Transformatoraufbau für eine feste Kopplung

Der Transformator hat einen Primärkreis und einen Sekundärkreis. Den Primärkreis bildet nach Bild 7.1-2 die Wicklung 1, deren Klemmen den Eingang des Transformators darstellen. Den Sekundärkreis bildet die Wicklung 2, deren Klemmen den Ausgang des Transformators darstellen.

Besteht keine elektrische Kopplung zwischen dem Primärkreis und dem Sekundärkreis, so stellt der Transformator eine so genannte galvanische Trennung zwischen den beiden Kreisen dar. Das bedeutet, dass es keinen gemeinsamen Bezugspunkt für das elektrische Potenzial gibt. Mit Hilfe eines Transformators lassen sich somit Massekonflikte lösen.

7.1.1 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Weshalb wird zur Energieübertragung eine hohe Spannung gewählt?
- 2) Welche Bezeichnung trägt der Transformator in der Energietechnik?
- 3) Welche Bezeichnung trägt der Transformator in der Nachrichtentechnik?
- 4) Welche Bezeichnung trägt der Transformator in der Messtechnik?

7.2 Theoretische Grundlagen

Das Prinzip des Transformators basiert auf der magnetischen Flussverketzung zweier Leiterschleifen, wie sie in den Bildern 7.2-1 und 7.2-2 dargestellt sind. Die Erklärung der magnetische Flussverketzung erfolgt in zwei Schritten:

- 1) Der Strom $i_1(t)$ wird der Leiterschleife 1 (Bild 7.2-1) aufgeprägt. Dieser Strom hat ein magnetisches Feld zur Folge, wodurch die Leiterschleife 1 vom magnetischen Fluss $\phi_{11}(t)$ durchsetzt wird. Dieser Fluss induziert in der Leiterschleife 1 die Spannung

$$u_1'(t) = \frac{d\phi_{11}}{dt}, \quad 7.2-1$$

die an den Klemmen nach außen hin in Erscheinung tritt.

Auf Grund der geometrischen Anordnung wird der Teil $\phi_{21}(t)$ des Flusses $\phi_{11}(t)$ auch die Leiterschleife 2 durchsetzen und in ihr die Spannung

$$u_2'(t) = \frac{d\phi_{21}}{dt} \quad 7.2-2$$

induzieren. Man spricht davon, dass der Teilfluss $\phi_{21}(t)$ mit der Leiterschleife 2 verketzt ist. Da die Leiterschleife im Leerlauf betrieben wird, tritt diese Spannung an den Klemmen nach außen hin in Erscheinung.

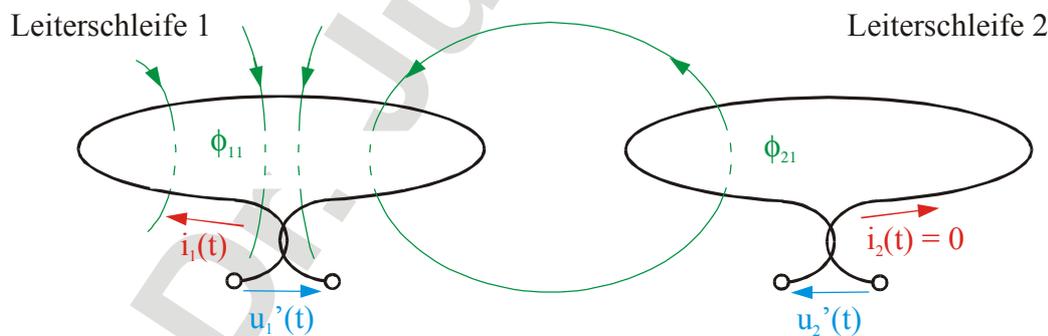


Bild 7.2-1: System zweier Leiterschleifen

- 2) Der Strom $i_2(t)$ wird der Leiterschleife 2 (Bild 7.2-2) aufgeprägt. Dieser Strom hat ein magnetisches Feld zur Folge, wodurch die Leiterschleife 2 vom magnetischen Fluss $\phi_{22}(t)$ durchsetzt wird. Dieser Fluss induziert in der Leiterschleife 2 die Spannung

$$u_2''(t) = \frac{d\phi_{22}}{dt}, \quad 7.2-3$$

die an den Klemmen nach außen hin in Erscheinung tritt.

Auf Grund der geometrischen Anordnung wird der Teil $\phi_{12}(t)$ des Flusses $\phi_{22}(t)$ auch die Leiterschleife 1 durchsetzen und in ihr die Spannung

$$u_1''(t) = \frac{d\phi_{12}}{dt} \quad 7.2-4$$

induzieren. Da die Leiterschleife im Leerlauf betrieben wird, tritt diese Spannung an den Klemmen nach außen hin in Erscheinung.

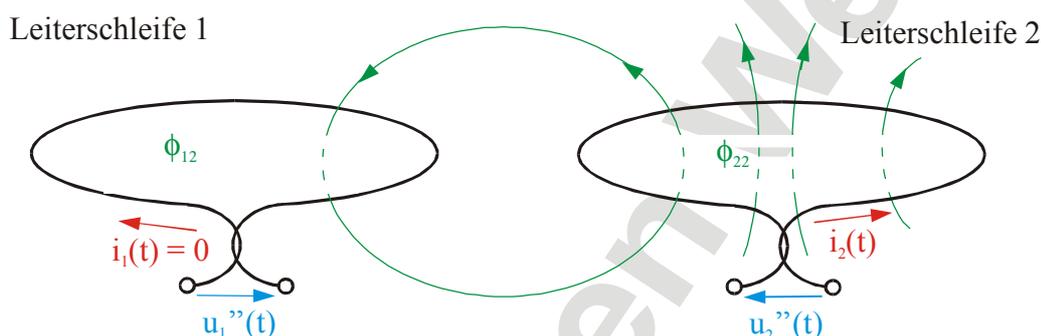


Bild 7.2-2: System zweier Leiterschleifen

Überlagert man jetzt beide Fälle, so ergeben sich die Spannungen an den Klemmen der beiden Leiterschleifen zu:

$$u_1(t) = u_1'(t) + u_1''(t) = \frac{d\phi_{11}}{dt} + \frac{d\phi_{12}}{dt} \quad 7.2-5$$

$$u_2(t) = u_2'(t) + u_2''(t) = \frac{d\phi_{21}}{dt} + \frac{d\phi_{22}}{dt} \quad 7.2-6$$

Ersetzt man die Leiterschleifen durch Wicklungen mit N_1 und N_2 Windungen, so gehen die Gleichungen 7.2-5 und 7.2-6 in die Gleichungen

$$u_1(t) = N_1 \left(\frac{d\phi_{11}}{dt} + \frac{d\phi_{12}}{dt} \right) \quad 7.2-7$$

$$u_2(t) = N_2 \left(\frac{d\phi_{21}}{dt} + \frac{d\phi_{22}}{dt} \right) \quad 7.2-8$$

über. Dies sind die Ausgangsgleichungen für die folgenden Betrachtungen.

Bei einer losen Kopplung gelten die Bedingungen

$$\phi_{11} \gg \phi_{21} \quad 7.2-9$$

und

$$\phi_{22} \gg \phi_{12} \quad 7.2-10$$

Das bedeutet, dass nur ein geringer Teil des magnetischen Flusses mit der jeweils anderen Leiterschleife oder Wicklung verkettet ist.

Bei einer festen Kopplung mit Hilfe eines Eisenkörpers wird der magnetische Fluss auf Grund des geringeren magnetischen Widerstands des Eisens gegenüber dem magnetischen Widerstand des Luftraums im Eisen geführt. Daraus leiten sich die Verhältnisse

$$\phi_{11} \approx \phi_{21} \quad 7.2-11$$

und

$$\phi_{22} \approx \phi_{12} \cdot \quad 7.2-12$$

ab. Damit wird bei fester Kopplung in der vom verketteten Fluss durchsetzten Leiterschleife oder Wicklung eine höhere Spannung induziert als dies bei gleicher Geometrie mit einer losen Kopplung der Fall wäre.

Die Flussverkettung wird durch den Kopplungsfaktor k beschrieben:

$$k = \frac{\phi_{21}}{\phi_{11}} = \frac{\phi_{12}}{\phi_{22}} \quad 7.2-13$$

7.2.1 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Erläutern Sie das Prinzip des Transformators.
- 2) Was versteht man unter einer Flussverkettung?
- 3) Was gibt der Kopplungsfaktor k an?

7.3 Der ideale Transformator

Für die Betrachtung des idealen Transformators wird auf die komplexe Darstellung sinusförmiger Zeitfunktionen, wie sie im Kapitel 4, Abschnitt 4.1.3, eingeführt wurde, zurück gegriffen:

$$\underline{u}(t) = \hat{u} \exp(j\omega t) \quad 7.3-1$$

mit

$$\hat{u} = \hat{u} \exp(j\varphi_u) \quad 7.3-2$$

Der ideale Transformator, der im Bild 7.3-1 dargestellt ist, besitzt eine feste Kopplung über einen Eisenkörper, der auch als Eisenkern bezeichnet wird. Weiterhin ist er über die folgenden Bedingungen definiert:

- Die Leitungswiderstände der beiden Wicklungen sind Null
- Der Eisenkern besitzt eine relative Permeabilität $\mu_r = \infty$, die einen verschwindenden magnetischen Widerstand zur Folge hat. Daraus resultiert, dass der gesamte auftretende magnetische Fluss im Eisenkern geführt wird.
- Der Kopplungsfaktor nimmt den Wert 1 an:

$$\underline{k} = \frac{\frac{\phi_{21}}{\phi_{11}}}{\frac{\phi_{12}}{\phi_{22}}} = 1$$

Berücksichtigt man diese idealen Bedingungen, so fließt durch den Eisenkern der magnetische Fluss

$$\underline{\phi} = \underline{\phi}_{11} + \underline{\phi}_{12} = \underline{\phi}_{21} + \underline{\phi}_{22} = \hat{\phi} \exp(j\omega t) \quad 7.3-3$$

mit

$$\hat{\phi} = \hat{\phi} \exp(j\varphi_\phi). \quad 7.3-4$$

Daraus resultieren nach den Gleichungen 7.2-7 und 7.2-8 die Spannungen

$$\underline{u}_1 = N_1 \cdot \frac{d\phi}{dt} = j\omega N_1 \underline{\phi} \quad 7.3-5$$

und

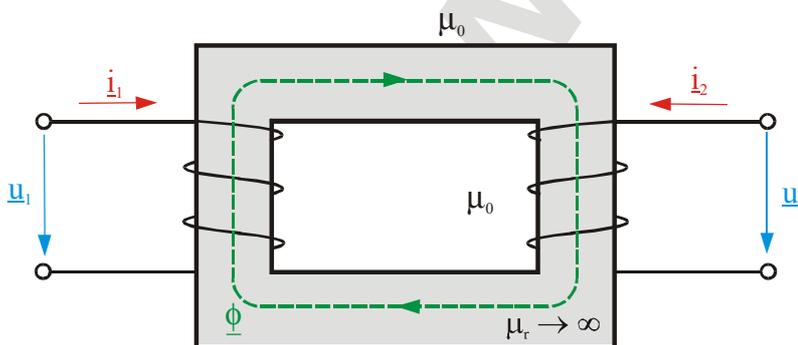


Bild 7.3-1: Aufbau des idealen Transformators

$$\underline{u}_2 = N_2 \cdot \frac{d\phi}{dt} = j\omega N_2 \underline{\phi}, \quad 7.3-6$$

aus denen sich die komplexen Effektivwerte der Spannungen durch

$$\underline{U}_1 = \frac{j\omega N_1 \hat{\phi}}{\sqrt{2}} \quad 7.3-7$$

und

$$\underline{U}_2 = \frac{j\omega N_2 \hat{\phi}}{\sqrt{2}} \quad 7.3-8$$

ermitteln lassen. Aus den Gleichungen 7.3-5 bis 7.3-8 lässt sich nun die Spannungsübersetzung angeben:

$$\frac{\underline{u}_1}{\underline{u}_2} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad 7.3-9$$

Die Spannungen an den Klemmen der Wicklungen eines idealen Transformators verhalten sich zueinander wie die Windungszahlen der Wicklungen.

In Analogie zum elektrischen Stromkreis definiert sich der magnetische Kreis. In diesem magnetischen Kreis wird dem Eisen ein magnetischer Widerstand R_m zugeordnet, der sich aus den Eigenschaften des Eisens wie folgt berechnet:

$$R_m = \frac{l}{\mu_r \cdot \mu_0 \cdot A} \quad 7.3-10$$

Die Länge l stellt dabei die mittlere Länge des Eisenkerns und A dessen Querschnitt da.

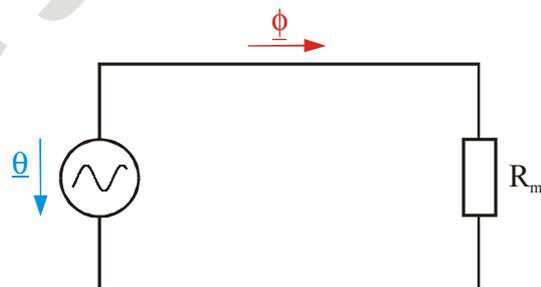


Bild 7.3-2: Der magnetische Kreis

Im magnetischen Kreis (Bild 7.3-2) stellt der magnetische Fluss ϕ die Analogie zum Strom i dar. Die magnetische Quelle wird durch die Durchflutung θ beschrieben, so dass in Analogie zum Ohmschen Gesetz die folgende Gleichung formuliert werden kann:

$$\underline{\theta} = R_m \cdot \underline{\phi} \quad 7.3-11$$

Die Durchflutung einer Wicklung definiert sich allgemein durch

$$\underline{\theta} = N \cdot \underline{i}. \quad 7.3-12$$

Betrachtet man den Transformator im magnetischen Kreis, so befinden sich wegen der zwei Wicklungen auch zwei magnetische Quellen in diesem Kreis. Unter Berücksichtigung der Gleichungen 7.3-11 und 7.3-12 lässt sich dann die Gleichung für den magnetischen Kreis des Transformators angeben:

$$\underline{\theta} = \underline{\theta}_1 + \underline{\theta}_2 = N_1 \cdot \underline{i}_1 + N_2 \cdot \underline{i}_2 = R_m \cdot \underline{\phi} \quad 7.3-13$$

Für den idealen Transformator wird wegen $\mu_r \rightarrow \infty$ der magnetische Widerstand $R_m = 0$, so dass sich die Gleichung 7.3-13 zu

$$N_1 \cdot \underline{i}_1 + N_2 \cdot \underline{i}_2 = R_m \cdot \underline{\phi} = 0 \quad 7.3-14$$

für ein endliches $\underline{\phi}$ vereinfacht. Aus dieser Gleichung kann nun die Stromübersetzung nach

$$\frac{\underline{i}_1}{\underline{i}_2} = \frac{\underline{I}_1}{\underline{I}_2} = -\frac{N_2}{N_1} \quad 7.3-15$$

berechnet werden.

Die Beträge der Ströme in den Wicklungen eines idealen Transformators verhalten sich zueinander umgekehrt wie die Windungszahlen der Wicklungen.

Aus den Gleichungen 7.3-9 und 7.3-15 lässt sich eine Aussage über die im Transformator umgesetzte Leistung treffen. Wegen

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = -\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} = -\frac{\underline{I}_2^*}{\underline{I}_1^*} \quad 7.3-16$$

folgt

$$\underline{U}_1 \cdot \underline{I}_1^* + \underline{U}_2 \cdot \underline{I}_2^* = \underline{S}_1 + \underline{S}_2 = 0. \quad 7.3-17$$

Im idealen Transformator geht keine Energie verloren.

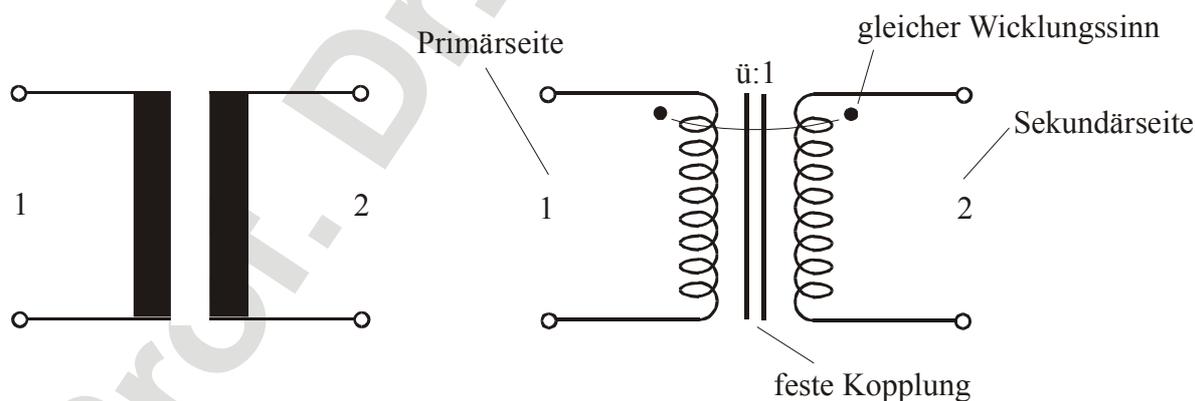
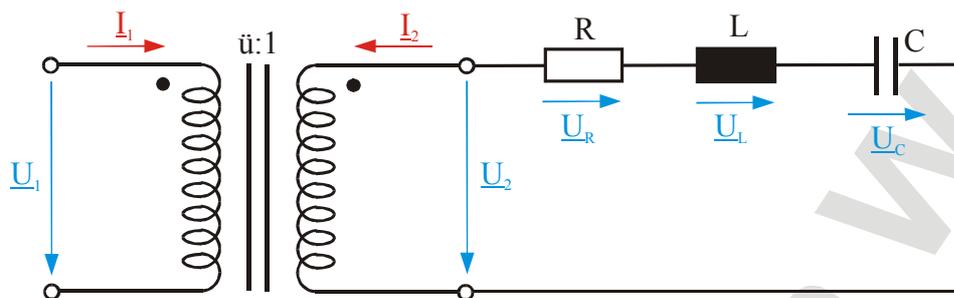


Bild 7.3-3: Schaltbilder des Transformators

Das Verhältnis der Windungszahlen der Primärwicklung N_1 und der Sekundärwicklung N_2 bezeichnet man als Übersetzungsverhältnis $\underline{ü}$:

$$\ddot{u} = \frac{N_1}{N_2} \quad 7.3-18$$

Für den Transformator gibt es zwei unterschiedliche Schaltzeichen. Beide Schaltzeichen sind im Bild 7.3-3 dargestellt. Während das linke Schaltzeichen rein symbolisch ist, enthält das rechte erheblich mehr Informationen. So wird in diesem Schaltbild neben der Angabe, ob es



sich um eine lose oder feste Kopplung handelt, auch das Übersetzungsverhältnis und der Wicklungssinn angegeben.

Bild 7.3-4: Belasteter Transformator

Der Transformator soll nun nach Bild 7.3-4 sekundärseitig mit

der Serienschaltung eines Widerstands R, einer Induktivität L und einer Kapazität C belastet werden. Im Sekundärkreis ergibt sich dann die folgende Maschengleichung:

$$\underline{U}_2 = \underline{U}_R + \underline{U}_L + \underline{U}_C = -\underline{I}_2 \cdot \underline{Z} = -\underline{I}_2 \cdot (R + jX_L + jX_C) \quad 7.3-19$$

Wegen

$$\ddot{u} = \frac{N_1}{N_2} = \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_2} = -\frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \quad 7.3-20$$

folgt

$$\underline{U}_2 = \frac{\underline{U}_1}{\ddot{u}} \quad \text{und} \quad -\underline{I}_2 = \ddot{u} \cdot \underline{I}_1, \quad 7.3-21$$

womit die Gleichung 7.3-19 in die Form

$$\begin{aligned} \underline{U}_1 &= \ddot{u}^2 \cdot \underline{I}_1 \cdot \underline{Z} = \ddot{u}^2 \cdot \underline{I}_1 \cdot (R + jX_L + jX_C) \\ &= \underline{I}_1 \cdot \left(\ddot{u}^2 \cdot R + j\omega(\ddot{u}^2 \cdot L) + \frac{1}{j\omega} \left(\frac{\ddot{u}^2}{C} \right) \right) \end{aligned} \quad 7.3-22$$

umgewandelt werden kann. Liest man nun diese Gleichung und zeichnet dazu die passende Schaltung, so ergibt sich das Bild 7.3-5. Aus diesem Bild geht hervor, dass der Transformator primärseitig mit den Bauelementen $R' = \ddot{u}^2 \cdot R$; $L' = \ddot{u}^2 \cdot L$ und $C' = C/\ddot{u}^2$ belastet wird.

Der ideale Transformator transformiert Impedanzen mit dem Quadrat seines Übersetzungsverhältnisses \ddot{u} .

Die Möglichkeit dieser Impedanztransformation wird zur Leistungsanpassung oft in der Nachrichtentechnik eingesetzt.

7.2.1 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Erläutern Sie die Bedingungen für einen idealen Transformator.
- 2) Wie verhalten sich die Spannungen an den Klemmen der Wicklungen eines idealen Transformators?
- 3) Was sind die Analogien zwischen dem elektrischen Stromkreis und dem magnetischen Kreis?
- 4) Auf welche Weise transformiert der ideale Transformator die sekundärseitigen Impedanzen in den Primärkreis?

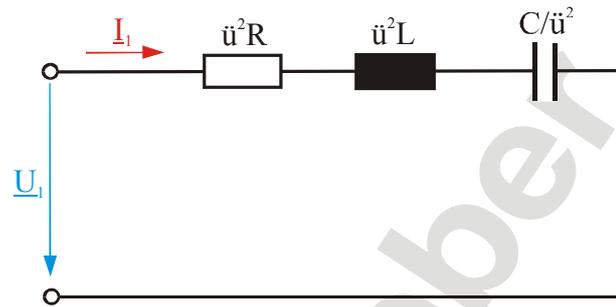


Bild 7.3-5: Transformierte Impedanzen

7.4 Der reale Transformator

7.4.1 Das Ersatzschaltbild des realen Transformators

Für die Betrachtung des realen Transformators müssen alle Vereinfachungen, die für den idealen Transformator galten, fallen gelassen werden:

- 1) Die Wicklungen sind nicht mehr perfekt leitend, sondern besitzen die Ohmschen Widerstände R_1 und R_2 .
- 2) Der Eisenkern hat eine endliche Permeabilität $\mu_r \neq \infty$, womit für dessen magnetischen Widerstand $R_m \neq 0$ folgt. Dadurch treten Verluste in dem Eisenkern auf, die diesen erwärmen. Darüber hinaus tritt wegen $R_m \neq 0$ ein Teilfluss, der so genannte Streufluss, aus dem Eisen aus.
- 3) Zwischen dem Eisenkern und den Wicklungen existiert ein Luftspalt, so dass ein zusätzlicher Streufluss die Folge ist.

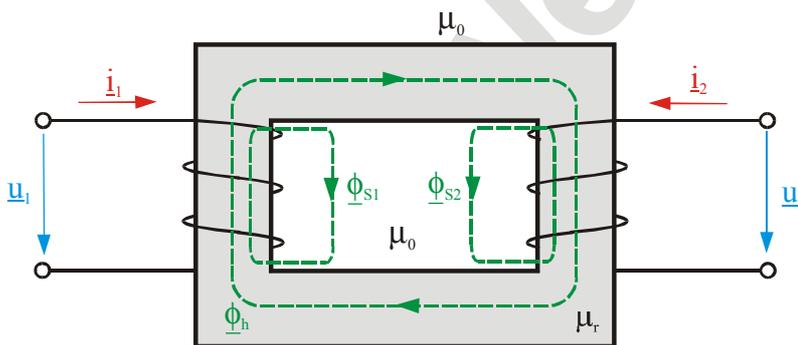


Bild 7.4.1-1: Magnetische Flüsse im realen Transformator

Im Bild 7.4.1-1 sind der Hauptfluss $\underline{\phi}_h$, der beide Wicklungen durchsetzt, und die Streuflüsse $\underline{\phi}_{S1}$ und $\underline{\phi}_{S2}$ dargestellt.

Auf Grund der magnetischen Flüsse und des Ohmschen Widerstands der Wicklungen berechnen sich die Spannungen an den Klemmen der Wicklung durch die folgenden Gleichungen:

$$\underline{u}_1 = \underline{i}_1 \cdot R + N_1 \cdot \frac{d}{dt} (\underline{\phi}_{S1} + \underline{\phi}_h) \quad 7.4.1-1$$

$$\underline{u}_2 = \underline{i}_2 \cdot R + N_2 \cdot \frac{d}{dt} (\underline{\phi}_{S2} + \underline{\phi}_h) \quad 7.4.1-2$$

Mit dem Ziel, für den realen Transformator ein Ersatzschaltbild zu entwickeln, sollen zunächst in den Gleichungen 7.4.1-1 und 7.4.1-2 die Streuflüsse $\underline{\phi}_{S1}$ und $\underline{\phi}_{S2}$ genauer betrachtet werden. Wegen

$$\underline{u} = N \cdot \frac{d\phi}{dt} = L \cdot \frac{di}{dt} \quad 7.4.1-3$$

lassen sich für die Streuflüsse über so genannte Streuinduktivitäten L_{S1} und L_{S2} in der Form

$$N_1 \cdot \frac{d\phi_{S1}}{dt} = L_{S1} \cdot \frac{di_1}{dt} \quad 7.4.1-4$$

und

$$N_2 \cdot \frac{d\phi_{S2}}{dt} = L_{S2} \cdot \frac{di_2}{dt} \quad 7.4.1-5$$

eingeführen. Damit können die Gleichungen 7.4.1-1 und 7.4.1-2 zunächst wie folgt geschrieben werden:

$$\underline{u}_1 = \underline{i}_1 \cdot R + L_{S1} \cdot \frac{di_1}{dt} + N_1 \cdot \frac{d\phi_h}{dt} \quad 7.4.1-6$$

$$\underline{u}_2 = \underline{i}_2 \cdot R + L_{S2} \cdot \frac{di_2}{dt} + N_2 \cdot \frac{d\phi_h}{dt} \quad 7.4.1-7$$

Um ein Ersatzschaltbild zu entwickeln, müssen noch die jeweils letzten Terme der Gleichungen 7.4.1-6 und 7.4.1-7 umgewandelt werden. Hierzu wird auf die Gleichung 7.3-13 zurückgegriffen:

$$\underline{\theta} = \underline{\theta}_1 + \underline{\theta}_2 = N_1 \cdot \underline{i}_1 + N_2 \cdot \underline{i}_2 = R_m \cdot \underline{\phi}$$

Leitet man diese Gleichung nach der Zeit t ab, so folgt:

$$N_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + N_2 \cdot \frac{di_2}{dt} = R_m \cdot \frac{d\phi}{dt} \quad 7.4.1-8$$

Diese Gleichung wird jetzt umgestellt:

$$N_1 \cdot \frac{d\phi}{dt} = \frac{N_1^2}{R_m} \cdot \frac{di_1}{dt} + \frac{N_1 \cdot N_2}{R_m} \cdot \frac{di_2}{dt} \quad 7.4.1-9$$

Nach Gleichung 7.4.1-3 kann jetzt die so genannte Hauptinduktivität des Primärkreises L_{h1} und die Gegeninduktivität M eingeführt werden:

$$N_1 \cdot \frac{d\phi}{dt} = L_{h1} \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt} \quad 7.4.1-10$$

Die Einführung der Gegeninduktivität M ist bei der Betrachtung eines Transformators mit fester Kopplung über einen Eisenkern unvorteilhaft. Günstiger ist die Darstellung der Gleichung 7.4.1-9 in der Form

$$\begin{aligned} N_1 \cdot \frac{d\phi}{dt} &= L_{h1} \cdot \frac{di_1}{dt} + L_{h1} \cdot \frac{R_m}{N_1^2} \cdot \frac{N_1 \cdot N_2}{R_m} \cdot \frac{di_2}{dt} \\ &= L_{h1} \cdot \frac{d}{dt} \left(\underline{i}_1 + \frac{\underline{i}_2}{\underline{u}} \right) = L_{h1} \cdot \frac{di_{M1}}{dt} \end{aligned} \quad 7.4.1-11$$

mit dem Magnetisierungsstrom \underline{i}_{M1} , der ein Maß für den Hauptfluss ist. Hieraus resultiert nun die Spannungsgleichung des Primärkreises:

$$\underline{u}_1 = \underline{i}_1 \cdot R + L_{S1} \cdot \frac{d\underline{i}_1}{dt} + L_{h1} \cdot \frac{d\underline{i}_{M1}}{dt} \quad 7.4.1-12$$

Aus dieser Gleichung kann nun die Ersatzschaltung des Primärkreises nach Bild 7.4.1-2 entwickelt werden. Damit geht man hier den umgekehrten Weg. Aus einem Netzwerk wird nicht die Maschen- und Knotenpunktgleichung ermittelt, sondern aus einer Maschengleichung, die implizit eine Knotengleichung enthält, wird das Netzwerk extrahiert. Im Bild 7.4.1-2 bildet der Strom \underline{i}_2/\ddot{u} die Verbindung zum Sekundärkreis.

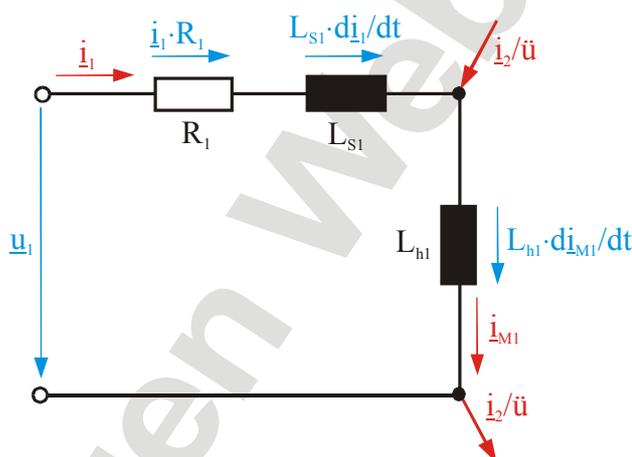


Bild 7.4.1-2: Ersatzschaltung des Primärkreises

Verfährt man ausgehend von der Gleichung 7.4.1-8 für den Sekundärkreis in der ähnlichen Form, so erhält man die folgenden Schritte zur Aufstellung der resultierenden Spannungsgleichung für den Sekundärkreis:

$$\begin{aligned} N_2 \cdot \frac{d\phi}{dt} &= \frac{N_2^2}{R_m} \cdot \frac{d\underline{i}_2}{dt} + \frac{N_1 \cdot N_2}{R_m} \cdot \frac{d\underline{i}_1}{dt} = \left[L_{h2} \cdot \frac{d\underline{i}_2}{dt} + M \cdot \frac{d\underline{i}_1}{dt} \right] \\ &= \frac{N_1 \cdot N_2^2}{N_1 \cdot R_m} \cdot \frac{d\underline{i}_2}{dt} + \frac{N_1 \cdot N_1 \cdot N_2}{N_1 \cdot R_m} \cdot \frac{d\underline{i}_1}{dt} \\ &= \frac{1}{\ddot{u}} \cdot \frac{N_1 \cdot N_2}{R_m} \cdot \frac{d\underline{i}_2}{dt} + \frac{1}{\ddot{u}} \cdot \frac{N_1^2}{R_m} \cdot \frac{d\underline{i}_1}{dt} = \left[\frac{1}{\ddot{u}} \cdot M \cdot \frac{d\underline{i}_2}{dt} + \frac{1}{\ddot{u}} \cdot L_{h1} \cdot \frac{d\underline{i}_1}{dt} \right] \quad 7.4.1-13 \\ &= \frac{1}{\ddot{u}} \cdot L_{h1} \cdot \frac{d}{dt} \left(\underline{i}_1 + \frac{\underline{i}_2}{\ddot{u}} \right) \\ &= \frac{1}{\ddot{u}^2} \cdot L_{h1} \cdot \frac{d}{dt} (\underline{i}_1 \cdot \ddot{u} + \underline{i}_2) = \frac{1}{\ddot{u}^2} \cdot L_{h1} \cdot \frac{d\underline{i}_{M1} \cdot \ddot{u}}{dt} \end{aligned}$$

Damit folgt für die Spannungsgleichung 7.4.1-7 des Sekundärkreises:

$$\underline{u}_2 = \underline{i}_2 \cdot R + L_{S2} \cdot \frac{d\underline{i}_2}{dt} + \frac{1}{\ddot{u}^2} \cdot L_{h1} \cdot \frac{d\underline{i}_{M1} \cdot \ddot{u}}{dt} \quad 7.4.1-14$$

Aus dieser Gleichung kann nun die Ersatzschaltung des Sekundärkreises nach Bild 7.4.1-3 entwickelt werden.

Im nächsten Schritt sollen nun die Bilder 7.4.1-2 und 7.4.3-3 zusammengefügt werden. Dies geschieht zunächst über einen idealen Transformator. Hierzu wird die Induktivität L_{h1}/\ddot{u}^2 des

Sekundärkreis in den Primärkreis transformiert. Damit entsteht die Ersatzschaltung nach Bild 7.4.1-4, in dem die Beziehungen

$$\underline{u}_1^* = L_{h1} \cdot \frac{di_{M1}}{dt} \quad 7.4.1-15$$

und

$$\underline{u}_2^* = \frac{u_1^*}{\ddot{u}} = \frac{1}{\ddot{u}} \cdot L_{h1} \cdot \frac{di_{M1}}{dt} \quad 7.4.1-16$$

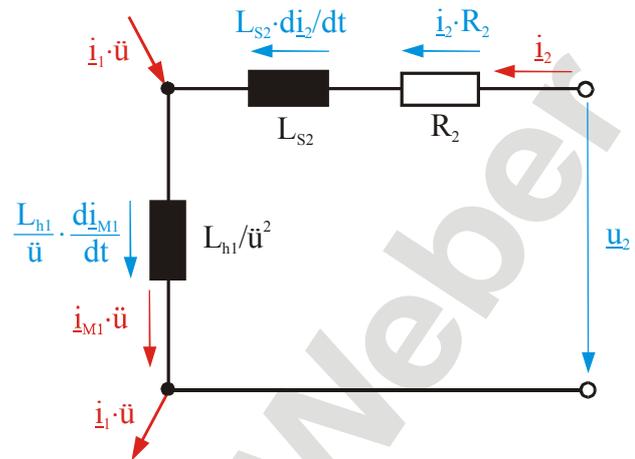


Bild 7.4.1-3: Ersatzschaltung des Sekundärkreises

gelten. Der Stern an den Spannungen steht hier nicht für die konjugiert komplexe Form, sondern kennzeichnet nur eine andere Ebene im Schaltbild.

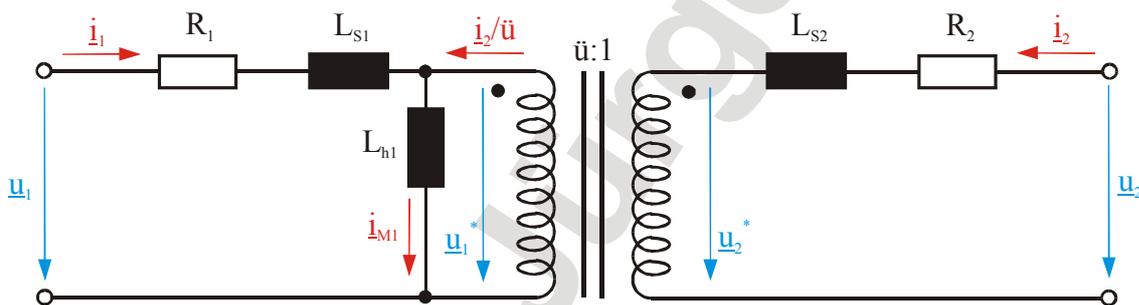


Bild 7.4.1-4: Zusammenfassung der Maschen

Im nächsten Schritt werden die Streuinduktivität L_{S2} und der Wicklungswiderstand R_2 vom Sekundärkreis in den Primärkreis transformiert. Damit entsteht das Bild 7.4.1-5. Den Abschluss der Entwicklung der Ersatzschaltung des realen Transformators, bildet der Verzicht auf die Darstellung des idealen Transformators $\ddot{u}:1$ und der Übergang zu den komplexen Effek-

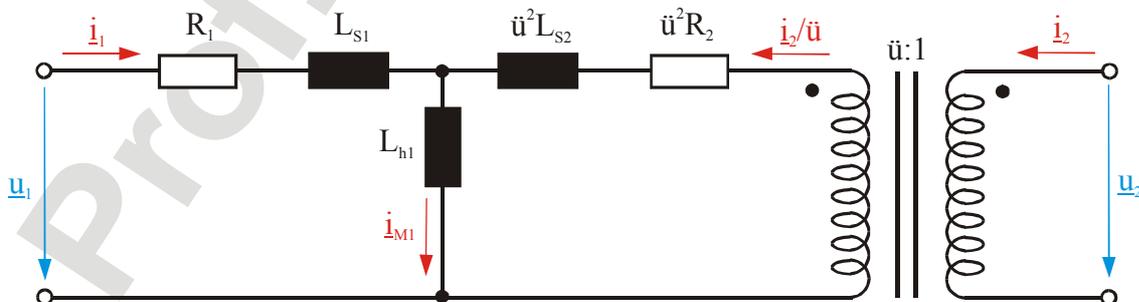


Bild 7.4.1-5: Transformation in den Primärkreis

tivwerten für die Spannung und den Strom. Diese Schritte sind im Bild 7.4.1-6 vollzogen. Es repräsentiert das endgültige Ersatzschaltbild des realen Transformators. In dem Ersatzschaltbild wurden noch weitere Eisenverluste, die von der Hysterese des Eisens und den Wirbelstromverlusten herrühren, durch den Widerstand R_{FE} parallel zur Hauptinduktivität L_{h1} berücksichtigt. Ferner gilt für die transformierte Streuinduktivität L_{S2} und den transformierten Wicklungswiderstand R_2 :

$$L_{S2}' = \ddot{u}^2 \cdot L_{S2} \quad 7.4.1-17$$

$$R_2' = \ddot{u}^2 \cdot R_2 \quad 7.4.1-18$$

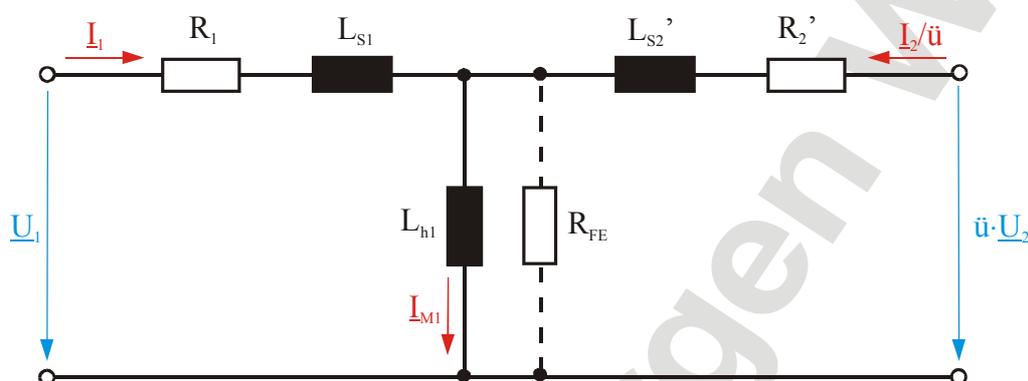


Bild 7.4.1-6: Ersatzschaltbild des realen Transformators

7.4.2 Die Entwicklung des Zeigerdiagramms des realen Transformators

Um sich die Spannungs- und Stromverhältnisse im Transformator klar zu machen, soll das Zeigerdiagramm der Spannungen und Ströme des realen Transformators nach Bild 7.4.1-6 entwickelt werden. Dabei sollen ausgehend vom idealen Transformator schrittweise die Ersatzbauelemente eingeführt werden. Damit im Primärkreis ein Strom \underline{I}_2 fließt, wird dieser mit dem Scheinwiderstand $\underline{Z} = Z \exp(j\varphi)$ belastet.

1) Idealer Transformator

Das Ersatzschaltbild des idealen Transformators ist im Bild 7.4.2-1 dargestellt. Aus ihm ergeben sich die Spannungsgleichung

$$\underline{U}_1 = \ddot{u} \cdot \underline{U}_2 = \underline{U}_2' \quad 7.4.2-1$$

und die Stromgleichung

$$\underline{I}_1 = -\frac{1}{\ddot{u}} \cdot \underline{I}_2 = -\underline{I}_2' \quad 7.4.2-2$$

Das Zeigerdiagramm, das durch die Belastung \underline{Z} den Phasenwinkel φ aufgeprägt bekommt, wird im Bild 7.4.2-2 gezeigt.

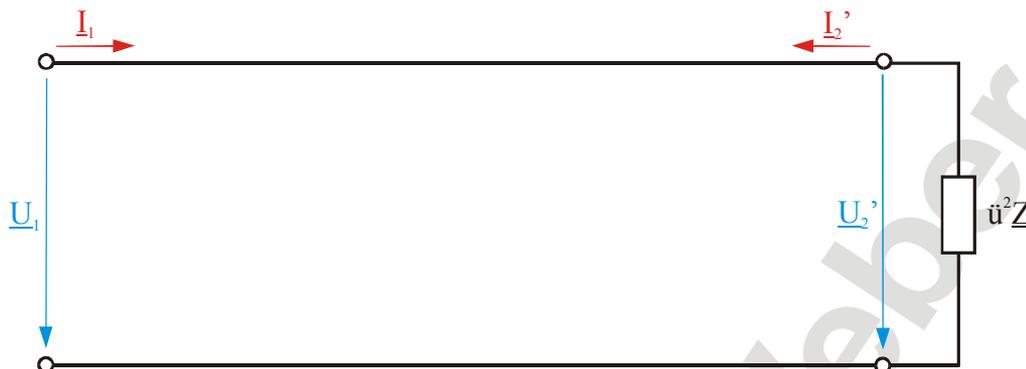


Bild 7.4.2-1: Ersatzschaltbild des idealen Transformators

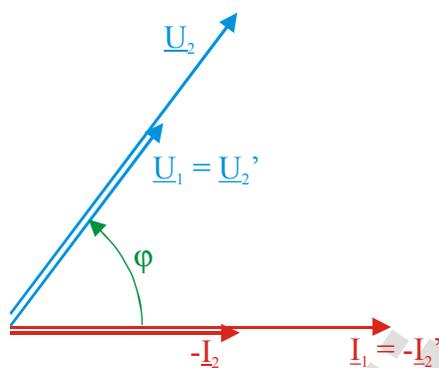


Bild 7.4.2-2: Zeigerdiagramm des idealen Transformators

2) Berücksichtigung der Wicklungswiderstände

Berücksichtigt man die Wicklungswiderstände R_1 und R_2 , so ergibt sich die Ersatzschaltung nach Bild 7.4.2-3.

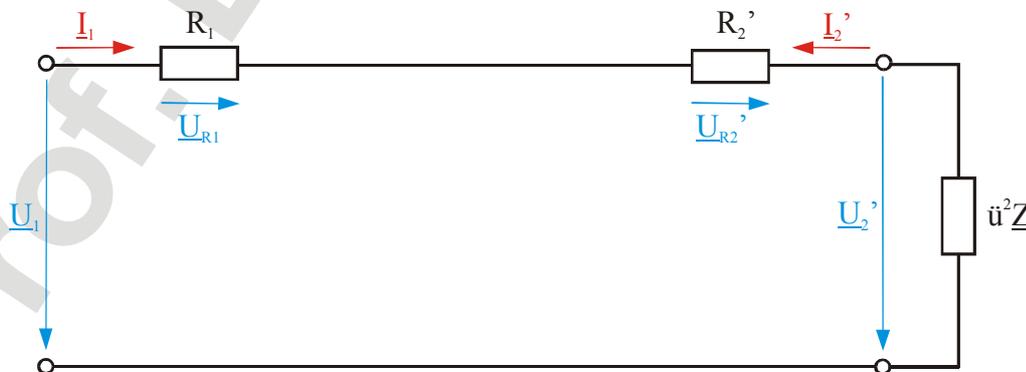


Bild 7.4.2-3: Ersatzschaltbild unter Berücksichtigung der Wicklungswiderstände

Aus ihm ergeben sich die Spannungsgleichung

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{R1} + \underline{U}_{R2}' + \underline{U}_2' \quad 7.4.2-3$$

und die Stromgleichung

$$\underline{I}_1 = -\frac{1}{\ddot{u}} \cdot \underline{I}_2 = -\underline{I}_2' \quad 7.4.2-4$$

Das entsprechende Zeigerdiagramm wird im Bild 7.4.2-4 gezeigt.

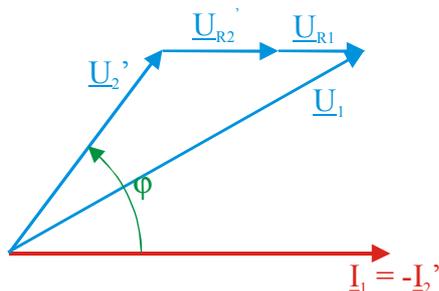


Bild 7.4.2-4: Zeigerdiagramm unter Berücksichtigung der Wicklungswiderstände

3) Berücksichtigung der Streuung des magnetischen Flusses

Berücksichtigt man neben den Wicklungswiderständen R_1 und R_2 ebenfalls die magnetische Streuung durch die Streuinduktivitäten L_{S1} und L_{S2} , so ergibt sich die Ersatzschaltung nach Bild 7.4.2-5.

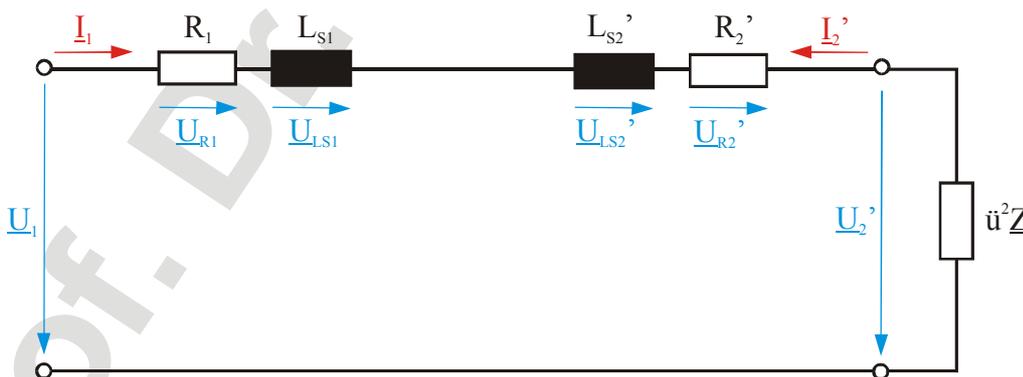


Bild 7.4.2-5: Erweitertes Ersatzschaltbild unter Berücksichtigung der Streuinduktivitäten

Aus ihm ergeben sich die Spannungsgleichung

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{R1} + \underline{U}_{LS1} + \underline{U}_{R2}' + \underline{U}_{LS2}' + \underline{U}_2' \quad 7.4.2-5$$

und die Stromgleichung

$$\underline{I}_1 = -\frac{1}{\ddot{u}} \cdot \underline{I}_2 = -\underline{I}_2' \quad 7.4.2-6$$

Das entsprechende Zeigerdiagramm wird im Bild 7.4.2-6 gezeigt.

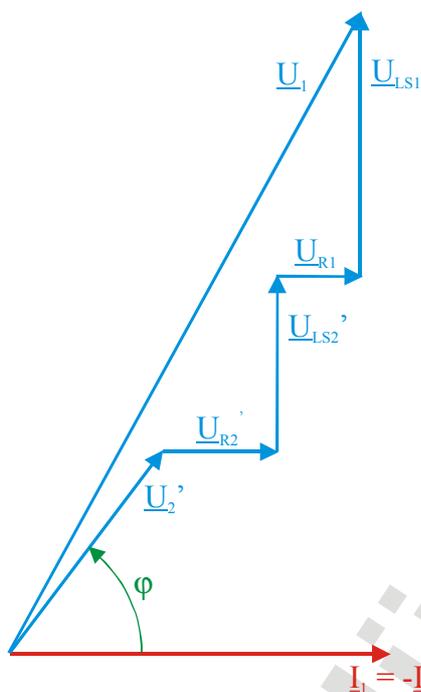


Bild 7.4.2-6: Erweitertes Zeigerdiagramm unter Berücksichtigung der Streuinduktivitäten

Im Zeigerdiagramm nach Bild 7.4.2-6 entsteht das so genannte „Kapsche Dreieck“. Um das Dreieck sichtbar zu machen, fasst man zunächst die Wicklungswiderstände und die Streuinduktivitäten zusammen:

$$R = R_1 + \ddot{u}^2 \cdot R_2 \quad \rightarrow \quad \underline{U}_R = \underline{U}_{R1} + \underline{U}_{R2}' \quad 7.4.2-7$$

$$X_{LS} = \omega \cdot (L_{S1} + \ddot{u}^2 \cdot L_{S2}) \quad \rightarrow \quad \underline{U}_{LS} = \underline{U}_{LS1} + \underline{U}_{LS2}' \quad 7.4.2-8$$

Zeichnet man unter Berücksichtigung der beiden letzten Gleichungen das Zeigerdiagramm nach Bild 7.4.2-6 um, so erhält man ein Zeigerdiagramm, das im Bild 7.4.2-7 dargestellt ist. Das Kapsche Dreieck spielt bei Leistungstransformatoren in der Energietechnik eine große Rolle. Es beinhaltet die Wicklungswiderstände sowie die Streuinduktivitäten und somit die Hauptverluste des Transformators. Diese Verluste erscheinen zunächst unerwünscht. Kommt es aber durch ein Missgeschick oder einen Unfall zu einem sekundärseitigen Kurzschluss mit $\underline{U}_2 = 0$, so begrenzt das Kapsche Dreieck den Strom \underline{I}_1 und somit die Belastung auf den

Zuleitungen zum Transformator. Das Kappsche Dreieck ist somit ein Maß für den Schutz vor einem sekundärseitigen Kurzschluss (Bild 7.4.2-8).

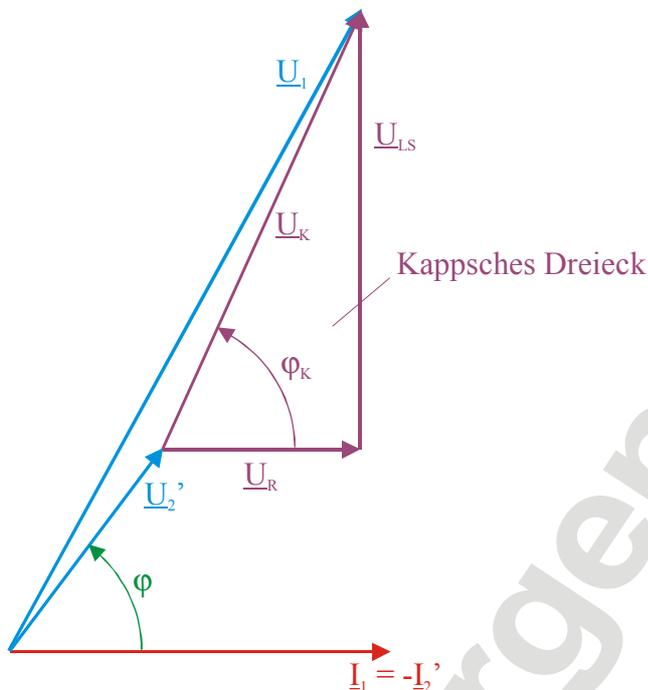


Bild 7.4.2-7: Zeigerdiagramm mit dem Kappschen Dreieck

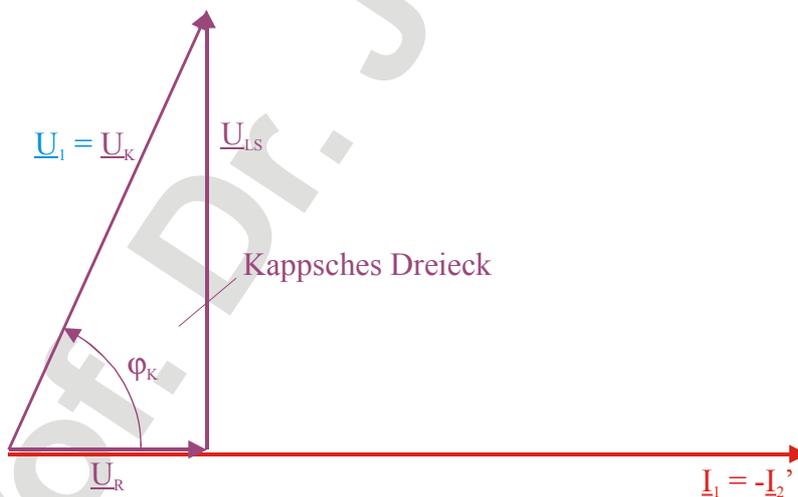


Bild 7.4.2-8: Zeigerdiagramm mit dem Kappschen Dreieck bei sekundärseitigem Kurzschluss

\underline{U}_K bezeichnet man deshalb als die Kurzschlussspannung. Sie ist bei sekundärseitigem Kurzschluss identisch mit der Eingangsspannung \underline{U}_1 . Mit φ_K bezeichnet

man den Kurzschlusswinkel. Er beschreibt bei einem sekundärseitigen Kurzschluss die Phasenverschiebung zwischen dem Eingangsstrom \underline{I}_1 und der Eingangsspannung \underline{U}_1 .

4) Berücksichtigung der Hauptinduktivität

In den Betrachtungen 1) bis 3) dieses Abschnitts wurde die Hauptinduktivität nicht berücksichtigt. Sie wurde als unendlich groß interpretiert, so dass der Strom \underline{I}_{M1} durch die Hauptinduktivität zu Null wurde. Wegen $\mu_r \neq \infty$ und $R_m \neq 0$ soll die Voraussetzung $\underline{I}_{M1} = 0$ jetzt fallen gelassen werden. Damit ergibt sich die Ersatzschaltung nach Bild 7.4.2-9.

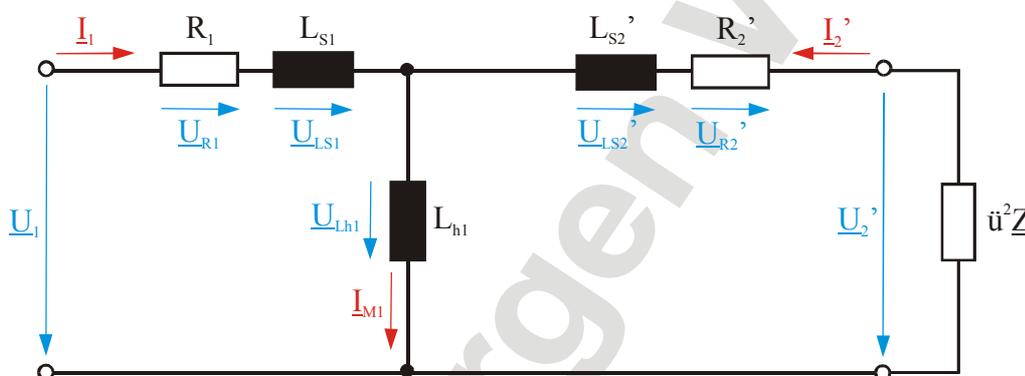


Bild 7.4.2-9: Erweitertes Ersatzschaltbild unter Berücksichtigung der Hauptinduktivität

Aus ihm ergeben sich die Spannungsgleichungen

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{R1} + \underline{U}_{LS1} + \underline{U}_{Lh1} \quad 7.4.2-9$$

und

$$\underline{U}_{Lh1} = \underline{U}_{R2'} + \underline{U}_{LS2'} + \underline{U}_2' \quad 7.4.2-10$$

sowie die Stromgleichung

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{M1} - \underline{I}_2' \quad 7.4.2-11$$

Das entsprechende Zeigerdiagramm wird im Bild 7.4.2-10 gezeigt. In dem Bild eilt die Spannung \underline{U}_{Lh1} dem Strom \underline{I}_{M1} um 90° voraus. Der Strom \underline{I}_1 und die Spannung \underline{U}_{R1} sind in Phase, während die Spannung \underline{U}_{LS1} dem Strom \underline{I}_1 um 90° voreilt.

5) Berücksichtigung der Eisenverluste

Abschließend soll noch der Eisenverlust durch den Ohmschen Widerstand R_{FE} berücksichtigt werden. Das gesamte Ersatzschaltbild des realen Transformators ist im Bild 7.4.2-11 dargestellt.

Aus ihm ergeben sich die Spannungsgleichungen

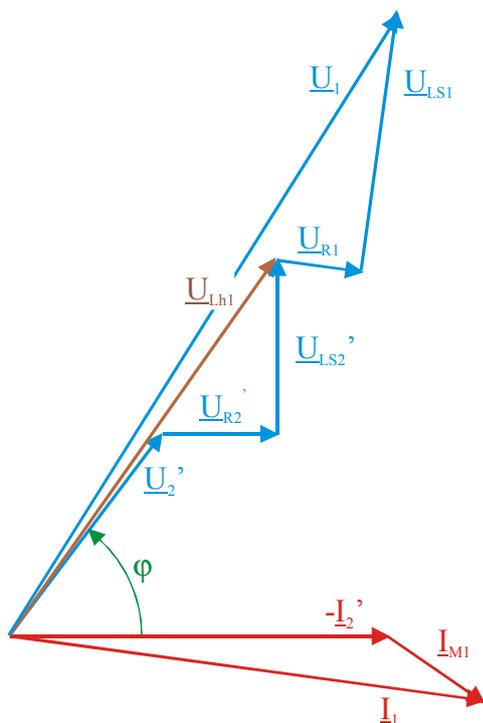


Bild 7.4.2-10: Erweitertes Zeigerdiagramm unter Berücksichtigung der Hauptinduktivität

$$\underline{U}_1 = \underline{U}_{R1} + \underline{U}_{LS1} + \underline{U}_{Lh1} \quad 7.4.2-12$$

und

$$\underline{U}_{Lh1} = \underline{U}_{R2'} + \underline{U}_{LS2'} + \underline{U}_2' \quad 7.4.2-13$$

sowie die Stromgleichung

$$\underline{I}_1 = \underline{I}_{M1} + \underline{I}_{RFE} - \underline{I}_2' \quad 7.4.2-14$$

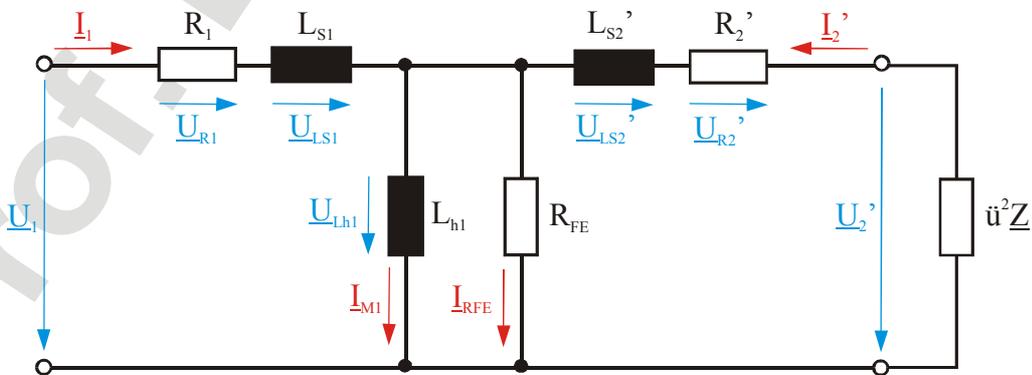


Bild 7.4.2-11: Erweitertes Ersatzschaltbild unter Berücksichtigung der Eisenverluste

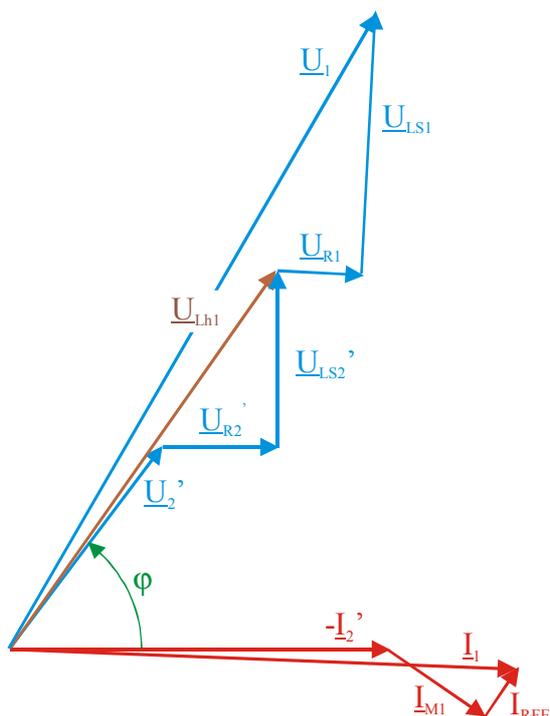


Bild 7.4.2-12: Erweitertes Zeigerdiagramm unter Berücksichtigung der Eisenverluste

Aus dem letzten Ersatzschaltbild und dem letzten Zeigerdiagramm lassen sich die Verhältnisse bei sekundärseitigem Kurzschluss- und Leerlaufbetrieb ableiten.

Im Kurzschlussbetrieb ist der Betrag der Spannung \underline{U}_{Lh1} gering. Damit fließen nur ein geringer Magnetisierungsstrom \underline{I}_{M1} und ein geringer Strom \underline{I}_{RFE} . Damit ist auch der magnetische Hauptfluss $\underline{\phi}_h$ im Eisenkern sowie die Erwärmung des Eisenkerns durch die Eisenverluste R_{FE} gering. Eine Erwärmung des Transformators findet hauptsächlich über die Wicklungswiderstände statt.

Im Leerlaufbetrieb weicht die Spannung an der Hauptinduktivität L_{h1} und am Widerstand R_{FE} nur geringfügig von der Eingangsspannung \underline{U}_1 ab. Damit nimmt der Betrag des magnetischen Hauptflusses $\underline{\phi}_h$ seinen Maximalwert an. Gleichzeitig sind auch die Eisenverluste maximal. Eine Erwärmung des Transformators findet jetzt hauptsächlich über die Erwärmung des Eisenkerns statt.

7.4.3 Spezielle Arten von Transformatoren

7.4.3.1 Der Lufttransformator

Der Lufttransformator besitzt keinen Eisenkern. Damit ist er für hohe Frequenzen geeignet, da jetzt keine Ummagnetisierungsverluste im Eisenkern entstehen, die mit zunehmender Fre-

quenz anwachsen. Auf der anderen Seite lassen sich mit diesem Transformator keine großen Leistungen übertragen, so dass seine Anwendung auf die Nachrichtentechnik beschränkt ist.

Um das Ersatzschaltbild dieses Transformators zu entwickeln, werden die Widerstände der Primärwicklung und der Sekundärwicklung vernachlässigt. Ferner wird eine Kopplung der Kreise mit $k = 1$ angenommen, die durch das Übereinanderwickeln der beiden Wicklungen in Form von Ringspulen annähernd erreicht wird.

Ausgangspunkt der folgenden Betrachtung sind die Spannungsgleichungen 7.2-7 und 7.2-8:

$$u_1(t) = N_1 \left(\frac{d\phi_{11}}{dt} + \frac{d\phi_{12}}{dt} \right)$$

$$u_2(t) = N_2 \left(\frac{d\phi_{21}}{dt} + \frac{d\phi_{22}}{dt} \right)$$

Nach Gleichung 7.4.1-3

$$\underline{u} = N \cdot \frac{d\phi}{dt} = L \cdot \frac{di}{dt}$$

können diese in die Form

$$\underline{u}_1(t) = L_{11} \cdot \frac{di_1}{dt} + L_{12} \cdot \frac{di_2}{dt} \quad 7.4.3.1-1$$

$$\underline{u}_2(t) = L_{21} \cdot \frac{di_1}{dt} + L_{22} \cdot \frac{di_2}{dt} \quad 7.4.3.1-2$$

umgeschrieben werden. Durch die Kopplung $k = 1$ folgt für die Gegeninduktivitäten

$$L_{12} = L_{21} = M. \quad 7.4.3.1-3$$

Schreibt man zur Vereinfachung für

$$L_{11} = L_1$$

und

$$L_{22} = L_2,$$

so folgt für die Spannungsgleichungen:

$$\underline{u}_1(t) = L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt} \quad 7.4.3.1-4$$

$$\underline{u}_2(t) = M \cdot \frac{di_1}{dt} + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} \quad 7.4.3.1-5$$

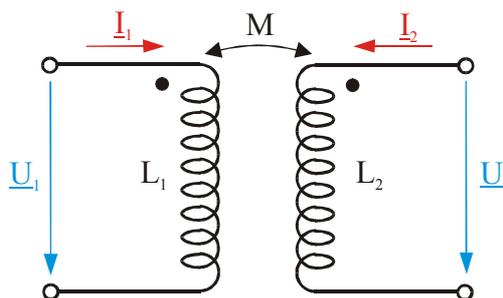


Bild 7.4.3.1-1: Lufttransformator

Für diese Spannungsgleichungen lässt sich noch keine befriedigende Ersatzschaltung entwickeln. Primär- und Sekundärkreis sind hier noch vollständig voneinander getrennt, so dass nur eine Ersatzschaltung nach Bild 7.4.3.1-1 angeben kann. In dem Bild wurden bereits die komplexen Effektivwerte der Spannungen und der Ströme verwendet.

Um zu einer Ersatzschaltung mit den eingeführten Induktivitäten zu gelangen, werden die Spannungsgleichungen 7.4.3.1-4 und 7.4.3.1-5 in der Form

$$\begin{aligned} \underline{u}_1(t) &= L_1 \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{di_2}{dt} \quad \left(+ M \cdot \frac{di_1}{dt} - M \cdot \frac{di_2}{dt} \right) \\ &= (L_1 - M) \cdot \frac{di_1}{dt} + M \cdot \frac{d}{dt} (i_1 + i_2) \end{aligned} \quad 7.4.3.1-6$$

und

$$\begin{aligned} \underline{u}_2(t) &= M \cdot \frac{di_1}{dt} + L_2 \cdot \frac{di_2}{dt} \quad \left(+ M \cdot \frac{di_2}{dt} - M \cdot \frac{di_1}{dt} \right) \\ &= (L_2 - M) \cdot \frac{di_2}{dt} + M \cdot \frac{d}{dt} (i_1 + i_2) \end{aligned} \quad 7.4.3.1-7$$

umgewandelt. Aus diesen Gleichungen lässt sich nun die Ersatzschaltung nach Bild 7.4.3.1-2 angeben.

7.4.3.2 Der Spartransformator

Eine weitere Art des Transformators stellt der Spartransformator dar. Bei dem Spartransformator handelt es sich um einen Transformator mit Eisenkern, der nur eine Wicklung mit Schleiferabgriff besitzt. Der Transformator mit seinen Beschaltungsmöglichkeiten ist im Bild 7.4.3.2-1 dargestellt.

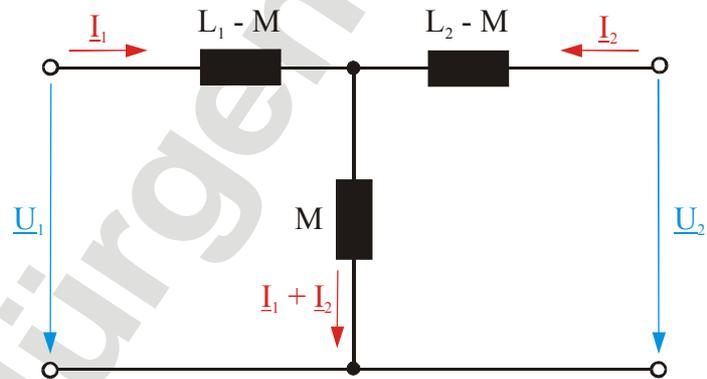


Bild 7.4.3.1-2: Ersatzschaltbild des Lufttransformators

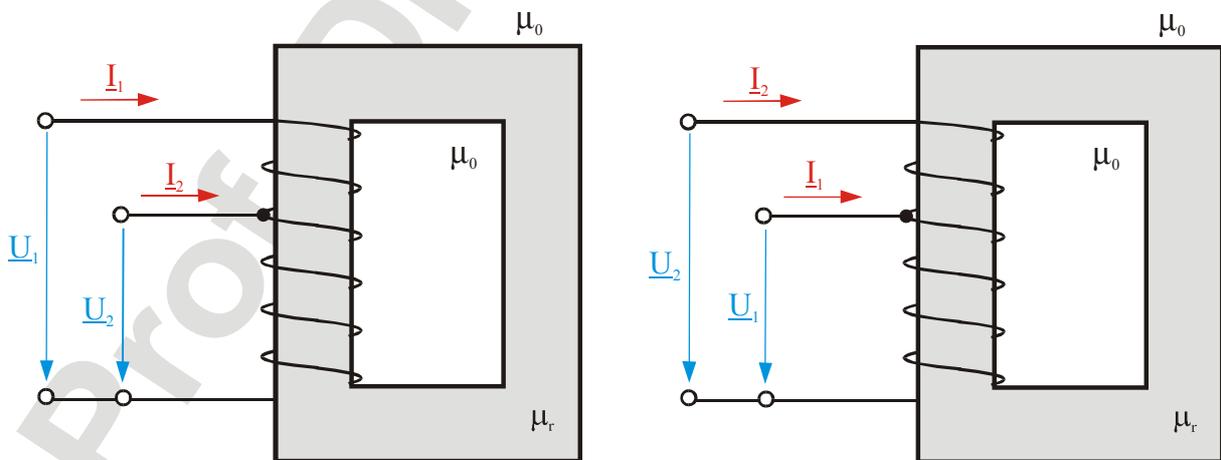


Bild 7.4.3.2-1: Beschaltungsmöglichkeiten eines Spartransformators

Die Betrachtung des Spartransformators kann analog zu den Betrachtungen des realen Transformators mit 2 getrennten Wicklungen durchgeführt werden. Zu beachten ist aber, dass dieser Transformator keine galvanische Trennung zwischen dem Eingang und dem Ausgang besitzt.

7.4.4 Fragen- und Aufgabensammlung

- 1) Welche Vereinfachungen, die bei einem idealen Transformator galten, müssen bei einem realen Transformator fallen gelassen werden?
- 2) Was versteht man unter dem Kappschen Dreieck?
- 3) In welchem der beiden sekundärseitigen Extremfälle „Kurzschluss“ oder „Leerlauf“ nimmt der Betrag des Hauptflusses im Eisenkern eines realen Transformators den maximalen Wert an?
- 4) Wodurch erwärmt sich der Eisenkern eines Transformators?
- 5) Zeichnen Sie die komplette Ersatzschaltung eines realen Transformators mit fester Kopplung und entwickeln Sie daraus das Zeigerdiagramm der Spannungen und der Ströme.
- 6) Wo liegt der Einsatzbereich eines Lufttransformators?
- 7) Was ist ein Spartransformator?
- 8) Was versteht man unter galvanischer Trennung?

Aufgabe 7.4.4-1:

Reale Transformatoren mit Eisenkern besitzen eine gewisse Streuung bezüglich des magnetischen Flusses. Kann diese damit verbundene Streuinduktivität erwünscht sein? Diskutieren Sie diesbezüglich die Wirkung eines sekundärseitigen Kurzschlusses auf den Primärkreis.

(Lösung: Streuinduktivitäten schützen vor Zerstörung)

Aufgabe 7.4.4-2:

Wie verhält sich bei einem realen Transformator mit Eisenkern die Amplitude des magnetischen Hauptflusses in Abhängigkeit von dem sekundärseitig entnommenen Laststrom? Diskutieren Sie dies anhand des Ersatzschaltbildes mit den Werten:

$$R_1 = 100\Omega$$

$$R_2 = 20\Omega$$

$$X_{LS1} = 200\Omega$$

$$X_{LS2} = 40\Omega$$

$$X_{Lh1} = 1k\Omega$$

$$\ddot{u} = 2$$

(Lösung: $\underline{I}_{M1}/\underline{U}_1 = 830,5\mu S \exp(-j85^\circ)$ bei Leerlauf; $\underline{I}_{M1}/\underline{U}_1 = 407,82\mu S \exp(-j88^\circ)$ bei Kurzschluss)

7.5 Literaturhinweise

- 1) Moeller/Frohne Grundlagen der Elektrotechnik
- 2) Weißgerber Elektrotechnik für Ingenieure II
- 3) Pregla Grundlagen der Elektrotechnik I
- 4) Zastrow Elektrotechnik
- 5) Linse Elektrotechnik für Maschinenbauer
- 6) Kories Taschenbuch der Elektrotechnik