Grundlagen der Elektrotechnik

Inhalt

1 Einführung

Die Elektrotechnik hat in den letzten ca. 100 Jahren eine ständig wachsende Bedeutung für unser tägliches Leben gewonnen und ist heute daraus nicht mehr wegzudenken.

Drei wesentliche Gründe hierfür sind:

- Die Wandlungsfähigkeit der elektrischen Energie

  Elektrische Energie ist umzuformen in

  - Wärmeenergie (Heizung, Ofen, Elektroherd, ...)
  - Licht (Lampen, Laser,...)
  - weitere elektromagnetische Wellen (Radiowellen, Mikrowellen,...)
  - mechanische Antriebsenergie (Elektromotor),
  - Schall (Lautsprecher),
  - chemische Energie (Galvanik, Akkumulator,...),
  - ...

- Die Transportierbarkeit der elektrischen Energie

  Elektrische Energie lässt sich mit geringen Verlusten über große Entfernungen transportieren (Überlandleitungen)

- Die Einfachheit der Bedienung elektrischer Maschinen und Anlagen, der geringe Wartungsaufwand, die Sauberkeit, die sofortige Betriebsbereitschaft und ihr geringer Platzbedarf.

Seit etwa 50 Jahren kommt dazu noch die rasante Entwicklung der Elektronik in den Bereichen der Kommunikations- und Informationstechnik sowie der Steuer- und Regelungstechnik von Maschinen, Anlagen, Geräten und Fahrzeugen.

Elektrizität kann man nicht sehen, sondern nur an ihren Wirkungen erkennen. Eine dieser Wirkungen war schon im Altertum in Griechenland bekannt: Wenn man Bernstein mit einem Wolltuch reibt, übt er (geringe) Anziehungskraft auf (leichte) Gegenstände aus. Daher kommt auch die Bezeichnung für diese physikalische Erscheinung. Die Bezeichnung „Elektrizität“ geht auf das griechische Wort für Bernstein „elektron“ zurück.

Elektrizität bedeutet somit wörtlich übersetzt: „Bernsteinkraft besitzend“.

Woher kommt nun diese Kraft?

Eine plausible Erklärung liefert das Bohr’sche Atommodell. Als Atome werden diejenigen Grundbausteine der Materie bezeichnet, die mit chemischen Methoden nicht weiter zerlegt werden können (griech. „atomos“ = das Unteilbare).

Nach Bohr besteht das nicht wirklich unteilbare Atom aus einem kompakten Atomkern und einer im Vergleich dazu relativ ausgedehnten Atomhülle.

Der **Atomkern** wiederum ist aus zwei unterschiedlichen Teilchen aufgebaut, die je nach chemischem Element in ihm in unterschiedlicher Häufigkeit enthalten sind:

- **Neutronen**, die keinen Einfluss auf die elektrischen Eigenschaften des Elements haben,
- **Protonen**, die eine "positive" elektrische Ladung besitzen.

Die **Atomhülle** besteht je nach Element aus mehreren "Schalen" mit unterschiedlichem Durchmesser in denen Teilchen weitaus kleinerer Masse, die

- **Elektronen**, die eine negative elektrische Ladung besitzen

den Atomkern mit großer Geschwindigkeit umkreisen, ähnlich wie eine Sonne von ihren Planeten auf Bahnen unterschiedlicher Durchmesser umkreist wird.

Ähnlich wie die Planeten durch die von Newton entdeckten Gravitationskräfte zwischen massebehafteten Körpern daran gehindert werden sich von der Sonne ins Unendliche zu entfernen, werden die negativ geladenen Elektronen durch Anziehungskräfte zwischen Körpern, die verschiedene elektrische Ladungen tragen, von den positiv geladenen Protonen des Atomkerns auf ihren Bahnen gehalten.

Die Atomkerne enthalten genauso viele positiv geladene Protonen wie sich negativ geladene Elektronen in der Atomhülle befinden. Dadurch erscheint das Atom nach außen hin als **elektrisch neutral**.

Durch Zufuhr von Energie, das heißt z.B. durch Erwärmung, ist es möglich, Elektronen aus der äußersten Schale herauszulösen. Dem vorher neutralen Atom fehlt dann ein negatives Elektron. Die positiven Ladungen überwiegen. Den so entstandenen Atomrest nennt man ein **positives Ion**. Beim Reiben von Bernstein ist die Reibungswärme die Ursache dieses Phänomens.

Es kann auch vorkommen, dass die äußerste Schale mehr Elektronen aufnimmt, als dem Atom auf Grund des Aufbaus seines Kerns zugehören sollten. Ein derartig verändertes Atom wird als **negatives Ion** bezeichnet, da dann die negativen Ladungen überwiegen.

Bemerkung:

Die Charakterisierung der Protonen als "positiv" und der Elektronen als "negativ" geladen wurde auf einem früheren Wissensstand willkürlich festgelegt, ist aber für die physikalischen Folgerungen unerheblich. Wichtig ist nur, dass sich ungleichnamige elektrische Ladungen anziehen, während sich gleichnamige elektrische Ladungen abstoßen.

Als **Formelzeichen** für die elektrische Ladung wurde der Buchstabe Q gewählt.
Die **Einheit** der elektrischen Ladung ist **1 Coulomb (= 1 C)**[1].

[1] nach Charles Augustin de Coulomb (1736- 1806), französischer Ingenieur, der eine Drehwaage konstruierte, mit der die Kraftwirkungen el. Ladungen ermittelt werden konnten.

Diese Einheit ist riesengroß im Verhältnis zur elektrischen Ladung eines Protons bzw. eines Elektrons, der sogenannten **elektrischen Elementarladung** *e*. Diese beträgt

$$e = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \text{C}.$$

Andererseits sind in den Stoffen auch unglaublich viele Protonen und Neutronen enthalten, da deren Masse außerordentlich klein ist:

Masse des Protons: $m_p = 1{,}67 \cdot 10^{-27}$ kg,

Masse des Elektrons: $m_e = 0{,}911 \cdot 10^{-32}$ kg.

Festkörper enthalten im unelektrischen Zustand gleich viele positive und negative Ladungen in den Atomkernen bzw. in den Atomhüllen. Ihre Gesamtladung ist demnach null, d.h. sie verhalten sich elektrisch neutral.

Werden einem Festkörper **Elektronen entzogen** erscheint er **positiv** geladen. Bei einem **Überschuss von Elektronen** dagegen erscheint der Körper **negativ** geladen. Elektrisch geladene Körper haben das Bestreben elektrisch neutral zu werden. Es entsteht also eine "Spannung" zwischen ungleichnamig geladenen Körpern und es findet eine Elektronenwanderung vom negativ zum positiv geladenen Körper statt, falls der Werkstoff dazwischen dies zulässt.

Werkstoffe, die Elektronenbewegungen zulassen nennt man **Leiter**.
Werkstoffe, die Elektronenbewegungen einen sehr großen Widerstand entgegensetzen, nennt man **Nichtleiter**.
Werkstoffe, die sich unter "normalen" Bedingungen wie Nichtleiter, unter bestimmten Vorraussetzungen dagegen wie Leiter verhalten, werden als **Halbleiter** bezeichnet.

Leiterwerkstoffe (z.B. alle Metalle) besitzen einen regelmäßigen Aufbau aus ihren Bausteinen in einem sogenannten Kristallgitter. Die Bausteine sind keine vollständigen Atome sondern Ionen. Dadurch gibt es im Kristallgitter "freie" Elektronen, das sogenannte "Elektronengas". Diese frei beweglichen Elektronen sind verantwortlich für die Eigenschaft des Stoffes als Elektrizitätsleiter .

Nichtleiterwerkstoffe (Porzellan, Gummi, Kunststoffe, Hartpapier, Lack,...) sind im allgemeinen aus Atomen aufgebaut, bei denen die äußere Schale der AtomhÜllen vollständig mit Elektronen besetzt sind. Dadurch bedarf es einer großen Energiezufuhr, um aus diesen Schalen frei bewegliche Elektronen auszulösen. Dadurch erlauben diese Stoffe nur bei größerer Energiezufuhr, d.h. bei stark erhöhter Temperatur eine nennenswerte Elektronenbewegung.

Halbleiterwerkstoffe (Silizium, Selen, Germanium) verhalten sich bei Umgebungstemperatur wie Nichtleiter. Bei ihnen ist aber die Energie, die erforderlich ist, um Leiter aus ihnen zu machen, erheblich geringer als bei den Nichtleiterwerkstoffen und zudem durch die Beimischung von Fremdatomen beeinflussbar. Halbleiter sind heute die wichtigsten Werkstoffe der modernen Elektronik.

Elektrisches Feld in einem Nichtleiter

Wir betrachten zwei gleiche Metallplatten, die zueinander parallel im Abstand a angeordnet sind. Eine Platte trägt die positive Ladung Q_{O+}, die andere die betragsmäßig gleich große negative Ladung Q_{0-}. Zwischen den Platten befindet sich ein Nichtleiter, z.B. Luft. Bringt man elektrische Ladungen Q_i (Probeladungen) in den Zwischenraum, so wirken auf diese Ladungen Kräfte, die proportional zum Betrag der Probeladung sind. Man sagt, dass zwischen den Platten ein elektrisches Feld besteht und definiert den Vektor der elektrischen Feldstärke E in einem beliebigen Punkt, sodass der Vektor der auf eine Probeladung Q wirkenden Kraft in diesem Punkt der Beziehung

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E}$$

genügt. Die Probeladung kann positiv oder negativ sein. Dementsprechend ist der Kraftvektor dem Feldstärkevektor gleich- oder entgegengerichtet.

Kraftfelder, in denen auf Teilchen oder Körper Kräfte ausgeübt werden ohne dass ein direkter Kontakt mit einem anderen Körper besteht, sind nicht ungewöhnlich. Ein solches Kraftfeld, das uns ständig umgibt, ist das Schwerefeld der Erde. Auf einen Körper der Masse m wirkt im Schwerefeld der Erde die Kraft

$$\vec{F} = m \cdot \vec{g}$$

wobei der Vektor der Schwerebeschleunigung $\vec{g}$ der "Feldstärkevektor" ist. Im Unterschied zur elektrischen Ladung ist allerdings hier die Masse m immer positiv, so dass der Kraftvektor immer in Richtung des Vektors der Schwerebeschleunigung zeigt.

Ein Körper besitzt im Schwerefeld der Erde eine **potentielle Energie**, die proportional zur Masse *m*, zum Betrag der Schwerebeschleunigung *g* und zur Höhe *h* des Körpers über einer Bezugshöhe h = O ist, der man die potentielle Energie Null zuordnet (z. B. dem Erdboden am betreffenden Ort) :

$$E_{pot} = m \cdot g \cdot h \,.$$

Man kann demnach jedem Punkt des Schwerefeldes ein **Potential**

$$\varphi = g \cdot h$$

zuordnen. Entsprechend kann jedem Punkt des elektrischen Feldes zwischen den Platten ein elektrisches Potential

zugeordnet werden, wobei *a* der Abstand des Punktes von der Platte ist, für die das Potential zu Null festgelegt wird.

$$\varphi = E \cdot a$$

Das Potential kann positive oder negative Werte annehmen, je nach der Lage des Punktes zu der willkürlich festgelegten Bezugsfläche im elektrischen Feld.

Dagegen ist die **Potentialdifferenz** zwischen zwei Punkten P_1 und P_2 im elektrischen Feld eine Größe, die unabhängig von der willkürlichen Wahl der Bezugsfläche ist. Sie wird als elektrische Spannung zwischen diesen Punkten bezeichnet:

$$U_{21} = \varphi_2 - \varphi_1$$

Die **Einheit** der elektrischen Spannung ist **1 Volt (= 1V)**[2].

Zwischen den zwei betrachteten parallelen, ungleichnamig geladenen Platten mit dem Abstand *a*, bei denen sich im Zwischenraum ein Nichtleiter befindet, besteht folglich die Spannung:

$$U = E \cdot a$$

Diese Anordnung wird als **Plattenkondensator** bezeichnet. Das in ihm vorliegende elektrische Feld wird als "homogen" bezeichnet, da der Feldstärkevektor in jedem Punkt des Zwischenraums nach Betrag und Richtung gleich ist. Später (in Kapitel 3.1 der Vorlesung) werden wir uns auch mit elektrischen Feldern in Nichtleitern beschäftigen, die nicht homogen sind.

Elektrisches Feld in einem Leiter

Besteht zwischen den beiden Enden eines stabförmigen Körpers aus einem Leiterwerkstoff (z.B. eines Metalldrahtes) die elektrische Spannung *U*, so existiert im Leiter ein elektrisches Feld der Feldstärke *E*. Dieses Feld übt Kräfte auf die frei beweglichen Elektronen aus, die im Leiterwerkstoff in großer Zahl vorhanden sind (ca. 10^{23} pro cm^3). Dadurch werden diese freien Elektronen beschleunigt und zwar, wegen ihrer negativen Ladung, entgegen der Richtung des Feldstärkevektors. Da sich das elektrische Feld im Leiter bei Anlegen der Spannung praktisch schlagartig aufbaut setzt auch die Elektronenbewegung unverzüglich ein.

Bei konstanter Spannung und Feldstärke (und damit auch konstanter Beschleunigung) müsste die Geschwindigkeit der Elektronenbewegung ständig zunehmen. Dies ist jedoch wegen eines inneren Widerstandes gegen die Elektronenbewegung nicht der Fall. Vielmehr ist die Geschwindigkeit relativ klein, so dass kein nennenswerter Massentransport stattfindet.
Wenn durch einen Leiterquerschnitt, der die Leiterabschnitte 1 und 2 trennt, die Gesamtladung ΔQ_{21} (< 0, da Elektronen wandern) in der Zeit Δt vom Abschnitt 2 in den Abschnitt 1 "strömt", beträgt die "Stromstärke"

$$I_{21} = \Delta Q_{21} / \Delta t$$

Da ΔQ_{21} negativ ist wird auch I_{21} negativ. Damit würde vom positiv zum negativen geladenen Ende des Leiters ein negativer elektrischer Strom fließen. Um das zu vermeiden definiert man als

2 nach Alessandro Graf Volta (1745 - 1827), dem Erfinder der Volta'schen Säule (chem.-el. Spannungserzeuger, Urform der Batterie)

Stromstärke $I_{12} = \Delta Q_{12} / \Delta t$
mit $\Delta Q_{12} = -\Delta Q_{21}$.

Der elektrische Strom ist also nach dieser Vereinbarung dem tatsächlichen Elektronenstrom entgegen gerichtet.

Die **Einheit** der elektrischen Stromstärke ist **1 Ampere (=1 A)**[3].

Es gilt $$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$
d.h. 1 A = 1 C/s.

Bei zeitlich veränderlicher Spannung bzw. Feldstärke gilt allgemeiner

$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt},$$

d.h. die momentane Stromstärke ist die zeitliche Ableitung der Ladung.

Elektrische Arbeit, elektrische Leistung

Wir betrachten einen Leiter der Länge *L* mit konstantem Querschnitt, zwischen dessen Enden 1 und 2 die Spannung *U* anliegt. Dann besteht im Leiter ein homogenes elektrisches Feld der Feldstärke

$$E = \frac{U}{L}.$$

Dieses übt auf eine Ladung ΔQ die Kraft
$$F = \Delta Q \cdot E = \frac{\Delta Q \cdot U}{L}$$
aus.

Die **Arbeit AW** um die Ladung ΔQ von 1 nach 2 zu transportieren beträgt demnach

$$\Delta W = F \cdot L = \Delta Q \cdot U.$$

Leistung ist Arbeit pro Zeit, d.h.

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\Delta Q \cdot U}{\Delta t}.$$

[3] nach Andre Marie Ampere (1775-1836), der den Zusammenhang zwischen Elektrizität und Magnetismus entdeckte.

Die pro Zeiteinheit transportierte Ladung ist per Definition die Stromstärke *I*. Demnach wird die elektrische Leistung

$$P = U \cdot I \,.$$

Die **Einheit der elektrischen Leistung** ist 1 Watt (=1 W)[4]. Es gelten die Zusammenhänge:

1 W = 1 VA = 1 Nm / s = 1 J / s.

im sog. SI-Einheitensystem sind also die elektrischen Größen (Watt, Volt, Ampere) und die mechanischen Größen (Newton, Joule) aufeinander abgestimmt.

Die **Einheit der elektrischen Arbeit** ist 1 Ws = 1 VAs = 1VC = 1 Nm = 1 J.

Elektrischer Widerstand

Die elektrische Arbeit, die beim Transport einer Ladung durch den Leiter geleistet wird, geht fast vollständig in Wärmeenergie über. Das ist bei einigen Anwendungen durchaus erwünscht (Heizung, Herd, Backofen, usw.), bei anderen aber auch sehr ungünstig, da in den elektrischen Geräten Energieverluste auftreten und in vielen Fällen konstruktive Maßnahmen zur Wärmeabfuhr getroffen werden müssen, die häufig zusätzlichen Energieaufwand bedeuten (Kühlgebläse).
Jedenfalls ist auch in Leitern eine Bewegung der sogenannten "freien" Elektronen nicht ohne Widerstand möglich.
Als elektrischen oder auch **Ohm'schen Widerstand** definiert man das Verhältnis zwischen der antreibenden Spannung und der resultierenden Stromstärke und bezeichnet diesen mit dem Buchstaben *R*:

$$R = \frac{U}{I} \,.$$

Dieses **Ohm'sche Gesetz**[5] wird meist in der Form

$$U = R \cdot I$$

geschrieben, da es sich so wegen des Gleichklangs mit dem Schweizer Kanton Uri leichter merken lässt.

Die **Einheit** des elektrischen Widerstands ist **1 Ohm (=1 Ω)**.

Es gilt der Zusammenhang **1 Ω = 1 V / A**.

Elektrische Leitung in Flüssigkeiten

[4] nach Jarnes Watt (1736 - 1819), der die Dampfmaschine zwar nicht erfand, aber durch viele Erfindungen technisch nutzbar machte.
[5] nach Georg Sirnon Ohm (1787- 1854), der diesen Zusammenhang als erster formulierte

Salze, Säuren und Laugen, die zunächst elektrisch neutrale chemische Verbindungen sind, zerfallen bei der Lösung in Wasser in zwei Bestandteile, von denen einer elektrisch positiv, der andere elektrisch negativ geladen ist. Dieser Vorgang wird als **Dissoziation** bezeichnet. Wasserstoff-Ionen und Metall-Ionen sind dabei stets positiv geladen, die sogenannten Säure- oder Laugenreste negativ geladen.

Erzeugt man in der Flüssigkeit ein elektrisches Feld in dem je eine positiv und eine negativ geladene Leiterplatte an verschiedenen Orten eingetaucht werden, so wandern die Ionen zur jeweils entgegengesetzt geladenen „**Elektrode**“. Es entsteht ein elektrischer Strom und die Flüssigkeit wird dann als **Elektrolyt** bezeichnet.
Im Gegensatz zur elektrischen Leitung in Metallen, die nur mittels der sehr massearmen freien Elektronen erfolgt und daher ohne nennenswerten Massetransport, ist die Ionenleitung in Elektrolyten mit einem wesentlichen Massetransport verbunden, der technisch ausgenutzt wird, um beispielsweise Bauteile mit metallischen Beschichtungen aus Kupfer, Zink, Zinn, Gold, Silber, Nickel, Chrom, Kadmium usw. zu überziehen (Galvanisierung), aber auch um aus verunreinigtem Kupfererz reines Kupfer, sog. „Elektrolytkupfer“ zu gewinnen.

Gleichstrom, Wechselstrom

Bisher haben wir im Wesentlichen den Fall betrachtet, dass zwischen den beiden Enden eines Leiters mit konstantem Querschnitt eine zeitlich konstante Spannung vorlag. In diesem Fall ist die Feldstärke im Leiter und damit die Kraft auf die freien Elektronen zeitlich und nach Betrag und Richtung konstant, so dass sich, abhängig von der Größe des Bewegungswiderstandes im Leiter eine konstante Geschwindigkeit der Elektronenbewegung und damit letztendlich eine konstante Stromstärke im Leiter einstellt.

Bei Vorliegen einer **Gleichspannung** an einem Leiter ergibt sich als Resultat somit auch ein **Gleichstrom**.

Für die Praxis wichtiger ist der Fall, dass die Spannung zeitlich veränderlich ist, insbesondere der Fall einer sinusförmigen veränderlichen Spannung mit einer festen Frequenz *f*:

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t) .$$

Bei dieser **Wechselspannung** nennt man $\hat{u}$ die **Amplitude** in Volt (V), *f* die **Frequenz** in Hertz (Hz) und $T = 1/f$ die **Periode** in Sekunden (s).

Wenn eine Wechselspannung anliegt bewegen sich die freien Elektronen im Leiter ebenfalls sinusförmig um ihre Ruhelage hin und her, sodass auch die Stromstärke zeitlich sinusförmig verläuft. Der resultierende Wechselstrom

$$i(t) = \hat{i} \cdot \sin(2\pi \cdot f \cdot t + \varphi)$$

kann allerdings eine **Phasenverschiebung** φ gegenüber der Wechselspannung aufweisen, wenn der Stromkreis nicht nur Ohm'sche Widerstände, sondern auch Kondensatoren oder Spulen enthält (vgl. Kap. 4).

Auch der Fall, dass die Spannung einen zeitlich konstanten Gleichspannungsanteil enthält, dem ein sinusförmiger Wechselspannungsanteil überlagert ist, tritt in der Praxis auf. In diesem Fall besteht die resultierende Stromstärke ebenfalls aus einem Gleichstrom, dem ein Wechselstrom überlagert ist und man spricht von einem **Mischstrom**.

2 Grundgesetze des Gleichstroms

Die in diesem Kapitel für Gleichstromkreise beschriebenen Verfahren gelten auch für Wechselstromkreise in denen sich nur Ohm'sche Verbraucher befinden.

2.1 Der einfache Stromkreis

Im einfachsten Fall besteht ein Stromkreis aus einer Spannungsquelle (z.B. Batterie), einem Verbraucher (z.B. Glühlampe), Verbindungsleitungen und einem Schalter.

Bei geöffnetem Schalter ist keine Bewegung der Elektronen möglich. Im Stromkreis fließt kein Strom.

Bei geschlossenem Schalter findet eine Elektronenströmung vom negativ geladenen Pol der Spannungsquelle durch die Verbindungsleitungen und den Verbraucher zum positiven Pol der Spannungsquelle statt. Im Stromkreis fließt ein Strom, der aber nach Vereinbarung entgegen der Elektronenbewegung vom positiven zum negativen Pol der Spannungsquelle hin gerichtet ist.

Der Betrag der Stromstärke ist dabei abhängig vom Betrag der Quellspannung *Uq* und vom Widerstand im gesamten Stromkreis. Dieser besteht nicht nur aus dem Widerstand des Verbrauchers, sondern es sind auch die Widerstände in der Hin- und Rückleitung zu berücksichtigen sowie der Innenwiderstand der Spannungsquelle.

Im einfachen, nicht verzweigten Stromkreis addieren sich diese Widerstände zum Gesamtwiderstand

$$R_{ges} = \sum R_j = R_V + R_H + R_R + R_i$$

Nach dem Ohm'schen Gesetz errechnet sich dann die Stromstärke zu

$$I = \frac{U_q}{R_{ges}} = \frac{U_q}{R_V + R_H + R_R + R_i}\ .$$

Im Allgemeinen sind die Widerstände in den Verbindungsleitungen und der Innenwiderstand der Spannungsquelle sehr viel kleiner als der Verbraucherwiderstand.

In jedem Verbraucher fällt ein Teil der Quellspannung ab:

$$U_i = I \cdot R_i,$$

$$U_H = I \cdot R_H,$$

$$U_R = I \cdot R_R,$$

$$U_V = I \cdot R_V.$$

Die Summe der an den einzelnen Widerständen abfallenden Spannungen ist gleich der Quellspannung:

$$U_q = \sum U_j = U_V + U_H + U_R + U_i$$

Die **Klemmenspannung** des Generators ist um die am Innenwiderstand abfallende Spannung kleiner als die vom Generator erzeugte Quellspannung:

$$U_K = U_q - U_i = U_q - I \cdot R$$

Die Klemmenspannung hängt also von der Belastung ab, da die Stromstärke *I* im Stromkreis von der Belastung durch die Widerstände des Verbrauchers und der Hin- und Rückleitung abhängt.

Im **Leerlauf** des Generators, ohne angeschlossene Verbraucher, fließt kein Strom. Folglich findet am Innenwiderstand des Generators auch kein Spannungsabfall statt und die Klemmenspannung ist gleich der Quellspannung.

Bei **Kurzschluss** zwischen den Klemmen des Generators wird die Klemmenspannung null. Der Innenwiderstand des Generators ist der einzige Widerstand im Stromkreis. Durch ihn fließt dann der Kurzschlussstrom

$$I_K = \frac{U_q}{R_i}$$

Da der Innenwiderstand in der Regel sehr klein ist, wird der Kurzschlussstrom sehr groß.

2.2 Widerstand in drahtförmigen Leitern

Der elektrische Widerstand drahtförmiger Leiter ist proportional zu ihrer Länge *L* und umgekehrt proportional zu ihrer Querschnittsfläche *A*:

$$R = \frac{\rho \cdot L}{A}$$

Der Faktor ρ heißt **spezifischer Widerstand** und ist eine Werkstoffeigenschaft. Der spezifische Widerstand eines Leiterwerkstoffs ist aber keine Konstante, sondern abhängig von der Temperatur.

Die **Einheit** von ρ ist formal: **1 Ω m**
praktisch: **1 Ω mm²/m** (= 10^{-6} 1 Ωm).

Für manche Berechnungen in Stromkreisen, insbesondere bei verzweigten Stromkreisen, ist es zweckmäßig anstelle des elektrischen Widerstands seinen Kehrwert zu verwenden. Dieser wird elektrischer Leitwert genannt und mit dem Buchstaben *G* bezeichnet:

$$G = \frac{1}{R}$$

Die **Einheit** des Leitwerts ist **1 Siemens[6] (= 1 S)**

Es gilt **1 S = 1 / Ω = 1 A / V**.

Anstelle des spezifischen Widerstands kann man dementsprechend auch dessen Kehrwert verwenden, die **elektrische Leitfähigkeit** des Leiterwerkstoffs angeben:

$$\kappa = \frac{1}{\rho}.$$

Als Einheit der elektrischen Leitfähigkeit wird in der Praxis

$$1\frac{Sm}{mm^2} \quad \left(=10^6\,\frac{S}{m}\right)$$

verwendet.

Temperaturabhängigkeit des elektrischen Widerstands

Metalle sind sogenannte "**Kaltleiter**", d.h. sie leiten den Strom bei tiefen Temperaturen besser als bei hohen Temperaturen. Ihr spezifischer Widerstand nimmt folglich mit der Temperatur zu.

Als Bezugstemperatur für Widerstände oder Leitwerte wird im Allgemeinen die **Umgebungstemperatur**.

$$\theta = 20°\,C$$

verwendet.

Die Bezugswerte werden falls erforderlich durch den Index 20 gekennzeichnet:

R_{20} , G_{20} bzw. ρ_{20} , K_{20}.

In erster Näherung wird für nicht zu große Temperaturdifferenzen zur Bezugstemperatur eine lineare Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstands angenommen:

$$\rho_\theta = \rho_{20} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\theta_{20}).$$

Dabei ist:

ρ_θ spezifischer Widerstand bei der Temperatur θ
$\Delta\theta_{20}$ = θ-20°C Temperaturdifferenz in K
α linearer Temperaturkoeffizient in 1/*K*

[6] nach Werner von Siemens (1816- 1892), der zahlreich bedeutende Erfindungen in der Elektrotechnik gemacht hat.

Entsprechend lässt sich der Widerstand bei einer Temperatur θ aus dem Widerstand bei 20° C bei Annahme linearer Temperaturabhängigkeit berechnen:

$$R_\theta = R_{20} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\theta_{20}).$$

Bei sehr hohen oder tiefen Temperaturen beschreibt die lineare Näherung die Temperaturabhängigkeit des spezifischen Widerstandes der meisten Metalle nicht mehr ausreichend genau, so dass eine **quadratische Näherung** erforderlich wird:

$$\rho_\theta = \rho_{20} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\theta_{20} + \beta \cdot \Delta\theta_{20}^2).$$

Dabei ist β der quadratische Temperaturkoeffizient in $1/K^2$.
Entsprechend ergibt sich als quadratische Näherung für den Widerstand bei hohen oder tiefen Temperaturen:

$$R_\theta = R_{20} \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta\theta_{20} + \beta \cdot \Delta\theta_{20}^2).$$

	Spezifischer Widerstand ρ_{20} $\Omega \cdot mm^2/m$	**Elektrische Leitfähigkeit** κ_{20} $S \cdot m/mm^2$	**Temperaturkoeffizienten** α $1/K$	β $10^{-6}/K^2$
Leiter- und Kontaktmaterial				
Silber	0,0165	60,6	0,0038	0,7
Kupfer	0,0178	56,2	0,0039	0,6
Gold	0,023	43,5	0,0039	0,5
Aluminium	0,0286	35,0	0,0037	1,3
Wolfram	0,055	18,2	0,0048	1,0
Zinn	0,12	8,3	0,0042	6,0
Sonstige Metalle				
Zink	0,061	16,4	0,0042	2
Nickel	0,1	10	0,0048	9
Eisen	0,12	8,3	0,0052	6
Platin	0,13	7,7	0,0025	0,6
Blei	0,21	4,8	0,0042	2
Quecksilber	0,96	1,04	0,00092	1,2
Widerstandslegierungen				
Manganin (86 Cu, 2 Ni, 12 Mn)	0,42	2,38	0,00001	0,4
Nickelin (54 Cu, 26 Ni, 20 Zn)	0,43	2,27	0,00011	-
Konstantan (54 Cu, 45 Ni, 1 Mn)	0,5	2	0,000003	-
Chromnickel (80 Ni, 20 Cr)	1,12	0,89	-0,00014	-

Tabelle 2.2.1: Spezifischer Widerstand, Leitfähigkeit und Temperaturkoeffizienten versch. Werkstoffe

Leiter- und Kontaktwerksto	**Elektrische Leitfähigkeit**	**Thermische Leitfähigkeit**	**Andere relevante Eigenschaften**	**Verwendung**
Silber (Ag)	sehr gut	sehr gut	nicht beständig gegen Schwefelverbindungen teuer	Kontakte (legiert) Schmelzsicherungen
Kupfer (Cu)	sehr gut	gut	bildet Korrosionsschutz-schicht bei Feuchte (Patina)	Leiterwerkstoff (Elektrolyt-Kupfer) Wärmeleiter bei Lötkolben und Kühlblechen Kontakte (geringe Anforderungen)
Gold (Au)	gut	Gut	weich, neigt bei Kontakten zum Kleben sehr teuer	Kontakte (legiert)
Aluminium (Al)	gut	Gut	bildet Korrosionsschutz-schicht an Luft (Oxid) gut formbar	Leiterwerkstoff (Freileitungen)
Wolfram (W)	mittel		schwer zu verarbeiten sehr hoher Schmelzpunkt (3370 °C)	Glühwendeln in Glühlampen Kontaktwerkstoff für schnelle Schaltfolgen bei kleinen Strömen (Zerhacker)
Zinn (Sn)	mäßig		sehr niedriger Schmelz-punkt (232 °C) sehr korrosionsbeständig	Lötwerkstoff (legiert) Korrosionsschutz für Bleche und Drähte

Tabelle 2.2.2: Eigenschaften und Verwendung verschiedener Leiter- und Kontakt

Tabelle 2.2.1 enthält Werte des spezifischen Widerstandes, der Leitfähigkeit und die Temperaturkoeffizienten für wichtige Werkstoffe der Elektrotechnik. Tabelle 2.2.2 zeigt weitere Informationen über die wichtigsten Leiter- und Kontaktwerkstoffe und deren Verwendung in der Elektrotechnik.

Bei der Gruppe der **Widerstandswerkstoffe** in Tabelle 2.2.1 handelt es sich um Legierungen, die speziell für die Elektrotechnik entwickelt wurden. Die Bezeichnungen sind Handelsnamen. Widerstandswerkstoffe müssen einen hohen spezifischen Widerstand mit einer möglichst geringen Temperaturabhängigkeit besitzen.

Die geringste Widerstandsänderung bei Temperaturänderung weist der Werkstoff **Konstantan** auf (daher der Name!). Er wird vor allem für Vorschalt- und Nebenwiderstände verwendet, bei denen die Temperaturkonstanz wichtig ist. Darüber hin-aus wird er wegen seiner hohen Thermospannung gegen Kupfer (40 µV/K) in Thermoelementen eingesetzt.

Manganin hat ebenfalls eine sehr geringe Widerstandsänderung mit wechselnder Temperatur, ist aber nur bis ca. 60° C hitzebeständig. Sein Anwendungsgebiet sind Normal- und Messwiderstände im Laborbetrieb.

Die beiden übrigen Widerstandswerkstoffe in Tabelle 2.2.1, **Nickelin** und **Chromnickel**, haben einen um mehr als den Faktor 10 größeren linearen Temperaturkoeffizienten als Manganin. Sie werden für Belastungswiderstände verwendet, bei denen die Temperaturabhängigkeit keine so große Rolle spielt.

Metalle sind, wie schon erwähnt, Kaltleiter, d.h. ihre Leitfähigkeit nimmt mit sinkender Temperatur zu, ihr Widerstand ab. Bei manchen Metallen, Metalllegierungen und Metallverbindungen tritt bei sehr tiefen Temperaturen der Effekt auf, dass bei Unterschreiten einer bestimmten Temperatur der Widerstand plötzlich fast null wird. Man spricht in diesem Fall von **Supraleitung** und nennt die Temperatur, bei deren Unterschreitung der Werkstoff supraleitend wird, seine **Sprungtemperatur**. Erstmals entdeckt wurde dieses Phänomen von K.H. Onnes im Jahre 1911 an Blei bei einer Temperatur von 7,19 K (= - 265,96°C). Da die Erzeugung solch tiefer Temperaturen sehr viel Energie erfordert und demzufolge so teuer ist, dass der mögliche Gewinn durch den fehlenden elektrischen Widerstand zunichte gemacht wird, arbeitet die Forschung intensiv an der Suche nach sogenannten "Hochtemperatursupraleitern". Das sind Werkstoffe, deren Sprungtemperatur über 25 K (= - 248,15°C !) liegt. Ein Meilenstein war bei dieser Suche die Entdeckung eines Yttrium-Barium-Kupfer-Oxids ($YBa_2Cu_3O_7$) mit einer Sprungtemperatur von 92,1 K (= - 181,05°C). Inzwischen ist man bei Sprungtemperaturen über 100 K angelangt.

Wenn es gelingt, Werkstoffe zu entwickeln, die bei nicht ganz so tiefen Temperaturen supraleitend werden, verspricht man sich sehr große Vorteile z.B. bei Elektromagneten und bei Schalt- und Speicherelementen von Supercomputern.

2.3 Stromdichte und Belastbarkeit drahtförmiger Leiter

In der Festigkeitslehre haben wir gesehen, dass für die mechanische Beanspruchung eines Zugstabes nicht die übertragene Zugkraft maßgeblich ist, sondern die auf die kraftübertragende Fläche bezogene Kraft im Stab, die Spannung $\sigma = F / A$.

Entsprechend gilt bei drahtförmigen Leitern in der Elektrotechnik, dass nicht die Stromstärke im Leiter maßgebend ist für die thermische Beanspruchung des Leiters, sondern die auf den Leiterquerschnitt A bezogene Stromstärke, die sogenannte **Stromdichte.**

$$J = \frac{I}{A}$$

In den Widerständen von Spannungsquellen, Zuleitungen und Verbrauchern wird elektrische Energie in Wärmeenergie umgewandelt. Diese Wärmeenergie wird als

Nutzenergie bezeichnet, soweit sie erwünscht ist (z.B. im Verbraucher, sofern es sich um einen Wärmeerzeuger handelt) oder als **Verlustenergie** (z.B. die in den Leitungen entstehende Wärme).

Das Verhältnis zwischen der abgegebenen Nutzenergie und der gesamten, von der Spannungsquelle zugeführten elektrischen Energie bezeichnet man als den Wirkungsgrad eines elektrischen Stromkreises:

$$\eta = \frac{W_{ab}}{W_{zu}}$$

Der Wirkungsgrad lässt sich natürlich auch über das Verhältnis zwischen der abgegebenen Nutzleistung und der zugeführten elektrischen Leistung definieren:

$$\eta = \frac{P_{ab}}{P_{zu}}.$$

Die elektrische Leistung ist das Produkt aus Spannung und Strom:

$$P = U \cdot I.$$

Die **Verlustleistung** in einer Leitung mit dem Widerstand *R* ist demnach

$$P_V = R \cdot I^2 = \left(\frac{\rho \cdot L}{A}\right) \cdot J^2 \cdot A^2 = \rho \cdot L \cdot A \cdot J^2 = \rho \cdot V \cdot J^2$$

Die Verlustleistung in Leitern ist also

- proportional zum spezifischen Widerstand,
- proportional zum Volumen *V* des Leiters,
- quadratisch proportional zur Stromdichte.

Elektrische Leiter sind, mit Ausnahme der Überlandfreileitungen, mit Isolatoren (Kunststoff, Lack) ummantelt, die einen relativ niedrigen Flammpunkt besitzen und dürfen sich deshalb nicht zu stark erwärmen. Im allgemeinen geht man von einer maximal zulässigen Temperatur von ca. 60°C aus.

Insbesondere in dicht mit Leitern gepackten Komponenten wie den Spulen in Transformatoren und den Wicklungen von Elektromotoren ist eine Wärmeabgabe an die Umgebung nur von den äußersten Lagen möglich. In diesen Bauteilen sollte die Stromdichte einen Anhaltswert von ca. 5 bis 10 A / mm² nicht überschreiten, um eine Brandgefahr auszuschließen.

in den Zuleitungen von Elektrogeräten, die zwei- oder dreiadrigen Kabeln bestehen, ist die Wärmeabfuhr wesentlich besser, so dass höhere Stromdichten erlaubt sind. Die Wärmeentwicklung in einem Einzelleiter ist proportional zum Leitervolumen, die Wärmeabfuhr proportional zur Leiteroberfläche. Das Verhältnis zwischen dem Volumen und der Oberfläche eines Drahtes ist proportional zum Durchmesser des Drahtes. das bedeutet, dass dicke Drähte ungünstiger sind bezüglich ihrer thermischen

Belastbarkeit, da sie über ein relativ großes Volumen bezogen auf ihre Oberfläche verfügen. Für dicke Drähte muss demnach die zulässige Stromdichte kleiner sein als für dünne Drahte.

In der Norm VDE 0100 sind für die gebräuchlichen Leiterquerschnitte die zulässigen Stromstärken festgelegt, siehe die ersten beiden Spalten in Tabelle 2.3.1. In der dritten Spalte sind die daraus errechneten zulässigen Stromdichten dargestellt, die die dargelegten Zusammenhänge widerspiegeln.

Querschnitt A In mm²	Zulässige Stromstärke in A (nach VDE 0100)	Zulässige Stromdichte in A /mm² (berechnet)
0,75 1	13 16	17,3 16,0
1,5 2,5	20 27	13,3 10,0
4 6	36 47	9,0 7,83
10	65	6,5

Tabelle 2.3.1: Belastbarkeit isolierter Leitungen (nach VDE 0100)

2.4 Kirchhoff'sche Gleichungen

Für einen Rohrknoten gilt in der Strömungsmechanik, dass bei einer inkompressiblen Flüssigkeit die pro Zeiteinheit zuströmende Masse gleich groß ist wie die pro Zeiteinheit abströmende Masse.

Genauso gilt in der Elektrotechnik, dass an einem Leiterknoten die pro Zeiteinheit zuströmende Ladung gleich der pro Zeiteinheit abströmenden Ladung ist.

Elektrische Ladung pro Zeiteinheit ist Stromstärke. Demnach gilt, dass an einem Leiterknoten die Summe der zufließenden Ströme gleich der Summe der abfließenden Ströme ist, d.h.:

$$\sum I_{zu} = \sum I_{ab} \text{ bei Gleichstrom,}$$

bzw. $\sum I_{zu}(t) = \sum I_{ab}(t)$ bei zeitlich veränderlichem Strom.

Mit der Vereinbarung, dass zufließende Ströme positiv und abfließende Ströme negativ sind, gilt:

Erstes Kirchhoff' sches Gesetz[7] (Knotenregel) :

Die Summe aller zu- und abfließenden Ströme an einem Knotenpunkt ist, unter Beachtung ihrer Vorzeichen, zu jedem Zeitpunkt null.

D.h. bzw. $\sum I_j = 0$ bei Gleichstrom

$\sum i_j(t) = 0$ bei zeitlich veränderlichem Strom.

Ein verzweigter Stromkreis wird auch als ein elektrisches **Netzwerk** bezeichnet.

Ein Netzwerk besteht aus **Knoten** und **Zweigen**. Zweige sind leitende Verbindungen zwischen Knoten. Einen geschlossenen Kettenzug von Knoten und Zweigen, bei dem also der Endknoten mit dem Anfangsknoten zusammenfällt, bezeichnen wir als eine Masche.

Wir betrachten eine Masche in einem Netzwerk, das 4 Knoten (A, B, C, D) und 4 Zweige (1, 2, 3, 4) umfasst. Die 4 Knoten haben im vorliegenden elektrischen System die Potentiale φ_A, φ_B, φ_C, φ_D. Die Spannungen zwischen den Knoten sind die Potentialdifferenzen:

$$U_{AB} = \varphi_A - \varphi_B ,$$
$$U_{BC} = \varphi_B - \varphi_C ,$$
$$U_{CD} = \varphi_C - \varphi_D ,$$
$$U_{DA} = \varphi_D - \varphi_A .$$

Die Summe aller Spannungen in der Masche ist demzufolge null. Wenn man also vereinbart, dass Spannungspfeile wie folgt orientiert sind:

- an Spannungsquellen von + nach -,
- an Widerständen in Stromrichtung,
- im Umlaufsinn der Masche positiv,
- gegen den Umlaufsinn der Masche negativ,

dann gilt:
Zweites Kirchhoff'sches Gesetz (Maschenregel):

Die Summe der Teilspannungen einer Masche ist, unter Beachtung des Vorzeichens, zu jedem Zeitpunkt gleich null.

7nach Gustav Roben Kirchhoff (1824 - 1887), Physikprofessor in Heidelberg.

D.h. : $\sum U_j = 0$ für Gleichstrom

bzw. $\sum u_j(t) = 0$ für zeitlich veränderlichen Strom.

2.5 Widerstandsschaltungen

Schon beim einfachen Stromkreis haben wir vier verschiedene Widerstände unterschieden, nämlich den Verbraucherwiderstand, die Widerstände in der Hin- und der Rückleitung sowie den Innenwiderstand der Spannungsquelle. Im Ersatzschaltbild waren diese vier Widerstände hintereinander in einer als widerstandslos angenommenen unverzweigten Leitung eingezeichnet. Man sagt in diesem Fall, die Widerstände seien **in Reihe** geschaltet.

Reihenschaltung von Widerständen

Gegeben seien n in Reihe geschaltete Widerstände $R_1, R_2, \ldots.., R_j, \ldots...., R_n$. Zwischen Anfang und Ende der Reihe liege die Spannung U_q.

Gesucht sind der Strom I, der Gesamtwiderstand R_{ges} und die Teilspannungen U_j an den Teilwiderständen.

Da keine Verzweigung vorliegt, fließt durch alle Teilwiderstände der gleiche Strom der Stromstärke I.

Nach dem Ohm'schen Gesetz sind die Teilspannungen an den Teilwiderständen

$$U_j = R_j \cdot I.$$

Im Ersatzstromkreis mit dem Widerstand R_{ges} gilt das Ohm'sche Gesetz in der Form

$$U_q = R_{ges} \cdot I.$$

Die Kirchhoff'sche Maschenregel sagt aus, dass die Summe der Teilspannungen gleich der Spannung U_q ist:

$$U_q = \sum U_j$$

Durch Einsetzen der beiden ersten Gleichungen in die dritte folgt

$$R_{ges} \cdot I = \sum R_j \cdot I\,,$$

und damit $$R_{ges} = \sum R_j$$

In Reihenschaltungen addieren sich die Widerstände zum Gesamtwiderstand.

Die Stromstärke wird dann $$I = \frac{U_q}{R_{ges}}$$

und für die Teilspannungen gilt $\frac{U_j}{U_q} = \frac{R_j}{R_{ges}}$.

Die zuletzt gewonnene Beziehung wird bezeichnet als Spannungsteilerregel.

Spannungsteilerregel:

In der Reihenschaltung verhalten sich die Teilspannungen zur Gesamtspannung wie die Teilwiderstände zum Gesamtwiderstand.

Parallelschaltung von Widerständen

Gegeben seien *n* parallel geschaltete Widerstände $R_1, R_2, \ldots, R_j, \ldots, R_n$ an denen die Spannung U_q anliegt.

Gesucht sind der Strom I, der Gesamtwiderstand R_{ges} und die Teilströme I_j in den Teilwiderständen.
Alle Widerstände liegen an der gleichen Spannung U_q.

Die Teilströme in den Widerständen sind nach dem Ohm'schen Gesetz

$$I_J = \frac{U_q}{R_j}$$

Im Ersatzstromkreis gilt das Ohm'sche Gesetz in der Form

$$I = \frac{U_q}{R_{ges}}$$

Die Kirchhoff'sche Knotenregel liefert

$$I = \sum I_j$$

Durch Einsetzen der ersten beiden Gleichungen in die dritte folgt

$$\frac{U_q}{R_{ges}} = \sum \frac{U_q}{R_j}$$

Oder
$$\frac{1}{R_{ges}} = \sum \frac{1}{R_j}$$

In Parallelschaltungen addieren sich die Kehrwerte der Teilwiderstände zum Kehrwert des Gesamtwiderstands.

Der Kehrwert des Widerstands ist der sogenannte **Leitwert** *G*. Bei Parallelschaltungen ist es manchmal einfacher mit dem Leitwert zu rechnen, für den gilt:

$$G_{ges} = \sum G_j$$

D.h.: In Parallelschaltungen addieren sich die Teilleitwerte zum Gesamtleitwert.

Die Gesamtstromstärke wird dann

$$I = \frac{U_q}{R_{ges}} = U_q \cdot G_{ges} .$$

Die Teilströme in den Widerständen ergeben sich zu

$$I_j = \frac{U_q}{R_j} = U_q \cdot G_j ,$$

und für das Verhältnis zwischen Teilströmen und Gesamtstrom ergibt sich

$$\frac{I_j}{I} = \frac{R_{ges}}{R_j} = \frac{G_j}{G_{ges}} .$$

Das ist die sogenannte **Stromteileregel:**

In der Parallelschaltung verhalten sich die Teilströme zum Gesamtstrom wie die Kehrwerte der Teilwiderstände (= die Leitwerte) zum Kehrwert des Gesamtwiderstands (= zum Gesamtleitwert).

Schreibweise für Parallelschaltung von 2 Widerständen

Bei 2 parallel geschalteten Widerständen R_1 und R_2 gilt

$$\frac{1}{R_{ges}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{R_1 + R_2}{R_1 \cdot R_2} ,$$

also
$$R_{ges} = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} .$$

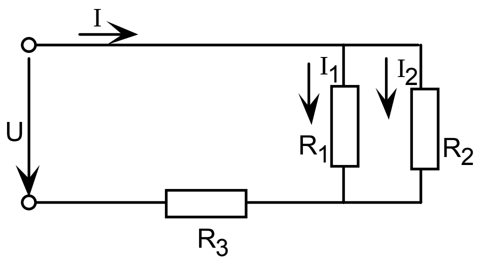
Man schreibt
$$R_{ges} = R_1 \parallel R_2$$

und setzt dann
$$R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} .$$

Beispiel 1: Geg.: $R_1 = 10\ \Omega$, $R_2 = 5\ \Omega$, parallelgeschaltet.
Ges.: R_{ges}.

Rechnung:
$$R_{ges} = R_1 \parallel R_2 = \frac{R_1 \cdot R_2}{R_1 + R_2} = \frac{10\Omega \cdot 5\Omega}{10\Omega + 5\Omega} = 3{,}33\Omega .$$

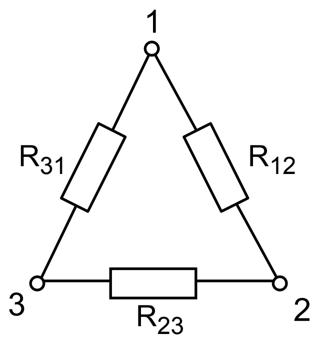
Beispiel 2: Zusammengesetzte Schaltung mit 3 Widerständen, davon 2 parallel.

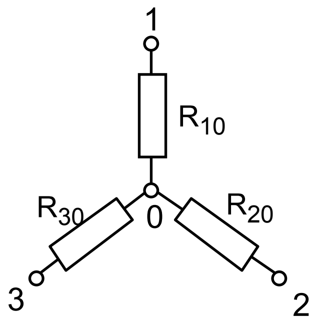


Geg.: $U = 12\ V$, $R_1 = 5\ \Omega$, $R_2 = 3\ \Omega$, $R_3 = 4\ \Omega$.
Ges.: R_{ges}., Gesamtstrom I, Teilströme I_1, I_2, Teilspannungen an den Widerständen.

Umwandlung eines Widerstandsdreiecks in einen Widerstandsstern und umgekehrt

Widerstandsdreieck **Widerstandsstern**





Beide Schaltungen sollen nach außen gleichwertig sein. Das ist der Fall, wenn für die Widerstände im Stern gilt:

Formeln für die Umwandlung Dreiecksschaltung in Sternschaltung

$$R_{10} = \frac{R_{12} \cdot R_{31}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \qquad R_{20} = \frac{R_{23} \cdot R_{12}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}, \qquad R_{30} = \frac{R_{31} \cdot R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{31}}.$$

Umgekehrt gilt:

Formeln für die Umwandlung Sternschaltung in Dreiecksschaltung

$$R_{12} = R_{10} + R_{20} + \frac{R_{10} \cdot R_{20}}{R_{30}}, \qquad R_{23} = R_{20} + R_{30} + \frac{R_{20} \cdot R_{30}}{R_{10}}, \qquad R_{31} = R_{30} + R_{10} + \frac{R_{30} \cdot R_{10}}{R_{20}}.$$

Spannungsteiler (Potentiometer)

An einem Widerstand, der von einem Strom der Stromstärke I durchflossen wird, fällt die Spannung $U_R = R \cdot I$ ab. Wenn man bei einem linearen Widerstand der Länge L die Spannung zwischen dem Widerstandsende und einer Stelle, die um das Maß x vom Widerstandsende entfernt ist misst, so ergibt sich der Wert

$$U_x = I \cdot R \cdot \frac{x}{L} = U_R \cdot \frac{x}{L}.$$

solange dieser Zweig **nicht durch einen Verbraucher belastet** wird.

Man kann demnach durch einen veränderlichen Abgriff an einem linearen Widerstand eine mit dem Abgriffsort **stufenlos veränderliche Spannung** erzielen, was in vielen technischen Anwendungen erforderlich ist.

Eine andere Anwendungsmöglichkeit einer solchen Anordnung ist die **Messung von Verschiebungen** aufgrund statischer oder dynamischer Kräfte an Maschinen, Anlagen und Fahrzeugen, indem der lineare Zusammenhang zwischen der abgegriffenen Spannung und dem Abgriffsort ausgenützt wird.

In beiden Anwendungsfällen ist es unumgänglich, dass der Spannungsteiler mit einem **Verbraucherwiderstand R_V belastet** wird. In diesem Fall ist die lineare Abhängigkeit der abgegriffenen Spannung vom Abgriffsort nicht mehr exakt gültig, sondern es gilt:

$$U_x = U_R \cdot \frac{\frac{x}{L}}{\left(1 + \frac{R}{R_V} \cdot \frac{x}{L} \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right)\right)}.$$

Wenn also ein Potentiometer als Messgerät für Wegmessungen eingesetzt werden soll, muss der „Verbraucherwiderstand“ R_V möglichst groß sein, jedenfalls um mehrere Größenordnungen größer als der Widerstand des Potentiometers (hochohmiger Abschluss), denn nur dann ist die Abweichung vom linearen Verhalten vernachlässigbar.

2.6 Netzwerke

Netzwerke sind verzweigte Stromkreise mit k Knoten und z Zweigen. Geschlossene Kettenzüge aus Zweigen und Knoten nennt man **Maschen**. Für die Berechnung von Netzwerken verwendet man die Kirchhoff’schen Gleichungen (Knotenregel und Maschenregel) sowie das Ohm’sche Gesetz.

Die nachfolgend dargestellte Vorgehensweise zur Berechnung von Netzwerken ist insbesondere dann anzuwenden, wenn ein aktives Netzwerk vorliegt, bei dem es mehr als eine Spannungsquelle gibt. Passive Netzwerke, das heißt Netzwerke mit nur einer Spannungsquelle, in denen ansonsten ausschließlich Verbraucher existieren, können meist mit den in bereits Kapitel 2.5 behandelten einfachen Methoden für Widerstandsschaltungen berechnet werden.

Regeln für die Berechnung von Netzwerken

1. **Vorbereitung**

   - In den z Zweigen werden (willkürlich gerichtete) Stromzählpfeile eingetragen und durchnummeriert.

   - Alle Spannungsquellen werden mit Zählpfeilen versehen (von plus nach minus) und nummeriert.

   - Spannungszählpfeile an Verbrauchern (Widerständen) haben die gleiche Richtung wie die Stromzählpfeile im Zweig. Eintragen und benennen.

2. **Knotenregel anwenden**

   - In den k Knoten sind zufließende Ströme positiv, abfließende Ströme negativ.

   - Es sind k-1 Gleichungen unabhängig. Ein beliebiger Knoten bleibt unberücksichtigt.

3. **Maschenregel anwenden**

   - In den Maschen wird ein (willkürlicher) Umlaufsinn festgelegt.

   - Spannungspfeile im Umlaufsinn gehen positiv ein, die gegen den Umlaufsinn zählen negativ.

   - Es sind $m = z - k + 1$ Maschengleichungen unabhängig.

4. **Gleichungssystem aufstellen**

   - Es gibt k-1 Knotengleichungen für die Stromstärken im Netzwerk.

   - Dazu kommen m Maschengleichungen für die Spannungen im Netzwerk.

   - Die Maschengleichungen lassen sich mit dem Ohm'schen Gesetz in Gleichungen für die Stromstärken umwandeln.

- Das Gleichungssystem hat $k\text{-}1+m = z$ Gleichungen für die z unbekannten Stromstärken im Netzwerk.

5. Gleichungssystem lösen

- Zur Lösung linearer Gleichungssysteme stehen eine Vielzahl von Lösungsverfahren zur Verfügung, die zum Teil bereits auf Taschenrechnern vorprogrammiert sind.

- Eine klassische Vorgehensweise ist das Eliminationsverfahren, bei dem die Zahl der Unbekannten und der Gleichungen Schritt für Schritt verringert wird.

- Wenn nicht alle Stromstärken interessieren, können einzelne Ergebnisse mit Hilfe der Kramer'schen Regel (Determinantenregel) ermittelt werden.

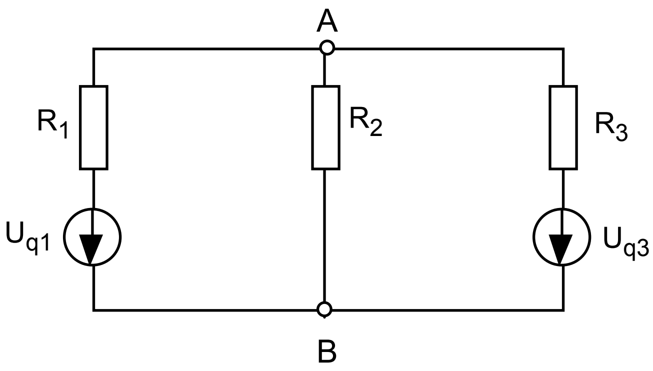
6. Kontrolle der Ergebnisse

- Anwendung der Maschenregel für eine nicht verwendete Masche.
  Die Summe der Teilspannungen muss, bei Beachtung des Vorzeichens, Null werden.

- Berechnung der Spannung zwischen zwei Knotenpunkten des Netzwerks auf mehreren Wegen.
  Die Ergebnisse müssen übereinstimmen.

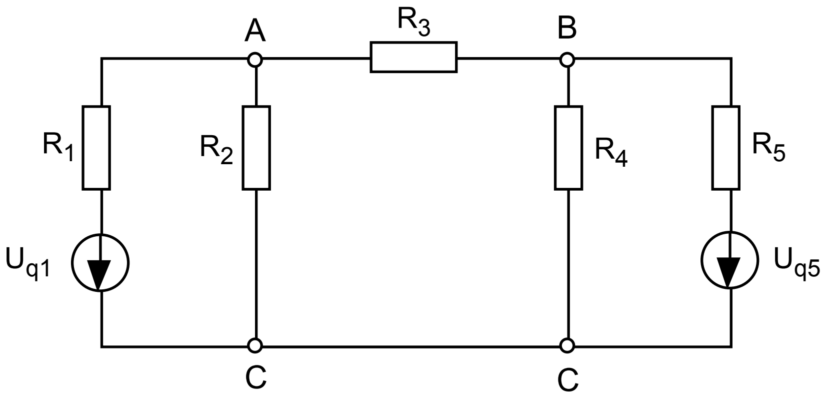
- Aufstellen der Leistungsbilanz für das Netzwerk.
  Die Summe der in den Quellen abgegebenen Leistungen muss gleich der Summe der in den Verbrauchern umgesetzten Verlustleistung sein.
  Diese Kontrolle ist die sicherste, da sie alle Zweige des Netzwerks berücksichtigt.

Beispiel: Netzwerk 1



U_{q1} = 12 V; U_{q3} = 4 V;
R_1 = 5 Ω; R_2 = 4 Ω; R_3 = 3 Ω.

Beispiel: Netzwerk 2



U_{q1} = 10 V; U_{q5} = 15 V;
R_1 = 10 Ω; R_2 = 20 Ω; R_3 = 5 Ω; R_4 = 10 Ω; R_5 = 20 Ω.

2.7 Strom- und Spannungsmessung

Messung bedeutet, dass eine unbekannte physikalische Größe mit einer festgelegten Größe, einem sogenannten „Normal" verglichen wird.

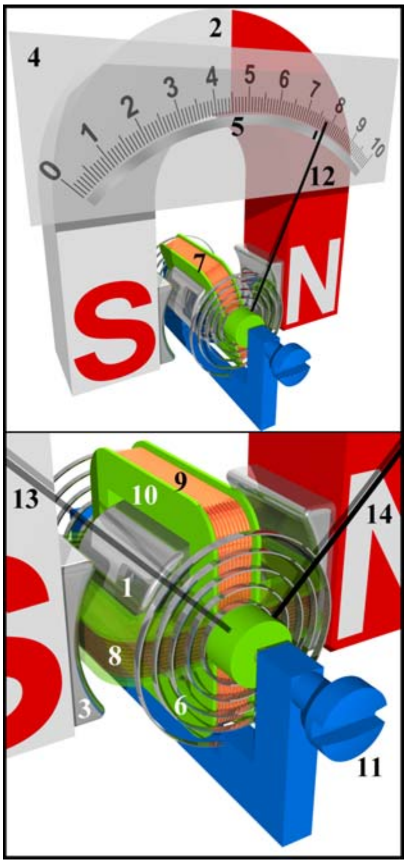
Analoge Messgeräte wandeln die physikalischen Größe zu jedem Zeitpunkt in einen, ihrem Betrag und ihrem Vorzeichen entsprechenden (analogen) Zeigerausschlag auf der Skala eines Messgerätes um, der vom Beobachter als Zahlenwert abgelesen wird.

Digitale Messgeräte wandeln den Messwert unmittelbar in einen Zahlenwert um und geben das Messergebnis direkt in Ziffern (digits) an.

Ein Vorteil analoger Messgeräte ist, dass Messwertänderungen bezüglich ihrer Tendenz und ihrer Schwankungsbreite gut beobachtbar sind, wenn diese Änderungen langsam erfolgen. Ein Nachteil analoger Messungen ist die nicht unerhebliche Fehlergefahr (Ablesefehler, Fehler beim Zuordnen von Messbereich und Skala bei Geräten mit umschaltbarem Messbereich, Übertragungsfehler beim Protokollieren der Messwerte, usw.)

Digitale Messgeräte sind heute in der Regel billiger und robuster. Die Gefahr von Fehlmessungen bei digitalen Geräten ist wesentlich geringer. Die Messwerte lassen sich direkt zu einem PC übertragen und dort protokollieren und weiterverarbeiten. Ein Nachteil digitaler Messungen ist die Stufung der Messwerte durch die begrenzte Zahl der angezeigten Ziffern.

Analoge Strom-, Spannungs- und Widerstandsmessgeräte arbeiten alle mit Magnetfeldern. Sie nutzen den physikalischen Effekt, dass ein Magnetfeld Kräfte auf stromdurchflossene Leiter ausübt (vgl. Kapitel 3).



Beim **Drehspulmessgerät** beispielsweise wird das Magnetfeld durch einen Dauermagneten erzeugt und durch einen Weicheisenkern verstärkt und gerichtet. Im Zentrum des Magnetfeldes wird eine Leiterspule drehbar gelagert, die mit zwei gegensinnig gewickelten Spiralfedern verbunden ist, über die auch die Stromzuführung erfolgt. Wird die Spule von einem Gleichstrom durchflossen, bewirken die vom Magnetfeld ausgeübten Kräfte ein Drehmoment, das proportional zur Stromstärke ist und die Spule so weit verdreht, bis Gleichgewicht mit dem Rückstellmoment der Spiralfedern besteht. Der Verdrehwinkel der Spule ist also stets proportional zur Stromstärke und wird mit einem an der Spule befestigten Zeiger auf einer Skala angezeigt.

Prinzipiell ist das Drehspulmessgerät nur für Gleichstrom geeignet. Da aber Wechselströme durch Gleichrichterschaltungen oder Thermoumformer in Gleichströme gewandelt werden können, sind auch diese mit solchen Geräten messbar.

Digitale Messgeräte enthalten einen sogenannten **Analog-Digital-Wandler** (ADC = analog digital converter), der das analog vorliegende Messsignal in einen Zahlenwert wandelt, der dann auf einer Digitalanzeige dargestellt wird. ADC's sind komplexe Schaltungen (IC's = integrated circuits), deren Aufbau von den zu messenden elektrischen Größen abhängt (Gleichstrom, Wechselstrom, Gleichspannung, Wechselspannung).

Beispielsweise kann zur Gleichspannungsmessung das **Dual-Slope-Verfahren** angewandt werden. Dabei wird ein Kondensator durch Anlegen der zu messenden Gleichspannung U bis zur Sättigung aufgeladen (Aufladezeit fest, im Millisekundenbereich). Die im Kondensator gespeicherte Ladungsmenge Q ist dann proportional zur Messgröße U. Anschließend wird der Kondensator über eine Konstantstromschaltung entladen und die dafür erforderliche Zeit gemessen. Die Entladungsdauer ist bei konstantem Entladestrom proportional zur Ladung Q des Kondensators und damit auch zur Messgröße U. Die Gleichspannung wird also bei diesem Verfahren durch eine Zeitmessung ermittelt.

Strommessung

Der elektrische Strom fließt in den Zweigen des Netzwerks. Strommessgeräte müssen deshalb im interessierenden Zweig eingebaut werden, d.h. in Reihe mit dem Verbraucherwiderstand R. Der Innenwiderstand R_m des Messgerätes vergrößert dabei den Gesamtwiderstand im Zweig, so dass die gemessene Stromstärke I_m kleiner ist als die Stromstärke I im Zweig ohne Messgerät. Der unvermeidliche Messfehler, bezogen auf den zu messenden Strom, hängt vom Verhältnis des Innenwiderstands im Messgerät zum Gesamtwiderstand im Zweig ab:

$$\frac{\Delta I_m}{I} = -\frac{R_m}{R + R_m}\,.$$

Folgerung:
Strommessgeräte müssen einen im Vergleich zum Verbraucherwiderstand möglichst kleinen Innenwiderstand besitzen. Sie sind „niederohmig“ auszulegen.

Spannungsmessung

Eine elektrische Spannung besteht zwischen zwei Knoten eines Netzwerks. Spannungsmessgeräte müssen demnach zwischen den Knoten eingebaut werden, parallel zu dem Verbraucherwiderstand R. Durch den Innenwiderstand R_m des Spannungsmessers wird dabei der Gesamtwiderstand zwischen den beiden Knoten verringert, wodurch die gemessene Spannung U_m kleiner ist als die Spannung U ohne angeschlossenen Spannungsmesser. Der bei der Spannungsmessung unvermeidliche Messfehler, bezogen auf die zu messende Spannung, hängt vom Verhältnis des Verbraucherwiderstands zur Summe der beiden Widerstände ab:

$$\frac{\Delta U_m}{U} = -\frac{R}{R + R_m}\,.$$

Folgerung: Spannungsmessgeräte müssen einen im Vergleich zum Verbraucherwiderstand möglichst großen Innenwiderstand besitzen. Sie sind „hochohmig“ auszulegen.

Messbereichserweiterungen

Alle Messgeräte haben nur einen begrenzten Messbereich. Bei elektrischen Messgeräten lässt sich aber der Messbereich durch Zusatzwiderstände relativ einfach erweitern.

Bei **Strommessgeräten** erfolgt die Messbereichserweiterung durch einen parallel zum Strommesser geschalteten Widerstand (Nebenschlusswiderstand, allgemein als „shunt" bezeichnet), der noch deutlich niederohmiger sein muss als der Innenwiderstand des Messgeräts. Für eine Messbereichserweiterung um den Faktor k ist ein Nebenschlusswiderstand

$$R_N = \frac{R_m}{k-1}$$

erforderlich.

Bei **Spannungsmessgeräten** erfolgt die Messbereichserweiterung durch einen in Reihe mit dem Spannungsmesser geschalteten Widerstand (Vorschaltwiderstand), der noch deutlich hochohmiger sein muss als der Innenwiderstand des Messgeräts. Für eine Messbereichserweiterung um den Faktor k ist ein Vorwiderstand

$$R_N = R_m \cdot (k-1)$$

zu wählen.

2.8 Widerstandsmessung

Die Ermittlung der Größe eines in einem Netzwerk eingebauten Widerstands kann **indirekt** durch gleichzeitige Messung von Stromstärke und Spannung und Verwendung des Ohm'schen Gesetzes erfolgen. Da Strommessgeräte in Reihe mit dem Verbraucher, Spannungsmessgeräte dagegen parallel zum Verbraucher eingebaut werden, sind zwei Schaltungsarten möglich:

1. Stromfehlerschaltung

Das Spannungsmessgerät wird parallel zum Verbraucher geschaltet, das Strommessgerät in die vor dieser Verzweigung liegende Leitung eingebaut. In diesem Fall wird, zusätzlich zu den vorne diskutierten Fehlern bei Strom- und Spannungsmessungen, vom Strommesser nicht nur der durch den Widerstand fließende Strom erfasst, sondern die Summe aus dem Strom durch den Widerstand und dem Strom durch den Spannungsmesser. Der Messfehler wird bei dieser Schaltung klein, wenn der Spannungsmesser sehr viel hochohmiger ist als der zu messende Widerstand. Die Stromfehlerschaltung ist damit vor allem **zur Messung kleiner Widerstände** geeignet.

2. Spannungsfehlerschaltung

Das Strommessgerät wird in Reihe mit dem Verbraucher eingebaut, das Spannungsmessgerät parallel zu dieser Anordnung geschaltet. In diesem Fall wird, wieder zusätzlich zu den vorne diskutierten Fehlern bei Strom- und

Spannungsmessungen, vom Spannungsmesser nicht nur die am Widerstand abfallende Spannung erfasst, sondern die Summe aus dem Spannungsabfall am zu messenden Widerstand und dem Spannungsabfall am Innenwiderstand des Strommessers. Der Messfehler wird bei dieser Schaltung klein, wenn der Strommesser sehr viel niederohmiger ist als der zu messende Widerstand. Die Spannungsfehlerschaltung ist damit vor allem **zur Messung großer Widerstände** geeignet.

Ein Widerstand, der nicht in einem Netzwerk eingebaut ist kann durch ein spezielles Messgerät auch **direkt** gemessen werden. Das Messgerät muss dazu über eine Konstantspannungsquelle verfügen. In der Regel ist das eine Batterie. Dadurch ist nur noch eine Strommessung notwendig, um unmittelbar den Widerstand zu ermitteln. Da aber auch die Spannung einer Batterie nach einer gewissen Betriebsdauer kleiner wird, enthält ein solches Widerstandsmessgerät neben Batterie und Strommesser noch einen regelbaren Widerstand, der in Reihe mit Widerstand und Strommessgerät geschaltet ist, sowie eine Prüftaste, die parallel zum Widerstand angeordnet wird. Bei Betätigung der Prüftaste wird der zu messende Widerstand kurzgeschlossen, so dass nur noch der Innenwiderstand des Strommessgerätes den Strom beschränkt. In diesem Kurzschlusszustand muss der Strommesser Vollausschlag anzeigen. Falls das wegen zu geringer Batteriespannung nicht der Fall sein sollte, kann am Potentiometer entsprechend nachgeregelt werden.

Widerstandsmessbrücke (Wheatstone’sche Brückenschaltung)

Ein weiteres Verfahren zur direkten Widerstandsmessung beruht auf der Wheatstone’schen Brückenschaltung. Diese Schaltung ist insbesondere geeignet um sehr kleine Änderungen eines Widerstands von seinem Normalwert zu messen, wie sie z.B. durch Temperaturänderungen oder auch, bei Dehnmessstreifen oder piezoresistiven Beschleunigungsmessern durch mechanische Beanspruchungen auftreten.

Bei der Wheatstone’schen Brückenschaltung werden 4 Widerstände paarweise in zwei Zweigen parallel geschaltet, an die eine Eingangsspannung U_q gelegt wird.

Die Ausgangsspannung wird zwischen den beiden Mittenknoten der beiden Zweige abgegriffen. Sie ist Null, wenn das Verhältnis der beiden Widerstände in jedem der Zweige gleich ist. In diesem Fall nennt man die Brücke abgeglichen. Schon eine geringe Abweichung eines der Widerstandswerte führt dazu, dass zwischen den Mittenknoten eine messbare Spannung auftritt. Diese Ausgangsspannung ist bei Anwendungen zur Dehnungs- oder Beschleunigungsmessung proportional zur jeweiligen Messgröße.

Bei Verwendung eines hochempfindlichen Spannungsmessgerätes, z.B. eines sogenannten „Galvanometers“, sowie eines Potentiometers in einem der beiden Zweige und eines in Reihe mit dem zu messenden Widerstand geschalteten Normalwiderstands, dessen Größe genau bekannt ist und der auch weitestgehend temperaturunabhängig ist, lässt sich mit der Wheatstone’schen Brücke aber auch eine sehr genaue Widerstandsmessung durchführen, falls sich der zu messende Widerstand nicht um mehr als eine Größenordnung (Faktor 10) vom Normalwiderstand R_N im gleichen Zweig unterscheidet. Falls dies der Fall sein sollte kann der Messbereich um den Faktor k durch einen Vorschaltwiderstand zum Normalwiderstand mit dem Widerstand

$$R_V = R_N \cdot (k-1)$$

erweitert werden.

3 Elektrische und magnetische Felder

Als Feld wird der Raum bezeichnet, in dem auf Körper mit gewissen physikalischen Eigenschaften wie Masse, elektrische Leitfähigkeit, elektrische Ladung, Magnetisierbarkeit usw. Kräfte ausgeübt werden, ohne dass ein direkter Kontakt zwischen zwei Körpern besteht. Beispiele für die Existenz solcher Kraftwirkungen sind das Schwerefeld der Erde, das elektrische Feld zwischen getrennten elektrischen Ladungen und die magnetischen Felder von Dauer- und Elektromagneten.

3.1 Elektrostatisches Feld

Elektrisch geladene Körper erzeugen im sie umgebenden Raum ein sogenanntes elektrostatisches Feld, dessen Existenz durch die Kräfte nachgewiesen wird, die es auf andere Ladungen im Raum ausübt. Man kann zeigen, dass die Kraft auf eine **„Probeladung“ *q*** proportional zur Größe der Probeladung ist und definiert

$$\vec{F} = q \cdot \vec{E}$$

wobei $\vec{E}$ als **Vektor der elektrischen Feldstärke** bezeichnet wird.

Bei einer Bewegung der Ladung im elektrostatischen Feld, muss man entweder Arbeit verrichten, oder das Feld verrichtet Arbeit an der Probeladung, indem diese beschleunigt wird und kinetische Energie erhält. Das Feld hat also in jedem Punkt ein Arbeitsvermögen, ein **„Potential“**, dessen Betrag vom Betrag der Kraft bzw. der Feldstärke in diesem Raumpunkt abhängt

Die Punkte des Raumes, die das gleiche Potential besitzen, bilden eine Fläche im Raum, die man **„Äquipotentialfläche“** nennt. Die Potentialdifferenz zwischen zwei Raumpunkten wird als **elektrische Spannung** zwischen diesen Punkten bezeichnet.

Der Kraftvektor auf eine Probeladung und damit auch der Vektor der elektrischen Probeladung steht in jedem Punkt einer Äquipotentialfläche senkrecht zur Fläche. Verschiebt man eine Probeladung kontinuierlich in Richtung des Feldstärkevektors, so entsteht eine Raumkurve, deren Tangentenvektor in jedem Kurvenpunkt die Richtung des Feldstärkevektors wiedergibt. Diese Kurven werden als **„Feldlinien“** bezeichnet. Die Feldlinien treten also senkrecht durch alle Äquipotentialflächen.

Beispiel: Plattenkondensator (2 gleich große ebene Platten, die im Abstand d parallel zueinander angeordnet sind)

Der Kraftvektor auf eine positive Probeladung q ist in jedem Punkt des Raumes zwischen den Platten betragsmäßig gleich groß und gleich gerichtet (von der positiv geladenen Platte weg, auf die negativ geladene Platte zu). Die Feldlinien gehen also von der positiv geladenen Platte aus (senkrecht zu dieser Platte) und verlaufen geradlinig bis zur negativ geladenen Platte. Alle Feldlinien sind parallel. Die Äquipotentialflächen sind die beiden ebenen Platten und die Parallelebenen im Raum zwischen den Platten. Die Potentialdifferenz, d.h. die Spannung zwischen den beiden Platten ist

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \vec{E} \cdot \vec{d}\ .$$

Das Feld eines Plattenkondensators, bei dem die Feldstärke in jedem Punkt nach Betrag und Richtung gleich ist, nennt man ein „homogenes elektrisches Feld“

Beispiel: Punktladung (Kompakter kugelförmiger Körper mit positiver elektrischer Ladung, die negative Ladung ist im Unendlichen)

Der Kraftvektor auf eine Probeladung ist in jedem Raumpunkt radial vom Zentrum des Körpers weggerichtet und nimmt betragsmäßig quadratisch mit dem Abstand vom Zentrum ab. Der Betrag des Feldstärkevektors ist

$$E = \frac{Q}{4\pi \cdot \varepsilon \cdot r^2}\ .$$

Dabei ist ε eine Materialkonstante des Mediums im elektrischen Feld. Die Äquipotentialflächen sind Kugeln um das Zentrum. Die Potentialdifferenz oder Spannung zwischen zwei Punkten A und B im Raum lässt sich über das Arbeitsintegral zu

$$U_{ab} = \varphi_a - \varphi_b = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}\ .$$

berechnen, wobei das Integral unabhängig vom gewählten Weg ist.

Körper aus leitendem Material im elektrischen Feld

Bringt man einen ungeladenen Körper aus leitendem Material in ein elektrisches Feld, so findet auf diesem Körper eine Ladungstrennung statt, d.h. die der positiv geladenen Seite der felderzeugenden Ladungsträger zugewandte Körperseite wird eine negative Ladung, die dem Träger negativer Ladung zugewandte Körperseite eine positive Ladung aufweisen. Das elektrische Feld beeinflusst also die

Elektronenverteilung im Leiter, was als **„Influenz“** bezeichnet wird. Das Innere des leitenden Körpers ist bei dieser Anordnung feldfrei.

Dieser physikalische Effekt lässt sich ausnutzen, um eine **Abschirmung** von Personen und Baugruppen oder Geräten gegen elektrische Felder zu erreichen, indem diese Personen oder Geräte durch ein Gehäuse aus leitendem (dünnwandigem) Blech geschützt werden. Wie Versuche gezeigt haben, genügt sogar schon ein Gehäuse aus einem Drahtgitter (**Faraday'scher Käfig**).

Elektrische Flussdichte (elektrische Verschiebungsdichte)

Die elektrische Feldstärke ist abhängig von Eigenschaften des Mediums, in dem das Feld besteht, sowie von der elektrischen Flussdichte D in jedem Raumpunkt. Die Bezeichnung dieser physikalischen Größe als „Flussdichte“ beruht auf einem der Grundgesetze der Mechanik, das insbesondere in der Strömungsmechanik von Bedeutung ist:

Der Fluss durch eine geschlossene Hülle ist gleich der Ergiebigkeit der eingeschlossenen Quellen.

Die **Quellen** sind beim elektrischen Feld die **Ladungen *Q***. Und der **Fluss durch die Hülle** ist die Summe der Vertikalkomponenten der **Flussdichte** über die Hüllfläche, d.h. das Integral über das Skalarprodukt aus der örtlichen elektrischen Flussdichte *D* und dem differentiellen Flächennormalenvektor $d\vec{A} = \vec{n} \cdot dA$ über die geschlossenen Hüllfläche *A*:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q\,.$$

Der Vektor der elektrischen Feldstärke ist proportional zum Flussdichtevektor

$$\vec{E} = \frac{\vec{D}}{\varepsilon}\,,$$

wobei die Größe ε eine Materialkonstante des Mediums ist, in dem das elektrische Feld vorliegt.

Im **Vakuum** oder auch in **Luft** ist

$$\varepsilon = \varepsilon_0 = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ C/Vm.$$

Diese Größe heißt **elektrische Feldkonstante**.

In anderen nichtleitenden Medien, sogenannten **Dielektrika**, ist diese Materialkonstante ein Mehrfaches dieser Größe:

$$\varepsilon = \varepsilon_o \cdot \varepsilon_r\,,$$

wobei ε_r eine dimensionslose Materialkonstante ist, die sogenannte **Dielektrizitätszahl** oder **Permittivität** des Dielektrikums.

Wie die nachfolgende Tabelle mit Anhaltswerten für einige In der Elektrotechnik wichtige Dielektrika zeigt ist die Dielektrizitätszahl in allen Fällen außer in Luft größer als 1, bei einigen Werkstoffen sogar sehr viel größer. Bei gleichem Betrag der Feldstärke *E* wird damit der Betrag der Verschiebungsdichte *D* in diesen Dielektrika größer als im Vakuum oder in Luft

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \cdot \vec{E}\,.$$

Luft	1	PU	3 - 4	Transformatorenöl	2,2 - 2,4
Papier	4 - 6	PVC	3 - 6	Aluminiumoxid	6 - 9
Glas	5 - 7	Epoxidharz	3 - 4	Kondensa (Spez. Keramik)	80
Porzellan	5 - 7	Polyamid	3,5	Bariumtitanat (BaTiO3)	>1000
Glimmer	5 - 8				
dest. Wasser	80				

Tabelle 3.1.1: Anhaltswerte für die Dielektrizitätszahl (Permittivität); ca.-Werte bei 20°C

Die Ursache dafür ist, dass unter dem Einfluss des elektrischen Feldes in den Nichtleitern zwar keine Ladungstrennung erfolgt, sich aber die Elektronenbahnen verändern, sodass kleine Dipole entstehen, die sich parallel zum Feldstärkevektor ausrichten. Dieser Vorgang wird als „**dielektrische Polarisation**" bezeichnet und erhöht die Verschiebungsdichte (=Flussdichte) im Feld.

3.2 Kondensatoren

Kondensatoren sind Anordnungen aus Leiterwerkstoffen, die gegeneinander durch nichtleitende Werkstoffe isoliert sind und in denen ruhende elektrische Ladungen gespeichert werden können. Die **gespeicherte Ladung** eines Kondensators ist stets proportional zur angelegten Spannung

$$Q = C * U.$$

Die Proportionalitätskonstante C ist die **Kapazität** des Kondensators.

Die **Einheit der Kapazität** ist 1 Farad[8] (1 F).

Es gilt: $1\ \mathrm{F} = 1\ \mathrm{C} / \mathrm{V} = 1\ \mathrm{As} / \mathrm{V}.$

[8] nach Michael Faraday (1791-1867), englischer Physiker und Chemiker, Entdecker der elektromagnetischen Induktion.

Das Farad ist eine für viele Zwecke sehr große Einheit. Übliche Kondensatoren haben Kapazitäten in den Bereichen

- Mikrofarad: $1\mu F = 10^{-6}$ F,
- Nanofarad: $1nF = 10^{-9}$ F,
- Pikofarad: $1pF = 10^{-12}$ F.

Die Kapazität eines Kondensators lässt sich mit den in Kapitel 3.1 eingeführten Zusammenhängen zwischen Spannung und elektrischer Feldstärke

$$U = \int \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

sowie zwischen elektrischer Ladung und Verschiebungsdichte

$$Q = \oint \vec{D} \cdot d\vec{A}$$

berechnen:

$$C = \frac{Q}{U} = \frac{\oint \vec{D} \cdot d\vec{A}}{\int \vec{E} \cdot d\vec{s}}.$$

Beispiel: Plattenkondensator
Beim Plattenkondensator sind zwei gleich große ebene Platten aus leitendem Werkstoff im Abstand d parallel zu einander angeordnet. Das elektrische Feld im Zwischenraum ist dann homogen, d.h. in jedem Punkt sind der Betrag und die Richtung der Feldstärke gleich groß. Aus der ersten der oben aufgeführten Gleichungen wird demnach einfach die Beziehung

$$U = E \cdot d\ .$$

Wählt man als eine geschlossene Fläche die Oberfläche des von der positiv geladenen Platte, einer dazu parallelen, gleich großen Fläche im Raum zwischen den Platten und den Verbindungsflächen des von beiden Flächenränder eingeschlossenen Raums, so ist das in der zweiten Gleichung unter dem Integralzeichen stehende Skalarprodukt auf der Randfläche null, da dort Feldstärke bzw. Verschiebungsdichte und der Flächennormalenvektor zueinander senkrecht sind, wogegen auf der Plattenfläche das Skalarprodukt gleich dem Produkt der Beträge der beiden Größen ist, da die beiden Vektoren parallel sind. Demnach ist beim Plattenkondensator

$$Q = D \cdot A.$$

Die Kapazität des Plattenkondensators, in dessem Zwischenraum sich ein Dielektrikum der Dielektrizitätszahl ε_r befindet, ist demnach

$$C = \frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot A}{d}.$$

Geschichteter Plattenkondensator

Werden *n* Platten gleicher Fläche *A* parallel so angeordnet, dass sie alternierend mit dem Plus- und dem Minuspol der Spannung verbunden sind, wird die Kapazität gegenüber dem einfachen Plattenkondensator um den Faktor *n-1* erhöht:

$$C = (n-1)\frac{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r \cdot A}{d}.$$

Beispiel: Zylinderkondensator

Ein Zylinderkondensator besteht aus einem leitenden Rohr und einem in dessen Zentrum liegenden drahtförmigen Leiter. Der Zwischenraum mit dem Innendurchmesser r_i und dem Außendurchmesser r_a ist mit einem Dielektikum der Permittivität ε_r ausgefüllt. Der Innendraht liegt am Pluspol, das Rohr am Minuspol der Gleichspannung. Damit wird auf der Drahtoberfläche eine positive Ladung Q_+, auf der Innenfläche des Rohrs eine betragsmäßig gleich große negative Ladung Q_- aufgebaut.

Betrachten wir eine geschlossene Fläche, die aus einem Zylinder mit dem Radius *r* und zwei Kreisscheiben mit dem gleichen Radius als seitliche Abschlüsse des Zylinders besteht, wobei $r_i > r > r_a$ ist, so gilt in dem zylindersymmetrischen elektrischen Feld im Dielektrikum für die elektrische Verschiebungsdichte

$$\vec{D} \cdot \vec{n} = D = const..$$

auf der Zylinderoberfläche und

$$\vec{D} \cdot \vec{n} = 0$$

auf den beiden Kreisscheiben.

Damit wird das Integral über die geschlossene Fläche

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = D \cdot \oint d\vec{A} = D \cdot A_{zyl} = D \cdot 2\pi r L .$$

Der Wert dieses Integrals, d.h. der „Fluss durch die Hülle“ ist gleich der „Ergiebigkeit der eingeschlossenen Quellen“, in diesem Fall also gleich der Ladung *Q* auf der Drahtoberfläche.

Damit ergibt sich die elektrische Verschiebungsdichte zu

$$D = \frac{Q}{2\pi\, rL}$$

und die elektrische Feldstärke im Dielektrikum zu

$$E = \frac{Q}{2\pi\, r\varepsilon_0\varepsilon_r L}.$$

Die elektrische Spannung zwischen Draht und Rohr ist dann

$$
\begin{aligned}
\int \vec{E} d\vec{s} &= \frac{Q}{2\pi\, \varepsilon_0 \varepsilon_r L} \cdot \int \frac{dr}{r} = \frac{Q}{2\pi\, \varepsilon_0 \varepsilon_r L} \cdot \left[\ln r\right]_{r_a}^{r_a} \\
&= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r L} \cdot (\ln r_a - \ln r_i) \\
&= \frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r L} \cdot \ln \frac{r_a}{r_i}
\end{aligned}
$$

Die Kapazität eines Zylinderkondensators beträgt folglich

$$
C = \frac{2\pi\varepsilon_0 \varepsilon_r L}{\ln \frac{r_a}{r_i}} .
$$

Die gleichen Verhältnisse wie bei Zylinderkondensatoren liegen beispielsweise auch bei Koaxialkabeln vor, die aus einem in Kunststoff gebetteten Drahtleiter und einer leitenden Umhüllung zur Abschirmung gegen elektromagnetische Felder bestehen.

Reihenschaltung von Kondensatoren

Da beim Anlegen einer Gleichspannung lediglich eine Ladungstrennung stattfindet, sind die Ladungen auf allen in Reihe geschalteten Kondensatoren gleich groß. Die Teilspannungen sind dabei

$$
U_i = Q / C_i .
$$

Die Gesamtspannung im Stromkreis ist

$$
U = \frac{Q}{C_{ges}} = \sum \frac{Q}{C_i} .
$$

Damit ergibt sich

$$
\frac{1}{C_{ges}} = \sum \frac{1}{C_i} .
$$

Folglich gilt:

In der Reihenschaltung addieren sich die Kehrwerte der Kapazitäten zum Kehrwert der Gesamtkapazität.
Die Gesamtkapazität ist demnach in einer Reihenschaltung von Kondensatoren stets kleiner als die kleinste Kapazität eines der beteiligten Kondensatoren.

Reihenschaltungen von Kondensatoren werden angewandt bei großen Netzwerksspannungen, um die an den Kondensatoren anliegende Spannung zu vermindern und das sogenannte **„Durchschlagen“** zu verhindern. Durchschlagen bedeutet, dass durch eine zu hohe Spannung am Kondensator selbst der sehr große Widerstand des Dielektrikums nicht ausreicht, um einen Stromfluss bzw.

Ladungsausgleich zwischen positiv und negativ geladenen Bauteilen zu verhindern. Dieser ist in der Regel mit solch großen Stromstärken verbunden, dass die Wärmeentwicklung zur **Zerstörung** des Dielektrikumwerkstoffs und damit des Kondensators führt.

Parallelschaltung von Kondensatoren

In einer Parallelschaltung liegen alle Kondensatoren an der gleichen Spannung U. Die Ladungen der Kondensatoren betragen dann

$$Q_i = C_i \cdot U$$

und die insgesamt gespeicherte Ladung ist

$$Q_{ges} = C_{ges} \cdot U \text{ .}$$

Die Gesamtkapazität parallel geschalteter Kondensatoren wird dann

$$Q_{ges} = \sum C_i \text{ .}$$

Folglich gilt:

In einer Parallelschaltung addieren sich die Kapazitäten zur Gesamtkapazität.

Die Gesamtkapazität in einer Parallelschaltung ist demnach stets größer als die größte Einzelkapazität.

Gemischte Schaltungen von Kondensatoren

Wie die gemischten Schaltungen von Ohm'schen Widerständen lassen sich auch gemischte Schaltungen von Kondensatoren schrittweise vereinfachen.

Betrachten wir beispielsweise eine Schaltung, bei der ein Kondensator C_4 in Reihe geschaltet ist mit einer Parallelschaltung einer Kapazität C_1 mit zwei Kondensatoren C_2 und C_3 (in Reihe), so kann man zunächst für die Reihenschaltung von C_2 und C_3 eine Ersatzkapazität

$$\mathrm{C}_5 = \frac{\mathrm{C}_2 \cdot \mathrm{C}_3}{\mathrm{C}_2 + \mathrm{C}_3}$$

ermitteln. Im zweiten Schritt wird die Ersatzkapazität der Parallelschaltung zu

$$C_6 = C_1 + C_5$$

berechnet, ehe schließlich die Gesamtkapazität zu

$$C_{ges} = \frac{C_4 \cdot C_6}{C_4 + C_6}$$

bestimmt wird.

Aufladung eines Kondensators

Ein Kondensator der Kapazität *C* sei in einem einfachen Stromkreis mit dem ohmschen Gesamtwiderstand *R* (Hinleitung, Rückleitung und Innenwiderstand der Quelle) eingebaut und liegt bei zunächst geöffnetem Schalter an einer Spannungsquelle *U*.

Zur Zeit $t = 0$ wird der Schalter geschlossen, so dass ein Strom

$$i(t) = \frac{dq}{dt}$$

fließen kann.

Die differentielle Ladungsänderung des Kondensators ist dann

$$dq = C \cdot du_C \,.$$

Zwischen dem momentanen Strom und der momentanen Spannung gibt es folglich den Zusammenhang:

$$i(t) = C \cdot \frac{du_C(t)}{dt} \,.$$

Die Kirchhoff'sche Maschenregel im einfachen Stromkreis sagt aus, dass die Summe der Spannungen am Ohm'schen Widerstand und am Kondensator zu jedem Zeitpunkt gleich der eingeprägten Gleichspannung U sein muss:

$$u_R(t) + u_C(t) = U \,.$$

Mit dem Ohm'schen Gesetz

$$u_R(t) = R \cdot i(t)$$

und den vorne abgeleiteten Beziehungen zwischen momentaner Stromstärke und momentaner Kondensatorspannung folgt

$$R \cdot C \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C(t) = U \,.$$

Das ist eine Differentialgleichung 1. Ordnung für die Kondensatorspannung u_C.

Eine Dimensionsbetrachtung zeigt, dass das Produkt RC die Dimension einer Zeit hat. Man bezeichnet dieses Produkt als die **Zeitkonstante *T*** der Anordnung:

$$T = R \cdot C\,.$$

Damit lautet die Differentialgleichung für die Aufladephase eines Kondensators

$$T \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C(t) = U\,.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist

$$u_C(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{T}} + U$$

mit einer beliebigen Konstanten *A*.

Aus den unendlich vielen möglichen Lösungen der Differentialgleichung muss noch die für die vorliegende Aufgabenstellung einzig zutreffende ausgewählt werden.

Dies ist mit Hilfe der **Anfangsbedingung** möglich, dass zur Zeit *t = 0* die Kondensatorspannung noch Null ist:

$$u_C(0) = 0\,.$$

Damit ergibt sich die Lösung eindeutig zu

$$u_C(t) = U \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right).$$

Für die **Stromstärke** im betrachteten einfachen Stromkreis ergibt sich dann

$$i(t) = I \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

mit *I = U/R*.

Die Energie des elektrischen Felds im Kondensator beträgt

$$W_C = C \cdot \int u_C \cdot du_C = \frac{1}{2} C U^2\,.$$

Entladung eines Kondensators

Ein Kondensator der Kapazität *C*, der in einem einfachen Stromkreis mit dem ohmschen Gesamtwiderstand *R* eingebaut ist, befinde sich zur Zeit *t* = 0 in einem vollständig aufgeladenen Zustand, so dass gilt:

$$u_C(0) = U\,.$$

Wird zum Zeitpunkt *t* = 0 die Spannungsquelle durch Umlegung des Schalters kurzgeschlossen, so gilt für die Kondensatorspannung $u_C(t)$ während der folgenden Zeit *t* >0 des Entladevorgangs die Differentialgleichung

$$RC \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C(t) = 0\,.$$

Durch die Einführung der Zeitkonstanten

$$T = R \cdot C$$

wird daraus die Differentialgleichung

$$T \cdot \frac{du_C}{dt} + u_C(t) = 0$$

mit der allgemeinen Lösung:

$$u_C(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{T}}\,,$$

wobei die Konstante A eine frei wählbare Größe ist.

Aus der allgemeinen Lösung dieser Differentialgleichung kann mit der obengenannten Anfangsbedingung $u_C(0)$ = U die für das vorliegende Problem einzig zutreffende Lösung ausgewählt werden:

$$u_C(t) = U \cdot e^{-\frac{t}{T}}\,.$$

Der zeitliche Verlauf des Stroms beim Entladevorgang des Kondensators ist dann

$$i(t) = -I \cdot e^{-\frac{t}{T}}\,.$$

mit *I* = *U/R*.

3.3 Magnetisches Feld

Als **Magnet** wird ein Körper bezeichnet, der auf Eisen-, Kobalt- und Nickelteile in seiner Umgebung Kräfte ausübt. Die Stoffe, die von Magneten Kräfte erfahren, nennt man zusammenfassend ferromagnetische Werkstoffe (= Werkstoffe, die sich magnetisch wie Eisen verhalten).

Die Ursache der magnetischen Kraftwirkung ist ein **magnetisches Feld**. Ein magnetisches Feld besteht in der Nähe stromdurchflossener Leiter aber auch in der

Umgebung von gewissen Körpern, denen von außen keine Energie zugeführt wird. Diese Körper werden dann als **Dauermagnete** (Permanentmagnete) bezeichnet.

Auch die Erde ist ein Dauermagnet mit einem allerdings relativ schwachen Magnetfeld. Immerhin reicht es aus um einen spitzengelagerten kleinen stabförmigen Dauermagneten in einem **Kompass** auf der Erde so auszurichten, dass er dem Nutzer die Nordrichtung an seinem momentanen Standort anzeigt. Der magnetische Nordpol der Erde liegt in Wirklichkeit nicht im eigentlichen Nordpol, der als Durchstoßpunkt der Drehachse der Erde durch die Erdoberfläche definiert ist, sondern nur in dessen Nähe (global betrachtet), was aber die Nutzung eines Kompasses in den meisten Regionen der Welt nicht merklich beeinträchtigt. Außerdem haben sowohl der magnetische als auch der eigentliche Nordpol im Laufe der Jahrtausende ihre Lage immer wieder verändert. Der Kompass ist verantwortlich dafür, dass man dasjenige Ende eines drehbar gelagerten Stabmagneten, das nach Norden ausgerichtet wird, als **Nordpol** bezeichnet, während das andere Ende als **Südpol** bezeichnet wird.

Allgemein gilt: In einem magnetischen Feld richtet sich ein drehbar gelagerter stabförmiger Dauermagnet in jedem Raumpunkt in die Richtung der dort wirkenden magnetischen Kräfte aus, da dann das am Stabmagneten angreifende Kräftepaar eine gemeinsame Wirkungslinie besitzt und das auf den Stabmagneten einwirkende Drehmoment null wird.

Mit einem „Kompass“ lässt sich also in jedem Punkt eines magnetischen Feldes die Richtung der magnetischen Kraft ermitteln. Eine Raumkurve, deren Tangente in jedem Punkt die Richtung der magnetischen Kraft angibt, nennt man eine **Feldlinie**. Magnetische Feldlinien sind geschlossene Kurven, d.h. sie haben keinen Anfang und kein Ende.

Bezüglich des Richtungssinns magnetischer Feldlinien gilt die Vereinbarung:

- **innerhalb** magnetischer Körper **vom Süd- zum Nordpol**,
- **außerhalb** magnetischer Körper vom **Nord- zum Südpol**.

Unabhängig von dieser willkürlichen Festlegung gilt, dass sich

- **gleichnamige Pole** von Magneten **abstoßen**,
- **ungleichnamige Pole** von Magneten **anziehen**.

Magnetisches Feld um einen stromdurchflossenen Leiter

Für die technische Anwendung sind die Wirkungen von Dauermagneten weit weniger interessant als die magnetischen Wirkungen von stromdurchflossenen Leitern, da sich diese über die Stromstärke und die Leiteranordnung in weiten Grenzen steuern lassen.

Um einen **geraden Leiter**, der vom Strom $\vec{I}$ durchflossen wird, bildet sich ein Magnetfeld, dessen Feldlinien konzentrische Kreise in Ebenen senkrecht zum Leiter sind. Der **Vektor der magnetischen Feldstärke** in einem Punkt P des Feldes wird mit $\vec{H}$ bezeichnet. Er ist senkrecht zum Strom $\vec{I}$ und senkrecht zum Fahrstrahl $\vec{r}$ vom Leiter zum Punkt *P* gerichtet. Der Richtungssinn des Feldstärkevektors ergibt sich nach der Rechtsschraubenregel aus der Richtung des Stroms $\vec{I}$ im Leiter. Der Betrag der magnetischen Feldstärke im Punkt *P* ist proportional zur Stromstärke im Leiter und umgekehrt proportional zum Abstand des Punktes *P* vom Leiter. Man definiert

$$H = \left|\vec{H}\right| = \frac{I}{l}\,,$$

wobei

$$l = 2\pi \cdot r$$

die Länge der durch *P* gehenden Feldlinie ist.

Die **Einheit der magnetischen Feldstärke** ist **1 Ampére / Meter (= 1A/m)**.
Häufig wird die magnetische Feldstärke aber auch in Ampére / Zentimeter (A/cm) angegeben.

Durchflutungsgesetz von Ampére

Betrachtet man eine geschlossene Kurve in einem Magnetfeld, so nennt man die Summe der Ströme, die diese Kurve durchsetzen, die **Durchflutung** der Kurve:

$$\Theta = \sum_j I_j$$

Bei der Summenbildung ist das Vorzeichen zu beachten. Es dürfen nicht einfach die Beträge der Ströme addiert werden.

Summiert man dann die mit dem Wegelement *ds* multiplizierten Tangentialkomponenten H_t der magnetischen Feldstärke längs eines geschlossenen Umlaufs der Kurve, so ist diese Summe gleich der Durchflutung der Kurve:

$$\oint H_t \cdot ds = \Theta\,,$$

oder, in Vektorschreibweise mit dem Skalarprodukt des Feldstärkevektors mit dem vektoriellen Wegelement $d\vec{s}$:

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta = \sum_j I_j\;.$$

Beispiel: Spule mit N Windungen

Fließt in der Spule der Strom *I* und ist sie von Luft umgeben (sog. Luftspule) so können wir als geschlossene Kurve eine der Feldlinien des sich ausbildenden Magnetsfelds wählen. Die Durchflutung dieser Kurve ist

$$\Theta = N \cdot I\;,$$

und die magnetische Feldstärke längs der Feldlinie beträgt

$$H_i = \frac{\Theta}{l_i} = \frac{N \cdot I}{l_i} .$$

Baut man in die Spule einen Kern aus ferromagnetischem Material (im allgemeinen Eisen) ein, so werden die Feldlinien durch diesen Eisenkern geführt und nur wenige treten aus dem Kern in die umgebende Luft aus. In diesem Fall betrachtet man die magnetische Feldstärke im Kern als näherungsweise konstant und verwendet die mittlere Feldlinienlänge zur Berechnung dieser konstanten Feldstärke:

$$H = \frac{\Theta}{l_m} = \frac{N \cdot I}{l_m} .$$

Magnetische Flussdichte bzw. magnetische Induktion

Beim elektrischen Feld haben wir gesehen, dass wir mit der elektrischen Feldstärke allein die Wirkungen eines elektrischen Feldes nicht zutreffend beschreiben können, sondern dass eine zweite Feldgröße erforderlich ist, die elektrische Flussdichte, deren Größe wesentlich durch Eigenschaften des Mediums bestimmt wird, in dem sich das elektrische Feld ausbildet (des sog. Dielektrikums).

Entsprechendes gilt auch für Magnetfelder. Die zweite Feldgröße, die im Magnetfeld erforderlich ist, wird wegen dieser Entsprechung **magnetische Flussdichte** genannt, häufig aber auch **magnetische Induktion** und mit dem Buchstaben B bezeichnet. Sie ist ein zur magnetischen Feldstärke proportionaler Vektor und es gilt:

$$\vec{B} = \mu \cdot \vec{H} ,$$

wobei μ die **Permeabilität** des Stoffes ist, in dem sich das magnetische Feld ausbildet. Wie bei der Permittivität der Dielektrika im elektrischen Feld wird auch die Permeabilität als Produkt aus zwei Größen gebildet:

- der dimensionsbehafteten **Permeabilität des Vakuums**

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ Vs/Am}$$

- und der dimensionslosen **Permeabilitätszahl** des Stoffes μ_r:

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r .$$

Die **Einheit** der magnetischen Flussdichte ist 1Vs/m2 = 1 Tesla[9] (= 1 T).
Bei **unmagnetischen Stoffen** gilt mit guter Näherung $\boldsymbol{\mu_r = 1}$.

Bei **magnetischen Stoffen** ist stets $\boldsymbol{\mu_r > 1}$.

Bei **ferromagnetischen Stoffen** kann $\boldsymbol{\mu_r}$ **bis zu $\boldsymbol{10^6}$** betragen.

[9] nach Nikola Tesla (1856 - 1943), kroatisch-amerikanischer Ingenieur.

Allerdings ist bei diesen Stoffen die Permeabilitätszahl nicht konstant, sondern hängt sowohl von der momentanen magnetischen Feldstärke als auch von der magnetischen „Vorgeschichte“ des Stoffes ab.

Beispiel: Spule mit Eisenkern.

Zu Beginn sei der Eisenkern völlig unmagnetisch und die Spule stromlos. Wenn die Stromstärke in der Spule von Null beginnend langsam erhöht wird baut sich im Eisenkern ein magnetisches Feld wachsender Feldstärke auf. Dieses Feld bewirkt, dass sich die zunächst ungeordneten **Molekularmagnete** im Eisen, die sogenannten Weiß'schen Bezirke, zunehmend parallel zu den Feldlinien des magnetischen Feldes **ausrichten**.

Diese Drehungen sind **zunächst reversibel** (im elastischen Spannungs-/ Verformungsbereich des Werkstoffs), mit zunehmender Feldstärke dann aber auch zunehmend **irreversibel** (im Bereich plastischer Spannungen bzw. Verformungen). Durch diese Ausrichtung der Molekularmagnete in ferromagnetischen Stoffen bei großer Feldstärke wird die magnetische Flussdichte sehr viel größer als bei kleiner Feldstärke. Dieser Effekt setzt sich natürlich nur solange fort bis alle Molekularmagnete ausgerichtet sind. Dann tritt die **Sättigung** ein und die magnetische Flussdichte steigt nicht weiter an.

Bei einer Reduktion des Spulenstroms nach der Sättigung und bei der dadurch abnehmenden Feldstärke werden zunächst nur die reversiblen Drehungen der Molekularmagnete rückgängig gemacht, sodass, selbst wenn das durch die stromdurchflossene Spule gebildete Feld vollständig abgebaut ist, immer noch eine gewisse magnetische Flussdichte verbleibt, die als **Remanenz** $\mathbf{B_r}$ bezeichnet wird. Der Eisenkern ist demzufolge zu einem **Dauermagneten** geworden.

Um den Kern zu entmagnetisieren muss die Richtung des Spulenstroms und damit die Richtung des Feldstärkevektors umgekehrt werden. Die Feldstärke des erforderlichen Gegenfeldes nennt man die **Koerzitivfeldstärke** $\mathbf{H_K}$ des Stoffes.

Bei weiterer Vergrößerung der Stromstärke in der Spule und damit des magnetischen Feldes im ferromagnetischen Werkstoff wiederholt sich der oben beschriebene Vorgang in umgekehrter Richtung bis zur erneuten Sättigung. Die Kurve, die sich im B,H-Diagramm ergibt, nennt man eine **Hystereseschleife**.

Bei Spulen, die in Wechselstromkreisen eingebaut sind, läuft dieser Vorgang in rascher Folge ab (bei Wechselstrom mit 50 Hz geschieht das 50-mal pro Sekunde). Die innere Reibung im Werkstoff bei der Ausrichtung der Molekularmagnete führt dabei zu Energieverlusten, die proportional zum Kernvolumen und zum Flächeninhalt der Hystereseschleife sind. Bei elektrischen Maschinen und Anlagen (z.B. Motoren und Transformatoren) sind diese Energieverluste in zweifacher Hinsicht unerwünscht, weil einerseits der Wirkungsgrad schlechter wird und sich andererseits das Gerät unzulässig stark erwärmen kann.

Deshalb werden in **Elektromagneten, Transformatoren und Elektromotoren** sogenannte **magnetisch weiche Werkstoffe** verwendet, bei denen sowohl die Remanenz als auch die Koerzitivfeldstärke so klein wie möglich sind. das trifft beispielsweise auf das sogenannte **Dynamoblech** (Fe mit 3,75 % Si) zu.

Dauermagnete müssen demgegenüber über eine große Remanenz und eine große Koezitivfeldstärke als Schutz gegen eine ungewollte Entmagnetisierung durch elektrische Streufelder verfügen. Für Dauermagnete werden deshalb sogenannte **magnetisch harte Werkstoffe** verwendet.

Die magnetisch härtesten Werkstoffe, deren Remanenz fast so groß ist wie die Sättigungsflussdichte und deren Koerzitivfeldstärke fast die Sättigungsfeldstärke erreicht, nennt man **Rechteckferrite**. Derartige Werkstoffe wie z.B. $FeO*Fe_2O_3$ wurden früher in den Magnetspeichern von Computern verwendet, da ihre fast rechteckige Hystereseschleife zwei sehr gut definierte Magnetisierungszustände ergab.

Magnetischer Fluss

Zum Begriff der magnetischen Flussdichte gehört zwangsläufig auch der Begriff des magnetischen Flusses. Unter einer Flussdichte muss man den Fluss pro Fläche verstehen. Folglich ist der Fluss gleich Flussdichte mal Fläche.

Bei einem **homogenen magnetischen Feld** folgt daraus die Definition des magnetischen Flusses durch eine Fläche *A*, die senkrecht zur Flussrichtung angeordnet ist:

$$\Phi = B \cdot A \,.$$

Bei einem inhomogenen magnetischen Feld wird:

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot d\vec{A} \;,$$

wobei der Vektor des Flächenelements mit dem Normalenvektor der Fläche gebildet wird und der Punkt ein Skalarprodukt der beiden Vektoren anzeigt.

Die **Einheit** des magnetischen Flusses ist 1 Tm^2 = 1 Vs = **1 Weber**[10] **(=1 Wb)**.

Magnetischer Kreis

Eine geschlossene Feldlinie in einem magnetischen Feld wird als magnetischer Kreis bezeichnet, da Analogien zu einem elektrischen Stromkreis bestehen.

[10] nach Wilhelm Eduard Weber (1804-1891), Physikprofessor in Göttingen

Der **Quelle** des elektrischen Stroms, der Spannung U_q , wird dabei als Quelle des magnetischen Feldes die Durchflutung Θ gegenübergestellt, die deshalb auch als „magnetische Spannung" bezeichnet wird.

Der elektrischen Leitfähigkeit $\kappa = \frac{1}{\rho}$ entspricht im magnetischen Kreis die Permeabilität $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$, sodass dem Ohm'schen Widerstand $R = L/(\kappa \cdot A)$ der sogenannte magnetische Widerstand des Kerns $R_m = l_m/(\mu \cdot A)$ entspricht.

Die **Wirkung** der elektrischen Spannung im Stromkreis ist dann die Stromstärke $I = U_q / R$, während als Wirkung der magnetischen Spannung im magnetischen Kreis der magnetische Fluss $\Phi = \Theta / R_m$ auftritt. Folglich entsteht analog zur Stromdichte $S = dI / dA$ des elektrischen Stromkreises in einem magnetischen Kreis die magnetische Flussdichte $B = d\Theta / dA$.

Einfacher magnetischer Kreis

Ein einfacher magnetischer Kreis besteht aus einer Spule mit Eisenkern. Der Kernquerschnitt sei $A=const.$, die mittlere Feldlinienlänge sei l_m, die Windungszahl N.

Gesucht sei die erforderliche Stromstärke I zur Erzeugung eines gewünschten magnetischen Flusses Φ.

Lösungsweg: Die erforderliche Flussdichte im Eisenkern ist

$$B_{Fe} = \frac{\Phi}{A}.$$

Die dazu erforderliche Feldstärke H_{erf} kann der Magnetisierungskurve des Kernwerkstoffs entnommen werden, das vom Hersteller des Kernwerkstoffs in einem Diagramm

$$B_{Fe} = f(H_{Fe})$$

zur Verfügung gestellt wird. Damit ergibt sich die erforderliche Durchflutung zu

$$\Theta_{erf} = H_{erf} \cdot l_m$$

und die erforderliche Stromstärke in der Spule zu

$$I_{erf} = \frac{\Theta_{erf}}{N}$$

Magnetischer Kreis mit Luftspalt

Enthält der Eisenkern des vorne betrachteten einfachen magnetischen Kreises einen engen Luftspalt, dessen Breite b sehr viel kleiner ist als die mittlere Feldlinienlänge im Eisenkern, so kann man davon ausgehen, dass das Magnetfeld weiterhin durch den Eisenkern geführt wird und dass kaum Streuverluste auftreten.

Damit ist die magnetische Flussdichte im Eisen und im Luftspalt gleich groß und ergibt sich als Quotient aus dem magnetischen Fluss und dem Kernquerschnitt

$$B_L = B_{Fe} = \frac{\Phi}{A}\,.$$

Aus der Magnetisierungskurve des Kernwerkstoffs

$$B_{Fe} = f(H_{Fe})$$

lässt sich wieder die erforderliche Feldstärke H_{Fe} im Eisenkern entnehmen. Die im Luftspalt vorhandene Feldstärke ist

$$H_L = \frac{B_L}{\mu_0}\,.$$

Aus dem Durchflutungsgesetz

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{s} = \Theta$$

wird

$$\Theta = H_{Fe} \cdot L_{Fe} + H_L \cdot d = H_{eff} \cdot L_m$$

mit der für die Anordnung des Kerns mit Luftspalt **effektiven Feldstärke H_{eff}**.

Trägt man die Flussdichte über der effektiven Feldstärke auf, so ergibt sich eine andere Magnetisierungskurve für den Kern mit Luftspalt, die flacher und linearer als die Magnetisierungskurve des geschlossenen Kerns verläuft und die als **gescherte Magnetisierungskurve** der Anordnung bezeichnet wird.

Energie des Magnetfeldes

Bei einer stromdurchflossenen Spule mit **geschlossenem Eisenkern** ergibt sich die im Magnetfeld des Eisenkerns gespeicherte Energie bei der erreichten Flussdichte zu

$$W_{Fe} = V_{Fe} \cdot \int H_{Fe} \cdot dB_{Fe}\,,$$

wobei V_{Fe} das Volumen des Eisenkerns ist.

Bei einem **Eisenkern mit Luftspalt** beträgt die im Luftspalt gespeicherte Energie wegen des dort linearen Zusammenhangs zwischen magnetischer Flussdichte und magnetischer Feldstärke

$$W_L = \frac{B_L \cdot H_L \cdot V_L}{2} = \frac{B_L{}^2 \cdot V_L}{2 \cdot \mu_0}\,.$$

Bei einem engen Luftspalt im Eisenkern ist die magnetische Flussdichte im Luftspalt gleich groß wie im Eisen. Wegen der sehr viel kleineren Permeabilität der Luft ist demnach die magnetische Feldstärke im Luftspalt wesentlich größer als im Eisenkern.

Im Eisenkern mit Luftspalt ist folglich bei gleicher Flussdichte eine größere Energie gespeichert als im geschlossenen Eisenkern. Allerdings bedarf es aber auch eines größeren Spulenstroms und damit auch einer größeren Zufuhr an elektrischer Energie um im magnetischen Kreis mit Luftspalt die gleiche Flussdichte zu erzeugen wie in einem vergleichbaren Kreis mit geschlossenem Eisenkern.

Kräfte zwischen Magnetpolen

Ein **Elektromagnet** besteht aus einer stromdurchflossenen Spule mit geteiltem Eisenkern, wobei der eine Teil des Eisenkerns fest, der andere beweglich ist. Der feste Teil wird als **Joch**, der bewegliche Teil als **Anker** bezeichnet. Im Luftspalt zwischen Joch und Anker besteht ein (näherungsweise) homogenes Magnetfeld mit der Flussdichte B. Die Energie des Magnetsfelds im Luftspalt ist folglich

$$W_L = \frac{{B_L}^2 \cdot V_L}{2 \cdot \mu_0}$$

Das Luftspaltvolumen ist $V_L = A \cdot d$,

wobei *A* die Querschnittsfläche und *d* die Breite des Luftspalts ist. Die Energie im Magnetfeld ist also proportional zur Breite d des Luftspalts:

Bei einer Vergrößerung der Luftspaltbreite um Δd nimmt die Energie des Magnetfeldes im Luftspalt um

$$\Delta W_L = \frac{{B_L}^2 \cdot \Delta V_L}{2 \cdot \mu_0} = \frac{{B_L}^2 \cdot A \cdot \Delta d}{2 \cdot \mu_0}$$

zu. Um diese Luftspaltvergrößerung zu erreichen bedarf es der Arbeit $F_m \Delta d$.
Also gilt

$$F_m \cdot \Delta d = \frac{{B_L}^2 \cdot A \cdot \Delta d}{2 \cdot \mu_0}$$

und die Kraft zwischen den Magnetpolen beträgt

$$F_m = \frac{{B_L}^2 \cdot A}{2 \cdot \mu_0}.$$

Mit kleiner werdender Luftspaltbreite *d* wächst die Flussdichte B_L und damit auch die Anziehungskraft zwischen den Magnetpolen.

Nach dem Kontakt der beiden Magnetpole, also nach Schließung des Luftspalts steigt die magnetische Flussdichte nochmals stark an. Das bedeutet, dass bei einem Elektromagneten die Haltekraft erheblich höher als die Anzugskraft ist.

Außerdem gilt, dass die Anzugskraft immer positiv ist, unabhängig von der Flussrichtung des Magnetfeldes, da unabhängig von der Stromrichtung sich stets zwei ungleichnamige Pole gegenüberstehen die sich gegenseitig anziehen.

Kraft auf eine bewegte Ladung im Magnetfeld (Lorentz - Kraft)[11]

Im elektrischen Feld wirkt auf eine Ladung eine zur Größe dieser Ladung und zur elektrischen Feldstärke am Ort der Ladung proportionale Kraft in Richtung der elektrischen Feldstärke an diesem Ort.

Im magnetischen Feld wirkt keine Kraft auf eine ruhende Ladung. Dagegen wirkt auf eine bewegte Ladung ebenfalls eine Kraft, die proportional zur Größe der Ladung, zur Geschwindigkeit der Ladung und zur Flussdichte des magnetischen Feldes ist.

Die Richtung dieser Kraft ist senkrecht zur Geschwindigkeitsrichtung und senkrecht zum Vektor der magnetischen Flussdichte. Genauer gesagt ist der Kraftvektor gleich dem mit der Ladung *Q* multiplizierten Vektorprodukt aus dem Vektor der Ladungsgeschwindigkeit und der magnetischen Flussdichte:

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{v} \times \vec{B} .$$

Wenn also der Geschwindigkeitsvektor und der Vektor der magnetischen Flussdichte einen Winkel α einschließen wird der Betrag dieser Kraft

$$F = |Q| \cdot |\vec{v}| \cdot |\vec{B}| \cdot \sin\alpha .$$

Kraft auf stromdurchflossenen Leiter im Magnetfeld

Wir betrachten ein homogenes Magnetfeld mit der konstanten Flussdichte B, in dem sich ein dazu senkrecht stehender, gerader Leiter der Länge L befindet.

Wenn dieser Leiter von einem Strom der Stromstärke I durchflossen wird, bildet sich um den stromdurchflossenen Leiter ebenfalls ein Magnetfeld aus. Auf den Leiter wirkt dann eine Kraft in Richtung des durch die Überlagerung der beiden Magnetfelder entstehenden Bereichs in dem eine Schwächung des äußeren

[11] nach Hendrik Anton Lorentz (1853-1912), niederländischer Physiker, der die klassische Elektronentheorie entwickelte und mit der Lorentz-Transformation die mathematische Grundlage für die Relativitätstheorie schuf, Nobelpreis 1902.

Magnetfelds auftritt. Der Strom I im Leiter, der Vektor der magnetischen Flussdichte B und die Kraft F bilden dabei ein Rechtssystem (wie die Koordinatenrichtungen x, y und z eines rechtshändigen Koordinatensystems).

Bezeichnet man die Leiterlänge als einen Vektor L gleichen Betrags L in Stromrichtung, so kann man die Kraft auf den Leiter als Vektorprodukt

$$\vec{F} = I \cdot \vec{L} \times \vec{B}$$

angeben.

Für den Betrag der Kraft gilt demnach

$$F = \left|\vec{F}\right| = |I| \cdot \left|\vec{L}\right| \cdot \left|\vec{B}\right| \cdot \sin\alpha \,,$$

wobei α der Winkel zwischen der Stromrichtung im Leiter und der Richtung des magnetischen Flusses im Magnetfeld ist.

Kraft zwischen zwei parallelen stromdurchflossenen Leitern

Der Abstand zwischen den beiden Leitern sei *a*. Durch den Strom I_1 im ersten Leiter entsteht ein Magnetfeld, das am Ort des zweiten Leiters die Flussdichte

$$B_1 = \mu_0 \cdot H_1 = \frac{\mu_0 \cdot I_1}{2\pi \cdot a}$$

besitzt. Auf den vom Strom I_2 durchflossenen zweiten Leiter wirkt dann eine Kraft vom Betrag

$$F = I_2 \cdot l \cdot B_1 = \frac{\mu_0 \cdot I_1 \cdot I_2 \cdot l}{2\pi \cdot a} \,.$$

Dieser Effekt wird heute international zur Eichung der **Einheit der Stromstärke** verwendet:

Ein Ampére ist die Stärke eines Gleichstroms, der zwischen zwei parallelen im Abstand von einem Meter im Vakuum angeordneten Leitern je Meter Leiterlänge eine Kraft von $2 \cdot 10^{-7}$ N hervorruft.

3.4 Induktionsgesetz

Wenn ein konstanter magnetischer Fluss eine Leiterschleife mit *N* Windungen durchdringt, in der kein Strom fließt und die auch nicht bewegt wird (also in Ruhe ist), so werden auf die Elektronen in der Leiterschleife keine Kräfte ausgeübt.

Wenn sich jedoch der magnetische Fluss verändert (zunimmt oder abnimmt), so lässt sich in der Leiterschleife ein Strom *i(t)* nachweisen, dessen Betrag proportional zur Änderungsgeschwindigkeit des magnetischen Flusses ist.

Die Ursache dieses Stroms muss eine Quellspannung U_q sein, die durch die Flussänderung induziert wird:

$$u_q = N \cdot \frac{d\Phi}{dt}.$$

Für die Anordnung kann damit ein einfacher Schaltkreis als Ersatzschaltbild gezeichnet werden, der neben der Spannungsquelle den Widerstand der Spule als Innenwiderstand der Spannungsquelle R_i sowie den Verbraucherwiderstand R enthält.

Nach der Maschenregel gilt im Ersatzschaltbild

$$u_q = i \cdot R_i + u = i \cdot R_i + i \cdot R = i \cdot (R_i + R).$$

Der Strom in der Leiterschleife wird damit

$$i(t) = \frac{u_q}{R_i + R}.$$

Die Richtung des Stroms ergibt sich aus der Lenz'schen Regel[12]:

Der induzierte Strom wirkt mit seinem Magnetfeld der ihn hervorrufenden Feldänderung entgegen.

Der Spulenstrom ist demnach so gerichtet, dass durch sein Magnetfeld ein zunehmender magnetischer Fluss geschwächt wird, ein abnehmender Fluss dagegen gestärkt wird.

Selbstinduktion, Induktivität einer Spule

Wir betrachten eine Spule, deren Leitungsdraht um einen ringförmigen Kern aus unmagnetischem Kunststoff gewickelt ist (Ringspule).

Da der unmagnetische Kunststoff die gleiche Permeabilität wie das Vakuum oder auch die Luft besitzt, wird eine derartige Spule als Luftspule bezeichnet.

Die Windungszahl der Spule sei N, der Spulenquerschnitt A (Kernquerschnitt) und die mittlere Feldlinienlänge l.
Bei einem zeitlich veränderlichen Strom $i(t)$ ergibt sich die Durchflutung

$$\Theta(t) = N \cdot i(t) = H(t) \cdot l$$

[12] nach Heinrich Friedrich Emil Lenz {1804-1865), deutsch-russischer Physiker

der Spule, die ebenfalls zeitlich veränderlich ist. Der magnetische Fluss wird folglich

$$\Phi(t) = B(t) \cdot A = \mu_0 \cdot H(t) \cdot A = \frac{\mu_0 \cdot N \cdot i(t) \cdot A}{l}$$

Durch den veränderlichen magnetischen Fluss wird aber nach dem vorne abgeleiteten Induktionsgesetz eine Quellspannung induziert, die wiederum einen Strom in der Spule bewirkt. Dieser Vorgang wird deshalb als Selbstinduktion bezeichnet.

Die induzierte Spannung ist

$$u(t) = N \cdot \frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot A}{l} \cdot \frac{di(t)}{dt}.$$

Sie ist also proportional zu der zeitlichen Ableitung des Spulenstroms.

Der Proportionalitätsfaktor hängt von der Windungszahl N, der Permeabilität μ_0 und den Abmessungen der Spule ab. Diese, für die Selbstinduktion der Spule charakteristische Größe, wird als deren Induktivität L bezeichnet:

$$L = \frac{\mu_0 \cdot N^2 \cdot A}{l}.$$

Damit besteht zwischen Strom und Spannung in einer Spule der Zusammenhang

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}.$$

Die Einheit der Induktivität ist 1 Vs/A = 1 Ωs = 1 Henry[13] (= 1 H).

Als **Schaltzeichen der idealen Spule** (ohne Ohm'schen Widerstand) wird ein längliches Rechteck verwendet. Allerdings wird es im Gegensatz zum Schaltzeichen des Ohm'schen Widerstands schwarz ausgefüllt.

Eine **reale Spule** ist aus Leitungsdraht gewickelt, hat also immer einen Ohm'schen Widerstand.

Als **Schaltzeichen einer realen Spule** wird eine stilisierte Spule verwendet, oder, im Ersatzschaltbild, eine **Reihenschaltung aus idealer Spule und Ohm'schem Widerstand**.

Der Spannungsabfall an einer realen Spule wird dann:

[13] nach Joseph Henry {1797-1878), amerikanischer Physiker, der 1830 unabhängig von Faraday die magnetische Induktion und die Selbstinduktion entdeckte und die Möglichkeiten zur Transformation elektrischer Spannungen erkannte.

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(i)}{dt}.$$

Spule an Gleichspannung. Einschaltvorgang.

Wir betrachten eine reale Spule mit der Induktivität L und dem Ohm'schen Widerstand *R*, die zur Zeit *t* = 0 an die Gleichspannung *U* gelegt wird.

Zur Zeit *t* > 0 fließt in dem einfachen Stromkreis der Strom *i(t)* und die Momentanspannungen betragen am Ohmschen Widerstand der Spule

$$u_R(t) = R \cdot I(t)$$

und an der Induktivität der Spule

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}.$$

Nach der Kirchhoff'schen Maschenregel ist

$$u(t) = u_R(t) + u_L(t) = U = const.$$

Bezeichnen wir die Stromstärke des Gleichstroms, die sich am Ende des Einschaltvorgangs als Quotient aus Spannung U und Ohm'schem Widerstand *R* der Spule einstellen wird mit *I*, so liefert die Maschenregel die Gleichung

$$R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(i)}{dt} = R \cdot I$$

oder

$$\frac{L}{R} \cdot \frac{di(t)}{dt} + i(t) = I = const..$$

Der Quotient *L/R* hat die Dimension einer Zeit. Wir bezeichnen deshalb die Größe

$$T = \frac{L}{R}$$

als die **Zeitkonstante** dieser Anordnung.

Die obige Gleichung lässt sich mit dieser Definition in der Form

$$T \cdot \frac{di(t)}{dt} + i(t) = I = const.$$

anschreiben.

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist uns vom Kondensator her bekannt:

$$i(t) = I + A \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

mit einer beliebigen Konstanten *A*.

Aus den unendlich vielen möglichen Lösungen der Differentialgleichung lässt sich mit Hilfe der Anfangsbedingung zur Zeit t = O die einzig richtige Lösung für den zeitlichen Verlauf der Stromstärke im Kreis zu

$$i(t) = I \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

ermitteln.

Der momentane Wert der an der Induktivität der Spule anliegenden Spannung ergibt sich dann zu

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = -L \cdot I \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot \left(-\frac{1}{T}\right) = \frac{L}{T} \cdot I \cdot e^{-\frac{t}{T}}.$$

Mit *L/T* = *R* und *R·I* = *U* wird daraus

$$u_L(t) = U \cdot e^{-\frac{t}{T}}.$$

Ausschaltvorgang

Dieselbe reale Spule mit der Induktivität *L* und dem Ohm'schen Widerstand *R* liege zur Zeit *t* < *O* an der Gleichspannung *U*. In dem einfachen Stromkreis fließt dann der Gleichstrom *I* und die Momentanspannung am Ohm'schen Widerstand der Spule ist

$$u_R(t) = R \cdot I = const..$$

Mit $$I = \frac{U}{R}.$$

Nach dem Umlegen des Schalters und dem Abschalten der Spannungsquelle zur Zeit t = O fließt ein Strom *i(t)*, der durch die Energie des Magnetfelds der Spule gespeist wird und dieses abbaut. Die Spannungen am Ohm'schen Widerstand und an der Induktivität der Spule betragen dann

$$u_R(t) = R \cdot i(t).$$

und

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt}.$$

Nach der Kirchhoff'schen Maschenregel ist

$$u_R(t) + u_L(t) = 0.$$

oder
$$\frac{L}{R} \cdot \frac{di(t)}{dt} + i(t) = 0.$$

Wir bezeichnen wieder die Größe

$$T = \frac{L}{R}$$

als Zeitkonstante dieser Anordnung und erhalten für den Strom beim Ausschaltvorgang die Differentialgleichung

$$T \cdot \frac{di(t)}{dt} + i(t) = 0.$$

Die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung ist bekannt:

$$i(t) = A \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

mit einer beliebigen Konstanten *A*.
Die Anfangsbedingung zur Zeit t = 0 lautet diesmal i(0) = I, und die spezielle Lösung der Differentialgleichung wird

$$i(t) = I \cdot e^{-\frac{t}{T}}$$

Der momentane Wert der an der Induktivität der Spule anliegenden Spannung ergibt sich dann zu

$$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = L \cdot I \cdot e^{-\frac{t}{T}} \cdot \left(-\frac{1}{T}\right) = -\frac{L}{T} \cdot I \cdot e^{-\frac{t}{T}}.$$

Mit $L/T=R$ und $R \cdot I = U$ wird daraus

$$u_L(t) = -U \cdot e^{-\frac{t}{T}}.$$

Anmerkung: Bei Spulen mit Eisenkern sind die Verhältnisse komplizierter, da an die Stelle der konstanten Permeabilität μ_0 des Vakuums bzw. der Luft die von der Stromstärke *i(t)* abhängige Permeabilität μ des Eisenkerns tritt, durch die die Induktivität zwar deutlich größer wird, aber sehr stark und nichtlinear von der momentanen Stromstärke abhängt.

Magnetische Energie in der Spule (Luftspule)

Die magnetische Energie in der Spule ist gleich der elektrischen Arbeit beim Aufbau des Magnetfelds:

$$dW_m = dW_{el} = u(t) \cdot i(t) \cdot dt = L \cdot \frac{di}{dt} \cdot i(t) \cdot dt = L \cdot i \cdot di \, .$$

Demnach ist

$$W_m = L \cdot \int i \cdot di = \frac{1}{2} L I^2 \, .$$

Bei Eisenspulen ist die Berechnung der magnetischen Energie wiederum wesentlich komplizierter, da die Induktivität *L* der Spule zwar deutlich größer als bei einer Luftspule ist, aber wie die Permeabilität μ von der Stromstärke *i(t)* abhängt.

Induktion bei konstanter Flussdichte

Der magnetische Fluss als Skalarprodukt des Vektors der magnetischen Flussdichte mit dem Vektor der durchsetzten Fläche ändert sich nicht nur bei einer Änderung der Flussdichte sondern auch bei einer Änderung der Größe oder der Winkelstellung der Fläche zur Richtung des Magnetfelds.

Bei einer Leiterschleife, die sich mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ϖ einem konstanten Magnetfeld dreht, ist die vom Magnetfeld durchsetzte Fläche

$$A(\varphi) = A_{\max} \cdot \cos\varphi = A_{\max} \cdot \cos\omega t \, .$$

Die dabei induzierte Spannung ist demnach

$$u(t) = \frac{d\Phi}{dt} = -\Phi_{\max} \cdot \omega \cdot \sin\omega t \, .$$

Bei einer Spule mit *N* Windungen und bei entsprechender Richtung des Spannungszählpfeils wird dann die induzierte Spannung

$$u(t) = \hat{u} \cdot \sin\omega t$$

mit

$$\hat{u} = N \cdot \omega \cdot \Phi_{\max} = N \cdot \omega \cdot B \cdot A_{\max} \, .$$

Das bedeutet, dass bei einem konstanten Magnetfeld in einer Spule, die sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit in diesem Magnetfeld dreht, eine sinusförmige Wechselspannung erzeugt wird. Dies ist das Prinzip des Wechselstromgenerators.

Wirbelströme

Ein veränderliches Magnetfeld, das einen massiven Eisenkern durchsetzt, induziert in diesem Kern sogenannte Wirbelströme.

Dieser physikalische Effekt ist häufig **unerwünscht,** da er in Verbindung mit dem elektrischen Widerstand im Werkstoff zu **Energieverlusten** und damit zu einer Verringerung des Wirkungsgrades der entsprechenden elektrischen Anlage führt.

Die Kerne in Elektromotoren und Transformatoren werden deshalb soweit möglich nicht als kompakte Eisenteile ausgeführt, sondern aus dünnen Blechen zusammengesetzt, die gegeneinander durch eine Beschichtung aus isolierendem Lack isoliert sind, so dass sich nur geringe Wirbelströme ausbilden können. Außerdem werden für Kerne bevorzugt schlecht leitende siliziumlegierte Bleche verwendet.

Wenn massive Kerne aus konstruktiven Gründen unvermeidbar sind, sollten sie aus ferromagnetischen Werkstoffen bestehen, die einen besonders großen elektrischen Widerstand besitzen, wie z.B. bestimmte Ferrite ($FeO \cdot Fe_2O_3$). Oder aber sie werden aus Eisenpulver hergestellt, das in (isolierendem) Kunststoff eingebettet ist.

Wirbelströme lassen sich aber auch **sinnvoll ausnutzen.**

Beispielsweise drehen sich die Scheiben der zur Verbrauchsmessung verwendeten sogenannten "Stromzähler" im Feld eines Dauermagneten, sodass wegen der in der Scheibe entstehenden Wirbelströme schnelle Änderungen der Stromstärke durch deren **Dämpfungswirkung** geglättet werden.

Der Energieverlust durch Wirbelstromeffekte wird außer bei Messgeräten auch bei sogenannten **Wirbelstrombremsen** in Leistungsmessgeräten (z.B. in Motorprüfständen) oder in Fitnessgeräten (Hometrainer, Ergometer) ausgenutzt.

Für die **Fertigungstechnik im Maschinenbau** haben Wirbelströme ebenfalls eine herausragende Bedeutung, indem sie zur schnellen Erwärmung oberflächennaher Schichten beim sogenannten **Induktionshärten** von Bauteilen wie beispielsweise Kurbelwellen, Lagerschalen usw. verwendet werden.

Eine neuere Anwendung im Haushaltsgerätebereich sind **Induktionskochherde,** bei denen die Erwärmung der Kochtöpfe nicht mehr mittels Wärmeleitung (herkömmliche Elektroherde) oder Wärmestrahlung (Halogenkochstellen) sondern durch die Verlustleistung der von einem elektromagnetischen Feld in den Kochtopfböden erzeugten Wirbelströme erfolgt.

4 Wechselstrom, Wechselspannung

In der Elektrotechnik spielt der Gleichstrom bzw. die Gleichspannung, deren Eigenschaften wir bisher betrachtet haben, eine untergeordnete Rolle gegenüber den Wechselströmen bzw. den Wechselspannungen, die ein viel breiteres Anwendungsfeld besitzen. Ein wesentlicher Grund dafür ist, dass sich Wechselspannungen sehr einfach ändern, d.h. **transformieren** lassen und dass bei großen Spannungen die Verlustleistungen beim Transport über große Entfernungen sehr viel kleiner werden (Hochspannungsnetz).

Ein Transformator für Wechselspannungen besteht im Prinzip aus einem Eisenkern, der den Magnetfluss kanalisiert, und zwei den Eisenkern umschließenden Spulen unterschiedlicher Wicklungszahlen.

Bei einer Eingangsspannung $u_1(t)$ an der ersten Spule wird dann in der zweiten Spule die Ausgangsspannung

$$u_2(t) = u_1(t)\frac{N_2}{N_1}$$

induziert.

Der induzierte Strom $i_2(t)$ ist dann bei einem als verlustfrei angenommenen Transformator

$$i_1(t) = i_2(t)\frac{N_1}{N_2}.$$

so dass die Eingangsleistung

$$p_1(t) = u_1(t) \cdot i_1(t)$$

zu jedem Zeitpunkt gleich der Ausgangsleistung

$$p_2(t) = u_2(t) \cdot i_2(t)$$

ist.

Wählt man die Windungszahl N_2 der Ausgangsspule sehr viel größer als die Windungszahl N_1 der Eingangsspule, so wird die Ausgangsspannung u_2 sehr groß (Hochspannung), die Stromstärke i_2 dagegen sehr klein.

Die elektrische Leistung ist, wie oben verwendet, das Produkt aus Spannung und Stromstärke: $p = u \cdot i$.

Der Spannungsabfall an einem ohmschen Verbraucher, z.B. am Widerstand R einer langen Überlandleitung, ist aber nach dem Ohm'schen Gesetz

$$u = R \cdot i\ .$$

Damit wird die **Verlustleistung** beim Transport elektrischer Leistung in einem Leiter

$$p = R \cdot i^2\ .$$

Bei sehr hoher Spannung und damit sehr kleinem Strom lässt sich demnach elektrische Leistung in Hochspannungsleitungen mit sehr geringen Verlusten über große Entfernungen transportieren.
Elektrische Generatoren werden so konstruiert, dass rein sinusförmige Wechselspannungen erzeugt werden. Der Grund dafür ist, dass nicht-sinusförmige Spannungen in den Kondensatoren und Spulen eines Netzwerks (also in den nicht-ohmschen Widerständen) gefährliche Oberwellen erzeugen, d.h. Spannungen mit höheren Frequenzen, die zu unbeabsichtigten Nebenwirkungen führen können.

4.1 Sinusförmige Wechselgrößen

Bei einer sinusförmig veränderlichen Wechselspannung gilt für den zeitlichen Verlauf der Spannung:

$$u(t) = \hat{U} \cdot \sin \omega t\ .$$

Dabei nennt man

$\hat{u}$ den **Scheitelwert** oder die **Amplitude**,

und ω die **Kreisfrequenz** in 1/s.

Die Sinusfunktion ist eine periodische Funktion mit der **Periode**

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Die **Frequenz** der Wechselspannung ist dann

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}.$$

Der **Mittelwert** oder Gleichspannungsanteil über eine volle Periode T beträgt bei einer sinusförmigen Wechselspannung **Null**, da positive und negative Anteile gleich groß sind. Der Mittelwert ist also nicht geeignet zur Kennzeichnung der sinusförmigen Wechselspannung.

Viel eher ist dazu der sogenannte **Gleichrichtwert** geeignet, d.h. der Mittelwert der Wechselspannung nach einer tatsächlichen oder nur nach einer gedachten Gleichrichtung.

Er beträgt $$U = \frac{2}{\pi}\hat{U}\,.$$

Nach einer internationalen Vereinbarung wird aber nicht der Gleichrichtwert sondern der **Effektivwert** (RMS-Wert = root-mean-square) zur Kennzeichnung verwendet, der, wie die angelsächsische Bezeichnung anzeigt, als Wurzel aus dem Mittelwert des Quadrats gebildet und mit dem Großbuchstaben der jeweiligen Größe ohne jeden Zusatz bezeichnet wird:

$$U = \sqrt{\frac{1}{T}\cdot\int u^2(t)dt}\,.$$

Der Effektivwert einer sinusförmigen Wechselgröße wird dann

$$U = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{U}.$$

Bei Wechselgrößen wird in der Elektrotechnik als Spannung oder Stromstärke stets der Effektivwert angegeben.

Das bedeutet dass, wenn man von einer Wechselspannung von 220 V spricht, eine sinusförmige Wechselspannung mit dem Scheitelwert 220·√2 = 311 V gemeint ist.

4.2 Widerstände im Wechselstromkreis

Bei einem **Ohm'schen Widerstand** gilt für die Momentanwerte von Strom und Spannung das Ohm'sche Gesetz

$$u(t) = R\cdot i(t).$$

Für die Effektivwerte wird damit wie bei Gleichspannung

$$U = R\cdot I$$

mit dem sogenannten Wirkwiderstand *R*.

Bei einer **idealen Spule** ist die Spannung proportional zur Ableitung des Stroms:

$$u(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} .$$

Bei einem Strom $i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin \omega t$
ergibt sich folglich die Spannung zu

$$u(t) = L \cdot \sqrt{2} \cdot I \cdot \omega \cdot \cos \omega\, t = \omega\, L \cdot \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin\left(\omega\, t + \frac{\pi}{2} \right).$$

Die Spannung erfährt gegenüber dem Strom eine Phasenverschiebung von $\pi/2$ oder 90° und für die Effektivwerte gilt

$$U = X_L \cdot I ,$$

wobei $X_L = \omega\, L$
als **induktiver Blindwiderstand** bezeichnet wird.

Bei einem **Kondensator** ist der Strom proportional zur Ableitung der Spannung, sodass sich bei einem eingeprägten Strom

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin \omega\, t$$

die Spannung durch Integration zu

$$u(t) = \frac{1}{C} \cdot \sqrt{2} \cdot I \cdot \left(-\frac{1}{\omega} \cdot \cos \omega\, t \right) = -\frac{1}{\omega C} \cdot \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin\left(\omega\, t - \frac{\pi}{2} \right)$$

ergibt. Die Spannung erfährt also beim Kondensator eine Phasenverschiebung von -$\pi/2$ oder –90° gegenüber dem Strom und für die Effektivwerte gilt

$$U = X_C \cdot I ,$$

wobei $$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

als **kapazitiver Blindwiderstand** bezeichnet wird.

Frequenzabhängigkeit der Widerstände im Wechselstromkreis

Während der **Wirkwiderstand** *R* unabhängig von der Frequenz $f = \frac{\omega}{2\pi}$ des Wechselstroms ist, sind die Blindwiderstände frequenzabhängige Größen.

Der **induktive Blindwiderstand** einer Spule wächst linear mit der Frequenz:

$$X_L = \omega L = 2\pi f \cdot L\,,$$

während der **kapazitive Blindwiderstand** eines Kondensators eine hyperbolische Frequenzabhängigkeit aufweist und mit wachsender Frequenz abnimmt:

$$X_C = \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{2\pi f \cdot C}\,.$$

Darstellung der Momentanwerte von Strom und Spannung

Bei Wechselstrom lassen sich die Momentanwerte einerseits in Form des üblichen Strom-Zeit-Verlaufs darstellen, bei dem in Ordinatenrichtung der momentane Wert der Stromstärke über dem in Abszissenrichtung angegebenen Zeitpunkt aufgetragen wird. Diese Darstellungsform wird in der Mathematik als **Liniendiagramm** bezeichnet.

Daneben ist bei sinusförmig veränderlichen Größen eine andere Darstellungsart vorteilhaft, bei der ein mit der Kreisfrequenz der Sinusgröße im mathematisch positiven Umlaufsinn rotierender, in einem festen Punkt der Zeichenebene verankerter Zeiger verwendet wird, dessen Länge dem Scheitelwert der Sinusgröße entspricht. In einem solchen **Zeigerdiagramm** entspricht der Abstand der Zeigerspitze von der Ausgangsachse (d.h. der Zeigerrichtung zur Zeit t=0) dem Momentanwert der Sinusgröße.

Beide Darstellungsformen sind absolut gleichwertig.

Vereinbarungen für Zeigerdiagramme in der Elektrotechnik

Im Unterschied zu Zeigerdiagrammen von sinusförmigen Wechselgrößen in der Mathematik wird als Maß für die **Länge der Zeiger** in der Elektrotechnik nicht der Scheitelwert sondern der **Effektivwert** verwendet. Diese Vereinbarung wurde aus Zweckmäßigkeitsgründen getroffen, da, wie schon erwähnt, bei Wechselströmen und Wechselspannungen immer der Effektivwert als kennzeichnende Größe angegeben wird.

Auf die im mathematischen Zeigerdiagramm zur Ermittlung der Momentanwerte erforderliche Rotation der Zeiger im Gegenuhrzeigersinn kann man in der Elektrotechnik verzichten, da nur die Effektivwerte der Größen und deren gegenseitige Phasenverschiebungen interessieren, die durch die Winkel zwischen den Zeigern zu einem beliebigen, festen Zeitpunkt gegeben sind. Das

Zeigerdiagramm einer Wechselstromschaltung stellt also die relative Größe und Phasenlage der Ströme und Spannungen in der Schaltung dar.

Spannungszeiger von Reihenschaltungen und Stromzeiger von Parallelschaltungen werden wie Vektoren addiert.

Zeiger werden durch einen **Unterstrich** gekennzeichnet.

Beispiel: Reale Spule (Reihenschaltung von R und L)

Eine reale Spule wird aus vielen Metern Leiterdraht gewickelt und hat demnach außer ihrer Induktivität L auch einen, im allgemeinen nicht zu vernachlässigenden ohmschen Widerstand, sodass sie als eine Reihenschaltung eines Wirkwiderstands R und eines Blindwiderstands $X_L = \omega L$ betrachtet werden kann.

Im Zeigerbild ist der Zeiger für U_R parallel zum Stromzeiger I (keine Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom), der Zeiger für U_L ist dagegen um $+\pi/2$ verdreht (+90° Phasenverschiebung zwischen Spannung und Strom).

Mit den Zeigerlängen $$U_R = R \cdot I$$
und $$U_L = X_L \cdot I = \omega L \cdot I$$

wird nach Pythagoras die Länge des resultierenden Gesamtspannungszeigers
$$U = \sqrt{R^2 + X_L{}^2} \cdot I = Z \cdot I \,.$$
Die Größe
$$Z = \sqrt{R^2 + X_L{}^2}$$

wird **Scheinwiderstand** der Schaltung genannt.

Passiver Zweipol

Eine Widerstandsschaltung aus Wirk- und Blindwiderständen im Wechselstromkreis wird als passiver Zweipol bezeichnet, wenn sie keine aktiven Teile (Spannungsquellen) besitzt und genau zwei Anschlüsse (Pole) hat.

Für einen passiven Zweipol gilt das Ohm'sche Gesetz in der Form

$$U = Z \cdot I \,,$$

mit dem **Scheinwiderstand Z**, dessen Betrag sich bei nicht zu komplexen Widerstandsschaltungen aus einem Zeigerbild ermitteln lässt.

Die **Phasenverschiebung** φ des Wechselspannungsabfalls am Zweipol gegenüber dem Wechselstrom im Kreis ergibt sich ebenfalls aus dem Zeigerbild. Sie liegt bei passiven Zweipolen stets zwischen $-\pi/2$ und $+\pi/2$.

Ein passiver Zweipol hat folglich
einen **Wirkwiderstand** $R_Z = Z \cdot sin\varphi$

und einen **Blindwiderstand** $X_Z = Z \cdot cos\varphi$.

4.3 Leistung bei Wechselstrom

In einem Schaltkreis, der an der Wechselspannung

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \sin(\omega t + \varphi_u)$$

liegt und in dem der Wechselstrom

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega t + \varphi_i)$$

fließt, beträgt die momentane Leistung

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) = 2 \cdot U \cdot I \cdot \sin(\omega t + \varphi_u) \cdot \sin(\omega t + \varphi_i).$$

Mit der trigonometrischen Formel

$$\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2}$$

wird

$$p(t) = U \cdot I \cdot \cos(\varphi_u - \varphi_i) - U \cdot I \cdot \cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i).$$

Der erste Term ist zeitlich konstant und wird deshalb als **Wirkleistung P** bezeichnet:

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi$$

mit $\varphi = \varphi_u - \varphi_i$.

Der zweite Term ist ein **Wechselanteil P~**, dessen Mittelwert null ist.

Er erfasst die Leistung zum Aufbau der magnetischen und elektrischen Felder in den Spulen und Kondensatoren, die dann jeweils bei Stromumkehr wieder abgegeben wird.

Wichtig:

Bei **Gleichstrom** ist die elektrische Leistung

$$P = U \cdot I .$$

Bei **Wechselstrom** ist die **Wirkleistung**

$$P = U \cdot I \cdot \cos\varphi$$

Daneben werden bei Wechselstrom zwei weitere Leistungsgrößen ohne konkrete physikalische Bedeutung eingeführt:

- die **Scheinleistung** $S = U \cdot I$,

- die **Blindleistung** $Q = U \cdot I \cdot \sin\varphi$.

Das Verhältnis zwischen Wirkleistung und Scheinleistung im Wechselstromkreis wird als dessen Leistungsfaktor bezeichnet:

$$\lambda = \frac{P}{S} = \cos\varphi \,.$$

Zur besseren **Unterscheidung der Leistungsgrößen** werden unterschiedliche **Bezeichnungen für die Einheiten** verwendet, obwohl eigentlich alle die gleiche Einheit 1 Watt besitzen:

- für die Wirkleistung:	1 W,
- für die Scheinleistung:	1 VA,
- für die Blindleistung:	1 var.

Entsprechend bezeichnet man die **Einheit der elektrischen Arbeit** bzw. Energie im Wechselstromkreis

- bei der Wirkarbeit	1 Ws,
- bei der Scheinarbeit	1 VAs,
- bei der Blindarbeit	1 vars.

4.4 Kirchhoff'sche Regeln bei Wechselstrom

Die Kirchhoff'schen Regeln gelten in Wechselstromnetzwerken in gleicher Weise wie bei Gleichstromnetzwerken, allerdings leider nicht für die Effektivwerte sondern nur für die Momentanwerte von Strom und Spannung.

Knotenregel:
In einem Netzwerkknoten ist die Summe der zu- und abfließenden Ströme unter Beachtung des Vorzeichens zu jedem Zeitpunkt null:

$$\sum i_j(t) = 0$$

oder, ohne Vorzeichen: $\sum i_j(t)_{zu} = \sum i_j(t)_{ab}$.

Maschenregel:
In einer Masche ist die Summe der Spannungen in einem frei zu wählenden Umlaufsinn unter Beachtung des Vorzeichens zu jedem Zeitpunkt null:

$$\sum u_j(t) = 0 \,.$$

Bei Wechselstrom lassen sich aber die Momentanwerte der Wechselgrößen gleichwertig durch ein Zeigerdiagramm darstellen. Das bedeutet, dass die Kirchhoff'schen regeln bei Wechselstromnetzwerken auch für Zeiger gelten. Dabei müssen die einzelnen Strom- oder Spannungszeiger allerdings nach den Regeln der Vektorrechnung addiert werden.

Beispiele zur Anwendung der Maschenregel im einfachen Wechselstromkreis:
Reihenschaltung von R und L

Bei einem **eingeprägten Strom** $i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega t)$

wird die **Spannung** $u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

mit dem Effektivwert $U = Z \cdot I$ **,**

und dem Scheinwiderstand $Z = \sqrt{R^2 + X_L{}^2}$ **.**

Dabei ist X_L der Blindwiderstand $X_L = \omega L$

der Spule und der Phasenwinkel ergibt sich aus $\tan\varphi = \frac{X_L}{R}$ **.**

Umgekehrt wird bei einer **eingeprägten Spannung** $u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \sin(\omega t)$

die **Stromstärke** $i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega t - \varphi)$**.**

Mit $I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_L{}^2}}$.

Reihenschaltung von R und C

Bei einem **eingeprägten Strom** $i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega t)$

wird die **Spannung** $u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

mit dem Effektivwert $U = Z \cdot I$,

und dem Scheinwiderstand $Z = \sqrt{R^2 + X_C{}^2}$.

Dabei ist X_C der Blindwiderstand $X_C = \frac{1}{\omega C}$

des Kondensators und der Phasenwinkel ergibt sich aus

$$\tan\varphi = -\frac{X_C}{R} = -\frac{1}{R\omega C}$$

Umgekehrt wird bei einer **eingeprägten Spannung** $u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \sin(\omega t)$

die **Stromstärke** $i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega t - \varphi)$**.**

mit $I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + X_C{}^2}}$.

Parallelschaltung von R und L

Bei einer **eingeprägten Spannung** $u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \sin(\omega t)$

wird die **Stromstärke** $i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

mit dem Effektivwert $I = \dfrac{U}{Z}$,

und dem Scheinwiderstand $Z = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \dfrac{1}{{X_L}^2}}}$.

Dabei ist X_L der Blindwiderstand $X_L = \omega L$

der Spule und der Phasenwinkel ergibt sich aus $\tan\varphi = -\dfrac{R}{X_L}$.

Umgekehrt wird bei einem **eingeprägten Strom** $i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega t)$

die **Spannung** $u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \sin(\omega t - \varphi)$.

mit $U = Z \cdot I = \dfrac{I}{\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \dfrac{1}{{X_L}^2}}}$.

Parallelschaltung von R und C

Bei einer **eingeprägten Spannung** $u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \sin(\omega t)$

wird die **Stromstärke** $i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

mit dem Effektivwert $I = \dfrac{U}{Z}$,

und dem Scheinwiderstand $Z = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \dfrac{1}{{X_C}^2}}}$.

Dabei ist X_C der Blindwiderstand $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$

des Kondensators

und der Phasenwinkel ergibt sich aus $\tan\varphi = \dfrac{R}{X_C} = R\omega C$.

Umgekehrt wird bei einem **eingeprägten Strom** $i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega t)$

die **Spannung** $u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \sin(\omega t - \varphi)$.

mit $U = Z \cdot I = \dfrac{I}{\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \dfrac{1}{{X_C}^2}}}$.

Reihenschaltung von R, L und C

Bei einem **eingeprägten Strom** $i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega t)$

wird die **Spannung** $u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

mit dem Effektivwert $U = Z \cdot I$ **,**

und dem Scheinwiderstand $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$.

Der Phasenwinkel ergibt sich aus $\tan\varphi = \dfrac{X_L - X_C}{R} = \dfrac{\omega L - \dfrac{1}{\omega C}}{R}$.

Bei dieser Schaltung hat der **Scheinwiderstand ein Minimum** für

$X_L - X_C = 0$,

das heißt für $\omega L - \dfrac{1}{\omega C} = 0$.

Der Fall, dass die Blindwiderstände der Spule und des Kondensators gleich groß sind, tritt bei der Kreisfrequenz

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

bzw. bei der Frequenz

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

ein.
Diese Frequenz wird als die **Resonanzfrequenz** der Schaltung bezeichnet. Die Schaltung selbst nennt man einen **Reihenschwingkreis**.

Parallelschaltung von R, L und C

Bei einer **eingeprägten Spannung** $u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \sin(\omega t)$

wird die **Stromstärke** $i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega t + \varphi)$

mit dem Effektivwert $U = Z \cdot I$,

und dem Scheinwiderstand $Z = \dfrac{1}{\sqrt{\dfrac{1}{R^2} + \left(\dfrac{1}{X_L} - \dfrac{1}{X_C}\right)^2}}$.

Der Phasenwinkel ergibt sich aus $\tan\varphi = -R \cdot \left(\dfrac{1}{X_L} - \dfrac{1}{X_C}\right) = R \cdot \left(\dfrac{1}{\omega L} - \omega C\right)$.

Bei dieser Schaltung hat der **Scheinwiderstand ein Maximum** für

$$\frac{1}{X_L} - \frac{1}{X_C} = 0\,,$$

das heißt für $$\omega C - \frac{1}{\omega L} = 0 .$$

Der Fall, dass die Kehrwerte der Blindwiderstände der Spule und des Kondensators gleich groß sind, tritt genau wie bei einer Reihenschaltung bei der Kreisfrequenz

$$\omega = \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

bzw. bei der **Resonanzfrequenz**

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

ein. Diese Schaltung wird als **Parallelschwingkreis** bezeichnet.

In beiden Fällen gilt:

Bei einem in der Resonanzfrequenz betriebenen Schwingkreis wird der Phasenwinkel zwischen Strom und Spannung null, d.h. Strom und Spannung ergeben sich wie bei einem Stromkreis mit rein ohmschem Widerstand.

Die durch Selbstinduktion in der Spule erzeugte Wechselspannung ist im Resonanzfall zu jedem Zeitpunkt gleich groß wie die gegenphasige Wechselspannung des Kondensators, sodass sich diese beiden Spannungen nach außen hin kompensieren.

Bei einem in Resonanz betriebenen Schwingkreis findet folglich intern ein Austausch zwischen der elektrischen Feldenergie des Kondensators und der magnetischen Feldenergie der Spule statt. Der elektrische Widerstand der Schaltung hat demzufolge bei dieser Frequenz im Reihenschwingkreis ein Minimum, da die Widerstände von Kondensator und Spule entfallen und beim Parallelschwingkreis ein Maximum, da deren Leitfähigkeit entfällt.

Anwendungen:

Schwingkreise werden verwendet um Wechselspannungen bestimmter Frequenzen aus einem Frequenzgemisch zu selektieren, z.B. bei **Funksignalen** aller Art (Rundfunk, Fernsehen, Mobilfunk, usw.).

Da die Induktivität einer Spule nur schwer zu ändern ist, wird in der Regel die Frequenzabstimmung durch Veränderung der Kapazität des Kondensators vorgenommen. Bei analogen Geräten verwendet man dazu Drehkondensatoren, bei denen die Kapazität über eine Änderung der wirksamen Plattenfläche veränderbar ist.
Bei digitalen Geräten mit sogenannten Synthesizer - Tunern erfolgt die Frequenzabstimmung mittels komplexer IC’s.

Eine weitere Anwendung ist die **Blindstromkompensation** bei elektrischen Maschinen. Eine zutreffendere Bezeichnung wäre: Blindleistungsvermeidung bzw.

Leistungsfaktorerhöhung. Jeder Elektromotor ist ein induktiver Verbraucher. Durch Parallelschaltung eines Kondensators mit der Kapazität

$$C = \frac{L}{R^2 + 4\pi^2 f^2 L^2}$$

lässt sich erreichen, dass der Phasenwinkel und damit auch die Blindleistung *Q* null wird. Der Elektromotor gibt dann seine maximale Leistung ab.

Beispiel: Reihenschaltung eines ohmschen Widerstands mit einer Parallelschaltung aus realer Spule und realem Kondensator

Bei gegebener Wechselspannung und bekannten Werten von Induktivität der Spule, Kapazität des Kondensators, sowie aller ohmschen Widerstände soll der Effektivwert des Stroms und der Phasenwinkel zwischen Spannung und Strom berechnet werden.

Diese Aufgabe ist mit Hilfe eines Zeigerdiagramms kaum noch lösbar und macht klar, dass zur Berechnung komplizierterer Schaltkreise bei Wechselstrom andere mathematische Hilfsmittel herangezogen werden müssen.

Die bisher zur Problemlösung verwendeten Zeiger sind nichts anderes als ebene Vektoren. Ein Vektor in der Ebene hat zwei Komponenten und lässt sich damit auch durch eine komplexe Zahl darstellen, zumal die Gesetze der Vektorrechnung bei ebenen Vektoren und die Rechenvorschriften für komplexe Zahlen zu Ergebnissen führen, die bei richtiger Interpretation gleichwertig sind.

4.5 Komplexe Rechnung bei Wechselstrom

Wie schon erwähnt liefert die komplexe Rechnung im ebenen Fall die gleichen Ergebnisse wie die Vektorrechnung. Die komplexe Rechnung ist aber wesentlich einfacher als die Vektorrechnung, da sie im Wesentlichen den vertrauten Regeln der Rechnung mit rellen Zahlen folgt.

Kurze Wiederholung zum Rechnen mit komplexen Zahlen

Eine komplexe Zahl hat einen Real- und einen Imaginärteil.

$$Z = a + j \cdot b\,.$$

Dabei wird *a* als Realteil und *b* als Imaginärteil bezeichnet, während *j* die imaginäre Einheit

$$j = \sqrt{-1}$$

ist. z kann als Punkt in der komplexen Ebene oder auch als Zeiger vom Ursprung des Koordinatensystems zu diesem Punkt betrachtet werden.

Bezeichnen wir den Winkel zwischen dem Zeiger und der reellen Achse mit □ wird

$$a = \mathrm{Re}\{z\} = |z| \cdot \cos\alpha\ ,$$

$$b = \mathrm{Im}\{z\} = |z| \cdot \sin\alpha \,.$$

Folglich gilt $$z = |z| \cdot \cos\alpha + j \cdot |z| \cdot \sin\alpha \,.$$

Mit der **Euler-Formel** $$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j \cdot \sin\alpha$$

lässt sich eine komplexe Zahl außer in
der **Komponentenform**

$$z = a + j \cdot b$$

auch in der **Exponentialform**

$$z = |z| e^{j\alpha}$$

darstellen.

Grundrechenarten mit komplexen Zahlen

Die **Addition** und die **Subtraktion** sind in der Komponentenform sehr einfach, da nur die Realteile und die Imaginärteile addiert bzw. subtrahiert werden müssen:

$$z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + j \cdot b_1) \pm (a_2 + j \cdot b_2) = a + j \cdot b \,.$$

mit $$a = a_1 \pm a_2$$

und $$b = b_1 \pm b_2 \,.$$

Die **Multiplikation** ist dagegen in der Exponentialform wesentlich einfacher als in der Komponentenform, da dabei nur die Beträge multipliziert und die Phasenwinkel addiert werden müssen:

$$z = z_1 \cdot z_2 = |z_1| e^{j\alpha_1} \cdot |z_2| e^{j\alpha_2} = |z| e^{j\alpha}$$

mit $$|z_1| \cdot |z_2| = |z|$$

und $$\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 \,.$$

Die **Division** ist ebenfalls in der Exponentialform einfacher. Dabei werden die Beträge dividiert und die Phasenwinkel subtrahiert:

$$z = \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1| e^{j\alpha_1}}{|z_2| e^{j\alpha_2}} = |z| e^{j\alpha}$$

mit $$|z| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

und $$\alpha = \alpha_1 - \alpha_2$$

Rotierende komplexe Zeiger

Aus einem Zeiger, der zur Zeit *t=0* den Wert

$$z = |z| e^{j\alpha}$$

hat, wird durch Multiplikation mit dem Faktor $z = e^{j\omega t}$ ein rotierender Zeiger

$$z(t) = Z \cdot e^{j\omega t} = |z| \cdot e^{j(\omega t + \alpha)} = |z| \cdot \cos(\omega t + \alpha) + j \cdot |z| \cdot \sin(\omega t + \alpha)$$

Das bedeutet, dass der Momentanwert einer sinusförmigen Wechselgröße durch den Imaginärteil eines rotierenden komplexen Zeigers gleichwertig dargestellt werden kann. Zum Beispiel lässt sich die Zeitfunktion der Wechselspannung

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot \sin(\omega t + \alpha)$$

genauso durch den Imaginärteil des komplexen rotierenden Zeigers

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot U \cdot e^{j(\omega t + \alpha)}$$

angeben.

Ein großer Vorteil der komplexen Darstellung ist, dass sich die **Differentiation** und die **Integration** im Komplexen ganz einfach durch Multiplikation bzw. Division mit dem Faktor $j\omega$ ausführen lassen:

$$\frac{du(t)}{dt} = \frac{d\sqrt{2} \cdot U \cdot e^{j(\omega t + \alpha)}}{dt} = \sqrt{2} \cdot U \cdot e^{j(\omega t + \alpha)} \cdot j\omega = j\omega \cdot u(t) .$$

bzw. $$\int u(t) \cdot dt = \frac{u(t)}{j\omega} .$$

Anwendung der komplexen Rechnung beim Wechselstrom

Blindwiderstände im Wechselstromkreis

Bei einem eingeprägten sinusförmigen **Wechselstrom**

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega t)$$

wird der **Spannungsabfall an einer idealen Spule**

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \omega L \cdot \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

und an einem **idealen Kondensator**

$$u(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \frac{1}{\omega C} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

Einer Phasenverschiebung um $\pi/2$ im Reellen entspricht im Komplexen eine Multiplikation mit der imaginären Einheit *j*. Umgekehrt entspricht einer Phasenverschiebung um - $\pi/2$ einer Multiplikation mit *-j* bzw. mit *1/j*.

Das bedeutet dass, wenn man statt der reellen Blindwiderstände von idealer Spule und idealem Kondensator **komplexe Scheinwiderstände**

$$Z_L = j \cdot X_L = j\omega L$$

bzw.

$$Z_C = -j \cdot X_c = \frac{1}{j\omega C}$$

definiert, gilt das **ohmsche Gesetz in komplexer Darstellung** bei Wechselstrom nicht nur für rein ohmsche Widerstände sondern auch **für die Scheinwiderstände** von Spulen und Kondensatoren

$$U = Z \cdot I \, .$$

Dabei ist

beim **ohmschen Widerstand** $Z = R$,
beim **induktiven Widerstand** $Z = j\omega L$,
beim **kapazitiven Widerstand** $Z = \frac{1}{j\omega C}$,

und bei einer **realen Spule** (Reihenschaltung von ohmschem und induktivem Widerstand)

$$Z = R + j\omega L$$

bzw. bei einem **realen Kondensator** (Reihenschaltung von ohmschem und kapazitivem Widerstand)

$$Z = R + \frac{1}{j\omega C} \, .$$

Beispiel: Reihenschaltung eines ohmschen Widerstands mit einer Parallelschaltung aus realer Spule und realem Kondensator

Gegeben: U = 220 V; f = 50 Hz; R_0 = 25 Ω;
R_1 = 25 Ω; R_2 = 25 Ω; L_1 = 0,1 H; C_2 = 100 µF.

Gesucht: Effektivwert I des Wechselstroms,
Phasenverschiebung φ zwischen Strom und Spannung,
Wirkleistung $P = U \cdot I \cdot \cos\varphi$.

Diese Aufgabe haben wir als zu kompliziert für die Lösung mit Hilfe eines Zeigerdiagramms erachtet. Deshalb soll jetzt die Lösung mit komplexer Rechnung vorgenommen werden.

5 Drehstrom (Drei-Phasen-Wechselstrom)

Bei einem **Drehstromgenerator** befinden sich am **Stator** drei baugleiche Spulen, die um je 120° gegeneinander versetzt angebracht sind.

Das Magnetfeld des **Rotors**, der sich mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega = 2\pi f$ innerhalb des Stators dreht, induziert in jeder Spule eine Wechselspannung mit gleichem Effektivwert, wobei aber die drei Wechselspannungen eine Phasenverschiebung von jeweils 120° gegeneinander aufweisen.

Die drei Wechselspannungen werden durch die Indizes *u,v* und *w* unterschieden. Diese Bezeichnungen und auch deren Reihenfolge sind genormt. Der Effektivwert der drei Quellspannungen wird als Strangspannung U_{St} bezeichnet.

$$u_{qu}(t) = \sqrt{2} \cdot U_{St} \cdot \sin(\omega t),$$
$$u_{qv}(t) = \sqrt{2} \cdot U_{St} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right),$$
$$u_{qw}(t) = \sqrt{2} \cdot U_{St} \cdot \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right).$$

An einem Drehstromgenerator befinden sich **6 elektrische Anschlüsse**, die die (genormten) Bezeichnungen *U1, U2 , V1, V2 , W1, W2* tragen.

Die Anordnung der Anschlüsse auf dem Anschlussschaltbrett ist ebenfalls genormt. In der oberen Reihe befinden sich die Anschlussklemmen *U1, V1, W1*, in der unteren Reihe die Anschlussklemmen *W2, U2, V2*.

Für eine Weiterleitung der drei induzierten Wechselströme wären demnach 6 Leitungen erforderlich. Diese Zahl lässt sich aber durch **Verkettung** reduzieren.

Für die Verkettung gibt es **2 Varianten**, bei denen die Scheinwiderstände der drei Statorspulen bei der ersten Variante in einer **Sternschaltung** oder, bei der zweiten Variante, in einer **Dreiecksschaltung** verkettet werden.

a) Sternschaltung

Dabei wird nur noch ein **Vierleiternetz** benötigt, da die Anschlüsse *U2, V2* und *W2* auf einen gemeinsamen Leiterstrang, den sogenannten Nullleiter gelegt werden.

Bei dieser Variante sind die Momentanwerte der Spannungen zwischen den Leitern *L1, L2 , L3* und dem Nullleiter *N* gleich den Momentanwerten der jeweiligen Quellspannungen in den drei Spulen und die Effektivwerte der Spannungen sind alle gleich der Strangspannung U_{St}:

$$U_{1N} = U_{qu} = U_{St},$$

$$U_{2N} = U_{qv} = U_{St}\,,$$
$$U_{3N} = U_{qw} = U_{St}\,.$$

Dieses Vierleiternetz wird im öffentlichen Niederspannungsnetz zur Versorgung der Haushalte und auch der gewerblichen Verbraucher verwendet.

Verbraucherseitig gibt es an ein solches Vierleiternetz **zwei Anschlussmöglichkeiten**:

a1) Anschluss von Wechselstromverbrauchern

Haushaltsgeräte die Wechselstrom erfordern (wie z.B. Glühlampen, Radiogeräte, usw.) werden jeweils zwischen einen der drei Leiter und den Nullleiter geschaltet.

Sie liegen demnach an einer der Strangspannungen des Vierleiternetzes

$$U_{1N} = U_{2N} = U_{3N} = U_{St}\,.$$

Im öffentlichen Versorgungsnetz beträgt der Effektivwert der Strangspannung nach Norm 230V.

Bei **symmetrischer Belastung** eines Vierleiternetzes, d.h. wenn die Scheinwiderstände der Verbraucher in allen drei Wechselstromkreisen nach Betrag und Richtung gleich sind

$$Z1 = Z2 = Z3$$

ist der Nullleiter zu jedem Zeitpunkt stromfrei.

Im Haushaltsnetz mit unterschiedlichen Wechselstromverbrauchern in den drei Stromkreisen ist das aber praktisch nie der Fall. Das bedeutet, dass der Nullleiter des Vierleiternetzes im Allgemeinen ebenfalls stromführend ist.

a2) Drehstromverbraucher

Verbrauchsintensive Haushaltsgeräte (z.B. Kochherde und Backöfen) sowie **Maschinen in Gewerbebetrieben** (Elektromotoren) werden im Allgemeinen als Drehstromgeräte ausgeführt. Die Drehstromgeräte haben nicht nur zwei Anschlüsse (wie die Wechselstromgeräte) sondern drei Anschlüsse.

Drehstromgeräte werden an die drei Leiter *L1, L2 , L3* des Vierleiternetzes angeschlossen. Der Nullleiter *N* ist bei dieser Schaltung unbeteiligt.

Der Anschluss erfolgt so, dass die elektrischen Widerstände des Gerätes eine Dreiecksschaltung bilden.

Die **Effektivwerte der Spannungen** zwischen den Leitern sind, wegen der Phasenverschiebung um 120°, um den Faktor √3 größer als die Spannungen zwischen einem der Leiterstränge und dem Nullleiter, die jeweils gleich der Strangspannung sind:

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = \sqrt{3} \cdot U_{St}\,.$$

Bei einem genormten Effektivwert der Strangspannung von 230 V betragen die Effektivwerte der Spannungen bei dieser Schaltung folglich √3*230V = 400 V.

$$U_{12} = U_{23} = U_{31} = \sqrt{3} \cdot U_{St} = 400V \text{ .}$$

Wichtige Erkenntnis:

Am Vierleiter-Niederspannungsnetz 400 V/ 230 V lassen sich sowohl Wechselstromgeräte mit 230 V als auch Drehstromgeräte mit 400 V anschließen.

b) Dreiecksschaltung

Wenn am Anschlussschaltbrett des Drehstromgenerators jeweils die Klemmen

U1 mit *W2*,
V1 mit *U2*,
W1 mit *V2*

verbunden werden, so bleiben als Ergebnis dieser Verkettung nur die 3 Leitungen *L1*, *L2* und *L3* übrig.

Wie das Schaltbild dieser Anordnung ausweist besteht dabei

- **zwischen *L1* und *L2*** die Quellspannung $\mathbf{U_{qu}}$,
- **zwischen *L2* und *L3*** die Quellspannung $\mathbf{U_{qv}}$,
- **zwischen *L3* und *L1*** die Quellspannung $\mathbf{U_{qw}}$.

Dieses **Dreileiternetz** wird für die Hochspannungsleitungen (U > 10 kV) zum verlustarmen Transport elektrischer Energie über große Entfernungen verwendet.

6 Elektronische Bauelemente

6.1 Elektronen- und Gasentladungsröhren

Erhitzt man eine Metallelektrode in einem luftleeren Glaskolben (typisch auf >750°C), so können freie Elektronen das Metall verlassen und an der Oberfläche der Elektrode bildet sich eine Elektronenwolke. Man bezeichnet die beheizte Elektrode als Glühkathode.

Legt man an eine zweite Elektrode eine im Bezug zur Glühkathode positive Spannung an, so kann man die Elektronen von der Kathode absaugen. Die Elektronen werden in Richtung der Anode beschleunigt, dort absorbiert und es fließt ein ständiger Strom.

Wechselt man das Vorzeichen der Spannung, so fließt jedoch kein Strom, da nur die heiße Elektrode Elektronen emittieren kann. Ein solches Bauteil, welches Strom nur in eine Richtung leitet bezeichnet man als Gleichrichter oder **Diode**. Vor Erfindung der Halbleiterbauelemente wurden Vakuumröhren allgemein als Gleichrichter eingesetzt.

Durch Hinzufügen weiterer Elemente (Elektroden, Gase) lassen sich mit Elektronenröhren weitere Funktionen verwirklichen. Die heute gebräuchlichsten Anwendungen sind Elektronenstrahlröhren und Gasentladungsröhren.

Elektronenstrahlröhren

Im Gegensatz zur normalen Elektronenröhre werden bei der Elektronenstrahlröhre (auch Braun'sche Röhre genannt) die Elektronen, welche von der Glühkathode zur Anode fliegen durch ein Strahlerzeugungssystem zunächst zu einem Strahl gebündelt. Dieses System besteht aus mehreren Blenden auf unterschiedlichen elektrischen Potentialen. Die entstehenden inhomogen elektrischen Felder wirken auf die Elektronen als elektrische Linsen, ähnlich wie Glaslinsen auf Licht.

Der Elektronenstrahl durchläuft dann ein Ablenkungssystem. Dieses besteht aus zwei Plattenkondensatoren, an welche Steuerspannungen angelegt werden. Innerhalb der Kondensatoren entstehen hierdurch homogene elektrische Felder, die den Elektronenstrahl proportional zu den angelegten Spannungen ablenken.

Der Strahl trifft dann auf den Leuchtschirm auf und erzeugt einen Leuchtfleck.

Braun'sche Röhren finden heute vor allem in Fernsehgeräten, Monitoren und **Oszilloskopen** ihre Anwendung.

Mit **Oszilloskopen** kann man den zeitlichen Verlauf von Spannungsignalen bei Frequenzen bis zu Ghz sichtbar machen. Kernstück ist dabei eine Braun'sche Röhre. Sie ist messtechnisch betrachtet ein Spannungsmesser, bei dem der Leuchtfleck mit einer Empfindlichkeit von etwa 0,2mm/V abgelenkt wird. Da dies für die meisten Messaufgaben nicht ausreicht sind Oszilloskope mit einstellbaren Verstärkern ausgestattet, die eine Erweiterung und Anpassung des Messbereiches ermöglichen.

Zur Darstellung des zeitlichen Verlaufs des Messsignals wird der X-Ablenkungsteil des Elektronenstrahles mit einem Sägezahnsignal einstellbarer Frequenz betrieben, während das Messsignal, entsprechend verstärkt, an den Y-Ablenkteil angelegt wird.

Um bei der Aufzeichnung eines Wechselspannungssignals ein stehendes Bild zu erhalten, muss die Sägezahnspannung mit der Wechselspannung synchronisiert werden. Man bezeichnet diesen Vorgang als **Triggerung**. Hierbei dienen meist ein Schwellwert und die Richtung des Durchlaufs durch den Schwellwert als Auslösesignal.

Alternativ zur Ansteuerung mit einer intern generierten Sägezahnspannung, kann die X-Ablenkung auch über ein entsprechend verstärktes zweites Messsignal erfolgen. Dies erlaubt unter anderem die direkte Darstellung von Kennlinien.

Bei den heute immer häufiger verwendeten **digitalen Oszilloskopen,** steuert die gemessene Spannung nicht mehr direkt den Elektronenstrahl. Diese wird vielmehr, nach angepasster Verstärkung, mittels schneller A/D-Wandlung digitalisiert. Der Display des Gerätes, welcher in diesem Fall eine Braun'sche Röhre sein kann, häufig aber auch als Flüssigkristallanzeige ausgeführt ist, dient in diesem Fall nach Art eines Computermonitors lediglich der Anzeige der digital verarbeiteten Signale.

6.2 Halbleiterbauelemente ohne Sperrschichten

Thermistoren (von **therm**al sensitiv rest**istor**) sind Halbleiterwiderstände, die ihren Ohmwert bei Erwärmung um mehrere Zehnerpotenzen ändern. Dabei handelt es sich um gesinterte Gemische verschiedener Metalloxide.

Man unterscheidet **Heißleiter** (NTC-Widerstände; negative temperature coefficient), deren Widerstand mit steigender Temperatur sinkt und **Kaltleiter** (PTC-Widerstände) mit dem umgekehrten Verhalten.

Halbleiter sind meist Heißleiter. Bei ihnen beruht die Leitfähigkeit auf freien Ladungsträgern, die sich dadurch bilden, dass Elektronen aus ihren Plätzen im Kristallgitter austreten. Dies kann z.B. durch thermische Energie geschehen. Bei steigender Temperatur bilden sich mehr freie Ladungsträger (Elektronen und Löcher), die am Stromfluss teilnehmen können und demzufolge sinkt der elektrische Widerstand.

Bei Metallen liegt die Anzahl der freien Ladungsträger (hier: Elektronen) fest, ihre Beweglichkeit sinkt jedoch bei steigender Temperatur, wodurch der Stromfluss gehemmt wird. Metalle sind deshalb meist Kaltleiter.

Ausnahmefälle ergeben sich, wenn sich den beschriebenen Effekten weitere, etwa eine Änderung der Kristallstruktur, überlagern.

Je nach Einsatz unterscheidet man fremdbeheizte und eigenerwärmte Thermistoren.

Anwendungen:

- **Messheißleiter und Messkaltleiter** dienen der Temperaturmessung oder -überwachung.
- **Kompensationsheißleiter** werden zur Temperaturstabilisierung elektronischer Schaltungen eingesetzt.
- **Anlassheißleiter** dienen der Unterdrückung von Einschaltstromstößen z.B. von Kleinmotoren und Netzteilen. Ihr Widerstand sinkt durch den Betriebsstrom binnen Sekunden um Zehnerpotenzen.
- **Eigenerwärmte Kaltleiter** finden ihren Einsatz z.B. in der Füllstandskontrolle von Öl- oder Kraftstofftanks. Messsignal ist dabei die beim Eintauchen durch die Abkühlung erzielte Stromänderung.

Varistoren zeichnen sich dadurch aus, dass ihr Widerstand beim Überschreiten einer Ansprechspannung U_N sehr schnell (50ns) von MΩ auf einige Ω absinkt. Sie eignen sich deshalb sehr gut zum Schutz empfindlicher elektronischer Schaltungen vor kurzzeitigen Überspannungen, die sie auf die Ansprechspannung begrenzen.

Fotowiderstände (typischerweise aus CdS, PbS, Si) zeigen eine starke Reduktion des el. Widerstandes unter Lichteinwirkung. Hierbei werden zusätzliche freie Ladungsträger durch die Beleuchtung erzeugt.

Anwendungen sind etwa Lichtschranken, Dämmerungsschalter und Beleuchtungsmessgeräte.

Hallsonden dienen der Magnetfeldmessung. Sie bestehen aus einem länglichen stromdurchflossenen Halbleiterplättchen (z.B. InAs) und zeigen, wenn Ihre Fläche senkrecht von einem Magnetfeld *B* durchsetzt wird, senkrecht zu Magnetfeld und Stromrichtung eine Spannung, welche sich nach

$$U_H = \frac{R_H}{d} \cdot B \cdot I_S = c_H \cdot B \cdot I_S$$

errechnet. Dabei sind *d* die Dicke des Plättchens, R_H die Hallkonstante des Materials und der Faktor c_H ergibt sich bei typischen Hallsonden (etwa 1mm dick) zu etwa *1V/(A·T).*

6.3 Dioden

Versetzt man einen reinen Halbleiter kontrolliert durch Verunreinigungen anderer Wertigkeit, d.h. dotiert man einen Halbleiter, so kann man seine Leitfähigkeit in weiten Bereichen einstellen. Silizium z.B. ist vierwertig, d.h. jedes Si- Atom ist im Siliziumkristall mit vier Nachbaratomen verbunden. Wird es nun mit einem fünfwertigen Element (etwa Arsen oder Phosphor) dotiert, so bleibt ein Elektron des Fremdatoms ungebunden und kann mittels eines geringen Energiebetrags freigesetzt werden. Man spricht im Falle der fünfwertigen Elemente von Donatoren (Spendern). An der Stelle des Fremdatoms bleibt eine ortsfeste Fehlstelle zurück.

Ein n-dotierter Halbleiter enthält zusätzliche freie Elektronen und ortsfeste positive Ladungen.

Bringt man stattdessen ein dreiwertiges Element ein, so fehlt ein Bindungselektron. Ein freies Elektron kann diese Lücke schließen, hinterlässt dafür aber an anderer Stelle eine bewegliche Fehlstelle. Man spricht im Falle der dreiwertigen Elemente von Akzeptoren (Empfängern).

Ein p-dotierter Halbleiter enthält zusätzliche freie Löcher und ortsfeste negative Ladungen.

Dotiert man einen Halbleiter derart, dass eine p-dotierte und eine n-dotierte Region direkt aneinandergrenzen, so spricht man von einem **pn-Übergang**. Die in diesem Bereich zunächst zur Verfügung stehenden freien Elektronen des p-dotierten

Grenzbereichs und die freien Löcher des n-dotierten Grenzbereichs diffundieren in den jeweils angrenzenden Bereich und rekombinieren. Dadurch bildet sich eine an freien Ladungsträgern verarmte und damit hochohmige Zone (Sperrschicht).

Übrig bleiben die ortsfesten Ladungen an den Fremdatomen. Sie bilden, ähnlich einem geladenen Kondensator, ein elektrisches Feld aus, welches die Diffusion weiterer freier Ladungsträger stoppt. Dem elektrischen Feld $\vec{E}_D$ über die Sperrschichtbreite entspricht eine el. Potential, welches man **Diffusionsspannung** U_D nennt. Sie ist abhängig vom Grundmaterial und beträgt bei Silizium 0,7V und bei Germanium 0,3V.

Das so erhaltene Halbleiterbauelement, die **Diode,** zeigt folgendes Verhalten:

Sperrrichtung. Legt man nun eine äußere Spannung U_B an, wobei man den Pluspol an die N-Seite anschließt, so werden die freien Elektronen der N-Seite weiter von der Sperrschicht abgezogen. Gleiches passiert mit den freien Löchern auf der P-Seite. In Konsequenz verbreitert sich die hochohmige Sperrschicht und es fließt nur ein sehr geringer Strom. Das Element sperrt.

Bei sehr hohen angelegten Spannungen (Durchbruchspannung, ca. 10V – 4kV) setzen die wenigen Elektronen des Sperrstromes aufgrund ihrer starken Beschleunigung weitere Elektronen durch Stoß frei. In diesem Fall steigt der Strom in Sperrrichtung stark an kann zur Zerstörung des Halbleiters führen.

Durchlassrichtung. Legt man dagegen eine entgegensetzt gepolte Spannung an, so ist das durch die externe Spannung angelegte elektrische Feld $\vec{E}_B$ dem Feld $\vec{E}_D$ entgegengesetzt. Überschreitet U_B die Diffusionsspannung D_U so werden die freien Ladungsträger im Sinne des Diffusionsstromes bewegt. Der Prozess wird jedoch nicht mehr durch die Diffusionsspannung begrenzt. Die Sperrschicht wird mit freien Ladungsträgern überschwemmt und ihr Widerstand sinkt um viele Zehnerpotenzen. Der Halbleiter ist nun niederohmig und muss durch einen Vorwiderstand vor Kurzschluss geschützt werden.

Man unterscheidet nach Ihrer Auslegung und Anwendung verschiedene Dioden:
- **Gleichrichterdioden**, sie wird im Durchlassbereich und im flachen Bereich der Kennlinie in Sperrrichtung betrieben und dient der Gleichrichtung von Wechselströmen
- **Zehnerdioden, (Z-Dioden)** sie ist so ausgelegt, dass die Kennlinie im Sperrbereich besonders steil ist und sie in diesem Bereich, bis zu einer Grenzstromstärke auch betrieben werden kann. Sie findet ihre Anwendung in der Stabilisierung von Spannungen bei Netzteilen oder zur Bildung von Referenzspannungen.

Fotodioden. Fällt Licht auf die Sperrschicht einer Diode, so steigt der Sperrstrom durch die gebildeten freien Ladungsträger proportional zur Lichtmenge an. Fotodioden sind im Gegensatz zu Fotowiderständen sehr schnell (bis Ghz).

Fotoelement
Aufgrund der Leerlaufspannung und der Nachproduktion von freien Ladungsträgern durch das eingestrahlte Licht kann eine Fotodiode auch als Generator betrieben werden. Man nennt sie dann Fotoelement und betreibt sie, z.B. im Belichtungsmesser im Kurzschlussbetrieb. Eine spezielle, großflächige Ausführung stellt die Solarzelle dar.

Leuchtdioden
Bei einigen Halbleitermaterialien entsteht bei der Rekombination der freien Elektronen an den Fehlstellen der P-Zone Licht. Hierzu werden die entsprechenden Dioden in Durchlassrichtung betrieben. Je nach Ausgangsmaterial können unterschiedliche Farben erzeugt werden. Die Lichtstärke wächst mit dem Diodenstrom. Leuchtdioden reagieren sehr schnell auf Stromänderungen und können deshalb gut zur Signalübertragung eingesetzt werden.

6.4 Transistoren

Bipolare Transistoren. Bipolare Transistoren bestehen aus drei Schichten und besitzen zwei PN-Übergänge, die unterschiedlich gepolt sind - daher der Name. Je nach Schichtfolge unterscheidet man NPN- und PNP-Transistoren.

Jede der Schichten ist nach außen kontaktiert. Die drei Anschlüsse heißen:

- **Kollektor (C),**
- **Basis (B)** und
- **Emitter (E).**

Wichtig für die Funktion des Transistors ist, dass die mittlere Schicht, die Basis, sehr dünn und nur schwach dotiert ist (< 50µm).

Funktionsweise. Beim NPN-Transistor seien zunächst nur Kollektor mit einer positiven Spannung und Emitter mit einer negativen Spannung belegt. In Folge sperrt die aus Kollektor und Basis bestehende Diode D1 und nur der sehr geringe Sperrstrom fließt.

Legt man nun an die Basis eine kleine positive Spannung an, so wird die Sperrschicht der aus Basis und Emitter gebildeten Diode D2 ab ca. 0,7V niederohmig. In Folge gelangen die Elektronen vom Emitter in die Basis. Da diese aber dünn und schwach dotiert ist können dort nur wenige Elektronen rekombinieren. Der Hauptanteil gelangt in die Sperrschicht der Diode D1 und wird von der dort anliegenden Spannung zum Kollektor hin abgeleitet.

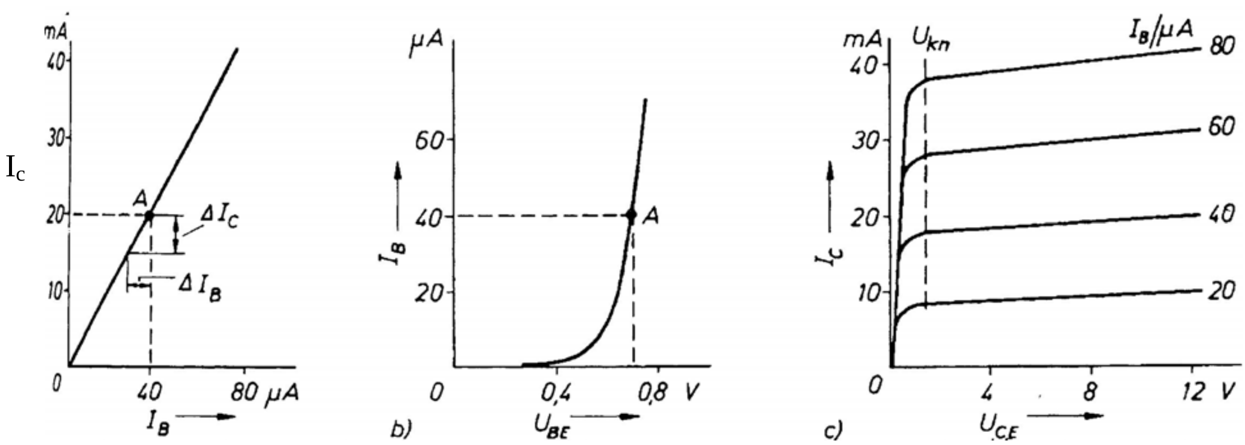
Erst das Anlegen einer Spannung an der Basis erlaubt somit den Fluss der Elektronen vom Emitter zur Kollektor (bzw. den technischen Stromfluss von Kollektor zum Emitter). Der Transistorstrom I_C lässt sich über den durch das Anlegen der Spannung U_{BE} erzeugten Basisstrom I_B steuern. Dabei erhält man eine Gleichstromverstärkung $B = I_C/I_B$ von typischerweise 10 bis 1000. Dieser Wert hängt vom Transistor und vom gewählten Arbeitspunkt ab.

Im Falle des PNP-Transistors ist die Schichtfolge gerade umgedreht. Die Funktionsweise ist aber, nach Vertauschen aller Vorzeichen der Spannungen und Stromrichtungen die gleiche.

Der Zusammenhang zwischen den verschiedenen Transistorströmen und -spannungen wird in den Datenblättern durch Kennlinienbilder dargestellt. Wichtig sind dabei vor allem

- die Steuerkennlinie $I_C = f(I_B)$
- die Eingangskennlinie $I_B = f(U_{BE})$
- die Ausgangskennlinie $I_C = f(U_{CE})$,

das Beispiel entspricht einem Transistor kleinerer Leistung.



Aus diesen Kennlinienbildern lassen sich unter anderem die folgenden Größen bestimmen:

- der Gleichstromverstärkung $B = \frac{I_C}{I_B}$ für U_{CE} konstant,
- der Stromverstärkungsfaktor $\beta = \frac{\Delta I_C}{\Delta I_B}$ für U_{CE} konstant.

Letzterer ist wichtig für die Verstärkung von Wechselstromsignalen.

Außerdem erhält man :

- den Eingangswiderstand $R_{BE} = \frac{U_{BE}}{I_B}$ für U_{CE} konstant,
- den differentiellen Eingangswiderstand $r_{BE} = \frac{\Delta U_{BE}}{\Delta I_B}$ für U_{CE} konstant,
- und den differentiellen Ausgangswiderstand $r_{BE} = \frac{\Delta U_{CE}}{\Delta I_c}$ für I_B konstant.

Fototransistoren

Statt durch einen Basisstrom wird bei dieser Ausführung eines bipolaren Transistors der Kollektorstrom durch die Beleuchtungsstärke eingestellt. Ist die Basis trotzdem nach außen geführt, so lässt sich zusätzlich der Arbeitspunkt des Transistors über eine angelegte Gleichspannung einstellen.

Gegenüber Fotoelementen weisen Fototransistoren einen wesentlich (100 bis 1000fach) größeren Kollektorstrom auf, der sich z.B. direkt zur Ansteuerung eines Relais einsetzen lässt.

Feldeffekttransistoren

Feldeffekttransistoren unterscheiden sich aus Anwendersicht vor allem darin von den bipolaren Transistoren, dass der Ausgangsstrom über ein durch die Steuerspannung erzeugtes elektrisches Feld gesteuert wird und somit praktisch leistungslos erfolgt. Dementsprechend ist der Eingangswiderstand mit $>10^9\ \Omega$ extrem hoch. Dafür ist die Strombelastbarkeit geringer und die Transistoren sind in der Handhabung empfindlich gegen Überspannungen.

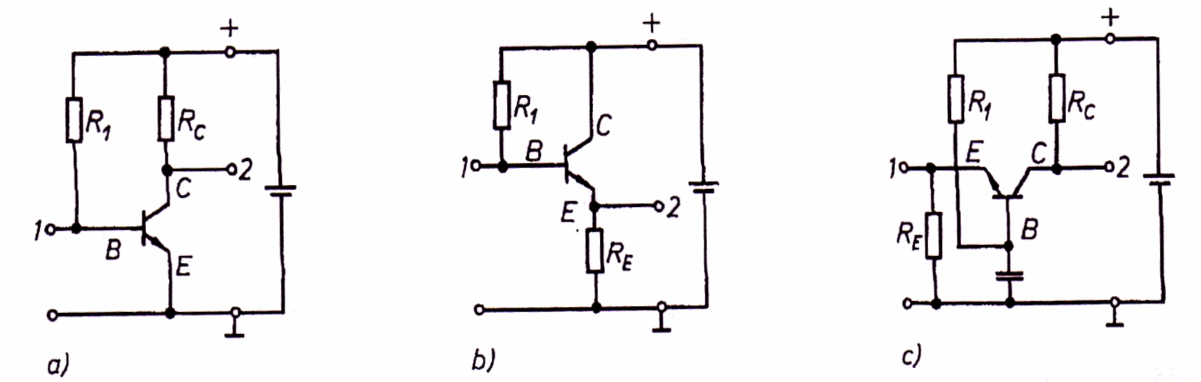
Die grundlegende Funktionsweise sei anhand eines MOS-FET (Metal-Oxid-Semiconductor) erläutert, wie er insbesondere in integrierten Schaltkreisen zum Einsatz kommt.

In das p-leitende Grundmaterial sind zwei N-Inseln eindotiert. Sie sind mit den Anschlüssen für den Signalstrom versehen. Im Falle der Feldeffekttransistoren werden sie mit **S** für **Source** (Quelle) und **D** für **Drain** (Abfluss) bezeichnet. Die Steuerelektrode, **G** für **Gate** (Tor) bezeichnet, ist als Metallbelag auf einer SiO_2-Isolierschicht aufgebracht. Ohne Gatespannung fließt zwischen Gate und Source nur der Sperrstrom des PN-Übergangs. Erhält das Gate jedoch ein positives Potential gegen Source und Substrat, so werden Elektronen (Minoritätsträger in der P-Schicht) bis unter die Isolierschicht gezogen und bilden dort durch Anreicherung eine leitende Brücke. Dadurch kann jetzt ein Drainstrom I_D fließen, dessen Stärke über die Gatespannung steuerbar ist.

Die Kennlinienbilder der Feldeffekttransistoren ähneln denen der bipolaren Transistoren. An die Stelle des Basisstromes tritt jedoch nun die Gatespannung.

Transistorgrundschaltungen

Transistoren können prinzipiell in drei Grundschaltungen eingesetzt werden, die jeweils ihre besonderen Eigenschaften aufweisen und entsprechend eingesetzt werden.



man unterscheidet:

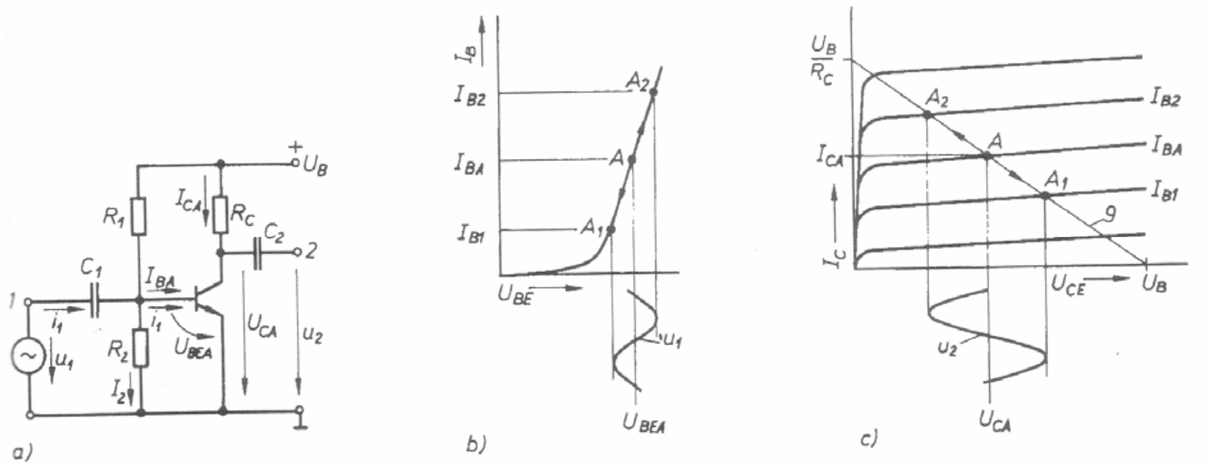
a) Emitterschaltung (Spannungs- und Stromverstärkung)

b) Kollektorschaltung (reine Stromverstärkung, Impedanzwandlung)

c) Basisschaltung (reine Spannungsverstärkung in der Hochfrequenztechnik)

wobei sich die Bezeichnung auf den Anschluss bezieht, der für die Eingangs- wie die Ausgangsseite gilt. Im Falle der Kollektorschaltung wird hierbei der für Wechselströme kurzgeschlossene Weg über die Batterie gesehen.

Am Beispiel der Emitterschaltung nach dem folgenden Bild sei das Prinzip der Spannungsverstärkung mit Transistoren dargestellt.



Die zu verstärkende Wechselspannung liegt an Eingang 1 an. Damit beide Halbwellen verstärkt werden, muss der Betriebs- oder **Arbeitspunkt** des Verstärkers ohne Eingangssignal etwa in der Mitte des Kennlinienfeldes (Abb. b) und c)) liegen. Die Wechselspannung u_1 bewirkt auf der Eingangskennlinie $I_B = f(U_{BE})$ des Transistors eine Änderung des Basisstromes im Bereich I_{B1} bis I_{B2}, was einer Aussteuerung zwischen den Punkten A_1 und A_2 entspricht. Im Ausgangskennlinienfeld $I_C = f(U_{CE})$ wandert der Betriebspunkt dann ebenfalls von A_1 bei I_{B1} nach A_2 bei I_{B2} womit sich die Kollektor-Emitterspannung U_{CE} ebenfalls sinusförmig mit u_2 ändert. Nach

$$u_2 = - V_u \cdot U_1$$

erhält man eine Ausgangsspannung u_2, die um die Leerlaufverstärkung V_u = 50 bis 500 größer als die Eingangspannung u_1 ist.

Anmerkungen:

- Die Widerstände R_1 und R_2 legen als Spannungsteiler den Betriebspunkt A des Transistors fest.

- Der Widerstand R_C bestimmt die Steigung der Geraden g im Ausgangskennlinienfeld $I_C = f(U_{CE})$.

  Im Kollektor-Emitterkreis gilt: $U_B = I_C \cdot R_C + U_{CE}$

  und somit auch
  $$I_C = \frac{U_B}{R_C} - \frac{U_{CE}}{R_C}$$

- die Kondensatoren entkoppeln die Wechselstromsignale vom jeweiligen Gleichstromanteil

- durch einen zusätzlichen Widerstand R_E im Emitterzweig lassen sich die Linearität und Stabilität der Schaltung verbessern.

6.5 Graphische Lösung einfacher nichtlinearer Schaltungen

Die Berechnung von Schaltungen mit nichtlinearen Bauelementen wie Transistoren und Dioden ist mitunter komplex. Bei einfachen Schaltungen im Gleichstromkreis ist ein graphisches Verfahren anhand der Kennliniebilder hilfreich.

Reihenschaltung
Das Kenlinienbild einer Reihenschaltung erhält man durch Addition der Spannungswerte der Einzelelemente zu einzelnen Stromwerten.

Parallelschaltung
In ähnlicher Weise erhält man das Kennlinienbild einer Parallelschaltung von Bauelementen. Hier werden jedoch bei konstanter Spannung die Ströme der Bauelemente addiert.

Arbeitspunktbestimmung
Zur Bestimmung des Arbeitspunktes müssen die Quellenkennlinie und die Lastkennlinie zum Schnitt gebracht werden.

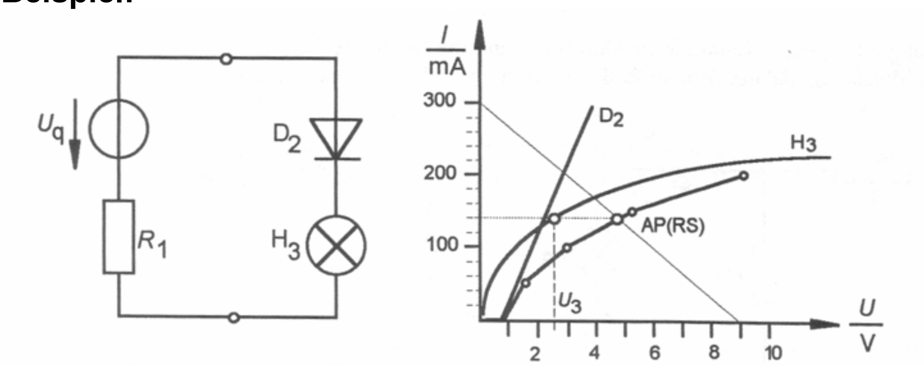
Reale Quellen besitzen einen nicht vernachlässigbaren Innenwiderstand. Seine Größe bestimmt die Steilheit der Quellenkennlinie. Diese Kennlinie verbindet die

Leerlaufspannung mit dem Kurzschlussstrom. Bei einem kleinen Innenwiderstand ist die Kennlinie sehr steil und man hat im Wesentlichen eine Spannungsquelle vor sich.

Eine Stromquelle zeichnet sich dagegen durch einen großen Innenwiderstand aus.

Zur Bestimmung des Arbeitspunktes wird die Kennlinie des Lastbauelementes (z.B. der Dioden oder der Glühlampe) mit der Quellenkennlinie zum Schnitt gebracht. Der Schnittpunkt kennzeichnet den sich tatsächlich einstellenden Strom- und Spannungswert und wird als Arbeitspunkt bezeichnet.

Beispiel:



geg.: reale Quelle (U_q= 9V; R_i = R_1 = 30 Ω); idealisierte Diode (U_s = 800 mV; R_f = 10Ω) und Glühlampe H3. Welche Spannung liegt an der Glühlampe?

Lsg.:

1. Konstruktion der Kennlinie der Reihenschaltung von D_2 und H_3
2. Zeichnen der Quellenkenlinie
3. Schnitt mit Kennlinien
4. Bestimmung von U_3 zu 2,5 V.

7 Literatur

Lehrbücher

Linse, H., Fischer, R.: Elektrotechnik für Maschinenbauer, 10. Auflage, 2000, Teubner-Verlag Stuttgart-Leipzig-Wiesbaden.

Ose, R.: Elektrotechnik für Ingenieure, Band 1 - Grundlagen, 2. Auflage, 2001, Fachbuchverlag Leipzig

Bauckholt, H.-J.: Grundlagen und Bauelemente der Elektrotechnik, 4. Auflage, 2001, Carl Hanser Verlag München.

Hugel, J.: Elektrotechnik - Grundlagen und Anwendungen, 1998, Teubner-Verlag Stuttgart-Leipzig.

Marinescu, M.: Gleichstromtechnik - Grundlagen und Beispiele, 1997, Vieweg Verlag Braunschweig-Wiesbaden.

Marinescu, M.: Wechselstromtechnik - Grundlagen und Beispiele, 1999, Vieweg Verlag Braunschweig-Wiesbaden.

Meister, H: Elektrotechnische Grundlagen, 1994, Vogel Verlag Würzburg

Weißgerber, W: Elektrotechnik 1, 1990, Vieweg-Verlag Braunschweig-Wiesbaden.

Zastrow, D.: Elektrotechnik, 14. Auflage, 2000, Vieweg Verlag Braunschweig-Wiesbaden.

Taschenbücher

Lindner, H., Brauer, H., Lehmann, C.: Taschenbuch der Elektrotechnik und Elektronik, 7. Auflage, 1999, Fachbuchverlag Leipzig.

Dubbel, Taschenbuch für den Maschinenbau, Teil V Elektrotechnik, 20. Auflage, 2001, Springer-Verlag.

Hütte - Die Grundlagen der Ingenieurwissenschaften, Teil G Elektrotechnik, 31. Auflage, 2000, Springer-Verlag.