

MANUALE DI OTTICA

**per il secondo biennio dell'indirizzo di
ottica (professionale)**

(Ottica geometrica)

**a cura dei docenti
dell'IIS G.Galilei - Milano**

Luglio 2012

INTRODUZIONE

Lo studio dell'Ottica Geometrica inizia con l'applicazione delle leggi della riflessione e della rifrazione ai seguenti casi:

- riflessione e rifrazione della luce su superfici piane, lamine e prismi;
- riflessione e rifrazione della luce su un diottro semplice, ossia sulla superficie di separazione (sferica o piana) tra due mezzi ottici;
- rifrazione della luce attraverso una lente sottile.

Ricordiamo le definizioni dei concetti principali che sono già stati introdotti:

Angolo di incidenza: angolo compreso tra la direzione di un raggio luminoso incidente su una superficie e la retta normale alla superficie passante per il punto di incidenza.

Angolo di riflessione: angolo compreso tra la direzione di un raggio riflesso da una superficie e la retta normale alla superficie riflettente passante per il punto di riflessione.

Angolo di rifrazione: angolo compreso tra la direzione di un raggio rifratto da una superficie e la retta normale alla superficie rifrangente passante per il punto di rifrazione.

Angolo limite: angolo di incidenza al di sopra del quale si ha riflessione totale.

Asse ottico: ogni retta che passa per il centro di curvatura di un diottro sferico, o la retta che passa per i centri di curvatura delle due superfici sferiche di una lente.

Diottria: unità di misura del potere dei diottri o delle lenti.

Diottro sferico: superficie sferica che separa due mezzi rifrangenti.

Distanza focale: distanza del fuoco dal vertice di un diottro o dal centro di una lente.

Fuoco immagine: punto in cui un diottro o una lente fanno convergere i raggi luminosi paralleli alla direzione dell'asse ottico.

Fuoco oggetto: punto da cui provengono i raggi luminosi che dopo aver attraversato un diottro o una lente proseguono paralleli alla direzione dell'asse ottico.

Indice di rifrazione assoluto: rapporto tra la velocità della luce nel vuoto e la velocità della luce nel mezzo trasparente.

Indice di rifrazione relativo (di un mezzo 2 rispetto a un mezzo 1): rapporto tra la velocità della luce nel mezzo 1 e la velocità della luce nel mezzo 2.

Ingrandimento trasversale: rapporto tra le dimensioni dell'immagine prodotta da un diottro o da una lente e quelle dell'oggetto.

Lente: corpo rifrangente delimitato da due superfici sferiche.

Prisma: corpo trasparente delimitato da facce piane con due basi uguali parallele.

Riflessione totale: fenomeno per il quale la luce incidente con un angolo di incidenza maggiore di un angolo limite sulla superficie di separazione tra un mezzo otticamente più denso e un mezzo otticamente meno denso viene riflessa totalmente.

Specchio concavo: specchio a forma di calotta sferica di forma concava.

Specchio convesso: specchio a forma di calotta sferica di forma convessa.

Ci occuperemo ora di situazioni un poco più complesse, ossia:

- sistemi ottici costituiti da **due o più diottri**, da **due o più lenti sottili**, o da una **lente spessa**;
- i **diaframmi**, ossia gli elementi che limitano l'ampiezza dei fasci di raggi luminosi che attraversano un sistema ottico.

Applicheremo poi i principi generali così stabiliti ad alcuni casi concreti, e in particolare all'**occhio** considerato come sistema di diottri e ad alcuni strumenti ottici di uso comune, come il **microscopio**, il **cannocchiale**, e alcuni strumenti utilizzati nell'ottica oftalmica.

Continueremo a limitarci al caso in cui vale l'approssimazione dell'**ottica di Gauss**, ossia al caso in cui tutti gli angoli sono piccoli e i raggi sono vicini all'asse ottico. Considereremo il caso generale di angoli qualsiasi solo in una sezione successiva, quando studieremo le aberrazioni dei sistemi ottici.

1. I sistemi diottrici centrati

La maggior parte degli strumenti ottici consta di un certo numero di lenti separati da intervalli d'aria; oppure, come nel caso dell'occhio, vi sono più diottri che separano mezzi con indice di rifrazione differente. Si possono determinare posizione e dimensioni dell'immagine finale considerando l'immagine data dal primo diottero come oggetto per il secondo, quella del secondo come oggetto per il terzo, e così via; ma con un numero elevato di diottri il procedimento diventa lungo e complesso.

È possibile esprimere l'effetto di un sistema di diottri (o di lenti) attraverso un diottero (o lente) cosiddetto **equivalente**, al quale si possono applicare tutte le formule ricavate per il diottero singolo (o per la singola lente sottile), purché posizionato opportunamente. Ci si limiterà comunque a **sistemi centrati**, cioè a insiemi di diottri o di lenti aventi i centri di curvatura su una stessa retta, l'**asse ottico principale**.

Per ogni sistema si possono individuare i sei **punti cardinali**:

- i due **punti focali**, ossia i punti oggetto e immagine in cui converge la luce proveniente dall'infinito dopo aver attraversato il sistema da destra, o da sinistra;
- i due **punti principali**;
- e i due **punti nodali**.

Dato un sistema diottrico centrato, è possibile ricavare le posizioni dei suoi punti cardinali sia mediante costruzioni grafiche, sia analiticamente.

Costruzione grafica

Consideriamo un sistema di tre diottri come quello mostrato nella figura 1. Supponiamo che siano noti gli indici di rifrazione, i raggi di curvatura e le posizioni dei centri di curvatura dei tre diottri, oppure le posizioni dei fuochi e le distanze e_1 ed e_2 tra i vertici dei diottri. Vogliamo ricavare graficamente il tracciato di un raggio che incide sul primo diottero a un'altezza h_1 , parallelo all'asse ottico.

Per realizzare la costruzione grafica si inizia tracciando l'asse ottico, e segnando su di esso le posizioni dei vertici V_1 , V_2 e V_3 dei diottri, dei loro fuochi immagine F'_1 , F'_2 e F'_3 , e dei centri di curvatura C_2 e C_3 del secondo e del terzo diottero.

Si procede poi nel modo consueto:

- si traccia il raggio 1 che proviene da sinistra dall'infinito e incide sul primo diottero; questo raggio viene rifratto dal diottero verso il fuoco immagine F'_1 e diventa il raggio 2;
- si costruisce il raggio ausiliario 3 che passa per il centro C_2 del secondo diottero ed è parallelo al raggio 2;
- il raggio ausiliario 3 interseca il piano focale 4 passante per il fuoco immagine F'_2 del secondo diottero; per questo punto deve passare anche il raggio 5 rifratto dal secondo diottero (o, come in questo esempio, il suo prolungamento all'indietro);
- in modo analogo si costruisce il raggio ausiliario 6 che passa per il centro C_3 del terzo diottero ed è parallelo al raggio 5; questo raggio ausiliario interseca il piano focale 7 passante per il fuoco immagine F'_3 del terzo diottero; per questo punto deve passare anche il raggio 8 rifratto dal terzo diottero;
- il punto F' di intersezione del raggio 8 con l'asse ottico è il **fuoco immagine** del sistema;
- il prolungamento all'indietro del raggio emergente 8 incontra il prolungamento 9 del raggio incidente sul primo diottero nel punto K' ; per tale punto passa il **piano principale immagine** π' del sistema, che interseca l'asse ottico nel **punto principale immagine** A' .

Utilizzando invece un raggio che incide sull'ultimo diottero del sistema provenendo dall'infinito da destra si ricava la posizione del **fuoco oggetto** F , come mostra la figura 2. Il raggio passante per F , prolungato all'indietro, interseca il prolungamento del raggio proveniente da destra nel punto K , per il quale passa il **piano principale oggetto** π del sistema, che interseca l'asse ottico nel **punto principale oggetto** A .

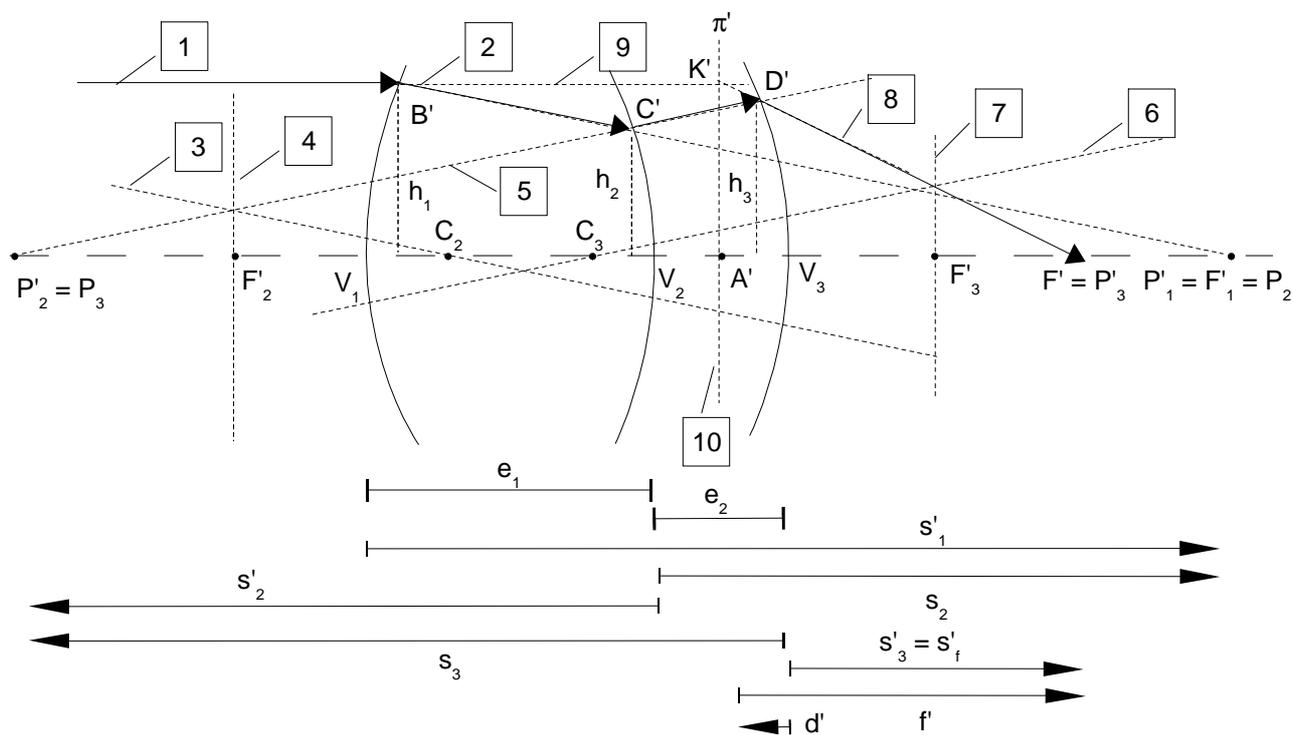


Figura 1. Schema del sistema di tre diottri centrati: costruzione del fuoco immagine.

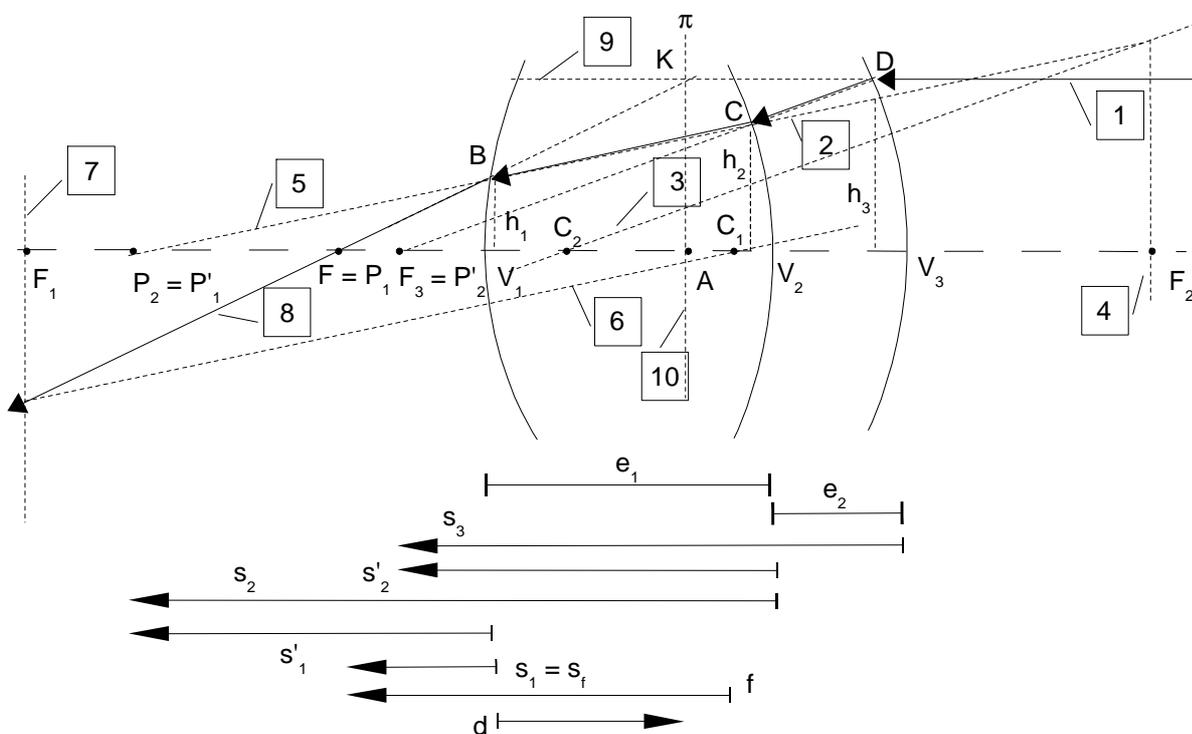


Figura 2. Schema del sistema di tre diottri centrati: costruzione del fuoco oggetto.

Le distanze $A'F' = f'$ e $AF = f$ costituiscono le **lunghezze focali equivalenti**, rispettivamente **immagine** e **oggetto** del sistema, uguali tra loro solo se sono uguali gli indici di

rifrazione estremi del sistema n_1 e n'_k . Naturalmente il **potere equivalente** del sistema è legato alle focali dalle formule consuete:

$$\varphi = \frac{n'}{f'} = -\frac{n}{f} \quad (1)$$

La focale equivalente del sistema si può definire come la focale di un diottro singolo, posto nel punto principale A' e separante due mezzi di indici n_1 e n'_k che, di un oggetto all'infinito, darebbe un'immagine nella stessa posizione e avente dimensioni uguali a quelle dovute a tutto il sistema. Invece un raggio proveniente da F e incidente sul sistema in B dà luogo a un raggio emergente parallelo all'asse ottico quando un diottro singolo, di focale pari alla focale oggetto del sistema, venga posizionato nel punto principale A .

Analogo discorso vale per il potere equivalente, che rappresenta il potere di un diottro ideale che, posto in A' , fa convergere i raggi provenienti dall'infinito nello stesso punto immagine del sistema. Viceversa, posizionato sul piano principale oggetto, tale diottro ideale rende paralleli i raggi provenienti dal fuoco F del sistema.

La distanza dal vertice dell'ultimo diottro al fuoco immagine equivalente F' si chiama ascissa frontale immagine, o, semplicemente, **frontale immagine** e ha sempre verso diretto dal vertice dell'ultimo diottro al fuoco immagine (nella figura 1 è stata indicata con s'_1); analogamente la distanza dal vertice del primo diottro al fuoco oggetto del sistema F , in valore e segno, costituisce la (ascissa) **frontale oggetto** del sistema (nella figura 2 è stata indicata con s_1).

Le focali del sistema

Ci proponiamo ora di ricavare analiticamente le formule che permettono di calcolare le focali di un sistema diottrico centrato.

Come si è fatto nel caso dei diottri semplici, utilizziamo le approssimazioni dell'ottica di Gauss. In questa approssimazione si può considerare che, nella figura 1, i piedi delle perpendicolari da B' , C' e D' coincidano con i vertici V_1 , V_2 e V_3 dei diottri.

Consideriamo le tre coppie di triangoli simili $V_1B'P'_1 \approx V_2C'P'_2$; $V_2C'P'_2 \approx V_3D'P'_3$; $A'K'F' \approx V_3D'P'_3$. Poiché nei triangoli simili il rapporto tra le basi è uguale al rapporto tra le altezze, possiamo scrivere:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{s'_1}{s_2} \quad (2)$$

$$\frac{h_2}{h_3} = \frac{s'_2}{s_3} \quad (3)$$

$$\frac{h_1}{h_3} = \frac{f'}{s'_3} \quad (4)$$

Ricaviamo f' dalla formula (4):

$$f' = \frac{h_1}{h_3} s'_3 \quad (5)$$

Moltiplichiamo l'equazione (2) per l'equazione (3) e otteniamo:

$$\frac{h_1}{h_3} = \frac{s'_1 s'_2}{s_2 s_3} \quad (6)$$

La sostituiamo nell'equazione (5) e otteniamo

$$f' = \frac{s'_1 s'_2 s'_3}{s_2 s_3} \quad (7)$$

Generalizzando questa formula al caso di un numero qualsiasi di diottri si ha

$$f' = \frac{s'_1 s'_2 \dots s'_k}{s_2 s_3 \dots s_k} \quad (8)$$

Quindi la focale immagine del sistema è data dal prodotto di tutte le ascisse immagine dei successivi diottri, diviso per il prodotto di tutte le ascisse oggetto salvo la prima.

Analogamente dalla figura (2) si ottiene

$$f = \frac{s_1 s_2 s_3}{s'_2 s'_3} \quad (9)$$

Generalizzando questa formula al caso di un numero qualsiasi di diottri si ha

$$f = \frac{s_1 s_2 \dots s_k}{s'_2 s'_3 \dots s'_k} \quad (10)$$

Quindi la focale oggetto del sistema è data dal prodotto di tutte le ascisse oggetto dei successivi diottri, diviso per il prodotto di tutte le ascisse immagine salvo la prima.

I punti principali

Abbiamo già visto come si procede per determinare graficamente la posizione dei punti principali. Per calcolare le loro posizioni si procede come per le focali: si calcolano le distanze d e d' (sempre in valore e segno) dal vertice del primo diottero al piano principale oggetto e dal vertice dell'ultimo diottero al piano principale immagine rispettivamente. Dalle figura 1 e 2 si ricava che

$$d' = s'_i - f' \quad \text{e} \quad d = s_i - f \quad (11)$$

I due piani principali possono essere considerati come i luoghi geometrici sui quali i raggi si rifrangono un'unica volta attraversando un sistema comunque complesso. E' bene porre attenzione alla simbologia delle varie grandezze: tutte le ascisse, focali, frontali, ecc. sprovviste di pedice si riferiscono al sistema, tutte quelle con pedice si riferiscono al diottero a cui il numero di pedice rimanda.

Siano ora (figura 3) A e A' i punti principali, F e F' i fuochi oggetto e immagine di un sistema. Un raggio proveniente da sinistra dall'infinito e parallelo all'asse ottico si rifrangerà in K' , intersecando l'asse ottico nel fuoco immagine F' . Analogamente un raggio proveniente da destra dall'infinito, con la stessa altezza di incidenza, si rifrangerà in K , passando poi per il fuoco oggetto F .

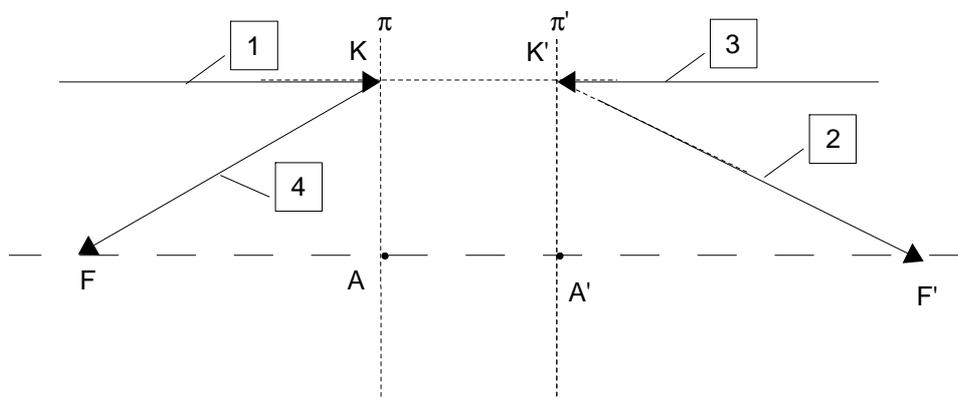


Figura 3. Fuochi e punti principali.

Considerando nella figura 3 raggi 1 e 4 come due raggi incidenti che si incontrano in K , si vede che i raggi 2 e 3 ne rappresentano i raggi coniugati, e che quindi i piani π e π' sono due piani coniugati. Tali piani coniugati godono dell'importante proprietà che l'ingrandimento trasversale vale +1.

Una volta note le posizioni dei fuochi e dei piani principali del sistema, è facile tracciare

graficamente i raggi attraverso il sistema: valgono infatti le regole applicate al diottrio semplice:

- a partire dal punto oggetto P si traccia il raggio PK (figura 4) con inclinazione a piacere (1);
- per la proprietà dei piani principali, ci si sposta al punto K' alla stessa distanza dall'asse di K (2);
- si traccia poi un raggio ausiliario FH parallelo al raggio PK (3);
- poiché tale raggio esce dal fuoco oggetto, emergerà dal sistema parallelamente all'asse ottico (4) incontrando il piano focale immagine (5) nel punto T;
- il raggio 2 verrà rifratto in modo da passare per lo stesso punto T (6).

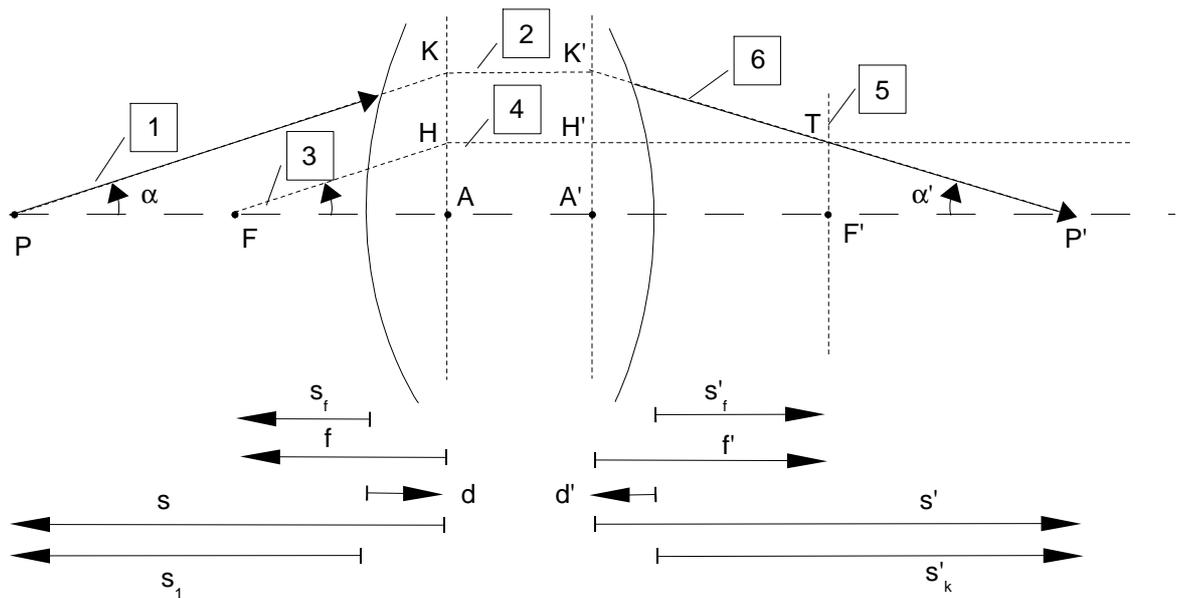


Figura 4. Tracciamento di un raggio attraverso il sistema di diottri.

I punti nodali

In generale, un raggio che incide sulla superficie del primo diottrio di un sistema centrato con una data inclinazione α rispetto all'asse ottico, emerge dall'ultimo diottrio del sistema con un'inclinazione α' differente. Il rapporto

$$I_\omega = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{s'}{s} \quad (12)$$

tra le due inclinazioni è detto **ingrandimento angolare** del sistema.

Per ogni sistema ottico, però, esiste una coppia di punti dell'asse ottico, detti **punti nodali**, tali che ogni raggio che incide sul primo diottrio diretto verso il primo punto nodale, detto **nodo oggetto**, emerge dal secondo punto nodale, detto **nodo immagine**, con **la stessa inclinazione** rispetto all'asse ottico. Si tratta quindi di due punti per i quali non si ha rifrazione. Per questi punti si ha quindi un ingrandimento angolare $I_\omega = 1$.

In tutti i casi in cui l'indice di rifrazione del mezzo che si trova davanti al primo diottrio del sistema è uguale all'indice di rifrazione del mezzo che si trova dietro l'ultimo diottrio, i punti nodali coincidono con i punti principali. Nel caso di una lente sottile in aria, per esempio, sia i punti principali che i punti nodali coincidono con il centro della lente. Vi è però un importante sistema ottico nel quale i punti nodali non coincidono con i punti principali: l'occhio, nel quale il mezzo che si trova davanti al primo diottrio (la cornea) è aria, mentre il mezzo che si trova dietro l'ultimo diottrio (la superficie posteriore del cristallino) è l'umore vitreo. E' utile perciò ricavare, sia graficamente che analiticamente, le posizioni dei punti nodali.

Le posizioni dei punti nodali si possono ricavare graficamente come segue, facendo

riferimento alla figura 5:

- dati i fuochi e i piani principali del sistema, si traccia il raggio 1 passante per il fuoco oggetto F con un'inclinazione qualsiasi;
- tale raggio si rifrangerà sul piano principale oggetto proseguendo parallelo all'asse ottico (raggio 2), e intersecherà il piano focale immagine 3 nel punto B ;
- tutti i raggi paralleli al raggio 1 nel campo oggetto si devono incontrare, dopo la rifrazione, nel punto B , ma solo uno di questi raggi emergenti dal piano principale immagine risulterà parallelo al raggio 1;
- l'intersezione di questo raggio 4 con l'asse ottico costituisce il punto nodale immagine e per esso passa il piano nodale immagine, perpendicolare all'asse ottico;
- ricostruendo all'indietro il percorso del raggio BN' si ottiene il raggio 6 che, prolungato in avanti, interseca l'asse ottico in N , che è il punto nodale oggetto per il quale passa il piano nodale oggetto.

In alternativa si può procedere anche nel modo seguente, facendo riferimento alla figura 6:

- consideriamo un raggio incidente 1 parallelo all'asse ottico;

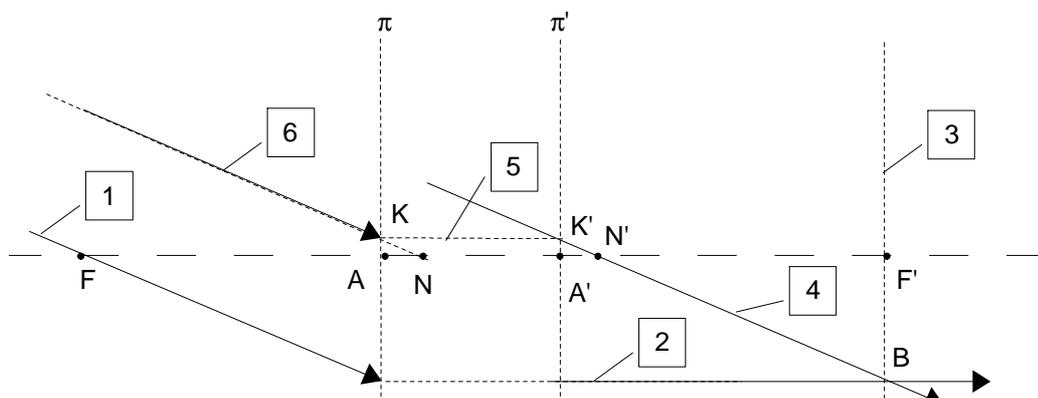


Figura 5. Costruzione grafica dei punti nodali.

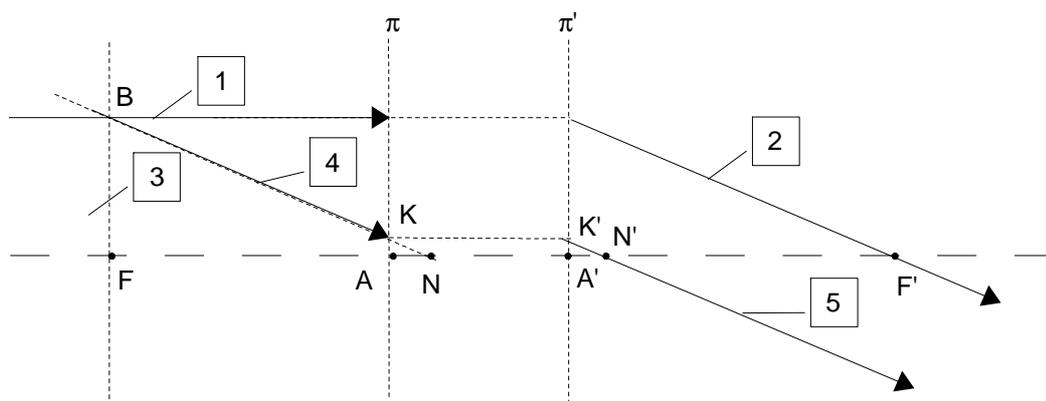


Figura 6. Costruzione grafica dei punti nodali – secondo metodo.

- tale raggio si rifrangerà sul piano principale immagine divenendo il raggio 2, che passa per il fuoco immagine F' ;
- tracciamo il piano focale oggetto 3 che intersecherà il raggio 1 nel punto B ;
- tutti i raggi incidenti passanti per B dopo la rifrazione saranno paralleli tra loro e al raggio 2;

- tracciamo il raggio incidente 4 passante per B e parallelo al raggio 2; il suo prolungamento interseca l'asse ottico in N , punto nodale oggetto, per il quale passa il piano nodale oggetto;
- proseguendo il percorso del raggio 4 si traccia il raggio 5, che interseca l'asse ottico in N' , che costituisce il punto nodale immagine per cui passa il piano focale immagine.

Vogliamo ora calcolare il valore delle ascisse nodali s_n e s'_n , che rappresentano le distanze dei punti nodali dai punti principali. Si possono considerare le seguenti relazioni, che si ricavano dalla figura 4:

$$HA = -f \operatorname{tg} \alpha \quad (13)$$

$$H'A' = -(s' - f') \operatorname{tg} \alpha' \quad (14)$$

Poiché $HA = H'A'$, si ha anche

$$-f \operatorname{tg} \alpha = -(s' - f') \operatorname{tg} \alpha' \quad (15)$$

Si ha poi

$$AK = -s \operatorname{tg} \alpha \quad (16)$$

$$A'K' = -s' \operatorname{tg} \alpha' \quad (17)$$

Poiché $AK = A'K'$, si ha anche

$$-s \operatorname{tg} \alpha = -s' \operatorname{tg} \alpha' \quad (18)$$

Dividendo l'equazione (15) per la (18) si ottiene

$$\frac{f}{s} = 1 - \frac{f'}{s'} \quad (19)$$

che si può anche scrivere nella forma

$$\frac{f}{s} + \frac{f'}{s'} = 1 \quad (20)$$

che è spesso usata per il diottero singolo.

Dalle figura 5 e 6 ci si può rendere conto che i punti nodali N e N' sono coniugati tra loro, ossia sono l'uno l'immagine dell'altro. Tutti i raggi incidenti sul primo diottero del sistema che passano per il punto nodale oggetto N , infatti, emergono dall'ultimo diottero passando per il punto nodale immagine N' . Applicando alle ascisse nodali l'equazione (20) si ha

$$\frac{f}{s_n} + \frac{f'}{s'_n} = 1 \quad (21)$$

Moltiplichiamo per s_n ottenendo

$$f + f' \frac{s_n}{s'_n} = s_n \quad (22)$$

e poiché per i punti nodali l'ingrandimento angolare è pari a 1, ossia

$$I_\omega = \frac{s'_n}{s_n} = 1 \quad (23)$$

si ha, per le equazioni (22) e (23),

$$f + f' = s_n = s'_n \quad (24)$$

Quindi **le ascisse nodali sono uguali in valore e segno, cioè i punti nodali si trovano entrambi a destra o a sinistra dei punti principali e alla stessa distanza da questi ultimi**. Il valore delle ascisse nodali è dato dalla somma algebrica delle focali: se quindi il primo e l'ultimo mezzo sono uguali saranno uguali anche le focali e le ascisse nodali risulteranno nulle, ossia i punti nodali coincideranno con i punti principali.

Come caso particolare consideriamo il diottero semplice: poiché per questo tutte le

ascisse e le focali hanno origine nel vertice, i piani principali coincideranno e passeranno per il vertice stesso. I piani nodali saranno anch'essi coincidenti, perché le due ascisse nodali, uguali tra loro, partono dallo stesso punto, ma passeranno per il centro di curvatura, dato che per il diottro la somma delle focali è uguale al raggio. Si può allora dire che i nodi di un sistema equivalente hanno lo stesso ruolo del centro di curvatura del diottro singolo.

Le formule del diottro contenenti il raggio di curvatura sono quindi valide anche per il sistema equivalente, purché si sostituisca il valore dell'ascissa nodale s_n al raggio r . Si ricordi per esempio che l'ingrandimento lineare I dell'immagine prodotta dal diottro sferico è dato dalla formula

$$I = \frac{s' - r}{s - r} \quad (25)$$

L'ingrandimento lineare dell'immagine prodotta da un sistema diottrocentrato è allora dato da

$$I = \frac{s' - s'_n}{s - s_n} \quad (26)$$

Esercizi

1. Trovare la focale equivalente e la posizione dei punti principali di un obiettivo fotografico Rapid Landscape che ha i seguenti parametri:

$r_1 = -120,8 \text{ mm}$		$n_1 = 1$
$r_2 = -34,6 \text{ mm}$	$d_2 = 6 \text{ mm}$	$n_2 = 1,521$
$r_3 = -96,2 \text{ mm}$	$d_3 = 2 \text{ mm}$	$n_3 = 1,581$
$r_4 = -51,2 \text{ mm}$	$d_4 = 3 \text{ mm}$	$n_4 = 1,514$
		$n_5 = 1$

2. Trovare dai seguenti dati la focale equivalente e la posizione dei punti principali di un obiettivo fotografico Cooke Serie IV:

$r_1 = +19,44 \text{ mm}$		$n_1 = 1,000$
$r_2 = -128,3 \text{ mm}$	$d_2 = 4,29 \text{ mm}$	$n_2 = 1,6110$
$r_3 = -57,85 \text{ mm}$	$d_3 = 1,63 \text{ mm}$	$n_3 = 1,000$
$r_4 = +18,19 \text{ mm}$	$d_4 = 0,73 \text{ mm}$	$n_4 = 1,5754$
$r_5 = +311,3 \text{ mm}$	$d_5 = 12,9 \text{ mm}$	$n_5 = 1,000$
$r_6 = -66,4 \text{ mm}$	$d_6 = 3,03 \text{ mm}$	$n_6 = 1,6110$
		$n_7 = 1$

2. I sistemi di lenti sottili in aria

Le considerazioni fatte per il sistema diottrico centrato valgono anche per un sistema di lenti sottili: si può sostituire un insieme di lenti sottili, aventi i centri di curvatura delle facce allineati su una retta, con un'unica lente di potere equivalente. Se la lente equivalente è posizionata sul piano principale oggetto per la luce incidente e sul piano principale immagine per la luce emergente, l'immagine che si ottiene è equivalente in posizione e dimensioni a quella che si otterrebbe con il sistema di lenti.

Dato che molti strumenti e dispositivi ottici constano di due lenti sottili distanziate, è conveniente individuare un gruppo di formule semplici e facilmente memorizzabili, che consentano di calcolare potere equivalente, frontali oggetto e immagine e posizioni dei piani principali per questo tipo di sistemi.

Il potere equivalente di un sistema di due lenti sottili

Consideriamo la figura 7, che rappresenta un sistema composto da due lenti sottili distanziate, con centri in O_1 e O_2 . Con F_1 , F'_1 , F_2 e F'_2 sono indicate le posizioni dei fuochi delle due lenti, mentre e è la distanza tra i centri delle due lenti:

- il raggio 1 proveniente dall'infinito da sinistra verso destra viene rifratto dalla prima lente verso il suo fuoco immagine F'_1 , nella direzione del raggio 2;
- arrivato alla seconda lente questo raggio devia ulteriormente, e applicando le regole per la costruzione grafica si determina il raggio 5 emergente dal sistema (si traccia il raggio ausiliario 3 parallelo al raggio 2 e passante per il centro O_2 della seconda lente; si determina l'intersezione di questo raggio con il piano focale immagine 4 della seconda lente; il raggio 5 deve passare per questo punto);
- il raggio emergente 5 interseca l'asse ottico nel fuoco immagine F' del sistema;
- prolungando il raggio 5 all'indietro, esso interseca il raggio 1 incidente sulla prima lente, prolungato in avanti, nel punto K' , dove passa il piano principale immagine 6.

Un'analogia costruzione da destra verso sinistra permette di individuare le posizioni del fuoco oggetto F e del piano principale oggetto, come mostra la figura 8.

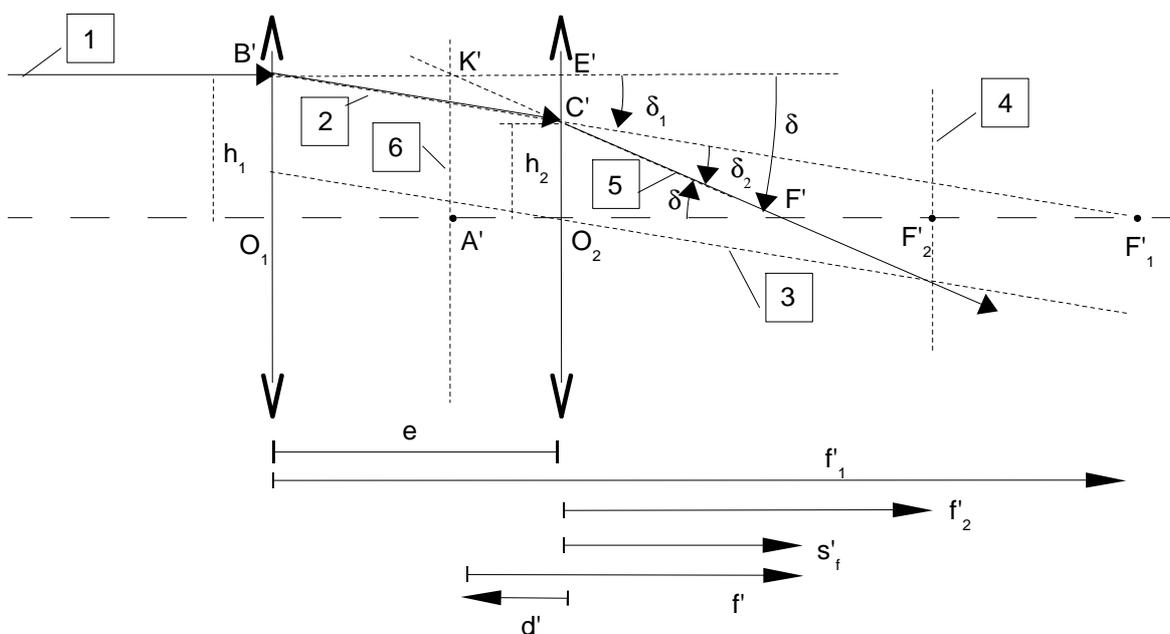


Figura 7. Costruzione grafica per il fuoco immagine e il piano principale immagine di un sistema di due lenti sottili.

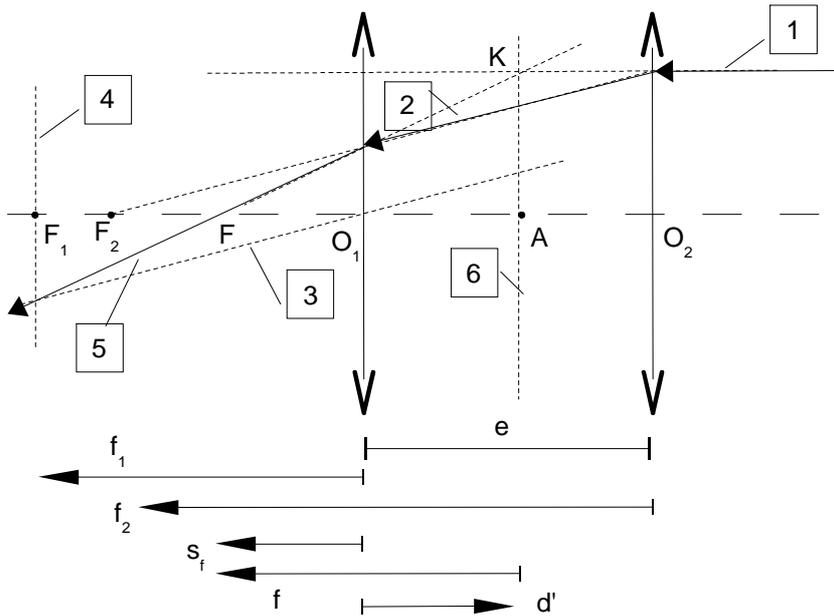


Figura 8. Costruzione grafica per il fuoco oggetto e il piano principale oggetto di un sistema di due lenti sottili.

Nella figura 7 sono indicati gli angoli di deviazione δ_1 e δ_2 imposti dalla prima e dalla seconda lente rispettivamente, e così pure l'angolo di deviazione totale del sistema δ , somma delle due deviazioni parziali: $\delta = \delta_1 + \delta_2$. Tutti gli angoli hanno qui lo stesso segno.

Si ricordi che la deviazione δ introdotta da una lente di potere φ per un raggio di altezza h è data, per una lente sottile nell'ottica di Gauss, da $\delta = h\varphi$. Si ha allora

$$\delta_1 = h_1\varphi_1 \quad (27)$$

$$\delta_2 = h_2\varphi_2 \quad (28)$$

Dalla figura 7 si nota che nel triangolo $F'A'K'$ si ha

$$\delta = \frac{A'K'}{A'F'} = \frac{h_1}{f'} = h_1\varphi \quad (29)$$

Si ha anche

$$h_2 = O_1B' - C'E' = h_1 - e\delta_1 = h_1 - eh_1\varphi_1 \quad (30)$$

Sostituendo nell'espressione $\delta = \delta_1 + \delta_2$ si ottiene allora

$$h_1\varphi = h_1\varphi_1 + h_2\varphi_2 = h_1\varphi_1 + (h_1 - eh_1\varphi_1)\varphi_2 = h_1\varphi_1 + h_1\varphi_2 - eh_1\varphi_1\varphi_2 \quad (31)$$

Dividendo per h_1 il primo e l'ultimo membro di questa espressione si ha infine

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - e\varphi_1\varphi_2 \quad (32)$$

Questa formula, detta **formula di Gullstrand**, dà il potere equivalente di un sistema di due lenti distanziate. Supposto il sistema in aria, l'inverso del potere equivalente darà la focale immagine equivalente f' e sarà inoltre $f = -f'$: queste focali si conterranno a partire dai piani principali, cioè da A e A' . Con la stessa formula si potrà ottenere direttamente la focale immagine f' : dalla formula (32) si ha

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} - \frac{e}{f'_1f'_2} \quad (33)$$

da cui si ricava

$$f' = \frac{f_1' f_2'}{f_1' + f_2' - e} \quad (34)$$

Dalla formula di Gullstrand si possono trarre alcune conseguenze immediate: con due lenti positive si possono ottenere poteri sia positivi che negativi, perché il terzo termine, per lenti di potere elevato e alquanto distanti, può prevalere sui primi due termini positivi; invece con due lenti negative si avrà un potere negativo più elevato, cioè la divergenza dei raggi risulta sicuramente aumentata.

Per la maggior parte delle combinazioni di lenti è possibile scegliere una separazione per la quale il potere equivalente è nullo. La separazione richiesta è la somma delle lunghezze focali in modo che il fuoco immagine della seconda lente sia coincidente con il fuoco oggetto della prima lente. Ciò rende la focale equivalente infinita in modo tale che sia i piani principali sia i fuochi sono posti all'infinito. Sistemi di questo tipo sono detti **sistemi afocali** e sono usati comunemente come cannocchiali.

I fuochi e i piani principali di un sistema di due lenti sottili

Anche per le lenti occorre saper individuare le posizioni dei piani principali e quelle dei fuochi. Nella figura 9 si possono considerare i triangoli simili O_1BF e AHF . Per questi due triangoli si ha

$$\frac{AH}{O_1B} = \frac{f}{s_f} \quad (35)$$

Sono simili anche i triangoli O_2DF_2 e O_1BF_2 , per cui è

$$\frac{O_2D}{O_1B} = \frac{f_2}{s_1'} \quad (36)$$

Ma $O_2D = AH$ e $s_1' = f_2 + e$, e perciò possiamo scrivere

$$\frac{AH}{O_1B} = \frac{f_2}{f_2 + e} \quad (37)$$

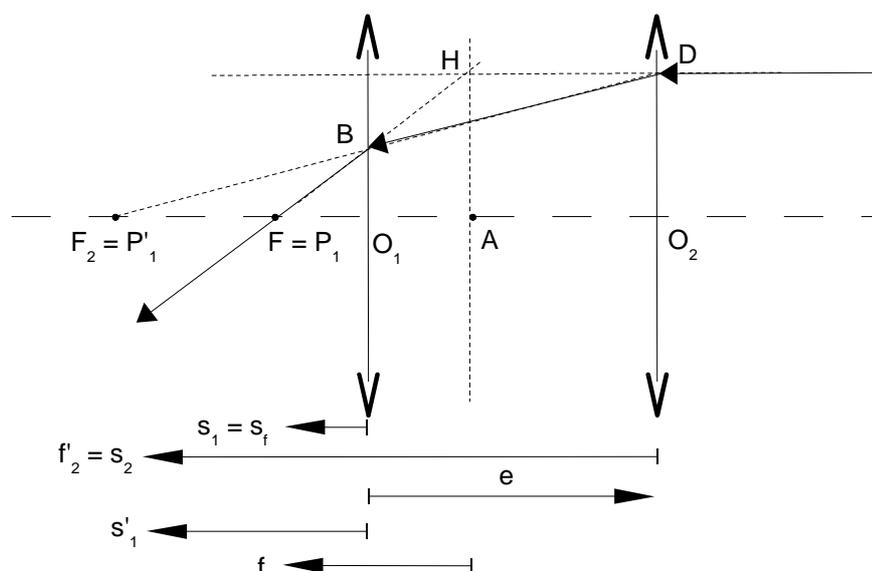


Figura 9. Costruzione grafica per il piano principale oggetto di un sistema di due lenti..

Poiché i primi membri delle relazioni (35) e (37) sono uguali, lo sono anche i secondi membri:

$$\frac{f}{s_f} = \frac{f_2}{f_2 + e} \quad (38)$$

da cui si ricava

$$s_f = f \frac{f_2 + e}{f_2} = f \left(1 + \frac{e}{f_2} \right) \quad (39)$$

Ricordando che $\varphi = -1/f$, si trova infine per la frontale oggetto

$$s_f = \frac{e\varphi_2 - 1}{\varphi} \quad (40)$$

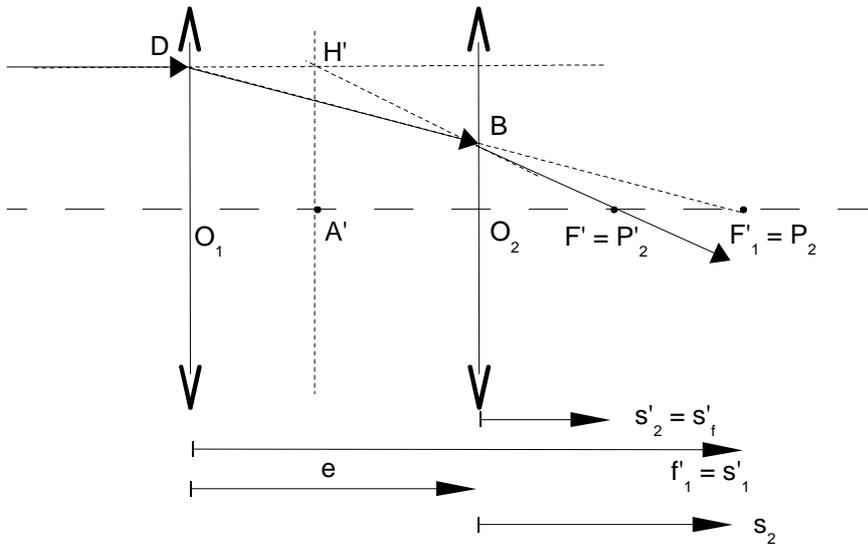


Figura 10. Costruzione grafica per il piano principale immagine di un sistema di due lenti.

Per trovare la frontale immagine si procede in modo analogo. Si possono considerare i triangoli simili O_2BF' e $A'H'F'$ nella figura 10. Per questi due triangoli si ha

$$\frac{A'H'}{O_2B} = \frac{f'}{s'_f} \quad (41)$$

Sono simili anche i triangoli $O_1DF'_1$ e $O_2BF'_1$, per cui si ha

$$\frac{O_1D}{O_2B} = \frac{f'_1}{s_2} \quad (42)$$

Ma $O_1D = A'H'$ e $s_2 = f'_1 - e$, e perciò possiamo scrivere

$$\frac{A'H'}{O_2B} = \frac{f'_1}{f'_1 - e} \quad (43)$$

Poiché i primi membri delle relazioni (41) e (43) sono uguali, lo sono anche i secondi membri:

$$\frac{f'}{s'_f} = \frac{f'_1}{f'_1 - e} \quad (44)$$

da cui si ricava

$$s'_f = f' \frac{f'_1 - e}{f'_1} = f' \left(1 - \frac{e}{f'_1} \right) \quad (45)$$

Ricordando che $\varphi = 1/f'$, si trova infine per la frontale immagine

$$s'_f = \frac{1 - e\varphi_1}{\varphi} \quad (46)$$

L'inverso della frontale immagine, ossia

$$\varphi_{f'} = \frac{1}{s'_f} = \frac{\varphi}{1 - e\varphi_1} \quad (47)$$

espresso in diottrie, si chiama **potere frontale posteriore** e si riferisce al potere di un sistema di lenti relativo all'ultima lente. Analogamente esiste un **potere frontale anteriore** riferito alla prima lente del sistema:

$$\varphi_f = \frac{1}{s_f} = \frac{\varphi}{e\varphi_2 - 1} \quad (48)$$

Dalla figura 11 si possono infine ricavare i valori di d , d' e d_0 :

$$d = s_f - f = f \left(1 + \frac{e}{f_2} \right) - f = e \frac{f}{f_2} = e \frac{\varphi_2}{\varphi} \quad (49)$$

$$d' = s'_f - f' = f' \left(1 - \frac{e}{f'_1} \right) - f' = -e \frac{f'}{f'_1} = -e \frac{\varphi_1}{\varphi} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} d_0 &= e - d + d' = e - e \frac{\varphi_2}{\varphi} - e \frac{\varphi_1}{\varphi} = \\ &= \frac{e\varphi - e\varphi_2 - e\varphi_1}{\varphi} = \frac{e(\varphi_1 + \varphi_2 - e\varphi_1\varphi_2 - \varphi_2 - \varphi_1)}{\varphi} = -\frac{e^2\varphi_1\varphi_2}{\varphi} \end{aligned} \quad (51)$$

Si possono estendere ai sistemi di lenti anche le considerazioni già fatte per i sistemi di diottri; quindi anche la formula per calcolare le ascisse nodali sarà sempre

$$s_N = s'_N = f + f' \quad (52)$$

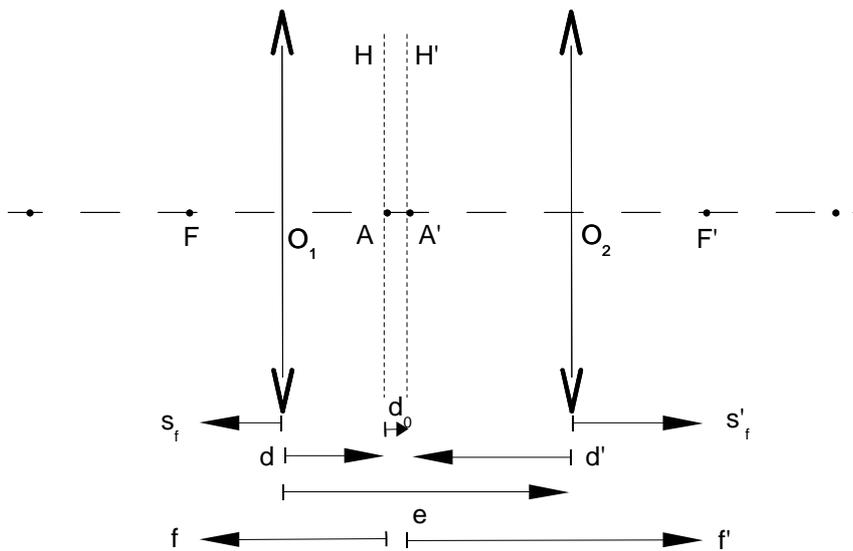


Figura 11. Piani principali e fuochi di un sistema di due lenti.

Le ascisse nodali quindi sono uguali e partono sempre dai piani principali: ovviamente se il sistema è in aria le focali sono uguali e opposte e pertanto le ascisse nodali saranno nulle, cioè i piani nodali e i piani principali risultano sovrapposti.

Si può notare che nella figura 11 il punto principale oggetto si trova davanti, a sinistra del punto principale immagine. In questo caso lo spazio oggetto (che si trova a sinistra del piano principale oggetto) e lo spazio immagine (che si trova a destra del piano principale immagine) sono separati da uno spazio vuoto. Spesso, però, avviene il contrario: i punti principali sono invertiti rispetto alle posizioni dei fuochi, e il punto principale oggetto si trova a destra del punto principale immagine. In questo caso, che è il più frequente per i sistemi composti da due lenti convergenti, lo spazio oggetto e lo spazio immagine si sovrappongono nella regione compresa tra i due piani principali.

Un caso particolare è la lente singola in aria: entrambi i piani principali passano per il centro della lente. Infatti è da questo punto, che si fa coincidere con i vertici delle facce, che si tracciano le ascisse. Per quanto si è appena detto anche i nodi coincideranno con il centro della lente.

I sistemi composti da molte lenti sottili

Le formule che abbiamo ricavato per il sistema di due lenti sono piuttosto semplici, e per questo quando si deve studiare un sistema complesso di lenti si preferisce suddividere il sistema a due a due e trovare separatamente i poteri equivalenti, per poi combinarli insieme.

Occorre tenere presente che ogni volta che si compongono due coppie di lenti considerando i loro poteri equivalenti, la lente equivalente alla prima coppia di lenti (dove si immagina si rifrangano la luce proveniente dall'oggetto) deve essere posta nel piano principale immagine del sistema formato dalle prime due lenti, mentre la lente equivalente alla seconda coppia di lenti (dove si immagina si rifrangano la luce che forma l'immagine) deve essere posta nel piano principale oggetto del sistema formato dalle seconde due lenti.

Esercizi

3. Due lenti sottili positive rispettivamente di focale 80 mm e 60 mm sono coassiali e sono separate di 35 mm. Trovare con una costruzione grafica la focale equivalente del sistema e la posizione dei fuochi e dei punti principali. Segnare in modo chiaro le posizioni di questi punti sul disegno. Controllare i risultati con il calcolo.
4. Trovare la focale equivalente di un sistema di lenti composto da una lente da +4 D e una lente da -4 D separate da 15 cm. Quali sono la posizione e le dimensioni dell'immagine formate da questo sistema di un oggetto posto 1 m davanti alla prima lente?
5. Una lente da +10 D è montata coassiale e 5 cm davanti a una seconda lente da -8 D. Trovare il potere del sistema e la posizione dei punti principali. Di che sistema ottico si tratta?
6. Che cosa si intende per potere equivalente e per punti principali di un sistema di lenti? Quali sono le dimensioni dell'immagine di un oggetto lontano che sottende un angolo di 8° rispetto a un sistema di lenti composto da due lenti rispettivamente di focale +10 cm e -5 cm distanti 7 cm?
7. Un sistema di lenti consiste di una lente da +4 D e una lente da +3 D separate da 10 cm. Trovare la focale equivalente e la posizione dei punti principali. Un oggetto lungo 3 cm è posto 50 cm davanti alla prima lente. Quali sono la posizione e le dimensioni dell'immagine prodotta dal sistema di lenti?
8. Trovare il potere equivalente e la posizione dei punti principali di un sistema composto da lenti da +6 D e -8 D separate da 8 cm. Usare i valori ottenuti per trovare la posizione e le dimensioni dell'immagine di un oggetto lungo 3 cm posto a 50 cm dalla prima lente.
9. Le posizioni di oggetto e immagine quando l'ingrandimento è -1 sono dette "punti simmetrici". Mostrare che le loro distanze dai punti principali sono rispettivamente $2f$ e $2f'$.
10. Un oculare di Huygens è formato da due lenti sottili che hanno focali rispettivamente di 2,5 e 1 cm, separate da 1,75 cm. Trovare la focale equivalente e la posizione dei punti principali. Mostrare in un disegno, realizzato in scala, le posizioni di questi punti e la focale.

11. Trovare le posizioni dei fuochi e dei punti principali di un oculare di Ramsden formato da due lenti di focale 2 cm separate da 1,33 cm.
12. Calcolare la focale equivalente di un sistema di lenti formato da tre lenti sottili positive rispettivamente di focale 4, 5 e 6 cm, distanti l'una dall'altra 1 cm.

3. Le lenti spesse

Le approssimazioni fatte fino ad ora nel trattare le lenti, e cioè di considerarne lo spessore trascurabile rispetto alle distanze oggetto e immagine, non sono in realtà accettabili per le lenti reali: soprattutto le lenti positive hanno infatti uno spessore al centro non trascurabile. Questo significa che il potere totale di una lente spessa **non** è uguale alla somma dei poteri dei suoi diottri, ossia che

$$\varphi \neq \varphi_1 + \varphi_2 \quad \text{per le lenti spesse} \quad (63)$$

Tutte le lenti devono essere considerate spesse se si vogliono tracciare i raggi di luce e determinare le posizioni delle immagini in modo sufficientemente accurato. Tutte le formule relative alla "lenti sottili" che abbiamo utilizzato finora sono approssimazioni; vedremo ora come devono essere modificate queste formule per ottenere risultati accurati.

I punti cardinali di una lente spessa

In generale una lente spessa è un sistema centrato di due diottri. Valgono quindi tutte le definizioni che abbiamo già visto per il caso generale dei sistemi di diottri e dei sistemi di lenti sottili. Il punto F' dell'asse ottico della lente su cui incide un raggio che proviene da un oggetto distante si chiama **fuoco immagine** esattamente come nel caso della lente sottile. Prolungando i raggi come è mostrato nella figura 12, si vede che le rifrazioni prodotte dai due diottri sono equivalenti a una rifrazione singola in H' . Si può allora immaginare che in H' vi sia una **lente sottile equivalente** che può essere utilizzata idealmente per poter applicare alla lente spessa le equazioni già ricavate per il caso delle lenti sottili. Nella figura è indicata la **focale equivalente** f' della lente equivalente, a cui corrisponde un **potere equivalente** φ definito da

$$\varphi = \frac{1}{f'} \quad (64)$$

Il piano $H'A'$ perpendicolare all'asse ottico è detto **piano principale immagine** e il punto A' in cui interseca l'asse ottico è il **punto principale immagine**.

La distanza che vi è tra il secondo vertice V_2 della lente spessa e il fuoco immagine F' è la **frontale immagine** s'_f . In questo caso la frontale immagine della lente è minore della focale equivalente, ma non è detto che sia sempre così. Si definisce anche il **potere frontale posteriore** φ'_f dato da

$$\varphi'_f = \frac{1}{s'_f} \quad (65)$$

Per definire la frontale anteriore poniamo l'oggetto nel **fuoco oggetto** F in modo che la luce emerga dalla lente parallelamente all'asse ottico, dando un'immagine distante. La figura 13 mostra la stessa lente della figura 12 ma con l'oggetto nel fuoco oggetto. La luce subisce ancora due rifrazioni sulle superfici della lente. Prolungando i raggi come già fatto nel caso precedente si ottiene ora una rifrazione equivalente singola in una nuova posizione indicata nella figura con H .

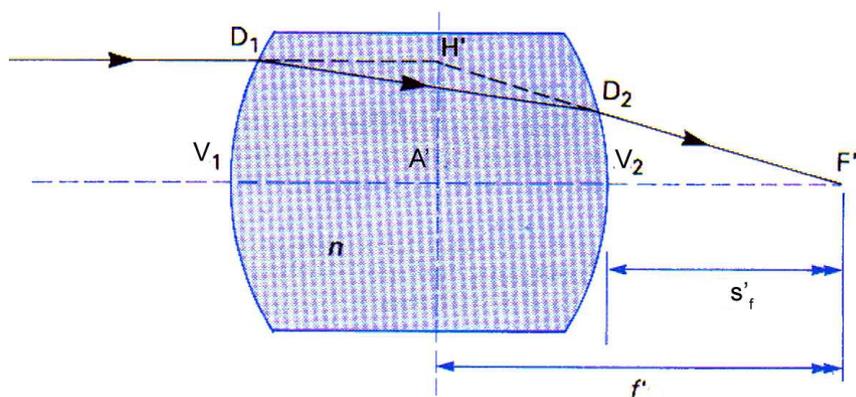


Figura 12. Fuoco immagine e punto principale immagine di una lente spessa.

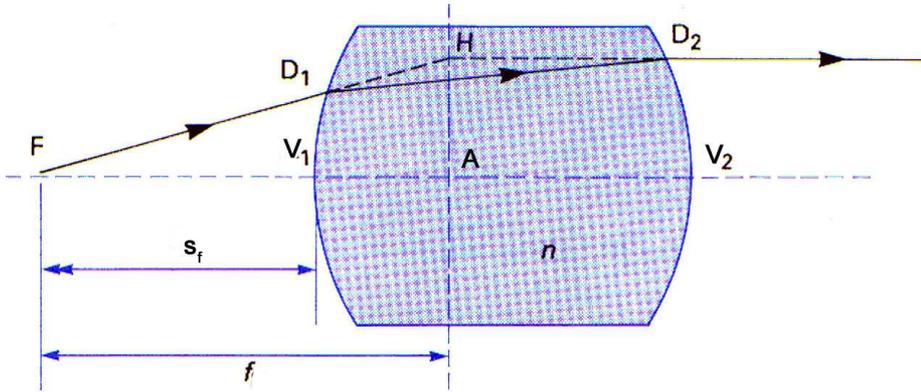


Figura 13. Fuoco oggetto e punto principale oggetto di una lente spessa.

La nuova posizione HA della lente sottile equivalente è detta **piano principale oggetto** e A è il **punto principale oggetto**. Si trova che la focale equivalente è la stessa trovata prima (ma di segno opposto) e quindi il potere focale equivalente è lo stesso. La distanza V_1F è la **frontale oggetto** s_f , ed è normalmente diversa dalla frontale immagine. Come prima definiamo un **potere frontale anteriore** ϕ_f , in modo che

$$\phi_f = -\frac{1}{s_f} \tag{66}$$

Il potere di una lente spessa

Per calcolare il potere e poi le frontali di una lente spessa di spessore e si immagina di scomporre la lente in due lenti sottili A_1 e A_2 , ciascuna con una faccia piana, tra le quali si trova una lamina piana di spessore e uguale allo spessore della lente e di uguale indice di rifrazione n . Nella figura 14 è mostrato il percorso di un raggio attraverso il sistema composto dalle due lenti sottili, **senza** la lamina piana tra di esse. Come mostra invece la figura 15, la presenza della lamina piana produce una traslazione a del raggio luminoso che, poiché siamo nell'ottica di Gauss, si può calcolare con la formula

$$a = \frac{n-1}{n} e \tag{67}$$

L'effetto della presenza della lamina è quindi lo stesso che si avrebbe con due lenti sottili, separate da aria, poste non a una distanza e ma a una distanza e' data da

$$e' = e - a = e - \frac{n-1}{n} e = e - \frac{n}{n} e + \frac{e}{n} = \frac{e}{n} \tag{68}$$

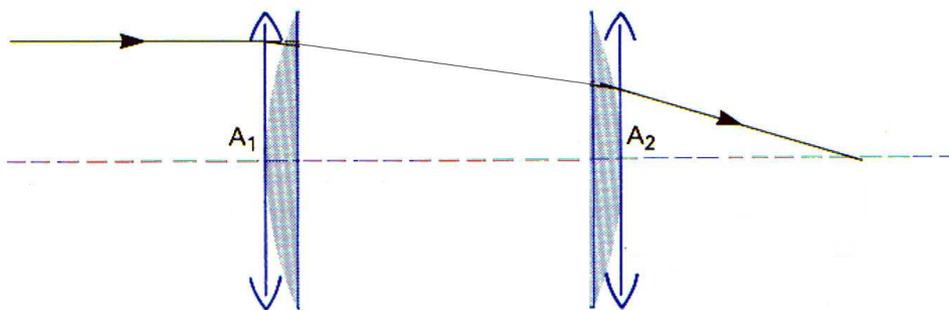


Figura 14. Il percorso di un raggio di luce tra le due lenti sottili A_1 e A_2 , senza la lamina.

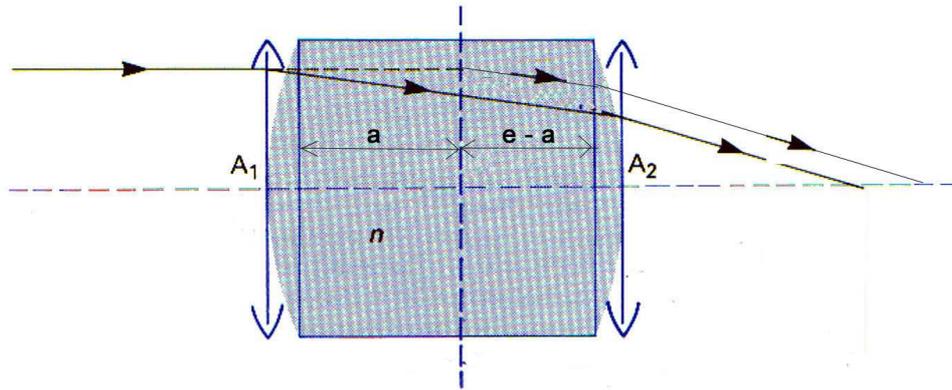


Figura 15. Il percorso di un raggio di luce tra le due lenti sottili A_1 e A_2 , con la lamina.

Il potere della lente andrà quindi calcolato con la formula di Gullstrand, dove φ_1 e φ_2 rappresentano i poteri delle due lenti sottili (ossia dei due diottri della lente spessa), mentre la distanza e va sostituita con lo spessore ridotto e' della lente spessa:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 - \frac{e}{n} \varphi_1 \varphi_2 \quad (69)$$

Nel caso più generale, ipotizzando che i mezzi a contatto con la lente siano diversi tra loro, indicando con n_2 l'indice di rifrazione della lente e con n_1 e n_3 rispettivamente gli indici dei due mezzi, si può ancora usare la formula di Gullstrand per il calcolo del potere della lente, tenendo conto però che ora φ_1 e φ_2 sono i poteri di due lenti sottili che si trovano la prima tra il mezzo di indice di rifrazione n_1 e l'aria e la seconda tra l'aria e il mezzo di indice di rifrazione n_3 , e la distanza tra di esse è data ancora dalla formula (68).

Per il calcolo delle frontali si possono usare le formule (39) e (45), ricavate dalle figure 10 e 11, sostituendo e' a e . Le riscriviamo qui:

$$s_f = f \left(1 + \frac{e'}{f_2} \right) \quad (70)$$

$$s'_f = f' \left(1 - \frac{e'}{f'_1} \right) \quad (71)$$

Ricordiamo che nel caso che stiamo considerando le relazioni tra poteri e focali sono:

$$f_1 = -\frac{n_1}{\varphi_1}; \quad f'_1 = \frac{1}{\varphi_1}; \quad f_2 = -\frac{1}{\varphi_2}; \quad f'_2 = \frac{n_3}{\varphi_2}; \quad f = -\frac{n_1}{\varphi}; \quad f' = \frac{n_3}{\varphi} \quad (72)$$

Tenendo conto delle formule (72), si possono riscrivere le formule per le frontali in funzione dei poteri anziché delle focali e si ottiene

$$s_f = \frac{n_1}{\varphi} (e' \varphi_2 - 1) = \frac{n_1}{\varphi} \left(\frac{e}{n_2} \varphi_2 - 1 \right) \quad (73)$$

$$s'_f = \frac{n_3}{\varphi} (1 - e' \varphi_1) = \frac{n_3}{\varphi} \left(1 - \frac{e}{n_2} \varphi_1 \right) \quad (74)$$

Analogamente le formule per ottenere le posizioni dei piani principali saranno, per il piano principale immagine,

$$d' = s'_f - f' = f' \left(1 - \frac{e'}{f'_1} \right) - f' = f' - f' \frac{e'}{f'_1} - f' \quad (75)$$

e quindi

$$d' = -f' \frac{e'}{f_1'} = -f' \frac{e}{n_2 f_1'} \quad (76) \quad \text{o anche} \quad d' = -\frac{n_3 e' \varphi_1}{\varphi} = -\frac{n_3 e \varphi_1}{n_2 \varphi} \quad (77)$$

e per il piano principale oggetto

$$d = s_f - f = f \left(1 + \frac{e'}{f_2} \right) - f = f + f \frac{e'}{f_2} - f \quad (78)$$

e quindi

$$d = f \frac{e'}{f_2} = f \frac{e}{n_2 f_2} \quad (79) \quad \text{o anche} \quad d = \frac{n_1 e' \varphi_2}{\varphi} = \frac{n_1 e \varphi_2}{n_2 \varphi} \quad (80)$$

Il centro ottico di una lente spessa

Il **centro ottico** di una lente è il punto sull'asse ottico principale tale che i raggi che attraversano la lente passando per esso risultano all'emergenza paralleli alla direzione dei raggi incidenti. In altri termini, i raggi che passano per il centro ottico non vengono deviati. Il centro ottico quindi sostituisce il centro geometrico delle lenti sottili ma, come si vedrà, risulterà sempre più spostato verso la faccia più incurvata.

Nella figura 16 il raggio di curvatura della prima faccia è AC_1 . Esso risulta perpendicolare al piano π_1 tangente al primo diottro nel punto di incidenza A del raggio luminoso. Si conduce un secondo piano π_2 tangente alla seconda faccia a parallelo a π_1 ; il raggio di curvatura BC_2 della seconda faccia risulterà parallelo a AC_1 . Allora il raggio emergente dal secondo diottro risulterà parallelo al raggio incidente, perché in pratica (ammesso che i mezzi che si trovano davanti e dietro alla lente siano uguali) il raggio ha attraversato una lamina a facce piane e parallele. Il percorso del raggio luminoso all'interno della lente si trova unendo il punto di incidenza A e il punto di emergenza B . Il punto O in cui il raggio luminoso interseca l'asse ottico è il centro ottico della lente.

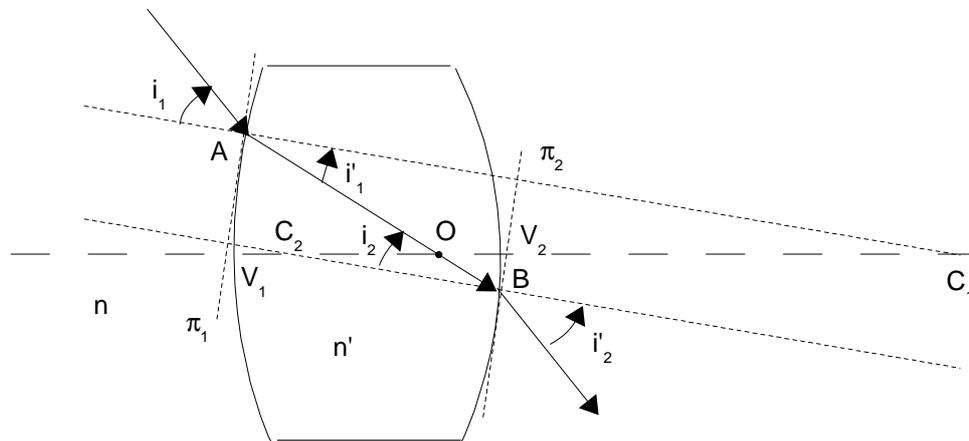


Figura 16. Centro ottico di una lente biconvessa.

Consideriamo i due triangoli OAC_1 e OBC_2 . L'angolo OAC_1 è uguale all'angolo OBC_2 e l'angolo AC_1O è uguale all'angolo BC_2O perché sono alterni interni. L'angolo AOC_1 e l'angolo BOC_2 sono uguali perché sono opposti al vertice. I due triangoli hanno quindi i tre angoli uguali e sono simili. Poniamo

$$V_1C_1 = AC_1 = r_1; \quad V_2C_2 = BC_2 = r_2$$

$$\text{e} \quad V_1O = V_1C_1 - OC_1 \quad V_2O = V_2C_2 - OC_2$$

Si ha perciò

$$\frac{OC_1}{OC_2} = \frac{AC_1}{BC_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad (81)$$

da cui si ottiene

$$\frac{OC_1}{V_1C_1} = \frac{OC_2}{V_2C_2} \quad (82)$$

Cambiando di segno e sommando 1 a entrambi i membri si ha

$$1 - \frac{OC_1}{V_1C_1} = 1 - \frac{OC_2}{V_2C_2} \quad (83)$$

ossia

$$\frac{V_1C_1 - OC_1}{V_1C_1} = \frac{V_2C_2 - OC_2}{V_2C_2} \quad (84)$$

e quindi

$$\frac{V_1O}{r_1} = \frac{V_2O}{r_2} \quad \text{o} \quad \frac{V_1O}{V_2O} = \frac{r_1}{r_2} \quad (85)$$

Perciò il centro ottico della lente divide il suo spessore V_1V_2 in due segmenti che stanno tra loro come il rapporto tra i due raggi di curvatura.

Per ottenere le distanze del centro ottico dai vertici V_1 o V_2 si può procedere in questo modo: tenendo conto dei segni dei segmenti sull'asse ottico e indicando con e lo spessore della lente, si pone

$$V_1O = V_1V_2 - OV_2 = e + V_2O \quad (86)$$

Dividendo per V_2O e tenendo conto della relazione (85) si ha

$$\frac{e + V_2O}{V_2O} = \frac{r_1}{r_2} \quad (87)$$

e quindi

$$er_2 + V_2Or_2 = r_1V_2O \quad (88)$$

da cui si ricava

$$V_2O = \frac{er_2}{r_1 - r_2} \quad (89)$$

Si ha poi

$$V_1O = e + V_2O = e + \frac{er_2}{r_1 - r_2} \quad (90)$$

e quindi

$$V_1O = \frac{er_1}{r_1 - r_2} \quad (91)$$

Si può quindi concludere, dalle formule (89) e (91), che il centro ottico si trova internamente alla lente, più vicino alla faccia maggiormente incurvata; questo vale sia per le lenti biconvesse sia per quelle biconcave. Per le lenti a menisco, sia convergenti che divergenti, il centro ottico si trova all'esterno della lente e dalla parte della superficie di maggior curvatura. Se infine la lente è piano-convessa o piano-concava, il centro ottico si trova sul vertice della superficie sferica.

Esempio. La lente a contatto come lente spessa

Le lenti a contatto hanno normalmente uno spessore inferiore a 0,2 mm e può sembrare

strano che sia necessario considerarle lenti spesse.

La superficie posteriore concava di una lente a contatto ha un valore tipico di raggio di curvatura di 7,8 mm. Assumiamo un indice di rifrazione 1,5 che è all'incirca quello delle lenti rigide. Quindi quando la lente è in aria il potere della sua superficie posteriore negativa è -64 D! Se la superficie anteriore avesse esattamente lo stesso raggio di curvatura il suo potere sarebbe $+64$ D. Utilizzando le formule valide per le lenti sottili troveremmo per la lente un potere uguale a zero, ma se si usa la formula valida per le lenti spesse (equazione 69), con $e = 0,0002$ m, si trova:

$$\varphi = +64 - 64 + \frac{0,0002}{1,5} \times 64 \times 64 = +0,546$$

Quindi il potere equivalente è $+0,55$ D e la focale equivalente è $f' = 1,831$ m.

Lo spessore e della lente influisce in modo notevole. Se e è ridotto a 0,1 mm il potere equivalente diviene $+0,27$ D. È difficile realizzare lenti a contatto con valori esatti del potere e questo è uno dei motivi.

I piani principali della lente spessa 0,2 mm sono spostati 15 mm dalla lente come si ricava utilizzando le equazioni (77) e (80):

$$d = \frac{n_1 e \varphi_1}{n_2 \varphi} = \frac{1 \times 0,0002 \times 64}{1,5 \times 0,546} = 0,01563 \text{ m} = 15,63 \text{ mm}$$

$$d' = -\frac{n_3 e \varphi_1}{n_2 \varphi} = -\frac{1 \times 0,0002 \times 64}{1,5 \times 0,546} = -0,01563 \text{ m} = -15,63 \text{ mm}$$

La figura 17 mostra la situazione. Anche se uno spostamento di 15 mm sembra notevole, è molto piccolo rispetto alla focale.

Questi valori sono per la lente a contatto posta in aria. Quando la lente è posta sull'occhio si hanno condizioni differenti. Le lenti a contatto sono comunque di solito misurate in aria con un **frontifocometro** (si veda più avanti) che dà valori basati sui poteri frontali.

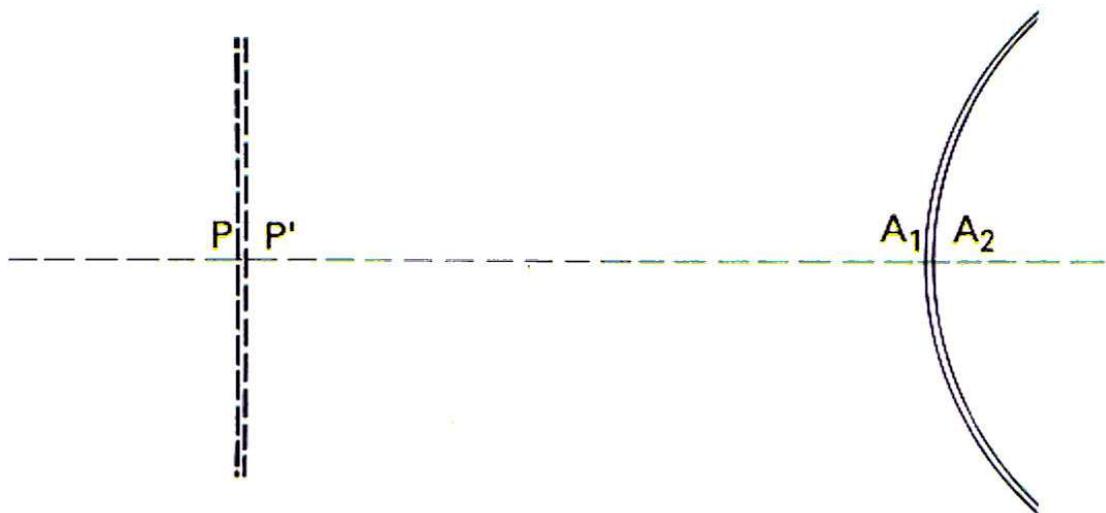


Figura 17. Posizione dei piani principali per una lente a contatto di basso potere (0,5 D).

Esempio. Una lente per occhiali

Consideriamo una lente per occhiali realizzata con vetro con alto indice di rifrazione, $n = 1,7$, deve abbia un potere frontale posteriore di $+10,0$ D. Per uno spessore centrale di 10 mm trovare il potere della superficie posteriore e la posizione dei piani principali se la prima superficie ha un potere (a) $+10,0$ D, (b) $+12,0$ D, (c) $+14,0$ D.

Per il calcolo del potere frontale posteriore si può usare l'equazione (47), ponendo in essa lo spessore ridotto $e' = e/n$:

$$\varphi_r = \frac{\varphi}{1 - e'\varphi_1} = \frac{\varphi}{1 - (e/n)\varphi_1} \quad (92)$$

Sostituendo l'espressione per φ data dall'equazione (69) si ha

$$\varphi_r = \frac{\varphi}{1 - (e/n)\varphi_1} = \frac{\varphi_1 + \varphi_2 - (e/n)\varphi_1\varphi_2}{1 - (e/n)\varphi_1} \quad (93)$$

che semplificata dà

$$\varphi_r = \frac{\varphi_1}{1 - (e/n)\varphi_1} + \varphi_2 \quad (94)$$

ossia

$$\varphi_2 = \varphi_r - \frac{\varphi_1}{1 - (e/n)\varphi_1} \quad (95)$$

Si ottiene quindi

$$\varphi_2 = -0,63 \text{ D} \quad -2,91 \text{ D} \quad -5,26 \text{ D}$$

per

$$\varphi_1 = +10,0 \text{ D} \quad +12,0 \text{ D} \quad +14,0 \text{ D}$$

In ciascuno di questi casi pertanto il potere focale equivalente è (per l'equazione 69)

$$\varphi = +9,41 \text{ D} \quad +9,30 \text{ D} \quad +9,17 \text{ D}$$

$$f' = +106,3 \text{ mm} \quad 107,6 \text{ mm} \quad 109,1 \text{ mm}$$

Poiché il fuoco immagine F' si trova a 100 mm dal vertice posteriore V_2 della lente (infatti si ha $\varphi_r = +10,0 \text{ D}$), la posizione del piano principale immagine è nota. La frontale anteriore f_v può essere calcolata in ciascuno dei casi considerati dalla formula

$$\varphi_f = \frac{\varphi}{1 - (e/n)\varphi_2} \quad (96)$$

Si ha

$$\varphi_f = 9,38 \text{ D} \quad 9,14 \text{ D} \quad 8,89 \text{ D}$$

$$s_f = 106,7 \text{ mm} \quad 109,4 \text{ mm} \quad 112,4 \text{ mm}$$

Questi valori sono stati utilizzati per realizzare la figura 18, che mostra come i piani principali si spostano man mano che il menisco della lente diviene più curvo. Nel caso di una lente spessa equiconvessa essi sono posti al centro della lente.

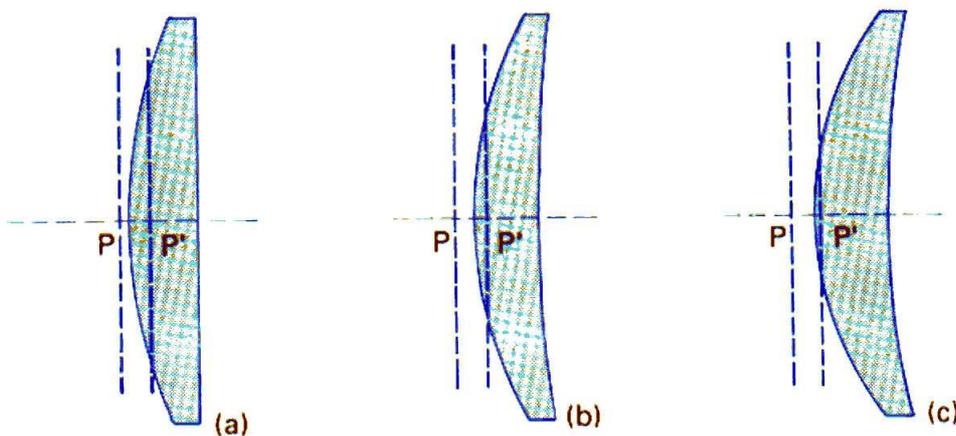


Figura 18. Frontale posteriore costante, i piani principali si spostano cambiando la forma della lente.

Esercizi

1. Una lente a menisco positiva con spessore al centro di 7,60 mm è fatta con vetro con indice di rifrazione 1,520, con un potere della superficie posteriore di -6 D. Quale potere deve avere la superficie anteriore perché il potere frontale posteriore della lente sia +9,7 D?
2. Trovare il potere equivalente, il potere frontale posteriore e la posizione del fuoco immagine di una lente a menisco (in aria) con i seguenti parametri:

raggio della superficie anteriore	+50 mm
raggio della superficie posteriore	+250 mm
spessore al centro	15 mm
indice di rifrazione	1,6
3. Una lente biconvessa di vetro ($n = 1,52$) ha curvature rispettivamente di 12,5 e 20 cm e uno spessore al centro di 3,75 cm. Trovare le dimensioni e la posizione dell'immagine di un oggetto lungo 5 cm posto 37,5 cm davanti alla superficie anteriore della lente.
4. Una barretta di vetro ($n = 1,5$) lunga 3 cm ha le estremità convesse entrambe con un raggio di curvatura di 0,5 cm. Quali sono le proprietà ottiche di una lente spessa fatta in questo modo?
5. Il bulbo di una lampadina è sferico con un diametro di 7,5 cm ed è immerso in acqua. Qual è la focale equivalente del sistema ottico prodotto in questo modo?
6. Una lente a contatto ha la superficie anteriore di raggio 8 mm e la superficie posteriore di raggio 7,5 mm. Se è fatta con materiale con indice di rifrazione 1,435, calcolare il potere frontale posteriore di una lente (a) di spessore al centro 0,05 mm, e (b) di spessore al centro 0,08 mm.
7. Una lente equiconvessa che ha raggi di curvatura di 10 cm, uno spessore al centro di 2 cm e un indice di rifrazione 1,61 chiude un'estremità di un lungo tubo pieno d'acqua. Un oggetto lungo 5 cm è posto 60 cm davanti alla lente: trovare la posizione e le dimensioni dell'immagine.
8. Una lente equiconvessa da +10 D di vetro con indice di rifrazione $n = 1,62$ è montata al centro di un recipiente lungo 20 cm che ha estremità di vetro sottile piane; il recipiente è riempito d'acqua ($n = 1,33$). Trovare il potere del sistema e la posizione del fuoco quando luce parallela incide su una delle estremità del recipiente.
9. Quali sono le proprietà dei punti principali e dei punti nodali di una lente? Una lente biconvessa di vetro con indice di rifrazione 1,53 che ha curvature rispettivamente di 5 e 8 D e spessore al centro di 4 cm ha la superficie posteriore immersa in acqua ($n = 1,33$). Trovare le focali e le posizioni dei punti principali e dei punti nodali.

4. I diaframmi

I fasci luminosi che attraversano un qualsiasi sistema ottico subiscono delle limitazioni al loro passaggio, sia da parte dei vari componenti del sistema (essenzialmente lenti), a causa delle loro dimensioni finite, sia da parte dei **diaframmi**, ossia appositi schermi nei quali sono state praticate delle opportune aperture.

Vi sono due tipi di diaframmi quanto alla loro funzione:

- i **diaframmi di apertura**: servono a limitare e regolare la quantità di energia luminosa che andrà a formare l'immagine (per esempio l'iride contrattile dell'occhio umano evita che una luce troppo intensa arrivi sulla retina, col pericolo di provocare danni anche gravi, oppure il diaframma di una macchina fotografica che viene regolato affinché sul sensore arrivi la quantità di luce necessaria per rilevare l'immagine);
- i **diaframmi di campo**: servono a delimitare la porzione di oggetto visibile attraverso un sistema ottico e, contemporaneamente, eliminano i raggi nella porzione esterna dell'immagine, apportando un guadagno in nitidezza e definizione della stessa e una sua illuminazione uniforme; infine aiutano a eliminare le cosiddette immagini fantasma, cioè immagini formate da raggi che hanno subito parziali riflessioni sulle superfici delle lenti e su quelle del tubo, prima di arrivare sul piano immagine.

I diaframmi di apertura

Osserviamo la figura 19. Vi è rappresentato un sistema di tre lenti. Nella figura 19.a l'apertura che limita il passaggio della luce, ossia il diaframma di apertura (DA) è la prima lente, mentre nella figura 19.b, nella quale l'ultima lente del sistema ha un diametro minore, il diaframma di apertura è l'ultima lente del sistema.

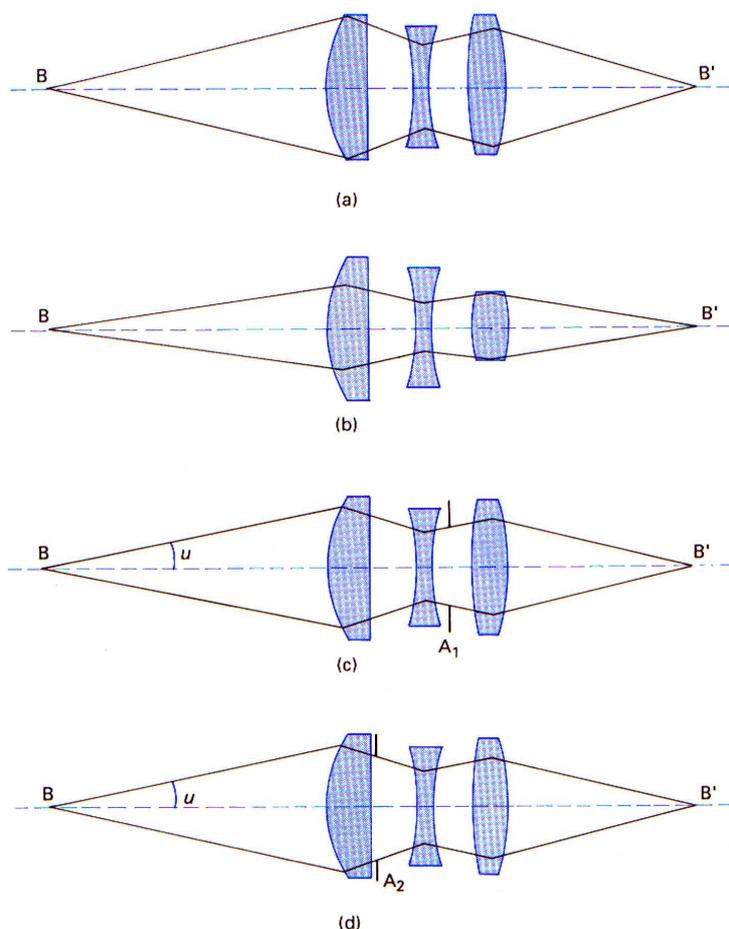


Figura 19. Diaframmi di apertura.

Il diaframma di apertura può essere costituito anche da un foro circolare praticato in una lastra metallica (che può anche avere un diametro regolabile, come nei diaframmi a iride delle macchine fotografiche). Nella figura 19.c il diaframma di apertura si trova vicino alla lente negativa centrale, appena dietro di essa, in una posizione scelta in modo opportuno dal progettista (questo schema ottico era usato negli obiettivi fotografici nei primi anni del ventesimo secolo, ed è ora usato principalmente per gli obiettivi dei proiettori di diapositive).

La figura 19.d è lo stesso sistema ottico con il diaframma in una posizione differente. Il diametro del diaframma A_2 è differente da quello del diaframma A_1 , ma la quantità di luce che dall'oggetto B raggiunge l'immagine B' è la stessa (perché il cono di raggi provenienti dall'oggetto ha la stessa ampiezza). Quindi non è, di per sé, il diametro del diaframma a determinare la quantità di luce che passa attraverso il sistema.

Per caratterizzare l'elemento che regola il passaggio dei raggi, occorre allora introdurre un nuovo concetto, la **pupilla di entrata**, che è **l'immagine (reale o virtuale) del diaframma di apertura visto dall'oggetto, tenendo conto delle lenti poste davanti al diaframma**:

- nel caso della figura 19.a la pupilla di entrata coincide con il diaframma di apertura, ossia con la prima lente del sistema: se si osserva il sistema di lenti stando dalla parte dell'oggetto (a sinistra) l'immagine del diaframma di apertura (ossia della prima lente) è la prima lente stessa;
- lo stesso avviene nella figura 20, nella quale è rappresentata una lente convergente con il diaframma di apertura posto davanti ad essa: se si osserva il sistema di lenti stando dalla parte dell'oggetto (a sinistra) l'immagine del diaframma di apertura (ossia del diaframma) è il diaframma stesso;

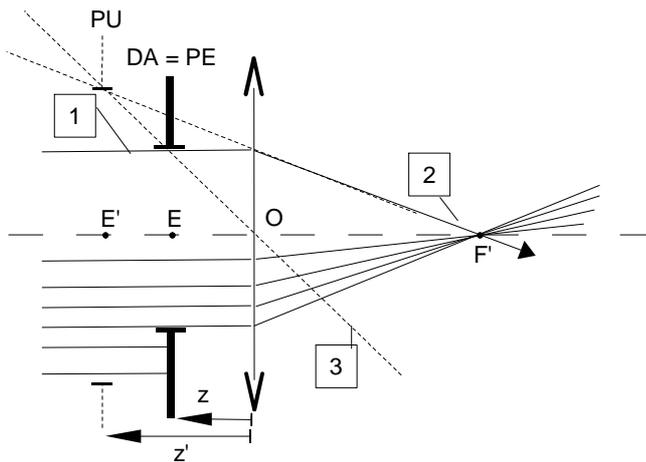


Figura 20. Diaframma di apertura davanti alla lente convergente, pupilla di entrata e pupilla di uscita.

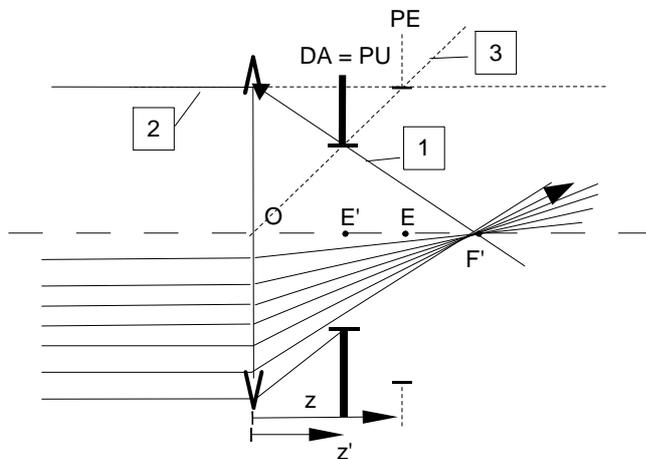


Figura 21. Diaframma di apertura dietro alla lente convergente, pupilla di entrata e pupilla di uscita.

- nel caso della figura 21, invece, la pupilla di entrata PE è l'immagine del diaframma di apertura DA visto attraverso la lente.

Tale oggetto di trova così:

- tracciato il raggio 1 passante per il fuoco immagine e radente il bordo del diaframma, il suo punto di incidenza sulla lente indica l'altezza di incidenza massima dei raggi paralleli (cioè la semilarghezza del fascio incidente);
- per quel punto si fa passare il raggio 2 parallelo all'asse ottico;
- infine il raggio 3 passante per il centro della lente e radente il bordo del diaframma consente di determinare la posizione e la semidimensione della pupilla di entrata; infatti partendo da quest'ultima, considerata come oggetto, si trova, con la costruzione usuale, l'immagine costituita appunto dal diaframma.

Il procedimento è identico se il raggio incidente non è parallelo all'asse ottico, ma proviene comunque dall'infinito (figura 22). Per un oggetto in posizione finita (figura 23) l'altezza massima di incidenza sulla lente si ottiene tracciando un raggio dal centro dell'oggetto sull'asse fino a sfiorare il bordo della pupilla di entrata. Si può allora definire la pupilla di entrata come **la base del cono** (o del cilindro di raggi paralleli all'asse ottico nelle figura 20 e 21) **di raggi entranti**: in effetti è la pupilla di entrata (PE) a limitare la larghezza del fascio in arrivo, seppure indirettamente, in quanto dipendente dal diaframma DA.

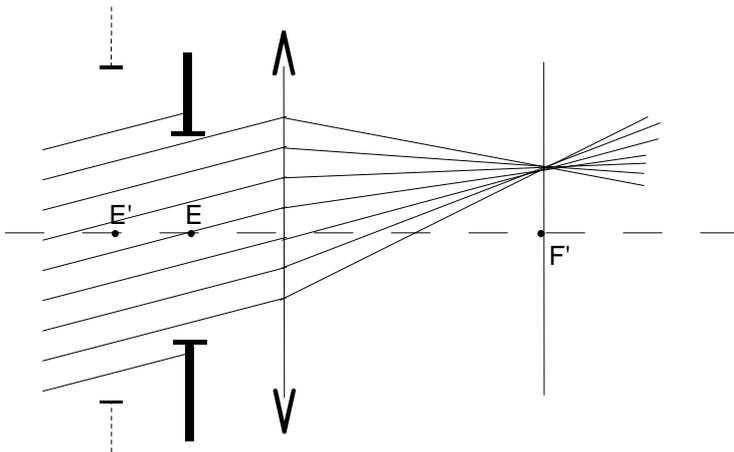


Figura 22. Diaframma di apertura davanti alla lente, raggi incidenti paralleli inclinati rispetto all'asse ottico.

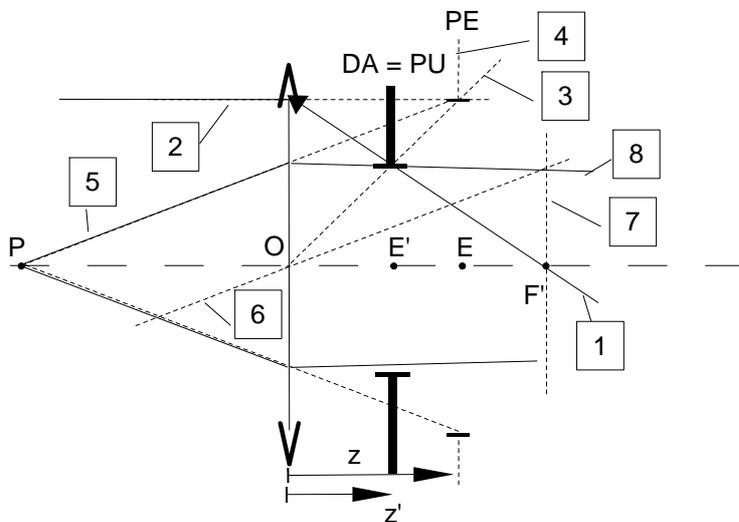


Figura 23. Diaframma di apertura dietro la lente, raggi incidenti provenienti da un punto a distanza finita.

Analogamente un fascio che esce dalla lente ha come base di partenza la base del cono (o del cilindro) di raggi uscenti (figura 20). Se il diaframma è posto oltre la lente, come nella figura 21, è il diaframma stesso a fungere anche da **pupilla di uscita** (PU); nel caso di diaframma posto davanti alla lente, la pupilla di uscita si trova costruendone l'immagine: in questo caso il diaframma costituisce anche la pupilla di entrata e la sua immagine, ossia la posizione e la dimensione che avrebbe guardando nella lente da destra, costituisce la pupilla di uscita.

E' evidente allora che le due pupille di entrata e uscita sono tra loro coniugate rispetto alla lente e quindi vale per esse la ben nota formula dei punti coniugati:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{z'} - \frac{1}{z} \quad (97)$$

(per non creare confusione si sono utilizzati i simboli z e z' per indicare le ascisse relative alle pupille). Alla pupilla di entrata andrà sempre attribuita l'ascissa oggetto z , senza apice, mentre alla pupilla di uscita andrà attribuita l'ascissa immagine z' , con apice.

Allo stesso modo, come si può vedere per esempio dalla figura 21, sarà valido il rapporto relativo alle dimensioni trasversali, cioè l'ingrandimento trasversale che permette di ricavare le dimensioni della pupilla di uscita, note quelle della pupilla di entrata, e viceversa:

$$\phi_{PE} = \left| \phi_{PU} \frac{z}{z'} \right| \quad (98)$$

$$\phi_{PU} = \left| \phi_{PE} \frac{z'}{z} \right| \quad (99)$$

da calcolare sempre in valore assoluto, in quanto un diametro negativo è privo di significato.

Nelle figure 24 e 25 sono indicati esempi che valgono per lenti divergenti: fermo restando il procedimento grafico e analitico e tutte le definizioni date, è chiaro che le pupille ricavate, per esempio con il calcolo, risulteranno di dimensioni minori rispetto agli elementi di partenza.

Si dice che la pupilla di entrata delle figure 21, 23 e 25 è il diaframma trasportato nello spazio oggetto, nel senso che le direzioni di tutti i raggi incidenti che passano attraverso la pupilla di entrata, dopo la rifrazione passano attraverso il diaframma.

La definizione della pupilla di entrata è quindi la seguente: **la pupilla di entrata di un sistema è costituita da quel diaframma, reale o apparente, che sottende l'angolo più piccolo dal centro dell'oggetto sull'asse ottico. Se il punto è all'infinito, è quello che presenta il diametro più piccolo.** (Per diaframma apparente si intende, come per esempio nel caso della figura 21, l'oggetto virtuale di cui il diaframma reale è l'immagine).

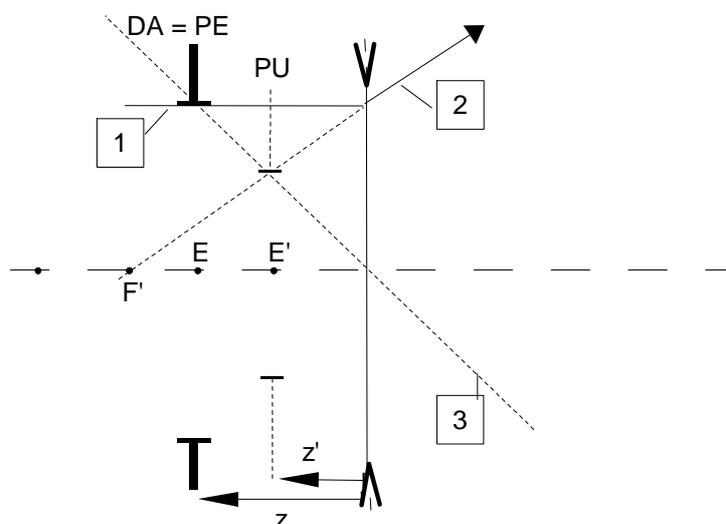


Figura 24. Diaframma di apertura davanti alla lente divergente, pupilla di entrata e pupilla di uscita.

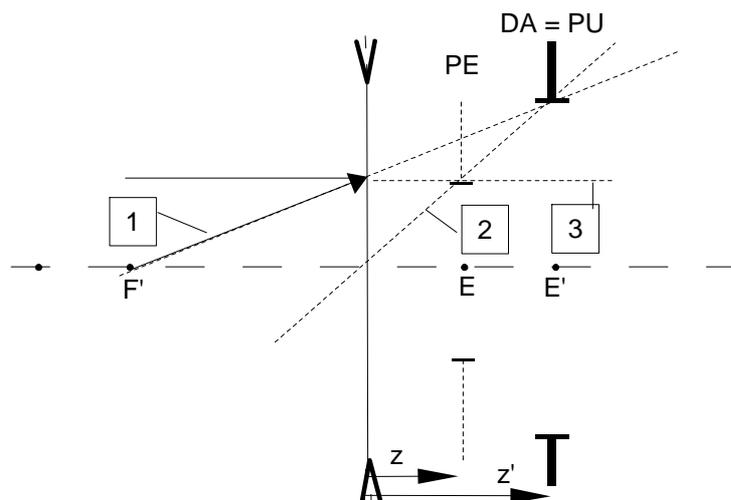


Figura 25. Diaframma di apertura dietro la lente divergente, pupilla di entrata e pupilla di uscita.

Se il sistema è costituito da più elementi (lenti e diaframmi) si può allora procedere come segue: si trasportano tutti gli elementi che si trovano alla destra della prima lente nello spazio oggetto di questa, secondo il procedimento illustrato nella figura 21, e si applica la definizione di pupilla di entrata. Il diaframma di apertura sarà l'elemento concreto coniugato con la pupilla di entrata.

In modo analogo si definisce la **pupilla di uscita**: **la pupilla di uscita di un sistema è costituita da quel diaframma, reale o apparente, che sottende l'angolo più piccolo dal centro dell'immagine sull'asse ottico. Se il punto immagine è all'infinito, è quello che presenta il diametro più piccolo.**

Poiché, come si è visto sopra, la pupilla di entrata e la pupilla di uscita sono figura coniugate rispetto all'intero sistema, in pratica si trova una delle due, in base alla definizione, e se ne trova l'immagine (se si è determinata prima la pupilla di entrata) o l'oggetto (se si è determinata prima la pupilla di uscita) rispetto all'intero sistema.

Vediamo alcuni esempi, per il caso di un sistema di due lenti (che è il caso più frequente):

a) **Diaframma posto tra le lenti**: supponiamo di aver stabilito, applicando il metodo spiegato sopra, che esso costituisce il diaframma di apertura; si possono allora determinare la posizione e le dimensioni della pupilla di entrata calcolando, rispetto alla prima lente, la posizione e le dimensioni dell'oggetto di cui il diaframma è l'immagine; il diaframma costituisce allora la pupilla di uscita PU_1 per la prima lente (si veda la figura 26); come di consueto nei sistemi di lenti, dove l'immagine data dal primo elemento diventa l'oggetto per il secondo, la pupilla di uscita PU_1 della prima lente, cioè il diaframma di apertura DA, diventa la pupilla di entrata PE_2 per la seconda lente; l'immagine di tale pupilla, sempre calcolata con la formula dei punti coniugati, questa volta rispetto alla seconda lente, è la pupilla di uscita PU della seconda lente, ossia di tutto il sistema.

b) **Diaframma posto davanti alla prima lente**: se il diaframma si trova davanti alle due lenti e coincide con la pupilla di entrata del sistema, per trovare la pupilla di uscita occorre prima determinarne l'immagine data dalla prima lente ($PU_1 = PE_2$), poi l'immagine di quest'ultima data dalla seconda lente, ossia la pupilla di uscita PU di tutto sistema (figura 27).

c) **Diaframma posto dietro la seconda lente**: se il diaframma è posto oltre le due lenti e costituisce la pupilla di uscita della seconda lente, ossia di tutto il sistema, allora bisogna trovare prima la pupilla di entrata PE_2 della seconda lente, che è anche la pupilla di uscita PU_1 della prima lente, poi la pupilla di entrata della prima lente, ossia di tutto il sistema (figura 28).

Se il sistema fosse costituito da più lenti, con il diaframma di apertura posto per esempio tra la seconda e la terza lente, vale la regola che la pupilla di entrata del sistema è l'oggetto di cui il diaframma è l'immagine relativamente a tutte le lenti che lo precedono; mentre la pupilla di uscita è l'immagine di esso formata da tutte le lenti che lo seguono.

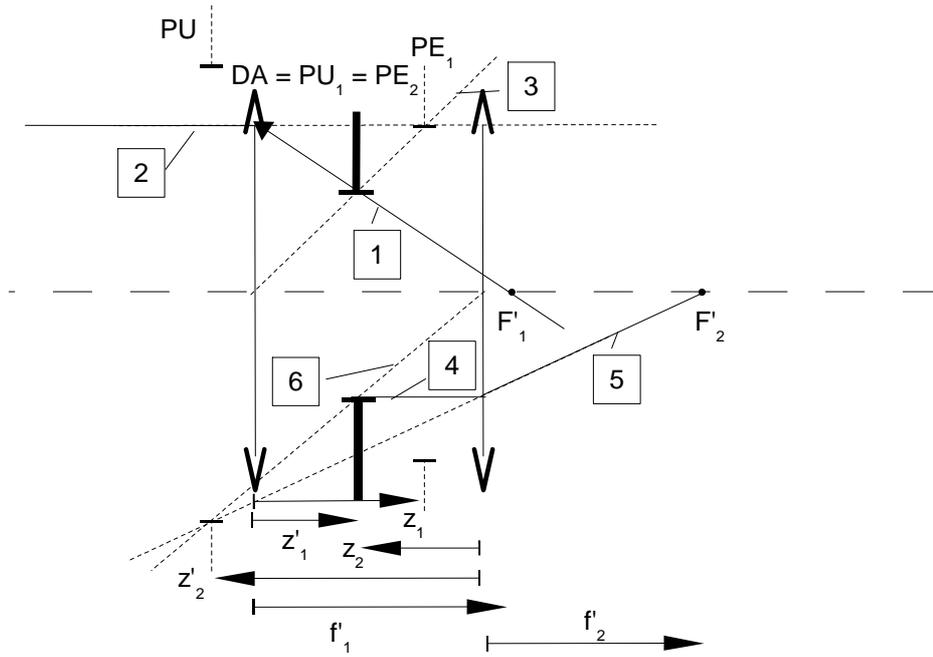


Figura 26. Diaframma di apertura posto tra due lenti convergenti.

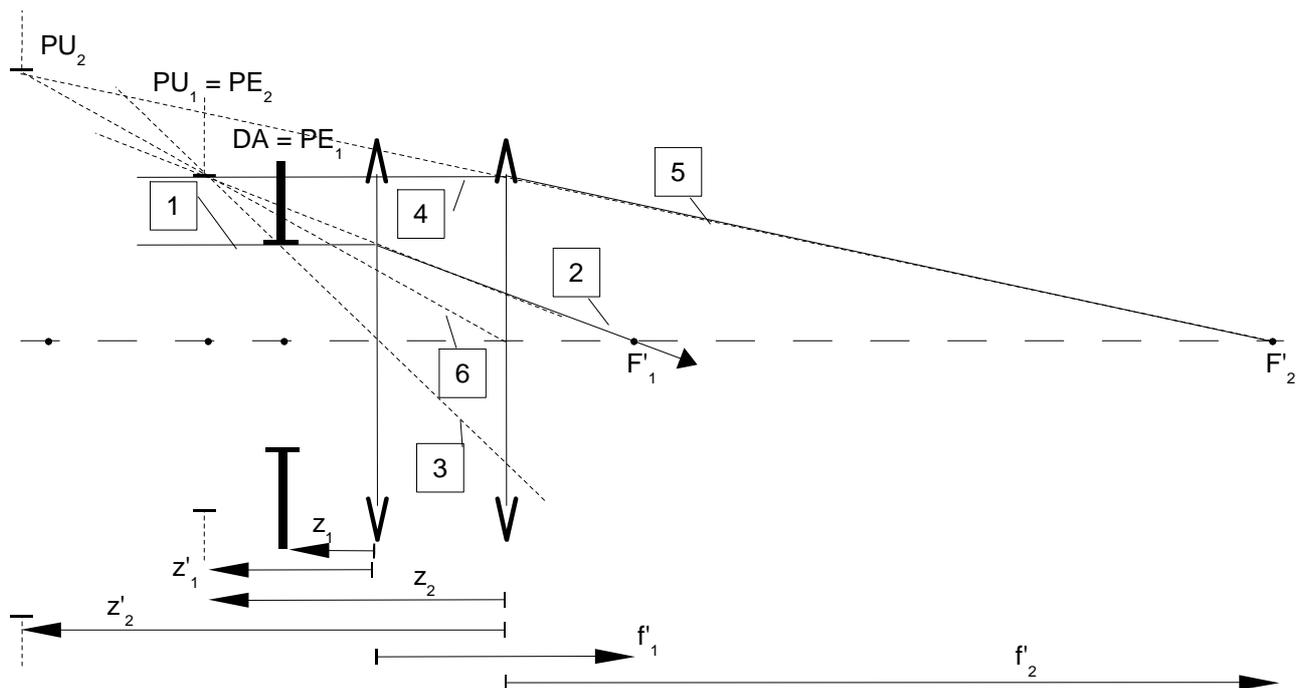


Figura 27. Diaframma di apertura posto davanti a due lenti convergenti.

Se il sistema è privo di diaframmi saranno i bordi stessi delle lenti a limitare i raggi entranti; in questo caso generalmente è la prima lente a fungere da diaframma di apertura e da pupilla di entrata del sistema, a meno che la seconda lente (o le successive), disposte entro la distanza focale della prima, non sia di diametro molto piccolo: in questo caso la seconda lente vista attraverso la prima potrebbe apparire più piccola della prima.

Per la scelta del diaframma di apertura è dunque necessario, come si è già osservato sopra, calcolare, o costruire graficamente, **tutte le possibili pupille di entrata**: quella sottesa nel punto oggetto sull'asse dall'angolo più piccolo è la pupilla di entrata del sistema. Ne consegue che tale pupilla di entrata può cambiare a seconda della posizione dell'oggetto, cosa che può capitare con diaframmi molto aperti, cioè aventi diametri poco più piccoli di quelli della lente.

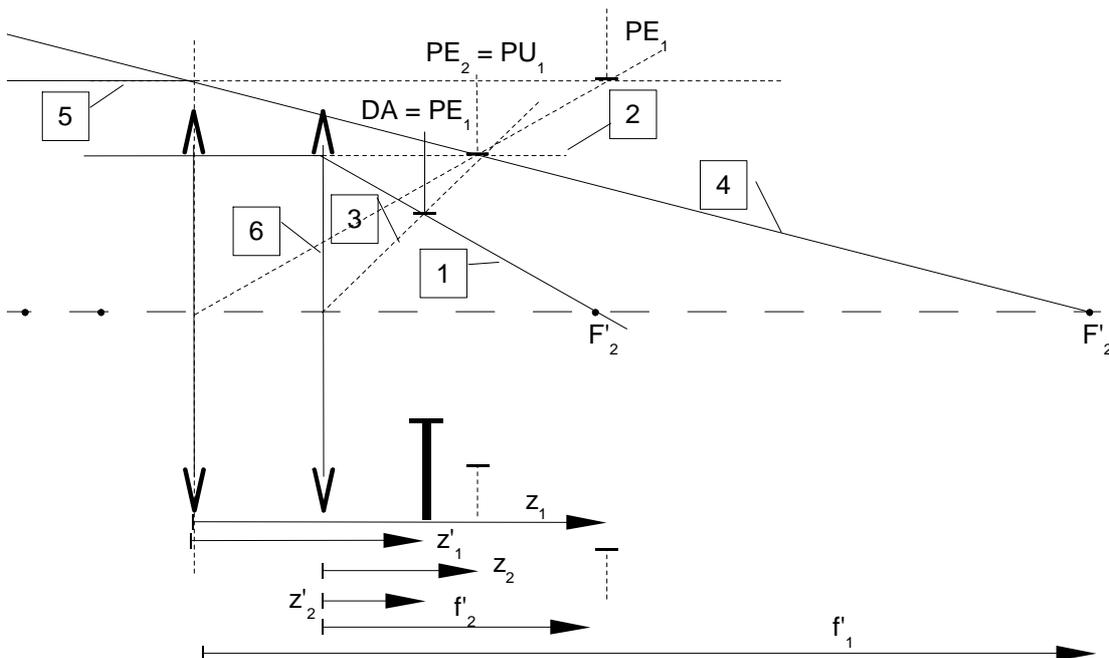


Figura 28. Diaframma di apertura posto dietro a due lenti convergenti.

Un caso simile è illustrato nella figura 29: il sistema è formato da due lenti con diaframma molto aperto posto tra di esse; PE_A risulta essere il diaframma di apertura DA apparente visto da sinistra, attraverso la prima lente; analogamente PE_B è l'immagine della seconda lente, vista attraverso la prima. A seconda della posizione del punto oggetto la pupilla di entrata cambia: per P_1 il bordo della prima lente risulta essere visto sotto l'angolo più piccolo α_1 ; per P_2 l'angolo più piccolo è β_1 , cioè l'angolo sotto cui è vista PE_A , mentre per P_3 è PE_B a essere vista sotto l'angolo più piccolo δ_1 . I punti discriminanti, ossia le posizioni Y e X nella figura, al di là dei quali cambia la pupilla di entrata, si ottengono unendo, in ordine di diametro decrescente, i bordi della lente 1 con PE_A , e poi i bordi di PE_A e di PE_B , prolungando tali rette fino all'asse ottico. Nella parte inferiore della figura vi sono le solite costruzioni mediante le quali si ottengono le posizioni apparenti del diaframma e della seconda lente, visti attraverso la prima lente.

Una volta individuata la pupilla di entrata del sistema, si trova subito la pupilla di uscita: infatti essendo le due pupille coniugate rispetto alla lente, o rispetto al sistema, si ottiene la posizione della pupilla di uscita e successivamente il suo diametro:

- con un solo passaggio se si tratta di una lente singola, ossia

$$z' = \frac{zf'}{z + f'} \quad (100)$$

$$\phi_{PU} = \phi_{PE} \frac{z'}{z} \quad (101)$$

- oppure, per un sistema di due lenti,

$$z'_1 = \frac{z_1 f'_1}{z_1 + f'_1} \quad (102)$$

$$z_2 = z'_1 - e \quad (103)$$

$$z'_2 = \frac{z_2 f'_2}{z_2} \quad (104)$$

$$\phi_{PU} = \phi_{PE} \frac{z'_1 z'_2}{z_1 z_2} \quad (105)$$

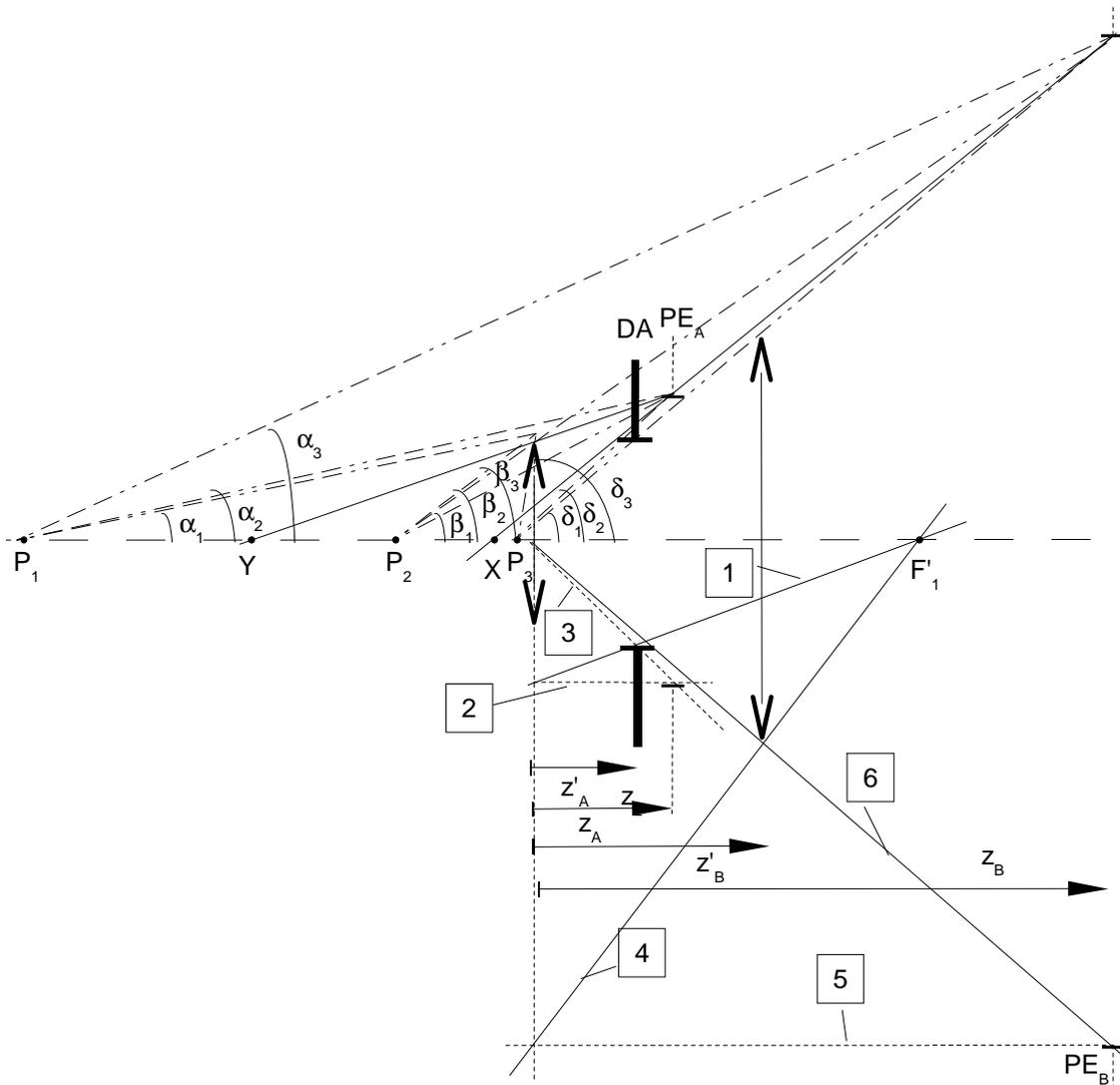


Figura 29. Posizione della pupilla di entrata al variare della posizione del punto oggetto.

Nelle figure 20-25 sono stati indicati con E ed E' i centri delle pupille di entrata e di uscita. Un raggio che parte da un punto dell'oggetto e sia diretto verso il centro della pupilla di entrata passa per il centro del diaframma di apertura e lascia il sistema di lenti come se provenisse dal centro della pupilla di uscita. Tale raggio si chiama **raggio principale** ed è indicato nella figura 30, relativamente al punto Q dell'oggetto, con p . Questo raggio definisce il centro del fascio di raggi che passano attraverso il sistema. Un raggio che invece parte da un punto dell'oggetto ed è diretto verso il bordo della pupilla di entrata definisce l'ampiezza del fascio di raggi che passano attraverso il sistema ed è detto **raggio marginale**. E' indicato nella figura 30, relativamente al punto B dell'oggetto posto sull'asse ottico, con m .

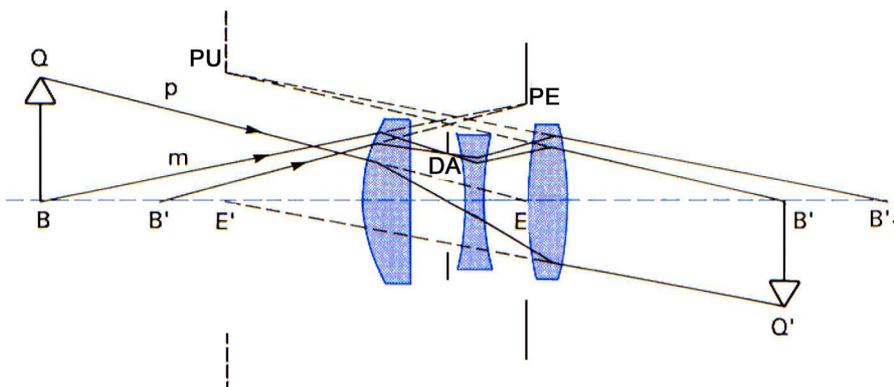


Figura 30. Raggio principale p e raggio marginale m di un sistema di lenti.

Per ottenere l'immagine prodotta dal sistema basta tracciare un raggio principale e un raggio marginale. Si traccia il raggio marginale a partire dal punto B dell'oggetto sull'asse ottico, in modo che si diriga verso il bordo delle successive pupille; l'intersezione di questo raggio con l'asse ottico dà la posizione B' dell'immagine del punto B . Si traccia poi il raggio principale a partire dal punto estremo Q dell'oggetto, in modo che passi attraverso il centro delle successive pupille; l'intersezione di questo raggio con il piano passante per B' fornisce l'altezza e l'orientamento dell'immagine finale.

I diaframmi di campo

I diaframmi di campo limitano il campo di vista di un sistema ottico, ossia la porzione di oggetto visibile attraverso il sistema. Guardando ad esempio attraverso una finestra, la porzione di panorama osservabile è limitata dalle dimensioni della finestra e dalla maggiore o minore distanza dell'osservatore rispetto alla finestra.

In uno strumento ottico il campo di vista dipende sia dalle dimensioni delle lenti che formano il sistema, sia da quelle di un apposito diaframma di campo, posizionato generalmente sul piano dell'immagine.

Nel caso più semplice il diaframma di campo è posto vicino all'immagine come nella figura 31. Man mano che si considerano punti dell'oggetto che si discostano sempre più dall'asse ottico i fasci di raggi che ne provengono continuano a passare attraverso il diaframma di apertura finché l'immagine raggiunge il bordo del diaframma di campo al di là del quale la luce non può più raggiungere l'immagine. L'estensione dell'oggetto di cui il sistema di lenti può produrre un'immagine è detta **campo di vista** ed è specificata come dimensione per oggetti vicini o come l'angolo compreso tra i raggi principali estremi. A volte si indica il semi-campo, in particolare nei progetti dei sistemi di lenti.

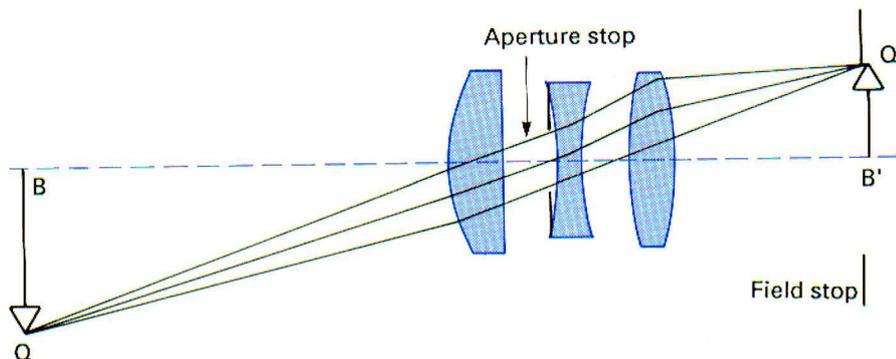


Figura 31. Diaframma di campo vicino all'immagine.

Quando il diaframma di campo è in qualche altra posizione la situazione è più complessa. Invece di interrompersi bruscamente, la luminosità dell'immagine diminuisce gradualmente, per la progressiva diminuzione dei raggi che riescono ad attraversare il sistema. Questo effetto è detto **vignettatura**.

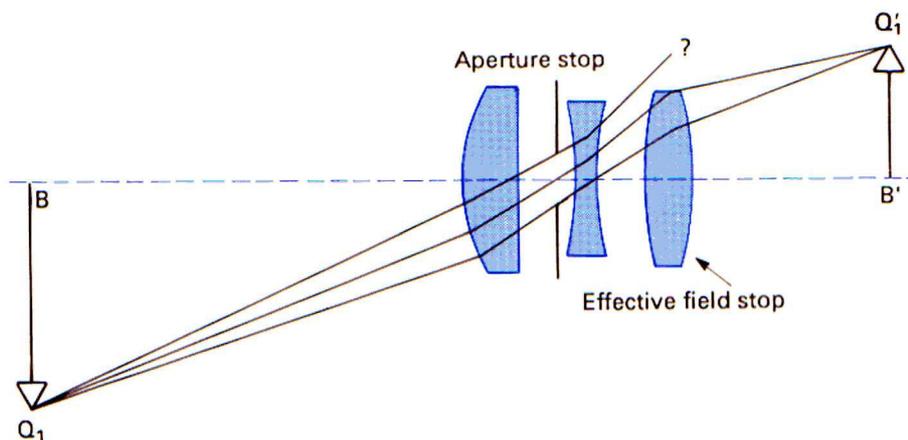


Figura 32. Diaframma di campo lontano all'immagine.

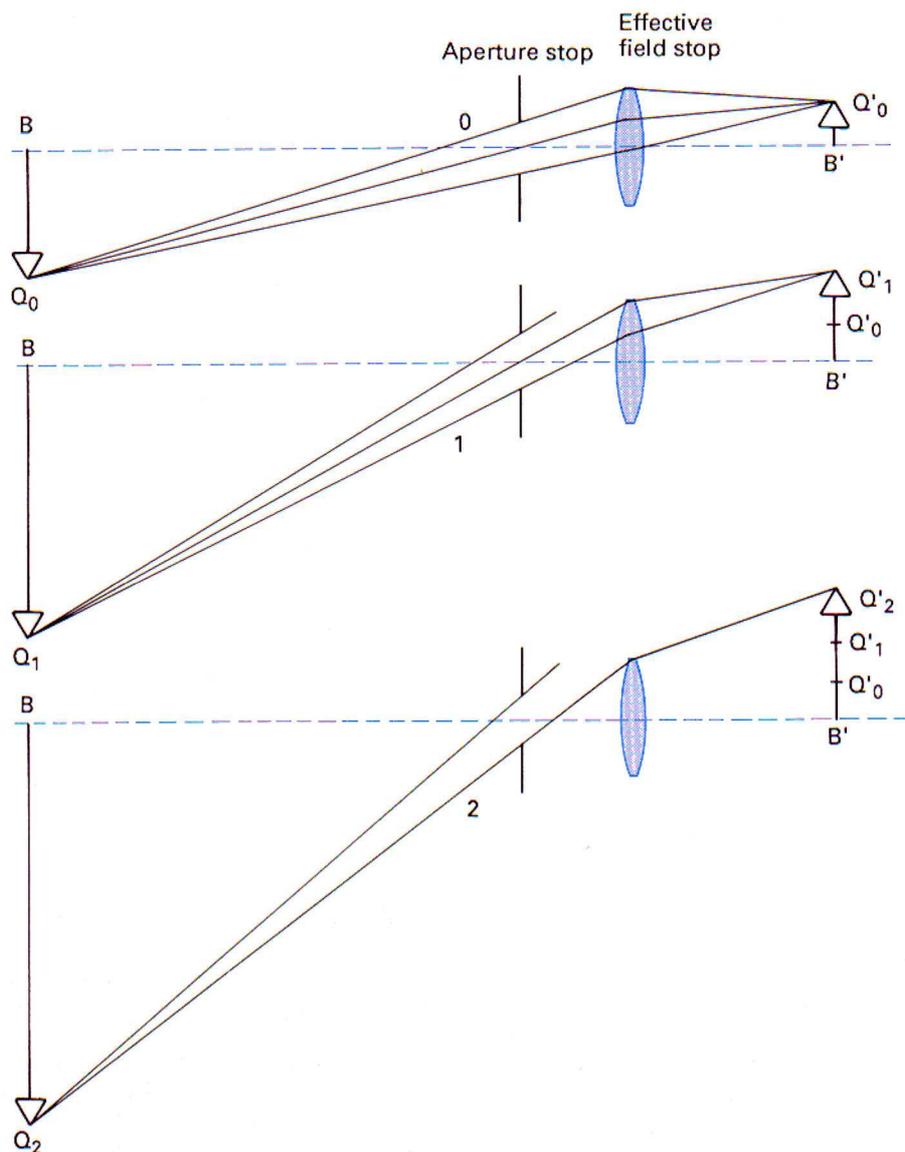


Figura 33. Vignettatura da parte del diaframma di campo.

Il fascio di raggi fuori asse che contiene il raggio 0, che è radente il bordo della lente e del diaframma di apertura, definisce il limite del **campo di vista di piena illuminazione** dell'immagine. Il fascio di raggi fuori asse che contiene il raggio 1, che è radente al bordo della lente e passa per il centro del diaframma di apertura, definisce (approssimativamente – si ricordi che queste aperture sono solitamente circolari) il **campo di vista di metà illuminazione** dell'immagine, mentre il fascio di raggi che contiene il raggio 2 che è radente al bordo superiore della lente e al bordo inferiore del diaframma di apertura proviene dal punto dell'oggetto più lontano dall'asse ottico da cui può arrivare luce all'immagine. Esso definisce il **campo di vista totale**.

Si deve tener presente che quanto il bordo del campo di vista di un sistema di questo sistema è netto dipende dalla vicinanza del diaframma di campo al piano dell'oggetto o dell'immagine. Nel sistema della figura 32 il bordo del campo di vista è molto sfumato perché l'ultima lente che agisce come diaframma di campo è molto vicina al diaframma di apertura. Gli strumenti ottici come il microscopio composto, il cannocchiale e i loro derivati, normalmente consistono di un obiettivo e di un oculare: l'obiettivo dà, dell'oggetto, un'immagine intermedia, che verrà ripresa dall'oculare. Il diaframma di campo va posizionato, di solito, sull'immagine intermedia, purché reale, in modo da ottenere un'immagine finale nitida e non vignettata. La dimensione del diaframma di campo è tale che il vignettatura da parte delle altre aperture o lenti nel sistema non riduca la luminosità dell'immagine più del 50% e non sia quindi completamente smorzata.

Come per i diaframmi di apertura per conoscere esattamente gli elementi limitanti i raggi si fa ricorso alle pupille, così ai diaframmi di campo si associano le aperture di entrata e di uscita. Analogamente al caso delle pupille, un diaframma, posto davanti a una lente, può fungere contemporaneamente da diaframma di campo e da apertura di entrata e la apertura di uscita ne sarà la coniugata rispetto alla lente; se invece il diaframma di campo è posto dietro alla lente, costituisce l'apertura di uscita ed è l'immagine reale di cui l'oggetto (virtuale) sarà l'apertura di entrata; ancora, le due aperture sono coniugate rispetto alla lente.

Data la molteplicità degli elementi limitanti, occorre seguire la seguente regola per individuare l'apertura di entrata: ci si pone al centro della pupilla di entrata della lente o del sistema e si individua l'elemento oggetto (oppure trasportato nel campo oggetto col calcolo o per via grafica) che si vede da quel punto sotto l'angolo più piccolo. Esso costituisce l'apertura di entrata. Analogamente l'apertura di uscita è l'elemento immagine (oppure trasportato nel campo immagine col calcolo o per via grafica) che si vede sotto l'angolo più piccolo dal centro della pupilla di uscita. Ma poiché l'apertura di uscita è la coniugata dell'apertura di entrata rispetto all'intero sistema, si trova una delle due in base alla definizione e l'altra come figura coniugata.

Riassumendo, le operazioni da svolgere per individuare i diaframmi di apertura e di campo e le rispettive pupille e aperture sono le seguenti:

a) si cercano tutte le possibili pupille di entrata, ponendosi davanti alla prima lente e calcolando posizioni e dimensioni apparenti di tutti gli elementi limitanti posti a destra della prima lente, considerati come immagini reali;

b) l'elemento visto sotto l'angolo più piccolo dal punto oggetto sull'asse ottico è la pupilla di entrata;

c) ponendosi al centro della pupilla di entrata si determina l'angolo più piccolo sotto il quale si vede uno degli elementi individuati al punto a); esso costituisce l'apertura di entrata;

d) la pupilla di uscita e l'apertura di uscita sono le figure coniugate della pupilla di entrata e dell'apertura di entrata, rispetto all'intero sistema;

e) le dimensioni trasversali vanno calcolate con la formula dell'ingrandimento lineare totale;

f) i diaframmi di apertura e di campo sono sempre elementi reali (diaframmi o bordi di lenti) e possono coincidere, a secondo dei casi, con una pupilla di entrata o di uscita, o con un'apertura di entrata o di uscita.

g) una volta individuate le posizioni e le dimensioni della pupilla di entrata e dell'apertura di entrata, e indicata con d la distanza tra la pupilla di entrata e l'apertura di entrata, si possono calcolare i campi di vista del sistema:

- il campo di vista di piena illuminazione α è dato da
$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{\phi_{AE} - \phi_{PE}}{2d} \right| \quad (106)$$

- il campo di vista di mezza illuminazione β è dato da
$$\operatorname{tg} \beta = \left| \frac{\phi_{AE}}{2d} \right| \quad (107)$$

- il campo di vista totale δ è dato da
$$\operatorname{tg} \delta = \left| \frac{\phi_{AE} + \phi_{PE}}{2d} \right| \quad (108)$$

Esempio

Si consideri un sistema di lenti composto da tre lenti sottili con i poteri, i diametri e le separazioni specificati nella tabella 1, che comprende anche la posizione e il diametro di un diaframma.

Lente	Potere (D)	Diametro (mm)	Separazione (mm)
L_1	+15	40	
L_2	-30	36	20
Diaframma	-	24	5
L_3	+20	40	10

1. Fare un disegno in scala del sistema.
2. Calcolare la focale equivalente e la posizione dei punti cardinali.
3. Calcolare tutte le possibili pupille di entrata e di uscita.
4. Fare un disegno in scala che permetta di trovare i campi di vista di piena illuminazione e di mezza illuminazione tracciando i raggi limite, assumendo un oggetto distante.

Il potere equivalente si può calcolare partendo da un oggetto distante da cui provengono raggi paralleli (e per il quale quindi si ha vergenza $\sigma_1 = 0,0$ D), tenendo presente che $e_2 = (5 + 10)$ mm. Si ha:

$\sigma_1 = 0,0$ D	$\varphi_1 = +15$ D	
$\sigma'_1 = \sigma_1 + \varphi_1 = +15$ D		(σ'_1 : vergenza dei raggi uscenti da L_1)
$s'_1 = 0,067$ m	$e_1 = 0,020$ m	(s'_1 : ascissa dell'immagine prodotta da L_1)
$s_2 = s'_1 - e_1 = 0,047$ m		(s_2 : ascissa dell'oggetto per L_2)
$\sigma_2 = 21,43$ D	$\varphi_2 = -30$ D	(σ_2 : vergenza dei raggi incidenti su L_2)
$\sigma'_2 = \sigma_2 + \varphi_2 = -8,57$ D		(σ'_2 : vergenza dei raggi uscenti da L_2)
$s'_2 = -0,117$ m	$e_2 = 0,015$ m	(s'_2 : ascissa dell'immagine prodotta da L_2)
$s_3 = s'_2 - e_2 = -0,132$ m		(s_3 : ascissa dell'oggetto per L_3)
$\sigma_3 = -7,59$ D	$\varphi_3 = +20$ D	(σ_3 : vergenza dei raggi incidenti su L_3)
$\sigma'_3 = \sigma_3 + \varphi_3 = 12,40$ D =	φ'_f	(σ'_3 : vergenza dei raggi uscenti da L_3)
$s'_3 = s'_f = 0,0806$ m = 80,6 mm		(frontale posteriore del sistema)

Dall'equazione (7) si ha

$$f' = \frac{s'_1 s'_2 s'_3}{s_2 s_3} = \frac{0,067 \times (-0,117) \times 0,0806}{0,047 \times (-0,132)} \text{ m} = 0,102 \text{ m}$$

a cui corrisponde un potere equivalente $\varphi = 9,8$ D.

Un disegno in scala che mostra i fuochi e i punti principali è dato dalla figura 34.

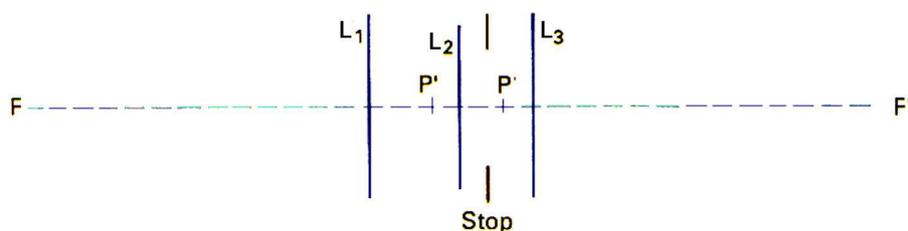


Figura 34. Schema del sistema di lenti dell'esercizio.

Le possibili pupille di entrata sono calcolate per ciascuna delle tre lenti e per il diaframma usando la posizione della lente L_1 come origine.

PE_1 è coincidente con L_1 ed ha lo stesso diametro.

PE_2 è l'immagine di L_2 vista attraverso L_1 o, più esattamente, l'oggetto virtuale (nello spazio oggetto) che è coniugato con L_2 dopo la rifrazione in L_1 . Quindi

$$\begin{aligned} s'_1 &= +0,020 \text{ m} \\ \sigma'_1 &= 50 \text{ D} & \varphi_1 &= 15 \text{ D} \\ \sigma_1 &= \sigma'_1 - \varphi_1 = 35 \text{ D} \\ s_1 &= +0,029 \text{ m, la posizione di } PE_2 \text{ rispetto a } L_1. \end{aligned}$$

La sua dimensione è data da

$$36 \text{ mm} \times 50/35 = 51,4 \text{ mm}$$

PE_3 è l'immagine del diaframma visto attraverso L_2 e L_1 ottenuta usando lo stesso metodo:

$$s'_2 = +0,005 \text{ m}$$

$$\begin{aligned}\sigma'_2 &= 200 \text{ D} & \varphi_2 &= -30 \text{ D} \\ \sigma_2 &= \sigma'_2 - \varphi_2 = 230 \text{ D} \\ s_2 &= +0,004 \text{ m} & e_1 &= 0,020 \text{ mm} \\ s'_1 &= s_2 + e_1 = +0,024 \text{ m} \\ \sigma'_1 &= 41,07 \text{ D} & \varphi_1 &= 15 \text{ D} \\ \sigma_1 &= \sigma'_1 - \varphi_1 = 26,07 \text{ D} \\ s_1 &= +0,038 \text{ m, la posizione di } PE_s \text{ rispetto a } L_1.\end{aligned}$$

La sua dimensione è data da

$$24 \text{ mm} \times 200/230 \times 41,07/26,07 = 32,9 \text{ mm}$$

PE_3 è l'immagine di L_3 vista attraverso L_2 e L_1 ottenuta usando lo stesso metodo:

$$\begin{aligned}s'_2 &= +0,015 \text{ m} \\ \sigma'_2 &= 66,67 \text{ D} & \varphi_2 &= -30 \text{ D} \\ \sigma_2 &= \sigma'_2 - \varphi_2 = 96,67 \text{ D} \\ s_2 &= +0,0104 \text{ m} & e_1 &= 0,020 \text{ mm} \\ s'_1 &= s_2 + e_1 = +0,0304 \text{ m} \\ \sigma'_1 &= 32,95 \text{ D} & \varphi_1 &= 15 \text{ D} \\ \sigma_1 &= \sigma'_1 - \varphi_1 = 17,95 \text{ D} \\ s_1 &= +0,056 \text{ m, la posizione di } PE_3 \text{ rispetto a } L_1.\end{aligned}$$

La sua dimensione è data da

$$40 \text{ mm} \times 66,67/96,67 \times 32,95/17,95 = 50,6 \text{ mm}$$

Le possibili pupille di uscita sono calcolate per ciascuna delle tre lenti e per il diaframma usando L_3 come origine. Il calcolo si esegue facilmente perché le pupille di uscita sono immagini formate nello spazio immagine con la luce che attraversa le lenti nella direzione normale da sinistra a destra.

PU_1 è l'immagine di L_1 formata da L_2 e L_3 . Quindi

$$\begin{aligned}s_2 &= -0,020 \text{ m} \\ \sigma_2 &= -50 \text{ D} & \varphi_2 &= -30 \text{ D} \\ \sigma'_2 &= \sigma_2 + \varphi_2 = -80 \text{ D} \\ s'_2 &= -0,0125 \text{ m} & e_2 &= 0,015 \text{ mm} \\ s_3 &= s'_2 - e_2 = -0,0275 \text{ m} \\ \sigma_3 &= -36,36 \text{ D} & \varphi_3 &= 20 \text{ D} \\ \sigma'_3 &= \sigma_3 + \varphi_3 = -16,36 \text{ D} \\ s'_3 &= -0,061 \text{ m, la posizione di } PU_1 \text{ rispetto a } L_3.\end{aligned}$$

La sua dimensione è data da

$$40 \text{ mm} \times -50/-80 \times -36,36/-16,36 = 55,6 \text{ mm}$$

PU_2 è l'immagine di L_2 formata da L_3 . Quindi

$$\begin{aligned}s_3 &= -0,015 \text{ m} \\ \sigma_3 &= -66,67 \text{ D} & \varphi_3 &= 20 \text{ D} \\ \sigma'_3 &= \sigma_3 + \varphi_3 = -46,67 \text{ D} \\ s'_3 &= -0,0214 \text{ m, la posizione di } PU_2 \text{ rispetto a } L_3.\end{aligned}$$

La sua dimensione è data da

$$36 \text{ mm} \times -66,67/-46,67 = 51,4 \text{ mm}$$

PU_s è l'immagine del diaframma formata da L_3 . Quindi

$$\begin{aligned}s_3 &= -0,010 \text{ m} \\ \sigma_3 &= -100 \text{ D} & \varphi_3 &= 20 \text{ D} \\ \sigma'_3 &= \sigma_3 + \varphi_3 = -80 \text{ D} \\ s'_3 &= -0,0125 \text{ m, la posizione di } PU_s \text{ rispetto a } L_3.\end{aligned}$$

La sua dimensione è data da

$$24 \text{ mm} \times -100/-80 = 30 \text{ mm}$$

PU_3 è coincidente con L_3 e ha lo stesso diametro.

I risultati di questo calcolo sono mostrati nei disegni delle figure 35 e 36. Per un oggetto distante possono essere tracciati i raggi di luce paralleli (1 e 2) che passano attraverso PE_s senza che nessun'altra pupilla li blocchi. PE_s è quindi la pupilla di entrata e può essere ridefinita come PE . Per i raggi provenienti con altri angoli l'angolo minore si trova per il raggio (3) tracciato da PE a PE_1 ; per angoli maggiori la pupilla di entrata è parzialmente ristretta da PE_1 . Questo è l'angolo che limita il campo di piena illuminazione e quindi PE_1 è l'apertura di entrata.

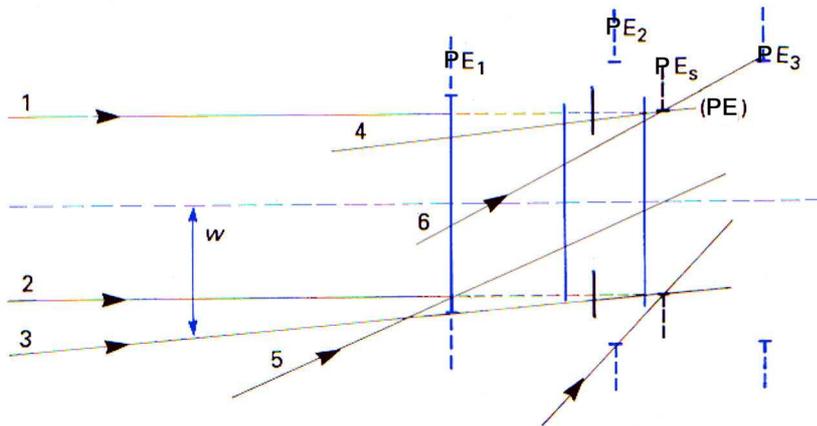


Figura 35. Possibili aperture di entrata: disegno relativo all'esempio.

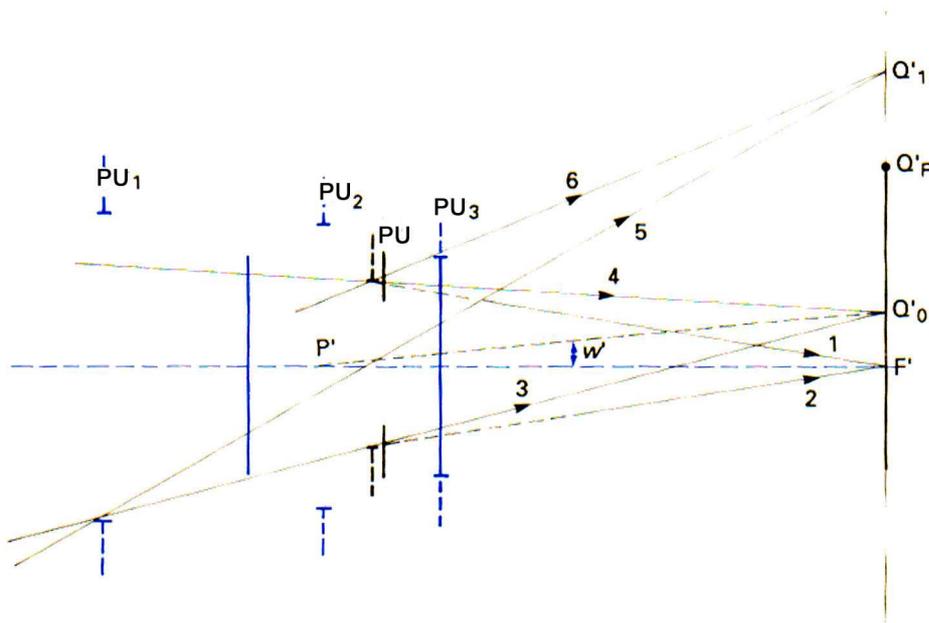


Figura 36. Possibili aperture di uscita: disegno relativo all'esempio.

Per convenzione si definisce il campo di metà illuminazione come l'angolo per il quale il raggio più esterno (5) proveniente dall'apertura di entrata PE_1 passa per il centro della pupilla di entrata PE . Nel disegno si può vedere che, per questo angolo, l'altra metà della pupilla di entrata comincia ad essere ristretta da PE_3 (raggio 6).

Per applicare lo stesso principio alla figura 38, dobbiamo ora tracciare raggi convergenti verso punti del piano immagine che passa per F' . Un raggio (3) che tocca PU_1 e PU (PU_s) raggiunge il piano immagine in Q'_0 . Il raggio (4) che raggiunge Q'_0 toccando la parte superiore di PU non è bloccato da nessun'altra pupilla e quindi Q'_0 dà la dimensione dell'immagine con piena illuminazione. L'angolo corrispondente nello spazio oggetto può essere trovato congiungendo Q'_0 con P' , il punto principale immagine. Risulta essere uguale a quello ricavato nella figura 35. PU_1 è l'apertura di uscita.

Il campo di metà illuminazione è dato dal raggio (5) che congiunge il bordo di PU_1 con il

centro della pupilla di uscita. Questo raggio raggiunge il piano immagine in Q'_1 . Il raggio (6) che congiunge Q'_1 con il bordo superiore di PU sfiora PU_3 . In un sistema reale è probabile che si sarebbe posto un diaframma di campo vicino all'immagine all'incirca in Q'_F , dove l'illuminazione è ancora ben al di sopra del 50% del valore massimo.

Nelle figure 35 e 36 ogni coppia di raggi numerati è in effetti lo stesso raggio prima e dopo aver attraversato il sistema di lenti. In tutto il campo di metà illuminazione la prima lente agisce come diaframma di campo.

Esercizi

1. Un sistema è composto da due lenti sottili che hanno rispettivamente focale +10 e +15 cm, separate da 15 cm; un diaframma del diametro di 2 cm è posto coassiale tra le lenti a 3 cm dalla lente di focale minore, che è rivolta verso l'oggetto. Trovare le dimensioni e le posizioni delle pupille di entrata e di uscita e delle aperture di entrata e di uscita.
2. Se le lenti del sistema dell'esercizio 1 hanno un diametro di 3 cm e l'oggetto è posto a 50 cm dalla prima lente, trovare il campo di piena illuminazione e il campo totale.

5. L'occhio come strumento ottico

Come la macchina fotografica, l'occhio usa un sistema ottico positivo per formare l'immagine del mondo esterno su una superficie fotosensibile, la **retina**, che si trova sulla superficie interna di un bulbo oculare approssimativamente sferico. I diversi aspetti relativi a questo organo vengono esaminati in dettagli nei corsi di anatomia e di optometria. Ci limiteremo qui a quanto è fondamentale per capirne il funzionamento dal punto di vista ottico.

Cenni di anatomia e fisiologia del sistema visivo

Il globo oculare ha una forma all'incirca sferica, sebbene leggermente sporgente nella parte anteriore con la cornea, mentre risulta un po' appiattito nel senso trasversale. Infatti il diametro nel piano verticale è di 23 mm, mentre quello nel piano orizzontale, dal polo anteriore a quello posteriore, misura mediamente 24 mm. L'asse che attraversa i suddetti poli è detto **asse dell'occhio** (figura 1).

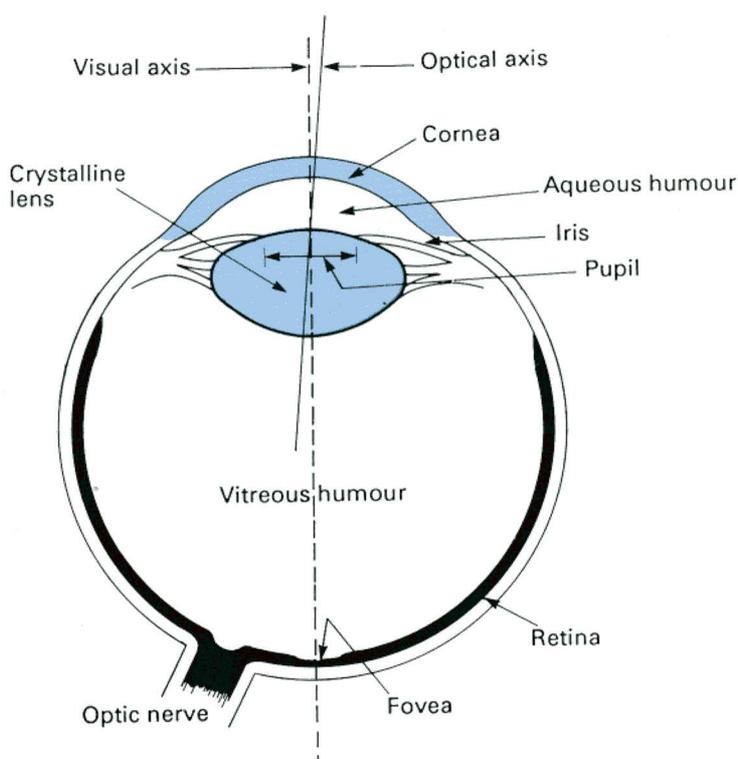


Figura 1. Sezione orizzontale dell'occhio destro.

In prima approssimazione si può considerare l'occhio formato da tre strutture concentriche, racchiudenti un liquido gelatinoso:

- 1) la **tunica fibrosa**, o membrana esterna, formata dalla cornea e dalla sclera;
- 2) la **tunica vascolare**, o membrana intermedia, formata dall'iride, dal corpo ciliare e dalla coroide;
- 3) la **tunica nervosa**, o membrana interna, formata dall'epitelio pigmentato e dalla retina.

Il primo strato, quello più esterno, è costituito principalmente dalla sclera, che costituisce il bianco dell'occhio, e avvolge quasi completamente l'occhio, salvo anteriormente, dove si protende nella cornea, e in una zona posteriore, spostata verso la parte nasale, dove il nervo ottico esce dal globo oculare. La struttura della sclera è a fibre ed è abbastanza robusta e relativamente rigida: essa serve infatti da protezione alla parte interna.

La cornea è l'apertura trasparente nella sclera, a cui è raccordata tramite il limbus sclerocorneale. Essa è l'elemento più importante nella formazione dell'immagine, in quanto assicura quasi i tre quarti dell'intero potere dell'occhio. La cornea è una lente la cui forma è

quella di un menisco negativo: infatti, se misurata in aria, il suo potere risulta negativo. In realtà posteriormente la cornea è a contatto con un liquido avente indice di rifrazione molto vicino a quello dell'acqua, detto **umore acqueo**, e questo fa sì che la cornea risulti notevolmente positiva ($\varphi \approx 43 D$). I raggi di curvatura sono (valori medi) 7,86 mm quello della superficie esterna e 6,5 mm quello della superficie interna.

Mentre sclera e cornea non sono vascolarizzate, lo è invece fortemente il secondo strato, quello che riguarda la coroide, la cui funzione principale è appunto quella di apportare nutrimento ai tessuti circostanti. La coroide riveste tutta la parte posteriore e mediana dell'occhio e continua in avanti con il **corpo ciliare**, che è una struttura a forma di anello, aderente alla sclera.

Il corpo ciliare viene suddiviso nella *parte uveale*, più vicina alla sclera, che comprende il *muscolo ciliare* e la *zonula di Zinn*, che sono coinvolti nel processo accomodativo, e nella *parte epiteliale*, comprendente i *processi ciliari*, che sono attivi per la produzione di umore acqueo. Essi si congiungono con la retina formando un margine dentato detto *ora serrata*: in questa zona la retina è priva di fotoricettori, quindi è cieca.

Nella parte anteriore la tunica vascolare è costituita dall'**iride**, sottile membrana pigmentata, posta immediatamente davanti al cristallino e provvista di un'apertura centrale, di diametro variabile. L'iride costituisce il diaframma dell'occhio, che regola la quantità di energia luminosa che può penetrare all'interno dell'occhio e quindi colpire la retina. La regolazione dell'apertura pupillare avviene per mezzo di due strutture muscolari differenziate, dette *sfintere pupillare* e *dilatatore*: la prima, formata da fibre disposte ad anello attorno all'apertura, presiede alla contrazione (miosi), in presenza di forte luminosità, mentre la seconda, con fibre disposte radialmente, presiede alla dilatazione (midriasi).

Strutturalmente l'iride è composta da uno strato di stroma (fibrille collagene) rivolte verso l'avanti, cioè verso la cornea, e da un epitelio (tessuto di rivestimento) posteriore. La colorazione dell'iride, che è quella che dà il colore all'occhio, varia a seconda che la pigmentazione sia presente sia nello stroma che nell'epitelio posteriore (marrone – nero), o soltanto nello stroma (grigio – azzurro).

La struttura più interna, cioè la tunica nervosa, è formata dalla retina, che aderisce alla coroide solo nella parte posteriore, dove i fasci nervosi escono dal globo oculare. Per il resto essa è tenuta in forma dall'**umore vitreo**, liquido di tipo gelatinoso che riempie la maggior parte dell'occhio. La retina inizia all'ora serrata, dove si congiunge ai processi ciliari e tappezza tutto l'interno del bulbo oculare, lasciando libera solo la parte anteriore.

La retina esercita la funzione visiva propriamente detta, in quanto riceve i segnali luminosi, e li trasforma in stimoli elettrici, che vengono poi inviati al cervello. Strutturalmente essa è formata da dieci strati differenziati, tutti trasparenti salvo l'ultimo, quello aderente alle pareti del globo; infatti gli elementi fotoricettivi risiedono nel nono e penultimo strato: essi sono denominati **coni** e **bastoncelli**, differenziati sia anatomicamente che funzionalmente.

I coni, a forma di bottiglia, si addensano nella parte centrale della retina e soprattutto nella **fossa centrale**, in una zona di circa 6 – 9 mm di diametro, diminuendo rapidamente verso la periferia; funzionano in luce diurna e sono i soli a permettere la visione dei colori. I bastoncelli hanno forma cilindrica allungata, sono più lunghi dei coni e sono distribuiti maggiormente nella zona intermedia della retina, diminuendo verso la periferia, cioè nella parte anteriore; sono comunque assenti nella zona centrale.

Nella retina si distingue la fossa centrale, dove si forma l'immagine quando si fissa un punto: la visione vi risulta particolarmente nitida, perché il tessuto è più sottile nella parte centrale chiamata **fòvea**. La fòvea rappresenta infatti una depressione nella fossa centrale, più sottile dunque, in quanto il tessuto è piegato in parte verso la periferia per permettere la massima risoluzione dell'immagine, avendo i raggi attraversato strati di spessore inferiore.

Ancora nella retina si trova la **papilla**, che è la zona, di diametro circa 2 mm, leggermente spostata verso il naso, dove si riuniscono le fibre nervose di tutta la retina ed escono dall'occhio. Evidentemente in questa zona non vi sono fotoricettori, quindi essa costituisce un punto cieco.

I mezzi attraversati dai fasci luminosi per arrivare sulla retina sono: cornea, umore acqueo, cristallino, umore vitreo. Già si è detto della cornea, dell'umore acqueo che riempie la

camera anteriore e le due camere posteriori e che, insieme all'umore vitreo, che riempie la maggior parte del globo oculare, serve a mantenere la pressione intraoculare, che assicura la forma del bulbo e la stabilità della cornea.

Addossato alla parte posteriore dell'iride, si trova il secondo elemento rifrangente dell'occhio, ossia il **crystallino**. La sua funzione principale è l'accomodazione, ossia la modificazione del potere rifrangente cambiando la propria forma, in modo da consentire la messa a fuoco di oggetti posti a distanze diverse. La forma del cristallino è quella di una lente biconvessa, con superficie anteriore a raggio maggiore (in realtà di curvatura ellittica), rispetto al raggio della superficie posteriore (in realtà a forma di paraboloide). Il cristallino è sospeso nell'occhio tramite le fibre della zonula di Zinn. Il diametro è di 10 mm e lo spessore varia tra 3,6 mm, se non accomodato, e 4 mm, se accomodato al massimo. La struttura del cristallino è a strati concentrici: la *capsula esterna* è una sorta di sacchetto contenente l'intero cristallino; segue l'epitelio, un sottile strato cellulare. Dal punto di vista ottico, capsula ed epitelio vengono in genere considerati insieme (o ignorati, avendo lo stesso indice di rifrazione del liquido in cui il cristallino è immerso). La massa del cristallino prende il nome di *corteccia* e costituisce la parte maggiore del cristallino, nei soggetti giovani. La parte più centrale costituisce il *nucleo*, composto da fibre della corteccia sovrapposte una all'altra e formate dalle cellule morte che non possono essere asportate perché il cristallino è chiuso dalla capsula. Esse quindi si accumulano col tempo, ingrandendo e irrigidendo il nucleo. Il cristallino allora perde elasticità con l'età, causando la presbiopia, cioè l'incapacità di accomodare per oggetti vicini. Per quanto detto, gli indici di rifrazione delle varie zone differiscono tra loro, passando da 1,36 per la capsula, a 1,386 per la corteccia, a 1,41 per la parte più densa del nucleo.

L'occhio come sistema di diottri

Rispetto agli strumenti ottici come cannocchiale e microscopio, l'occhio presenta alcune importanti differenze:

- 1) le superfici rifrangenti non sono perfettamente sferiche, pur presentando curvature regolari;
- 2) il cristallino non ha indice di rifrazione costante;
- 3) il cristallino non ha potere costante.

Nonostante questo, l'occhio viene studiato con le leggi dell'ottica di Gauss e le differenze tra i risultati relativi all'occhio reale e quelli risultanti dall'ottica di Gauss costituiscono le aberrazioni dell'occhio. La forma non perfettamente sferica, ma appiattita verso la periferia, che comporta una diminuzione degli angoli d'incidenza, il fondo della retina non piatto e soprattutto il piccolo diametro di apertura pupillare, comportano comunque una drastica riduzione di tali aberrazioni.

Per quanto riguarda le immagini ottenibili, esse sono :

- 1) immagini diottriche, quelle usate per la visione;
- 2) immagini catadiottriche, dovute in parte alla riflessione sulle superfici rifrangenti; queste immagini, a differenza delle immagini diottriche, non si formano sulla retina, e perciò il soggetto non può vederle; vengono usate nell'esame oculistico e per studiare i raggi di curvatura;
- 3) immagini entoptiche, di origine intraoculare: sono immagini, formate sulla retina, di oggetti interni all'occhio stesso.

Diversi autori hanno proposto dei modelli teorici dell'occhio, basandosi su parametri geometrici di partenza (raggi di curvatura, spessori, indici) leggermente differenti e pervenendo quindi a risultati non perfettamente coincidenti. Se si considera la cornea come un diottero singolo e il cristallino come una lente sottile, si ha l'occhio semplificato (modelli proposti da Helmholtz, Listing e Gullstrand). La figura 2 mostra l'occhio schematico di Emsley nel caso dell'occhio emmetrope rilassato, i cui parametri sono riportati nella tabella 1. La posizione dei piani principali PP' è mostrata nella figura 3, che è in scala. Le focali oggetto e immagine sono differenti perché l'immagine è in un mezzo con indice di rifrazione differente da quello in cui è l'oggetto. Ciò pone i punti nodali NN' in una posizione differente e più vicina a C , il centro di rotazione dell'occhio.

Tabella 1. Parametri dell'occhio schematico di Emsley.

$r_1 = 7,8 \text{ mm}$	$e_1 = 3,6 \text{ mm}$	$n_1 = 1,3333$
$r_2 = 10,0 \text{ mm}$	$e_2 = 3,6 \text{ mm}$	$n_2 = 1,4160$
$r_3 = -6,0 \text{ mm}$	$e_3 = 16,7 \text{ mm}$	$n_3 = 1,3333$

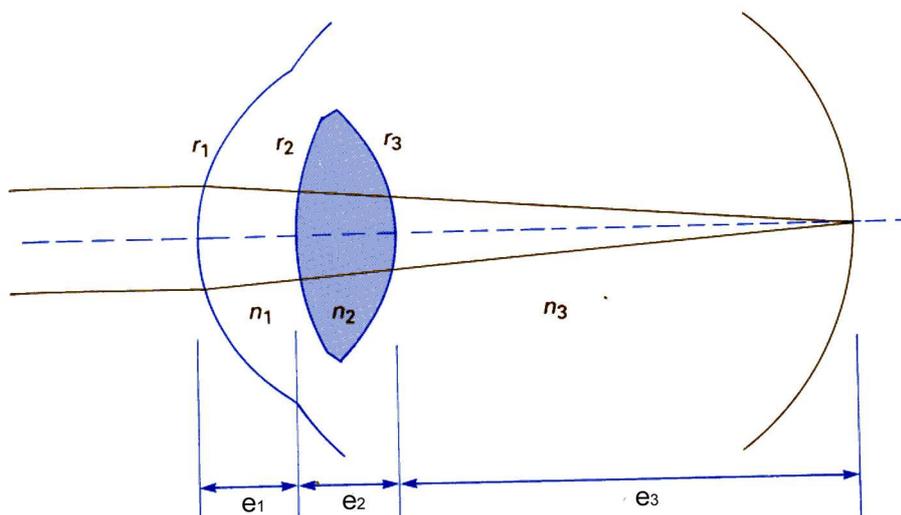


Figura 2. Occhio schematico di Emsley.

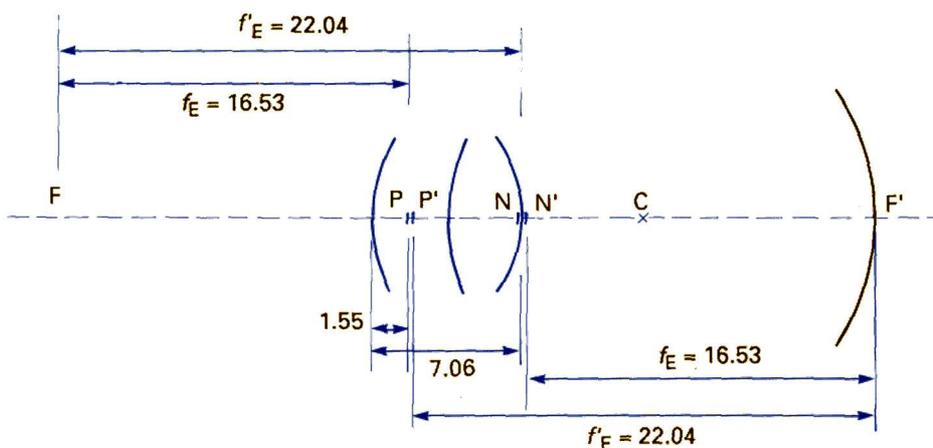


Figura 3. Occhio schematico di Emsley – punti principali.

I modelli che considerano l'occhio come composto dalla lente a menisco corneale e dal cristallino a struttura differenziata nucleo-corteccia sono i più completi. I modelli di Listing, Gullstrand e Le Grand sono quelli più noti, per l'occhio completo.

Prendendo come base i dati di Gullstrand, che distingue tre elementi rifrangenti, ossia cornea, corteccia del cristallino e nucleo del cristallino, se ne riportano nelle tabelle 2, 3 e 4 i parametri con riferimento alla figura 4. Non è necessario tenere conto del film lacrimale perché, avendo questo raggi di curvatura pari a quello anteriore della cornea, si hanno in pratica tre diottri paralleli, per cui l'angolo di emergenza si ottiene applicando direttamente la legge della rifrazione al primo e all'ultimo strato.

Per calcolare i parametri relativi all'occhio si può procedere in modi diversi; ne indichiamo alcuni:

- si considera l'occhio come una successione di diottri sferici; per un oggetto all'infinito si determinano le diverse ascisse e quindi la focale immagine equivalente; analogamente per un'immagine all'infinito, in modo da determinare la focale oggetto. Si

ricordi che l'ultima ascissa immagine del primo procedimento e la prima ascissa oggetto del secondo sono le due frontali, per cui, per differenza con le focali si ottengono le posizioni dei piani principali; infine si calcolano le ascisse dei nodi, sommando le focali, e le loro posizioni rispetto all'apice corneale;

- si procede al calcolo relativo alla cornea, individuandone il potere, che indicheremo con φ_A , le focali e le posizioni dei piani principali, riferite all'apice corneale. Poi si considera il cristallino come una successione di diottri e si procede come al punto precedente. Anche per il cristallino conviene riferire fuochi e piani principali all'apice corneale. Successivamente si combinano cornea e cristallino, secondo la formula di Gullstrand, per avere i parametri dell'occhio completo: potere, focali, posizioni dei piani principali e nodali riferiti al vertice V.

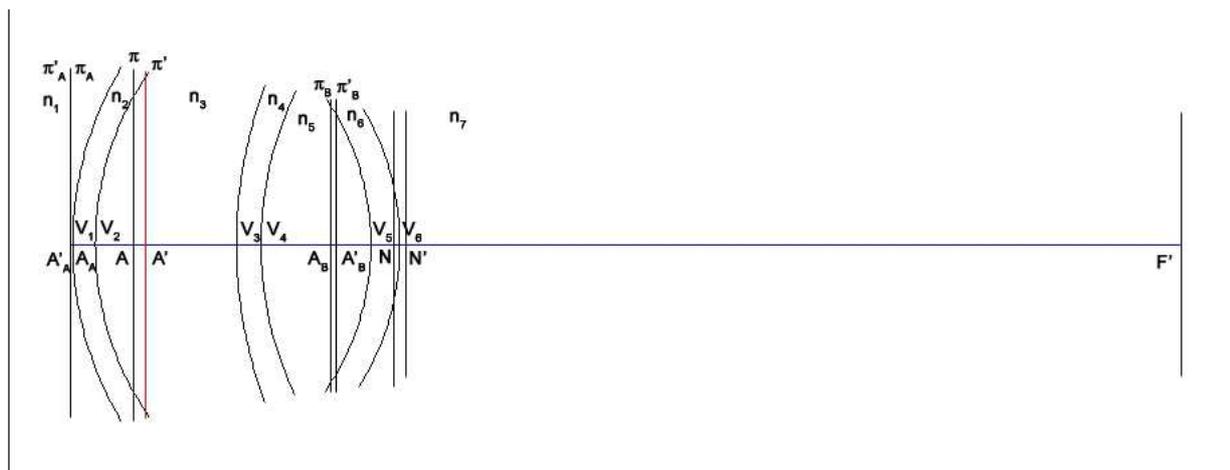


Figura 4. Occhio schematico di Gullstrand (non accomodato) – posizione dei piani principali.

Tabella 2. Occhio schematico di Gullstrand – posizione dei diottri.

Distanze	Occhio non accomodato	Occhio accomodato
VA	0,500 mm	0,50 mm
VB	3,600 mm	3,20 mm
VC	4,146 mm	3,87 mm
VD	6,565 mm	6,53 mm
VE	7,200 mm	7,200 mm
VF'	24,387 mm	24,387 mm

Tabella 3. Occhio schematico di Gullstrand – raggi di curvatura e indici di rifrazione.

	Raggi di curvatura		Indici di rifrazione
	Occhio non accomodato	Occhio accomodato	
			$n_1 = 1,000$
Faccia anteriore cornea	7,70 mm	7,70 mm	$n_2 = 1,376$
Faccia posteriore cornea	6,80 mm	6,80 mm	$n_3 = 1,336$
Faccia anteriore corteccia cristallino	10,00 mm	5,33 mm	$n_4 = 1,386$
Faccia anteriore nucleo cristallino	7,91 mm	2,66 mm	$n_5 = 1,406$
Faccia posteriore nucleo cristallino	-5,76 mm	-2,66 mm	$n_6 = 1,386$
Faccia posteriore corteccia cristallino	-6,00 mm	-5,33 mm	$n_7 = 1,336$

Tabella 4. Occhio schematico di Gullstrand – poteri e posizioni dei punti principali.

	Cornea	Cristallino non accomodato	Occhio completo non accomodato	Cristallino accomodato	Occhio completo accomodato
Potere (D)	$\varphi_A = 43,0532$	$\varphi_B = 19,1107$	$\varphi = 58,6359$	$\varphi_B = 33,0673$	$\varphi = 70,5842$
Posizione π (mm)	$d_A = -0,0496$	$d_B = 1,9011$	$d = 1,3975$	$d_B = 1,6566$	$d = 1,8218$
Distanza da V_1 a π (mm)	$V_1A_A = -0,0496$	$V_1A_B = 5,6780$	$V_1A = 1,3479$	$V_1A_B = 5,1448$	$V_1A = 1,7722$
Posizione π' (mm)	$d'_A = -0,5506$	$d'_B = -1,2128$	$d' = -4,2062$	$d'_B = -1,6566$	$d' = -3,1690$
Distanza da V_1 a π' (mm)	$V_1A'_A = -0,0506$	$V_1A'_B = 5,8070$	$V_1A' = 1,6008$	$V_1A'_B = 5,2552$	$V_1A' = 2,0862$
Focale oggetto (mm)	$f_A = -23,2271$	$f_B = -69,9085$	$f = -17,0544$	$f_B = -40,4025$	$f = -14,1675$
Distanza da V_1 a F (mm)	$V_1F_A = -23,2767$	$V_1F_B = -64,2305$	$V_1F = -15,7065$	$V_1F_B = -35,2577$	$V_1F = -12,3953$
Focale immagine (mm)	$f'_A = 31,0314$	$f'_B = 69,9085$	$f' = 22,7847$	$f'_B = 40,4025$	$f' = 18,9277$
Ascisse nodali (mm)			$s_N = s'_N = 5,7303$		$s_N = s'_N = 4,7602$
Distanza da V_1 a N (mm)			$V_1N = 7,0782$		$V_1N = 6,5342$
Distanza da V_1 a N' (mm)			$V_1N' = 7,3311$		$V_1N' = 6,8464$

– si determinano tre sistemi equivalenti: quello della cornea; quello costituito dalle facce anteriori della corteccia del cristallino e del nucleo del cristallino; quello costituito dalle facce posteriori del nucleo del cristallino e della corteccia del cristallino. Poi si determina il sistema equivalente ai due sistemi equivalenti del cristallino, cioè il sistema equivalente al cristallino totale. Infine, il sistema equivalente ai sistemi equivalenti della cornea e del cristallino, cioè il sistema equivalente dell'occhio. Le posizioni dei fuochi, dei piani principali e dei nodi vanno alla fine riferiti al vertice V.

Qualsiasi sia il metodo seguito, per il solo cristallino i calcoli vanno ripetuti utilizzando i parametri relativi all'occhio accomodato.

Pupille di entrata e di uscita dell'occhio

Come si è detto, l'iride svolge la funzione di diaframma di apertura cioè, con la sua apertura variabile, regola il flusso di energia raggiante che raggiunge la retina. A seconda delle condizioni di luminosità, il valore medio del diametro dell'iride viene considerato uguale a :

- 2 mm per luce intensa
- 4 mm per luce di intensità normale
- 8 mm per scarsa luminosità

Se si osserva l'occhio di una persona non si vede effettivamente il bordo dell'iride, bensì l'immagine di questo formata dalla cornea antistante; quindi si vede l'immagine del diaframma di apertura dal lato oggetto, ed essa costituisce la pupilla di entrata.

Poiché la cornea non è un sistema sottile, il riferimento andrà fatto ai piani principali della cornea. Si ricordi che :

- $V_1A_A = -0,0496$ mm
- $V_1A'_A = -0,0506$ mm
- $\varphi_A = 43,0532$ D
- $e_1 = 0,500$ mm
- $e_2 = 3,100$ mm
- $n_1 = 1,000$
- $n_3 = 1,336$

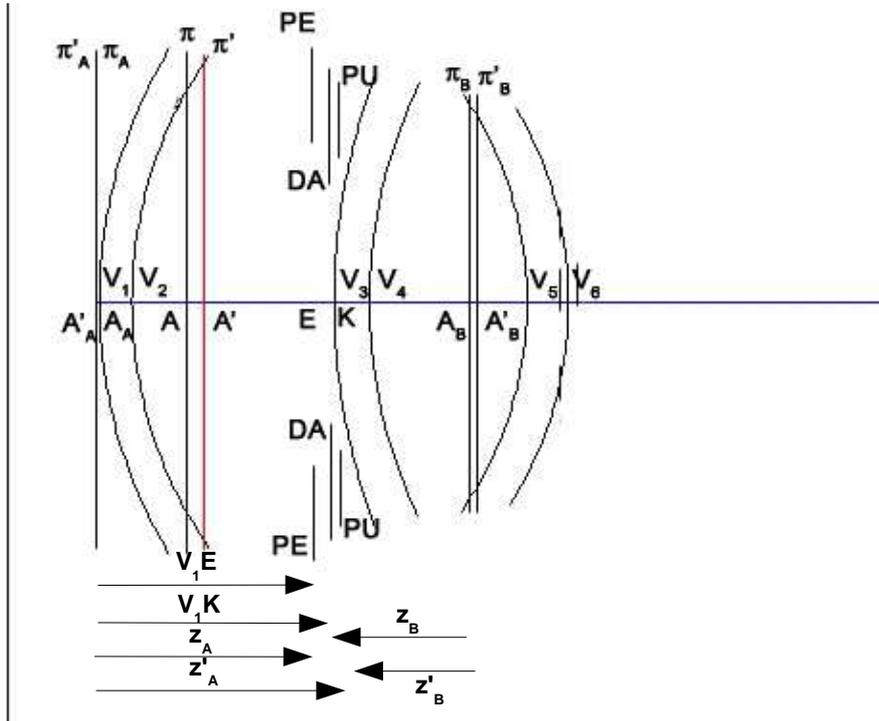


Figura 5. Occhio schematico di Gullstrand – posizione delle pupille.

Con riferimento alla figura 5 si avrà:

$$z'_A = -V_1A'_A + e_1 + e_2 = 3,6506 \text{ mm} = 0,0036506 \text{ m} \quad (1)$$

$$\frac{n_3}{z'_A} - \frac{n_1}{z_A} = \varphi_A \quad (2)$$

da cui

$$\frac{n_1}{z_A} = \frac{n_3}{z'_A} - \varphi_A \quad (3)$$

$$z_A = 3,09679 \text{ mm}$$

$$V_1K = V_1A_A + z_A = z_A + d_A = 3,09679 - 0,0496 \text{ mm} = 3,0472 \text{ mm} \cong 3,05 \text{ mm} \quad (4)$$

Le dimensioni si otterranno applicando la formula dell'ingrandimento:

$$\frac{\varphi \phi_{DA}}{\varphi \phi_{PE}} = \frac{V_1K}{V_1E} \frac{n_1}{n_3} \quad (5)$$

da cui

$$\phi_{PE} = \phi_{DA} \frac{V_1E}{V_1K} \frac{n_3}{n_1} = 1,1308 \phi_{DA} \quad (6)$$

In definitiva la pupilla di entrata si trova a 3,05 mm dall'apice corneale e misura 1,13 volte il diametro dell'apertura dell'iride.

In modo analogo si procede per la pupilla di uscita, riferita al vertice corneale. Essa sarà costituita dall'immagine dell'iride data dal cristallino, per il quale si aveva:

$$V_1A_B = 5,678 \text{ mm}$$

$$V_1A'_B = 5,807 \text{ mm}$$

$$\phi_B = 19,11 \text{ D}$$

$$n_3 = 1,336$$

$$n_7 = 1,336$$

Si ha allora

$$z_B = -V_1 A_B + V_1 K = -2,078 \text{ mm} \quad (7)$$

$$\frac{n_7}{z'_B} - \frac{n_3}{z_B} = \varphi_B \quad (8)$$

da cui

$$\frac{n_7}{z'_B} = \varphi_B + \frac{n_3}{z_B} \quad (9)$$

$$z'_B = -2,1416 \text{ mm}$$

$$V_1 K' = V_1 A'_B + z'_B = 3,6653 \text{ mm} \quad (10)$$

$$\frac{\phi_{PU}}{\phi_{DA}} = \frac{z'_B n_3}{z_B n_7} \quad (11)$$

da cui

$$\phi_{PU} = 1,0306 \phi_{DA} \quad (12)$$

La pupilla di uscita è a 3,67 mm dall'apice corneale, 1,03 volte il diametro dell'iride. Si ha quindi

$$\phi_{PU} \approx 0,91 \phi_{PE} \quad \text{e} \quad \phi_{PE} \approx 1,097 \phi_{PU}$$

Formazione dell'immagine retinica

Il sistema ottico dell'occhio equivale in pratica ad una lente positiva di potere uguale a circa 60 D, che fa in modo da formare sulla retina le immagini di oggetti posti a grande distanza. Perché sulla retina si abbiano immagini nitide di oggetti relativamente vicini (fino a pochi centimetri per un occhio giovane) interviene il meccanismo di accomodazione del cristallino.

Per conoscere le dimensioni dell'immagine retinica si osservi la figura 6: dalla formula dell'ingrandimento trasversale, considerando $n = 1$ e $s \approx \infty$, si ottiene:

$$\frac{y'}{y} = \frac{ns'}{n's} = \frac{s'}{n's} \quad (13)$$

e poiché

$$\frac{s'}{n'} = \frac{1}{\varphi} \quad (14)$$

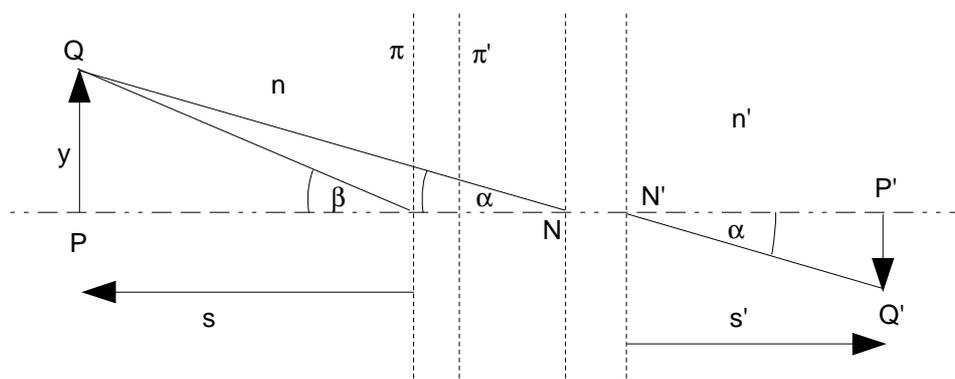


Figura 6. Dimensioni dell'immagine retinica.

si ha

$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{s\varphi} \quad (15)$$

e quindi

$$y' = y \frac{1}{s\varphi} = \frac{\operatorname{tg} \beta}{\varphi} = \frac{\beta_{rad}}{\varphi} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\varphi} = \frac{\alpha_{rad}}{\varphi} \quad (16)$$

In prima approssimazione si considera l'oggetto all'infinito già per $s = -5 \div 6$ m.

Profondità di fuoco e di campo

La distanza dell'immagine da una lente dipende dalla distanza del punto oggetto corrispondente e, in linea di massima, di ciascun solido si ottiene un'immagine tridimensionale, o almeno a due dimensioni, sul piano immagine. Ma, mentre le dimensioni dell'immagine perpendicolarmente all'asse ottico sono proporzionali alle corrispondenti dimensioni dell'oggetto, secondo l'ingrandimento lineare, la stessa cosa non avviene per le dimensioni lungo l'asse ottico (essendo l'ingrandimento assiale $l_a = l_1/l_2$): l'immagine di un oggetto solido non risulta pertanto simile all'oggetto, ma deformata rispetto ad esso.

In pratica l'immagine si forma sempre su uno schermo, come nel caso di una macchina fotografica o di un proiettore, o sulla retina dell'occhio, nella visione diretta o tramite immagini dovute a microscopi o telescopi. Solo gli oggetti che si trovano su uno stesso piano frontale potranno dare immagini nitide sullo schermo situato sul piano immagine. Oggetti puntiformi che si trovano davanti o dietro a quel piano frontale danno luogo a macchie di confusione di forma circolare sull'asse della lente, o di forma ellittica in altre posizioni. Poiché, però, in genere queste macchie non si scostano molto dalla forma circolare, si parla di **cerchi di confusione**. Risulta chiaro dalla figura 7 che le dimensioni dei cerchi di confusione dipendono dalla posizione e dalle dimensioni della pupilla di uscita e dalla distanza dei punti immagine B' e C' rispetto allo schermo (la posizione corrispondente al piano immagine A').

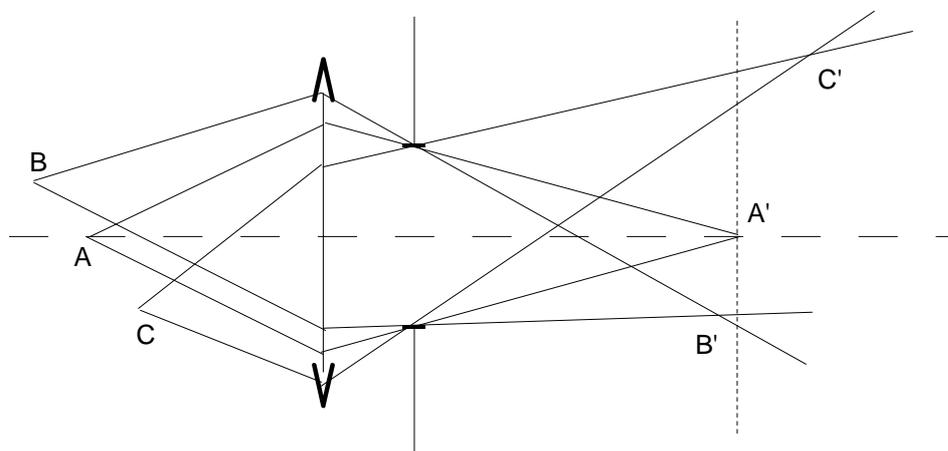


Figura 7. Cerchi di confusione di oggetti posti a diversa distanza da una lente.

E' comunque possibile ottenere immagini apparentemente nitide, su un unico piano immagine, di oggetti che si trovano a distanze anche sensibilmente diverse dalla lente; basta pensare alle fotografie di panorami. Il motivo sta nel fatto che, se gli oggetti sono visti sotto angoli sufficientemente piccoli, ossia in pratica inferiori a 1', essi appaiono all'occhio come oggetti puntiformi, proprio perché i cerchi di confusione hanno diametri piccoli rispetto alle distanze alle quali sono visti.

La massima distanza, in avanti o indietro, di cui si può spostare lo schermo rispetto alla posizione teorica dell'immagine, senza che l'immagine stessa perda in nitidezza, si chiama **profondità di fuoco**. La corrispondente distanza nel campo oggetto, cioè la distanza massima tra due piani frontali oggetto che diano immagini ancora apparentemente nitide, si chiama **profondità di campo**.

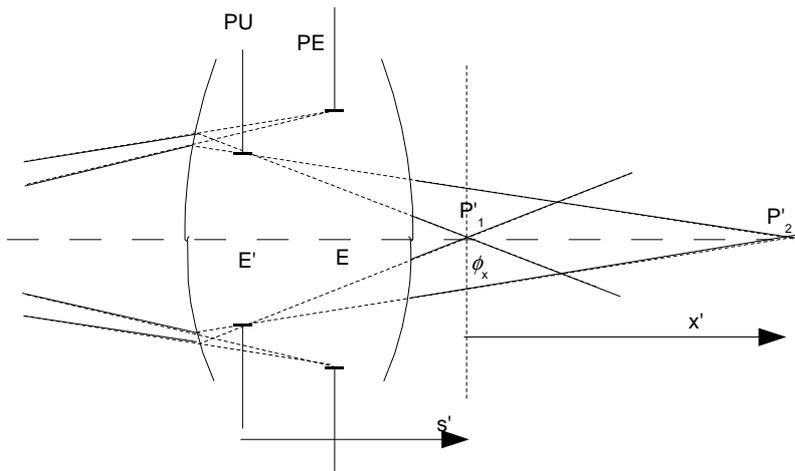


Figura 8. Profondità di fuoco.

La figura 8 rappresenta il sistema tramite le sue pupille PE e PU. P'_1 e P'_2 sono le immagini di due punti P_1 e P_2 , il secondo più prossimo al sistema di P_1 . Se per P'_1 passa il piano immagine teorico, su di esso si disegnerà il cerchio di confusione ϕ_x . Dalla figura si ha

$$\frac{\phi_x}{x'} = \frac{\phi_{PU}}{s'+x'} \cong \frac{\phi_{PU}}{s'} \quad (17)$$

perché x è generalmente molto piccolo rispetto a s' . Se P_1 è all'infinito, P'_1 è sul fuoco immagine F' del sistema, $s' = f'$, e si avrà

$$\phi_x = \phi_{PU} \frac{x'}{s'} \quad (18)$$

La distanza $f' + x'$ è la distanza immagine del punto oggetto più vicino che dà ancora un'immagine nitida quando la lente è usata per un oggetto a grande distanza (all'infinito). La distanza oggetto in tal caso si chiama **distanza iperfocale**: con lo schermo posto nel piano focale immagine, tutti gli oggetti posti tra l'infinito e la distanza iperfocale danno immagini nitide sullo schermo.

Per calcolare i cerchi di confusione sulla retina, dopo aver calcolato s' con la formula dei punti coniugati

$$s' = \frac{n'}{\varphi + \sigma} \quad (19)$$

con riferimento alla figura 9 si ha

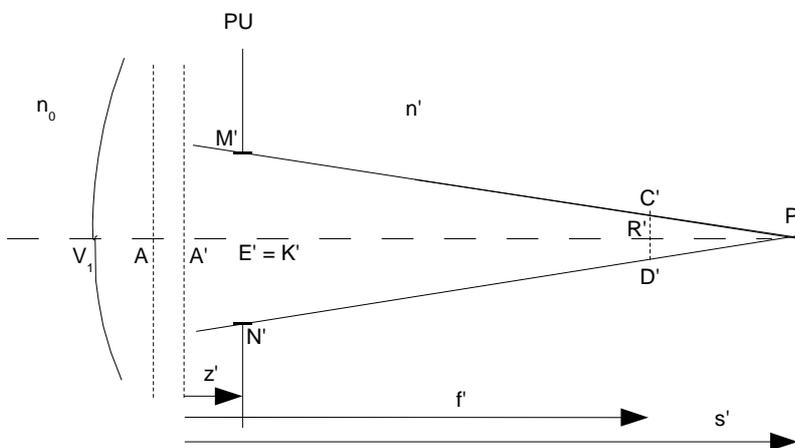


Figura 9. Calcolo del cerchio di confusione sulla retina.

$$R'P' = A'P' - A'R' = s' - f' = \frac{n'}{\varphi + \sigma} - \frac{n'}{\varphi} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} K'P' &= A'P' - A'K' = s' - z' = s' - (V_1K' - V_1A') = \\ &= s' - (3,667 \text{ mm} - 1,601 \text{ mm}) = s' - 2,066 \text{ mm} = \frac{n'}{\varphi + \sigma} - 0,002 \text{ m} \end{aligned} \quad (21)$$

Si ha poi

$$\frac{R'C'}{K'M'} = \frac{R'P'}{K'P'} \quad (22)$$

per cui

$$\phi_{cc} = \phi_{PU} \frac{R'P'}{K'P'} \quad (23)$$

dove ϕ_{cc} è il diametro del cerchio di confusione. Posto per esempio $\phi_{PE} = 4 \text{ mm}$, per un oggetto distante per il quale sia $s = -10 \text{ m}$ si ottiene $\phi_{cc} = 0,0068 \text{ mm}$. Se invece $s = -0,15 \text{ m}$ si ha $\phi_{cc} = 0,45 \text{ mm}$. Si vede quindi che per piccole distanze oggetto il diametro del cerchio di confusione non è più trascurabile.

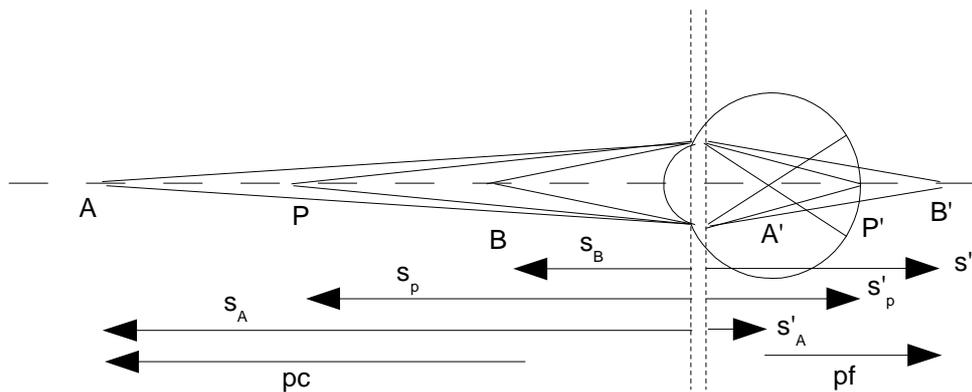


Figura 10. Profondità di fuoco e di campo per l'occhio.

Per esprimere le profondità di fuoco e di campo con una formula si può fare riferimento alla figura 10, dove P' è l'immagine di P perfettamente a fuoco sulla retina, mentre A' e B' sono le immagini di A e B, e cadono rispettivamente davanti e dietro la retina. La distanza BA (sempre che i cerchi di confusione sulla retina dovuti alle immagini A' e B' siano più piccoli del limite di riconoscimento) viene definita **profondità di campo**:

$$pc = BA = s_A - s_B \quad (24)$$

e viene misurata in metri.

La **profondità di fuoco** è, in generale, per uno strumento, la corrispondente distanza nel campo immagine:

$$A'B' = s'_B - s'_A \quad (25)$$

In ottica fisiologica si preferisce indicare con il termine **profondità di fuoco** la grandezza

$$pf = \frac{1}{s_A} - \frac{1}{s_B} \quad (26)$$

espressa in diottrie. In questo modo la profondità di fuoco resta costante, indipendentemente dalla posizione di P rispetto all'occhio, mentre la profondità di campo, come intervallo tra A e B, varia, aumentando quando i punti A e B si allontanano dall'occhio.

Se si ammette per l'occhio medio una profondità di fuoco di 1 D, si può spostare un oggetto da A a B, senza che l'immagine perda in nitidezza, in modo che sia:

$$\begin{array}{lll}
 s_B = -33 \text{ cm} & = -50 \text{ cm} & = -100 \text{ cm} \\
 s_A = -50 \text{ cm} & = -100 \text{ cm} & = -\infty \\
 pc = s_A - s_B = -17 \text{ cm} & = -50 \text{ cm} & = \infty \\
 pf = \frac{1}{s_A} - \frac{1}{s_B} \approx 1D & = 1 D & = 1 D
 \end{array}$$

Come si vede, la profondità di fuoco è rimasta costante, mentre la profondità di campo è cambiata e molto.

La profondità di fuoco si estende di una quantità uguale a destra e a sinistra del punto P' che dà l'immagine sulla retina. Allora, da un punto di vista pratico, interessa di più la semiprofondità di fuoco:

$$\frac{pf}{2} = \pm \left(\frac{1}{s_B} - \frac{1}{s_P} \right) = \pm \left(\frac{1}{s_P} - \frac{1}{s_A} \right) = \pm \frac{1}{2} \left(\frac{1}{s_A} - \frac{1}{s_B} \right) \quad (27)$$

Si definisce distanza iperfocale per l'occhio la distanza oltre la quale un oggetto può essere riconosciuto fino all'infinito grazie alla profondità di fuoco, cioè

$$\text{distanza iperfocale} = \frac{1}{pf/2} = \frac{2}{pf} \quad (28)$$

Se per esempio un occhio ha una profondità di fuoco di 1,6 D, esso può riconoscere oggetti che si trovano $1,6/2 = 0,8$ D davanti o dietro al punto fissato. Quindi, se l'occhio è accomodato per un oggetto posto a $1/0,8 = 1,25$ m dall'occhio, può riconoscere oggetti situati all'infinito utilizzando metà della sua profondità di campo.

Si è visto che il diametro dei cerchi di confusione dipende anche dal diametro della pupilla: quindi con pupille di piccola apertura la profondità di campo aumenta. Per la stessa ragione, il miope strizza l'occhio: diminuendo il cerchio di confusione si guadagna in nitidezza.

I difetti della visione e l'accomodazione

Nello studio della lente si è visto che la posizione dell'immagine sull'asse ottico cambia a seconda della posizione dell'oggetto: oggetto e immagine sono legati alla lente o al sistema attraverso l'equazione dei punti coniugati.

Se vogliamo far cadere l'immagine di oggetti, posti a distanze diverse, sempre nella stessa posizione, ossia sulla retina nel caso dell'occhio, occorre un meccanismo di messa a fuoco, affinché le immagini risultino nitide. Tale funzione di messa a fuoco viene esercitata dal cristallino che, modificando la propria forma, e cioè i suoi raggi di curvatura, cambia il proprio potere. Il muscolo ciliare, al quale il cristallino è fissato, tendendosi o rilassandosi provoca l'appiattimento o il rigonfiamento del cristallino; il meccanismo si attiva senza l'intervento della volontà del soggetto.

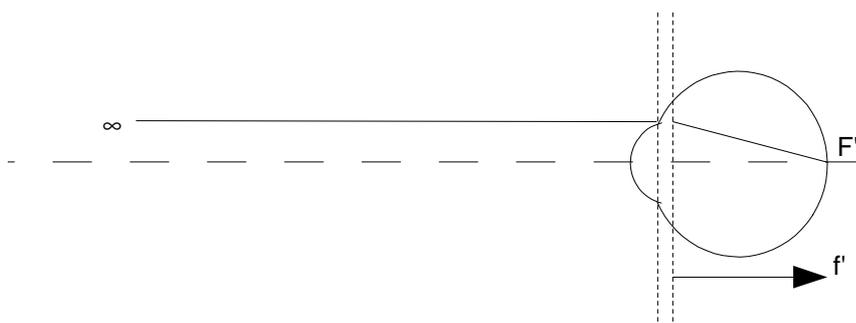


Figura 11. Occhio emmetrope, punto remoto all'infinito.

Si definisce occhio **emmetrope** un occhio privo di difetti di rifrazione, occhio **ametropo** invece quando sia presente qualche anomalia rifrattiva. Un occhio non accomodato vede nitidamente un punto chiamato **punto remoto**: se l'occhio è emmetrope il punto remoto si trova all'infinito. Significa che un oggetto, posto molto lontano dall'occhio, teoricamente all'infinito, viene focalizzato sulla retina: infatti il fuoco immagine di un occhio emmetrope si trova esattamente sulla retina (figura 11).

Quando invece l'oggetto di cui l'occhio forma un'immagine nitida sulla retina non si trova all'infinito, l'occhio è ametropo e si possono dare due casi:

1. L'immagine di un punto all'infinito si forma davanti alla retina: si tratta di **miopia**. L'inverso della distanza occhio – punto remoto, cioè $\sigma_R = 1/s_R$ (in realtà la distanza piano principale oggetto – punto remoto), espressa in diottrie, cioè la sua vergenza, dà il grado di miopia. Il fuoco immagine dell'occhio si trova a sinistra della retina; il punto remoto si trova a distanza finita dall'occhio. Mentre per deboli miopie la distanza s_R , calcolata dal piano principale oggetto, differisce di poco da quella calcolata dall'apice corneale, per forti difetti può essere necessario tenere conto anche della distanza apice corneale – piano principale oggetto (figura 12).

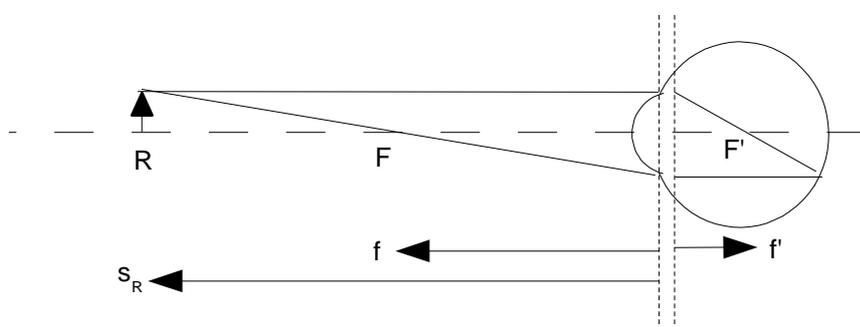


Figura 12. Occhio miope, punto remoto a sinistra dell'occhio.

2. L'immagine di un punto all'infinito si forma dietro la retina: si tratta di **ipermetropia**. Affinché l'immagine cada sulla retina l'oggetto dovrebbe essere virtuale, posto a distanza s_R dal piano principale oggetto. Ancora, la vergenza $\sigma_R = 1/s_R$ misura il difetto di ipermetropia. Il fuoco immagine, così come il punto remoto, si trovano a destra della retina (figura 13).

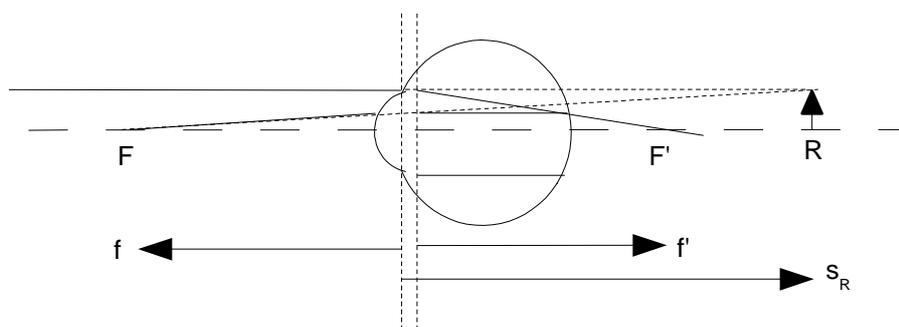


Figura 13. Occhio ipermetrope, punto remoto a destra dell'occhio.

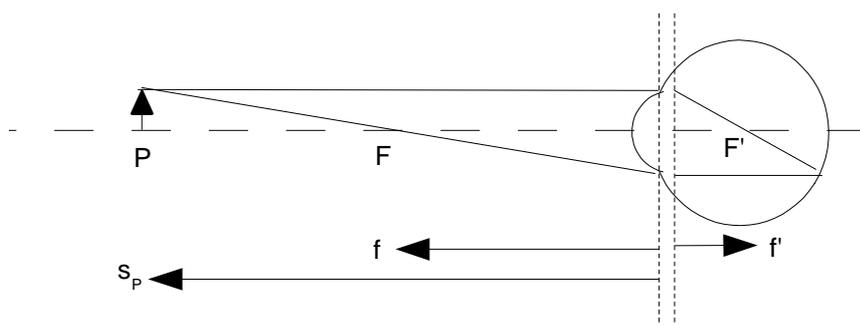


Figura 14. Occhio emmetrope accomodato al punto prossimo..

L'occhio emmetrope, accomodato al massimo, forma sulla retina l'immagine nitida di un oggetto posto nel cosiddetto **punto prossimo**. Accomodando, il fuoco immagine si sposta verso sinistra (figura 14). L'inverso della distanza occhio – punto prossimo, espressa in diottrie, è la vergenza σ_P .

Si chiama **ampiezza di accomodazione** la distanza tra il punto remoto e il punto prossimo; la si esprime tramite le vergenze: $A = \sigma_R - \sigma_P$. Per un occhio emmetrope, essendo $\sigma_R = 0$, si ha $A = -\sigma_P$. Se per esempio $s_R = -5$ m e $s_P = -0,2$ m, risulta

$$A = -1/5 + 1/0,2 = 4,8 \text{ D}$$

L'accomodazione, su un punto oggetto qualsiasi, si calcola con la stessa formula, sostituendo alla vergenza del punto prossimo quella del punto considerato. Per esempio per $s_R = -1$ m e $s = -0,5$ m, si ha

$$A = -1/1 + 1/0,5 = 1 \text{ D}$$

L'accomodazione varia con l'età e con l'intensità luminosa. Il cristallino subisce infatti con il passare degli anni delle modificazioni strutturali che comportano una perdita di elasticità e quindi una diminuzione della capacità di deformarsi. Secondo molti ricercatori l'ampiezza di accomodazione varia da circa 12 D per un bambino di dieci anni, a circa 1 D per una persona di sessant'anni. Si tratta di un'evoluzione del tutto naturale, e una persona che non è più capace di vedere nitidamente alla distanza di lettura viene chiamata **presbite**; è un difetto soggettivo, che comincia a manifestarsi verso i cinquant'anni. Il presbite richiede l'ausilio di una lente positiva, per compensare la quantità di potere diottrico che è venuta a mancare al cristallino.

La diminuzione di intensità luminosa comporta a sua volta uno spostamento del punto remoto: anche per un emmetrope non è all'infinito, ma si avvicina all'occhio, mentre il punto prossimo se ne allontana. La conseguenza è una diminuzione dell'ampiezza di accomodazione.

L'immagine retinica, nelle ametropie sferiche (miopia e ipermetropia), cambia di dimensioni. Si ha infatti

$$y'_A = y'_E \frac{\varphi_E}{\varphi_E + \sigma_R} \quad (29)$$

dove y'_A è l'altezza dell'immagine retinica per l'occhio ametrope, y'_E è l'altezza dell'immagine retinica per l'occhio emmetrope, φ_E è il potere diottrico dell'occhio emmetrope e σ_R la vergenza del punto remoto, ossia il grado di miopia o di ipermetropia.

Per esempio, posto $\varphi_E = 58,64$ D, per un miope di 5 D si ha $\sigma_R = -5$ D e quindi $y'_A = 1,09 y'_E$; per un ipermetrope di 5 D, invece, si ha $\sigma_R = 5$ D e quindi $y'_A = 0,92 y'_E$.

Per correggere le ametropie sferiche occorre fare in modo che la lente di correzione faccia cadere l'immagine del punto oggetto lontano (all'infinito) nel punto remoto (figura 15 e 16). Occorre tener conto della distanza tra lente e apice corneale (o meglio tra lente e piano principale oggetto, se si vuole essere molto precisi). Si ha per entrambi i casi:

$$s_R = f' - d \quad f' = s_R - d \quad \varphi = \frac{1}{f'} = \frac{1}{s_R + d}$$

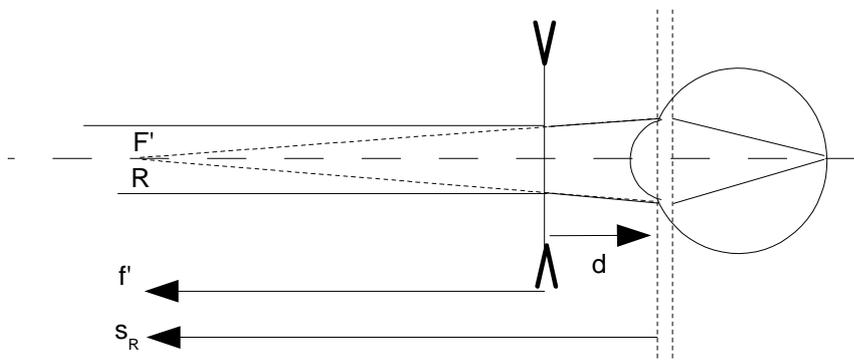


Figura 15. Correzione della miopia.

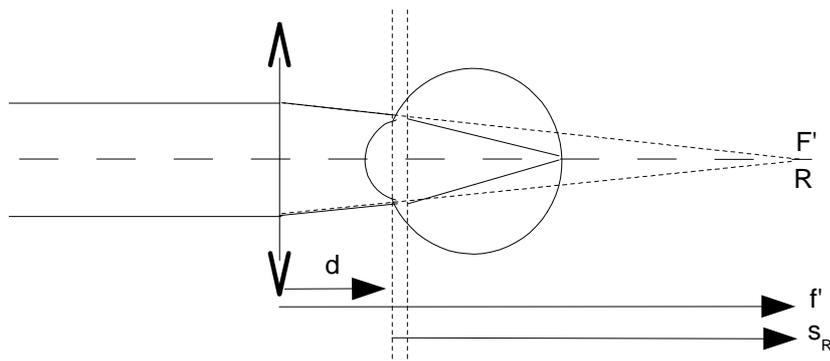


Figura 16. Correzione dell'ipermetropia.

In molti casi un occhio ametropo presenta anche il difetto dell'**astigmatismo**, dovuto a mancanza di simmetria sferica del sistema ottico, in particolare della cornea, che ha come effetto che l'immagine di un punto non sia più un punto, ma una lineetta, o una macchia più o meno ellittica. Le problematiche relative all'astigmatismo verranno approfondite più avanti.

Esempio – un occhio miope

Si vuole calcolare di quanto risulta allungato nella direzione dell'asse ottico un occhio miope che richiede, per formare sulla retina l'immagine di un oggetto distante, occhiali con potere frontale posteriore di -5,00 D posti a 14 mm dalla cornea. Si vuole calcolare anche il potere equivalente e la posizione dei punti principali del sistema composto dall'occhio e dall'occhiale.

Supponiamo che la lente dell'occhiale sia sottile e utilizziamo l'occhio schematico di Emsley (tabella 1) come punto di partenza per i calcoli.

L'immagine che la lente dell'occhiale forma di un oggetto distante si trova 200 mm davanti alla sua superficie posteriore che sta 14 mm davanti alla cornea. La distanza dell'oggetto dalla cornea è quindi -0,214 m.

Nell'eseguire i calcoli considereremo anche l'occhio emmetrope senza occhiali, indicando i risultati tra parentesi in una seconda colonna. Per quest'occhio la distanza dell'oggetto dalla cornea è infinita.

I vari passaggi del calcolo danno:

$s_1 = 0,214 \text{ m}$	(∞)
$\sigma_1 = -4,673 \text{ D}$	$(0,0 \text{ D})$
$\varphi_1 = 0,3333 / 0,0078 = +42,731 \text{ D}$	
$\sigma'_1 = \sigma_1 + \varphi_1 = +38,058 \text{ D}$	$(+42,731 \text{ D})$
$s'_1 = n_1 / \sigma'_1 = +0,03503 \text{ m}$	$(+0,03120 \text{ m})$
$s_2 = s'_1 - e_1 = +0,03143 \text{ m}$	$(+0,02760 \text{ m})$
$\sigma_2 = n_1 / s_2 = +42,417 \text{ D}$	$(+48,304 \text{ D})$
$\varphi_2 = 0,0827 / 0,010 = +8,27 \text{ D}$	
$\sigma'_2 = \sigma_2 + \varphi_2 = +50,687 \text{ D}$	$(+56,574 \text{ D})$
$s'_2 = n_2 / \sigma'_2 = +0,02794 \text{ m}$	$(+0,02503 \text{ m})$
$s_3 = s'_2 - e_2 = +0,02434 \text{ m}$	$(+0,02143 \text{ m})$
$\sigma_3 = n_2 / s_3 = +58,184 \text{ D}$	$(+66,078 \text{ D})$
$\varphi_3 = -0,0827 / (-0,006) = +13,783 \text{ D}$	
$\sigma'_3 = \sigma_3 + \varphi_3 = +71,968 \text{ D}$	$(+79,861 \text{ D})$
$s'_3 = n_3 / \sigma'_3 = +0,01853 \text{ m}$	$(+0,01669 \text{ m})$
$(e_3 \text{ è uguale a } s'_1)$	

Quindi, per l'occhio emmetrope, $e_3 = 16,69 \text{ mm}$, mentre per l'occhio miope con -5,0 D si ha $e_3 = 18,53 \text{ mm}$. L'aumento in lunghezza assiale è quindi di 1,84 mm.

Indicando con φ_0 il potere della lente dell'occhiale abbiamo, dalla formula che fornisce il potere equivalente di un sistema di diottri:

$$\varphi = \varphi_0 \times \frac{\sigma'_1}{\sigma_1} \times \frac{\sigma'_2}{\sigma_2} \times \frac{\sigma'_3}{\sigma_3} \quad \left(\varphi = \varphi_1 \times \frac{\sigma'_2}{\sigma_2} \times \frac{\sigma'_3}{\sigma_3} \right)$$

$$= -5,00 \times \frac{38,058}{-4,673} \times \frac{50,687}{42,417} \times \frac{71,968}{58,184} =$$

$$= +60,19 \text{ D} \quad (+60,49 \text{ D})$$

Quindi l'occhio miope corretto ha un potere equivalente leggermente minore di quello dell'occhio emmetrope e perciò riceve un'immagine che è più grande dello 0,5%. L'esperienza di chi porta occhiali di forte potere negativo è che l'immagine corretta è invece più piccola di quella ottenuta con l'occhio non corretto. Ciò avviene perché l'immagine vista dall'occhio non corretto è sfuocata con una distanza tra il punto nodale N' e la retina maggiore di quella che si ha con l'occhio corretto.

Noto il potere φ per i due tipi di occhio, possiamo calcolare le focali f e f' :

$$f = \frac{-1}{\varphi} = +16,61 \text{ mm} \quad (+16,53 \text{ mm})$$

$$f' = \frac{n_3}{\varphi} = +22,15 \text{ mm} \quad (+22,04 \text{ mm})$$

Nota la posizione di F' possiamo collocare P' e N' ma dobbiamo calcolare la posizione di F per collocare P e N . Per questo calcolo consideriamo luce collimata nell'umore vitreo e calcoliamo all'indietro attraverso il cristallino in direzione contraria rispetto alla direzione normale della luce. I due calcoli sono identici finché non si arriva alla lente dell'occhiale:

$$\begin{aligned} \sigma'_3 &= 0,00 \text{ D} \\ \varphi_3 &= +13,783 \text{ D} \\ \sigma_2 &= \sigma'_3 - \varphi_3 = -13,783 \text{ D} \\ s_3 &= n_2/\sigma_2 = -0,010273 \text{ m} \\ s'_2 &= s_3 + e_2 = -0,09913 \text{ m} \\ \sigma'_2 &= n_2/s'_2 = -14,28 \text{ D} \\ \varphi_2 &= +8,27 \text{ D} \\ \sigma_2 &= \sigma'_2 - \varphi_2 = -22,55 \text{ D} \\ s_2 &= n_1/\sigma_2 = -0,05912 \text{ m} \\ s'_1 &= s_2 + e_1 = -0,05551 \text{ m} \\ \sigma'_1 &= -24,016 \text{ D} \\ \varphi_1 &= +42,731 \text{ D} \\ \sigma_1 &= \sigma'_1 - \varphi_1 = -66,747 \text{ D} \\ s_1 &= -0,01498 \text{ m} \quad (s_f = -0,01498 \text{ m}) \\ s'_0 &= s_1 + e_0 = -0,00098 \text{ m} \\ \sigma'_0 &= -1020,4 \text{ D} \\ \varphi_0 &= -5 \text{ D} \\ \sigma_0 &= \sigma'_0 - \varphi_0 = -1025,4 \text{ D} \\ s_0 &= 0,00097 \text{ m} = 0,97 \text{ mm} \end{aligned}$$

Questa è la posizione del fuoco oggetto F . P e N possono essere trovati conoscendo i valori di f e di f' . La figura 17 mostra la posizione dei punti principali per l'occhio emmetrope e la figura 18 quelli per l'occhio miope così calcolati. Le posizioni di P e di N nella figura 18 differiscono di pochissimo da quelle dell'occhio emmetrope della figura 17 soprattutto perché s'_0 e s_0 differiscono così poco nel calcolo che abbiamo fatto. Tuttavia le posizioni di P' di N' sono cambiate perché F' si è spostato di 1,84 mm e quindi le distanze PP' e NN' sono aumentate.

Si noti che con occhi reali un aumento della profondità dell'umore vitreo (e_3) di 1,84 mm non avrebbe necessariamente prodotto una miopia di -5 D perché molto probabilmente sarebbero variati anche alcuni tra gli altri parametri, che tendono a compensarsi tra loro.

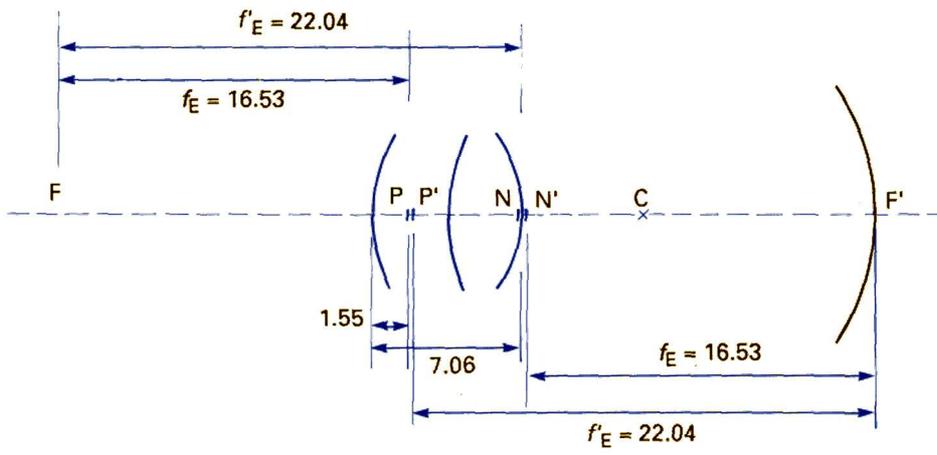


Figura 17. Schema dell'occhio emmetrope calcolato in questo esempio.

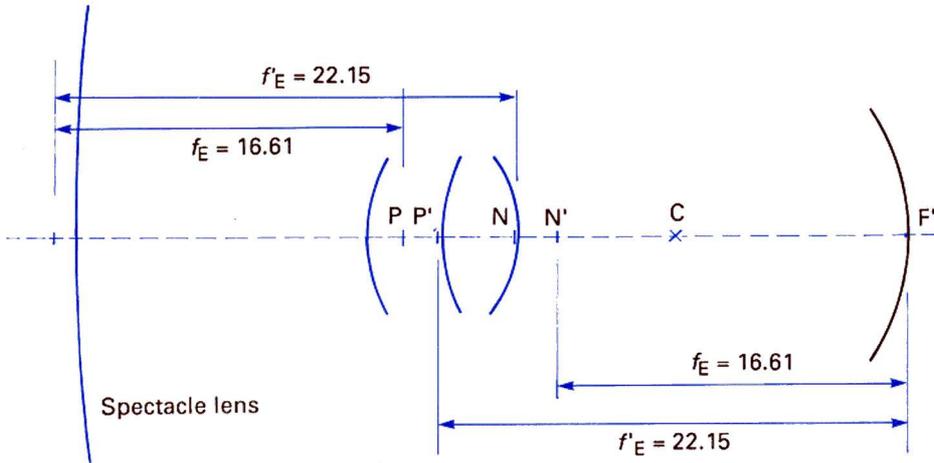


Figura 18. Schema dell'occhio miope corretto calcolato in questo esempio.

6. Strumenti ottici – Il microscopio

Un'importante categoria di strumenti ottici è costituita da quegli strumenti che permettono di osservare oggetti molto piccoli, che non possono essere normalmente distinti dall'occhio umano. Tra questi strumenti il più semplice è la lente d'ingrandimento, mentre uno strumento più complesso e potente è il microscopio composto.

Il microscopio semplice (lente d'ingrandimento)

La lente d'ingrandimento, o microscopio semplice, nel suo principio di funzionamento è lo strumento ottico d'ingrandimento più semplice e ha lo scopo di aumentare l'acutezza visiva angolare e il potere risolutivo dell'occhio.

Dell'oggetto osservato, la lente d'ingrandimento fornisce un'immagine ingrandita, non speculare (destra e sinistra non invertite) e virtuale, che apparirà sotto un angolo più grande di quello sotto il quale si vede l'oggetto ad occhio nudo.

La lente d'ingrandimento lavora in congiunzione con l'occhio. Assumiamo in questo paragrafo che l'occhio sia emmetrope (o corretto) e in grado di accomodare. Si assume per convenzione che l'accomodazione possa arrivare a 4 D, e che quindi il punto prossimo sia a 250 mm. La maggior parte degli occhi fino all'età di 40 anni può accomodare di più, ma 250 mm rappresenta comunque una distanza di visione confortevole.

Perché possano essere visti i dettagli più piccoli di un oggetto l'immagine retinica dovrebbe essere la più grande possibile. La dimensione dell'immagine retinica è maggiore quando l'oggetto è più vicino all'occhio, ma non si ottiene un maggior dettaglio nella visione se l'immagine retinica è sfuocata. L'effetto del **microscopio semplice** o **lente d'ingrandimento** è di mettere a fuoco l'immagine retinica di un oggetto vicino senza cambiarne apprezzabilmente le dimensioni.

La figura 1 mostra un oggetto vicino all'occhio che forma un'immagine grande ma sfuocata sulla retina. Nella figura 2 una forte lente positiva è inserita tra l'occhio e l'oggetto in modo che ora l'immagine retinica sia a fuoco continuando ad avere approssimativamente le stesse dimensioni di prima.

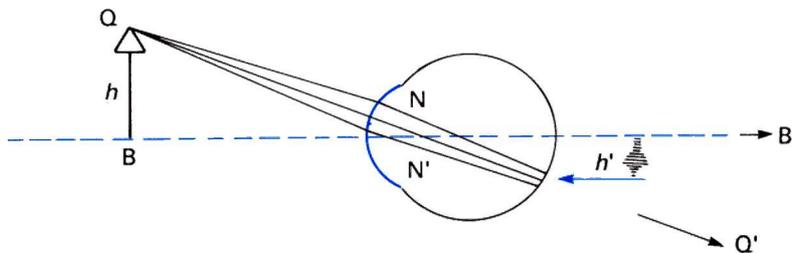


Figura 1. Oggetto vicino – immagine sfuocata.

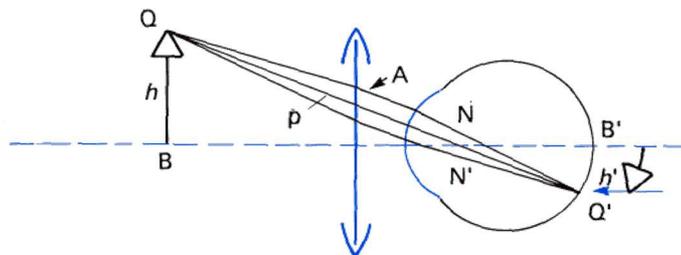


Figura 2. Oggetto vicino – effetto della lente d'ingrandimento.

Il fascio di raggi è stato collimato o parzialmente collimato dalla lente in A. Il fatto che il raggio principale p venga deviato dalla lente producendo un'immagine retinica leggermente più grande di prima costituisce un vantaggio di cui non terremo conto nei calcoli. Un'altra approssimazione è che il raggio principale che passa per il centro della pupilla non passa, nell'occhio normale, attraverso i punti nodali e inoltre, per le dimensioni dell'immagine mostrate

nella figura 2, l'occhio dovrebbe ruotare intorno al suo centro di rotazione per fissare Q' . Tutte le definizioni e i calcoli relativi all'ingrandimento saranno quindi approssimati.

Nella figura 3 abbiamo una lente singola sottile che agisce come lente d'ingrandimento. L'oggetto da ingrandire è stato posto nel fuoco oggetto della lente e l'occhio emmetrope con accomodazione rilassata vede un'immagine dritta all'infinito. L'altezza h' dell'immagine retinica è determinata dall'angolo ω'_1 formato dal raggio che parte dall'estremo superiore dell'oggetto che dopo la rifrazione passa per il punto nodale dell'occhio. Il fatto che l'immagine sia all'infinito comporta che tutti i raggi che partono da questo estremo dell'oggetto siano paralleli e formino lo stesso angolo rispetto all'asse ottico. Quindi l'altezza dell'immagine retinica non varia al variare della posizione d dell'occhio o con la sue rotazione. Tuttavia, poiché la lente agisce come diaframma di campo, il campo di vista maggiore si ha quando l'occhio è posto vicino alla lente.

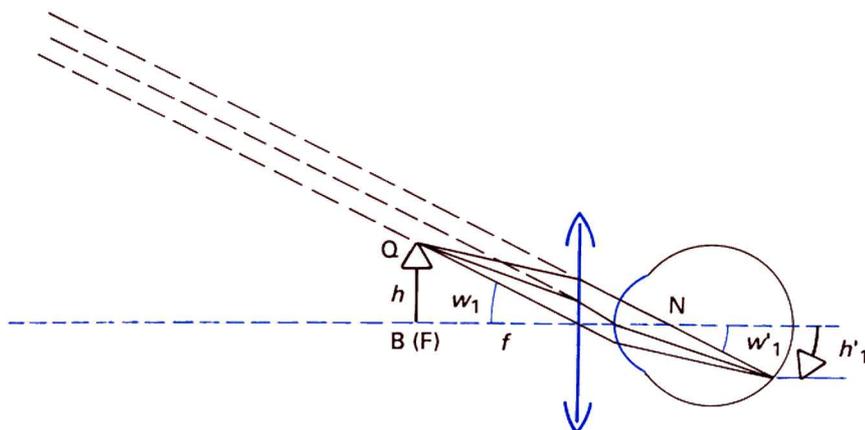


Figura 3. Lente d'ingrandimento – accomodazione all'infinito.

L'ingrandimento fornito dalla lente d'ingrandimento

Viene definita **grandezza apparente oggetto** o, più comunemente, **campo oggetto angolare**, la tangente dell'angolo ω sotto il quale viene visto l'oggetto senza la lente, dal punto nodale oggetto N dell'occhio (in genere si commette un errore trascurabile se ci si riferisce invece all'apice corneale). Si dice invece **grandezza apparente immagine** la tangente dell'angolo ω' sotto il quale è vista l'immagine virtuale data dalla lente, dal punto nodale immagine N' (o dall'apice corneale).

L'**ingrandimento visuale** I_ω del microscopio semplice è definito come il rapporto tra l'altezza dell'immagine retinica ottenuta usando la lente d'ingrandimento e la massima altezza dell'immagine retinica a fuoco che si può ottenere con l'occhio nudo senza l'ausilio della lente. Si ha quindi

$$I_\omega = \frac{\text{tg } \omega'}{\text{tg } \omega} \quad (1)$$

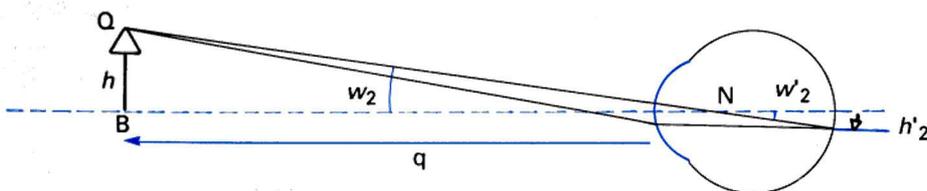


Figura 4. Oggetto visto direttamente.

Per dare una base comune di confronto si assume che l'oggetto visto direttamente sia al punto prossimo confortevole definito sopra e mostrato nella figura 4 come q , alla distanza di -250 mm dall'occhio. Negli USA si prende spesso per q un valore pari a -10 in, che corrisponde a -254 mm. Questo valore dà un ingrandimento maggiore del 2% per un dato sistema ottico ed è forse giustificato se si considera che un oggetto che richiede 4 D di accomodazione ed è quindi a -250 mm dalla cornea si trova a -257 mm dal punto nodale dell'occhio. Comunque, la convenzione è di utilizzare il valore -250 mm *come se fosse la distanza fino al punto nodale*

oggetto dell'occhio.

Per un'immagine ingrandita posta all'infinito (figura 3) l'angolo sotteso nello spazio dell'occhio è dato da

$$\operatorname{tg} \omega_1 = \frac{h}{-f} = \frac{h}{f'} \quad (= \operatorname{tg} \omega' \text{ nell'equazione 1}) \quad (2)$$

Per convenzione l'angolo sotteso dall'oggetto alla distanza q (nella figura 4) è

$$\operatorname{tg} \omega_2 = \frac{h}{-q} = \frac{h}{+250} \quad (= \operatorname{tg} \omega \text{ nell'equazione 1}) \quad (3)$$

Quindi l'ingrandimento l_ω è dato da

$$l_\omega = \frac{\operatorname{tg} \omega'_1}{\operatorname{tg} \omega_2} = \frac{h}{f'} \times \frac{-q}{h} = \frac{-q}{f'} = \frac{250}{f'} = \frac{\varphi}{4} \quad (4)$$

dove φ è il potere della lente. Perciò f' deve essere minore di 250 mm se si vuole ottenere un ingrandimento utile maggiore di 1.

Questa formula è valida in due casi:

1. Oggetto nel fuoco oggetto della lente. In questo caso l'immagine si forma all'infinito. Per un osservatore emmetrope non accomodato (o ipermetrope non corretto e accomodato) la distanza lente - occhio non influisce sull'ingrandimento, poiché l'angolo ω' resta costante. Solo il campo di vista diminuisce all'allontanarsi dell'occhio dalla lente, a causa del diametro invariato della lente (è il caso della figura 3).
2. Fuoco immagine della lente coincidente con il punto principale oggetto dell'occhio (figura 5). In questo caso l'angolo ω' rimane costante, indipendentemente dalla posizione dell'oggetto, ovviamente a parità di altezza dell'oggetto. In queste condizioni l'accomodazione dell'occhio o il difetto di miopia o ipermetropia non influiscono sull'ingrandimento.

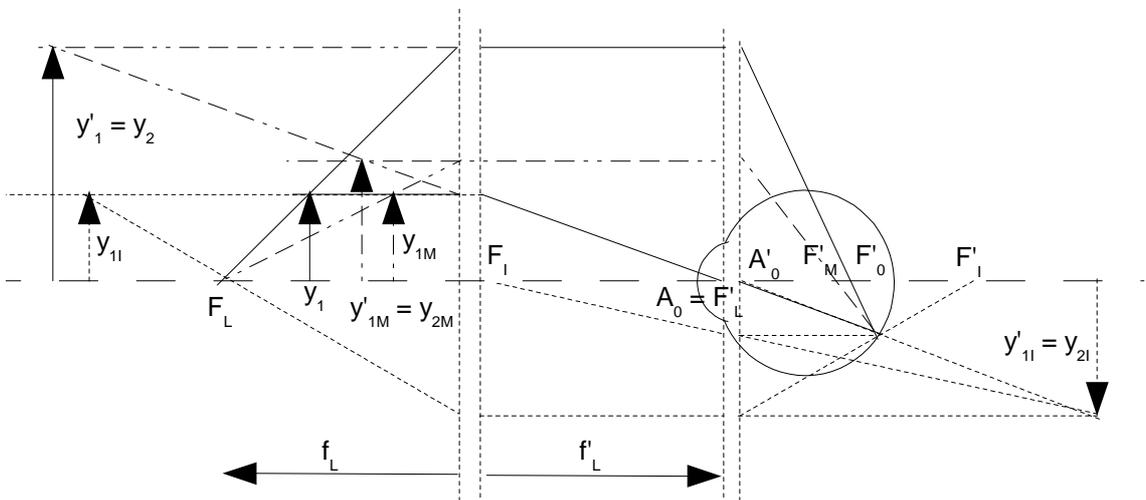


Figura 5. Fuoco immagine della lente coincidente con il punto principale oggetto dell'occhio: y_1 = oggetto per occhio emmetrope (linee continue); y_{1M} = oggetto per occhio miope (linee tratteggiate); y_{1I} = oggetto per occhio ipermetrope (linee punteggiate).

Se l'oggetto si viene a trovare tra il fuoco oggetto della lente e la lente, l'immagine sarà sempre ingrandita, virtuale, non speculare e situata in posizione finita; la si potrà osservare nitidamente solo accomodando. Si ha la situazione mostrata nella figura 6. Per una data altezza h dell'oggetto, l'altezza dell'immagine è $h' = hs'/s$ dove s e s' le distanze dell'oggetto e dell'immagine dalla lente. Se la lente è a una distanza e (positiva) dall'occhio la distanza oggetto-occhio è $s - e$ e la distanza immagine-occhio è $s' - e$.

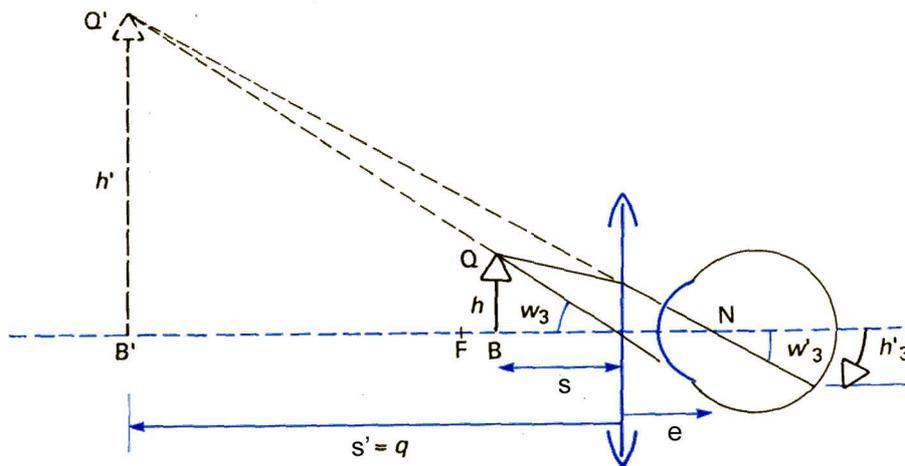


Figura 6. Oggetto posto tra la lente e il fuoco oggetto della lente.

L'ingrandimento visuale è dato ora dal rapporto tra la tangente dell'angolo ω_3 sotto cui viene vista l'immagine attraverso la lente e la tangente dell'angolo ω_2 sotto cui viene visto senza l'ausilio della lente l'oggetto posto nel punto prossimo dell'occhio alla distanza q :

$$I_\omega = \frac{\text{tg } \omega'_3}{\text{tg } \omega_2} \quad (5)$$

Si ha allora, ricordando che l'ingrandimento lineare della lente è dato da $I = (f' - s')/f'$,

$$I_\omega = \frac{\text{tg } \omega'_3}{\text{tg } \omega_2} = \frac{h'}{(s'-e)h} = I \frac{q}{(s'-e)} = \frac{f'-s'}{f'} \frac{(-0,25 \text{ m})}{s'-e} = \frac{(0,25 \text{ m})}{f'} \frac{f'-s'}{e-s'} = \frac{\varphi}{4} \left(\frac{f'-s'}{e-s'} \right) \quad (6)$$

Se l'occhio dell'osservatore è posto in F'_L , si ha $e = f'$ e quindi vale ancora la formula (4)

$$I_\omega = \frac{\varphi}{4} \quad (4)$$

Se invece l'immagine ingrandita si forma alla distanza q , come mostra la figura 6, si ha $s' = q$. L'ingrandimento massimo si ha quando l'occhio è vicino alla lente, ossia quando $e = 0$: in questo caso

$$I_\omega = \frac{(0,25 \text{ m})}{f'} \frac{f'-s'}{e-s'} = \frac{(0,25 \text{ m})}{f'} \frac{f'-(-0,25 \text{ m})}{(-0,25 \text{ m})} = 1 + \frac{\varphi}{4} \quad (7)$$

Questo è il massimo ingrandimento che si può ottenere se l'immagine che si osserva non può essere più vicina che q .

Influenza dell'accomodazione e dell'ametropia sull'ingrandimento

Poiché l'immagine fornita dalla lente deve mantenersi sempre all'interno del campo di accomodazione dell'osservatore, la distanza occhio - immagine data dalla lente dovrà essere sempre compresa tra il punto prossimo per l'occhio accomodato al massimo e il punto remoto per l'occhio non accomodato. questa distanza influisce sull'ingrandimento dell'immagine.

1) Influenza dell'accomodazione e della distanza lente - occhio sull'ingrandimento per un osservatore emmetrope o miope non corretto:

a) se il punto principale dell'occhio (A_0) si trova tra la lente e il fuoco immagine della lente F'_L (figura 7), l'ingrandimento, a motivo dell'accomodazione, aumenta. L'oggetto appare più vicino e l'angolo ω' aumenta. L'ingrandimento massimo, come si è visto, si ha tenendo la lente il più vicino possibile all'occhio e accomodando al massimo. Un occhio miope non corretto equivale a un occhio emmetrope accomodato: pertanto a parità di accomodazione, un miope ottiene un ingrandimento superiore a quello dell'emmetrope.

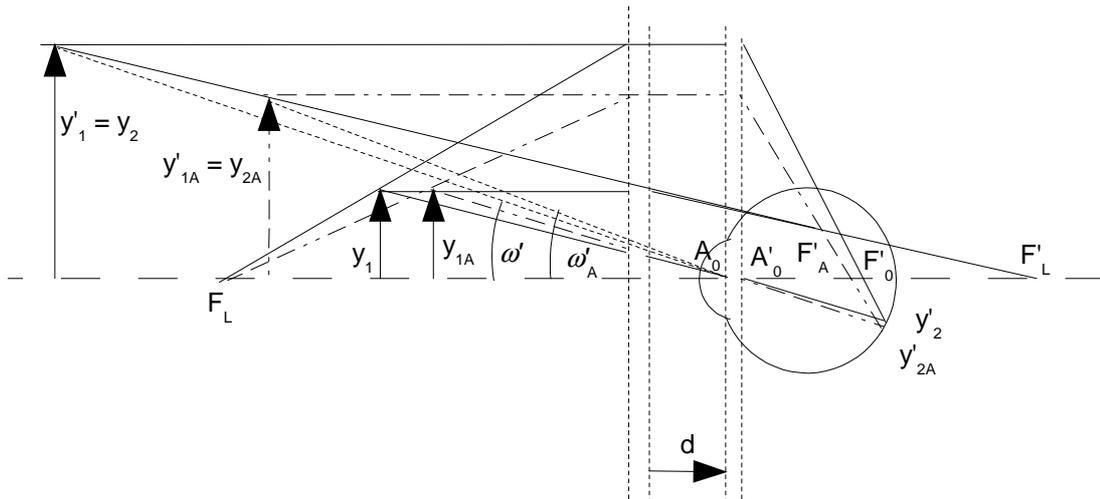


Figura 7. Punto principale dell'occhio tra la lente e il fuoco immagine della lente. La costruzione a tratteggio corrisponde all'occhio più accomodato.

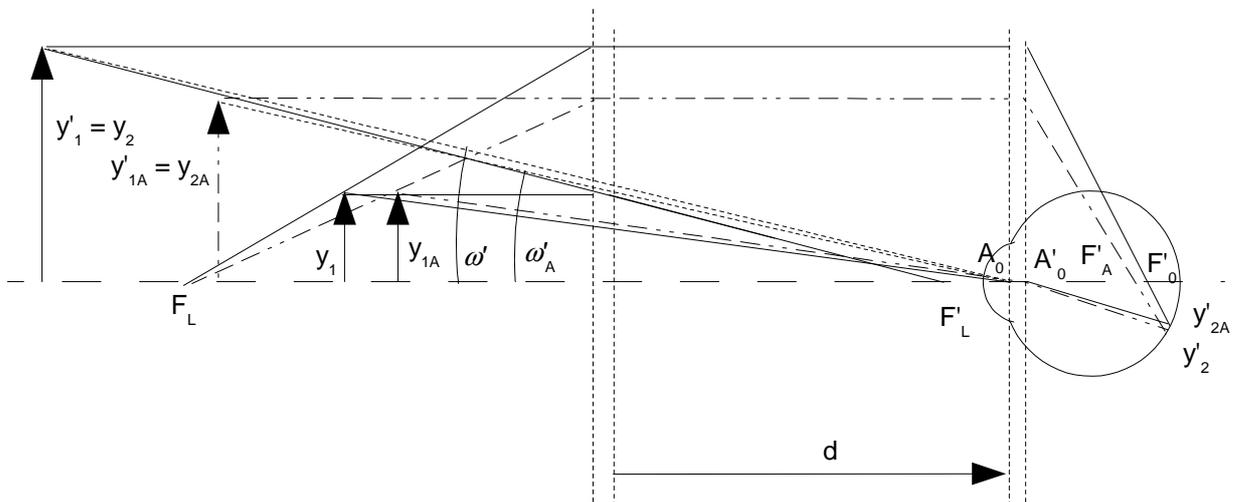


Figura 8. Punto principale dell'occhio tra la lente e il fuoco immagine della lente. La costruzione a tratteggio corrisponde all'occhio più accomodato.

b) se il punto principale dell'occhio (A_0) si trova invece a destra del fuoco immagine della lente F'_L (figura 8), l'ingrandimento diminuisce se si accomoda.

2) Influenza dell'accomodazione e della distanza lente - occhio sull'ingrandimento per un osservatore ipermetrope non corretto:

a) se il punto principale dell'occhio (A_0) si trova tra la lente e il fuoco immagine della lente F'_L , l'ingrandimento diminuisce se si accomoda perché l'immagine appare sotto un angolo più grande, come nel caso dell'occhio emmetrope o miope non corretto. Contrariamente al caso dell'emmetrope e del miope, però, aumentando la distanza lente - occhio l'ingrandimento aumenta, anche se a discapito del campo di vista, che diminuisce.

b) se il punto principale dell'occhio (A_0) si trova invece a destra del fuoco immagine della lente F'_L , l'ingrandimento diminuisce con l'accomodazione. Nella maggior parte dei casi l'influsso della distanza prevale su quello dell'accomodazione. A una distanza notevole lente - occhio corrisponde sì un ingrandimento molto forte e quindi ω' aumenta, ma contemporaneamente si riduce il campo di vista. L'ipermetrope deve perciò trovare un compromesso tra massimo ingrandimento e massimo campo visibile.

Per quanto riguarda la limitazione dei raggi, il campo di vista e la luminosità, occorre tenere presente che possono essere raccolti tutti i raggi che arrivano anche dalla zona più esterna della lente. Se però la distanza della lente dall'occhio superasse la posizione in cui convergono i raggi della zona più esterna della lente, tali raggi non potrebbero più venire raccolti. Pertanto il bordo della lente funge in questo caso da diaframma di campo e la lente

funge anche da finestra di entrata e di uscita.

A limitare la luminosità del sistema lente - occhio è l'iride, data la sua piccola apertura. L'iride, vista attraverso la lente (in realtà la doppia immagine dell'iride, vista dapprima attraverso la cornea, poi attraverso la lente) è la pupilla di entrata. Se l'occhio è posto tra la lente e il fuoco immagine della lente la pupilla di entrata si trova a destra della pupilla dell'occhio; se l'occhio è esterno al fuoco immagine, la pupilla di entrata si verrà a trovare davanti alla lente.

Il microscopio composto

La semplice lente d'ingrandimento ha ingrandimento e campo di vista limitati. Per aumentare l'ingrandimento della lente d'ingrandimento è necessario aumentarne il potere φ , ma ciò comporta:

1) raggi di curvatura corti, con conseguente diminuzione dell'apertura, cioè del diametro della lente, e quindi diminuzione di luminosità;

2) aumento delle aberrazioni, come si vedrà in seguito;

3) inoltre l'oggetto da osservare deve essere tenuto vicinissimo, e un suo piccolo spostamento comporta la mancanza di nitidezza dell'immagine, perché la profondità di campo è piccolissima. Infatti, accettando per l'occhio una profondità di fuoco media di 1 D, la posizione dell'immagine, rispetto al punto prossimo convenzionale posto a -250 mm corrispondenti a 4 D di accomodazione, può variare di ± 50 mm, ossia da -200 mm (corrispondenti a 5 D) a -333 mm (corrispondenti a 3 D). A questo intervallo entro cui può variare la posizione dell'immagine corrisponde una possibilità di spostamento dell'oggetto di

$$\Delta s = \frac{\Delta s'}{l^2} = \pm \frac{50 \text{ mm}}{l^2} \quad (8)$$

dato che per piccoli spostamenti l'ingrandimento assiale è dato da $l_a = \Delta s' / \Delta s \approx l$. Per $l = 5$ si ha $\Delta s = \pm 2$ mm, mentre per $l = 10$ è $\Delta s = \pm 0,5$ mm.

Per ottenere allora ingrandimenti maggiori, si abbina alla lente semplice un secondo sistema, ottenendo il **microscopio composto**.

Descrizione del microscopio composto

Il microscopio composto è un strumento con due lenti o sistemi di lenti che ingrandiscono uno dopo l'altro e quindi si compongono (moltiplicano) insieme per dare ingrandimenti molto elevati. La figura 9 mostra il principio di funzionamento: la prima lente vicina all'oggetto, chiamata per questo **obiettivo**, fornisce un'immagine ingrandita che è a sua volta ingrandita da una seconda lente che agisce come lente d'ingrandimento ed è chiamata **oculare**, perché è vicina all'occhio.

L'obiettivo agisce come una lente positiva che fornisce un'immagine reale l' capovolta e ingrandita. Ciò significa che s'_o deve essere più grande di s_o ed entrambe sono più grandi di f'_o , la focale dell'obiettivo. Normalmente l'obiettivo e l'oculare sono fissati alle estremità opposte di un tubo di metallo e si fa in modo che l'immagine intermedia l' coincida con il fuoco oggetto dell'oculare avvicinando o allontanando tutto il sistema all'oggetto. La distanza tra obiettivo e oculare è stata standardizzata e x'_o , la distanza tra i fuochi, è nota come la **lunghezza ottica del tubo g**, che ha comunemente il valore di 160 mm (o a volte 170 mm). L'ingrandimento dell'obiettivo è quindi dato da g/f'_o e si ottengono valori elevati utilizzando obiettivi di corta focale. Si vede dalla figura 9 che con obiettivi di focale più corta l'oggetto da studiare si trova più vicino allo strumento.

Anche il tubo di metallo ha una lunghezza standard e la montatura dell'obiettivo è progettata in modo che quando esso è completamente avvitato nel tubo il suo fuoco immagine è a 160 mm dal fuoco oggetto dell'oculare se questo è inserito completamente nell'altra estremità del tubo. Anche questa **lunghezza meccanica del tubo** ha un valore standard di 160 o 170 mm. I microscopi più moderni, comunque, oltre ad avere una regolazione che permette di variare la distanza dell'oggetto, hanno anche la possibilità di modificare la lunghezza del tubo, come è mostrato nella figura 10, con una regolazione calibrata o comunque con un marchio alla posizione corrispondente alla lunghezza meccanica del tubo.

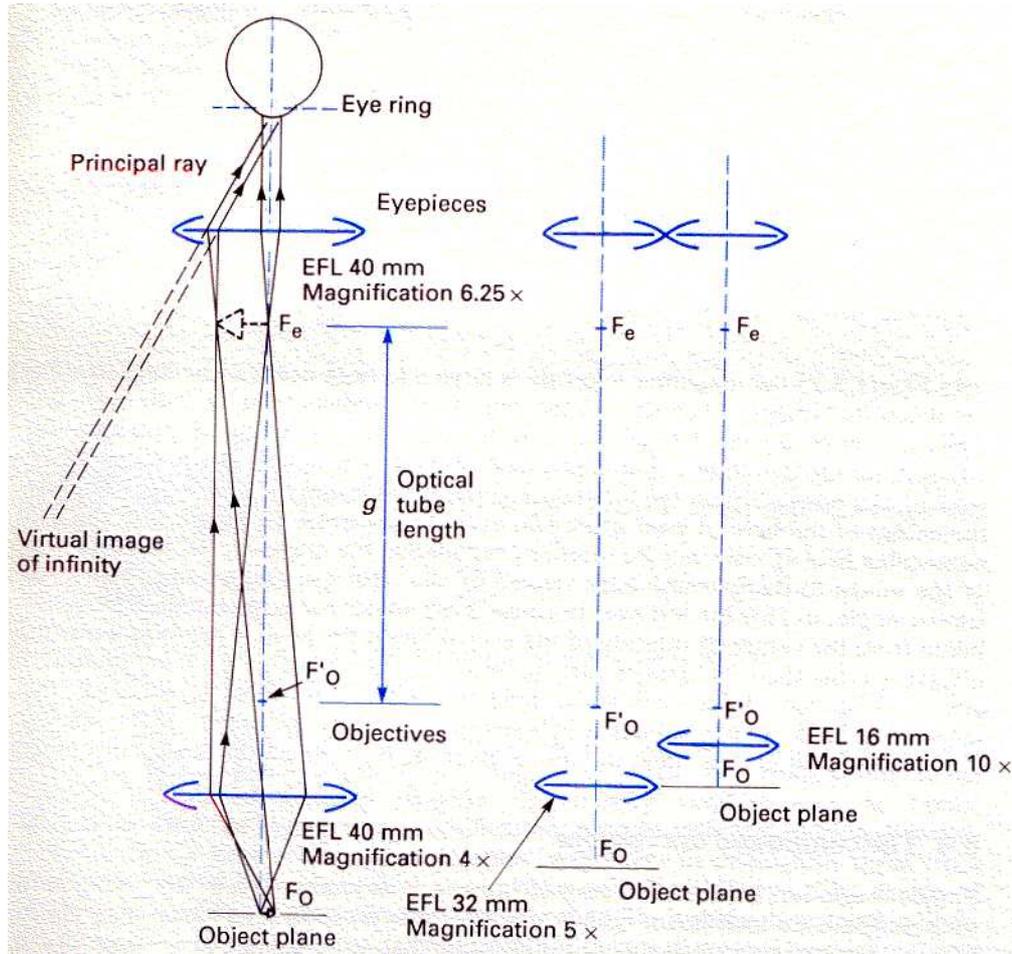


Figura 9. Microscopio composto - schema di funzionamento.

Le cose si complicano quando obiettivi di diverse focali sono montati su una torretta a revolver in modo da poter essere rapidamente sostituiti l'uno all'altro dall'osservatore, che può ottenere così diversi valori dell'ingrandimento. Si perderebbe la facilità d'uso se lo strumento dovesse essere rimesso a fuoco ogni volta. Gli obiettivi sono invece progettati per porre l'immagine I' a una distanza fissa dall'oggetto. Questa distanza comprende la distanza parfocale dall'oggetto all'estremità della montatura dell'obiettivo che si avvita al tubo del microscopio (posta normalmente a 32,25 mm) più 150 mm di lunghezza meccanica del tubo in modo che il fuoco oggetto dell'oculare si trovi 10 mm all'interno del tubo. Questo principio della **parfocalità** non è compatibile con una lunghezza ottica fissa del tubo e per questo con gli obiettivi moderni la lunghezza ottica effettiva del tubo varia con l'ingrandimento, come è mostrato nella figura 10.

L'ingrandimento del microscopio composto

L'ingrandimento di un microscopio composto avviene in due stadi. Con un obiettivo di focale equivalente f'_{ob} l'immagine intermedia avrà un ingrandimento trasversale

$$I_{ob} = \frac{-g}{f'_{ob}} \quad (9)$$

dove g è la lunghezza ottica del tubo e il segno negativo indica un'immagine capovolta. Il valore di I_{ob} è normalmente inciso (senza il segno negativo) sul corpo dell'obiettivo, per esempio $20\times$ o $20:1$.

Per l'oculare vale la stessa formula che per la lente d'ingrandimento,

$$I_{oc} = \frac{q}{f'_{oc}} \quad (10)$$

dove q è la distanza convenzionale di visione distinta. Questo valore è pure inciso sull'oculare.

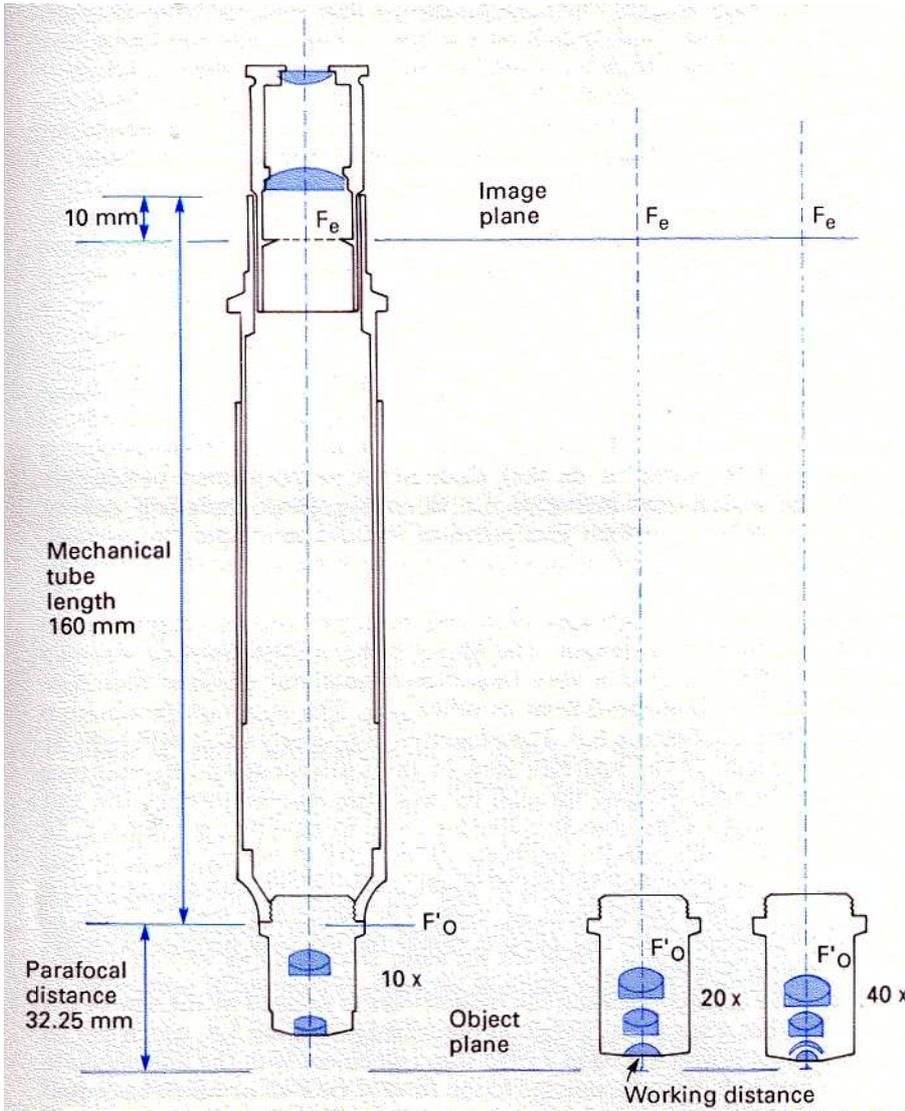


Figura 10. Cambiamento della lunghezza ottica dal tubo al variare dell'ingrandimento.

L'ingrandimento complessivo del microscopio composto usato ai suoi punti coniugati corretti e con l'immagine finale all'infinito è quindi dato da

$$I_w = I_{ob} \times I_{oc} = (-) \frac{g}{f'_{ob}} \times \frac{q}{f'_{oc}} = \frac{-160}{f'_{ob}} \times \frac{-250}{-f'_{oc}} = - \frac{\varphi_{ob} \varphi_{oc}}{25} \quad (11)$$

dove φ_{ob} e φ_{oc} e sono espressi in diottrie.

Il potere risolutivo del microscopio, ossia la sua capacità di fornire immagini distinte di particolari minuti dell'oggetto, dipende dall'**apertura numerica** dell'obiettivo. Per apertura numerica (AN) dell'obiettivo si intende (figura 11) il prodotto del seno dell'angolo di apertura α del cono di luce accettato dall'obiettivo (ossia l'angolo tra l'asse ottico e il raggio più esterno che l'obiettivo può accettare) per l'indice di rifrazione del mezzo interposto tra l'oggetto e l'obiettivo:

$$A.N. = n \sin \alpha \quad (12)$$

Se il mezzo interposto tra l'oggetto (o il vetrino coprioggetto) e l'obiettivo è aria ($n = 1$) il massimo valore teorico di apertura numerica è 1. Se invece lo spazio tra l'oggetto e l'obiettivo è riempito con un liquido (sono utilizzati acqua, con $n = 1,333$, glicerina, con $n = 1,459$, o olio di cedro, con $n = 1,515$) si possono raggiungere valori di apertura numerica fino a circa 1,40.

In pratica l'ingrandimento massimo che si può ottenere con un microscopio senza che l'immagine perda di nitidezza è pari a circa 1000 volte l'apertura numerica dell'obiettivo: con un'apertura numerica di 1,40, per esempio, si può arrivare al massimo a 1400 ingrandimenti.

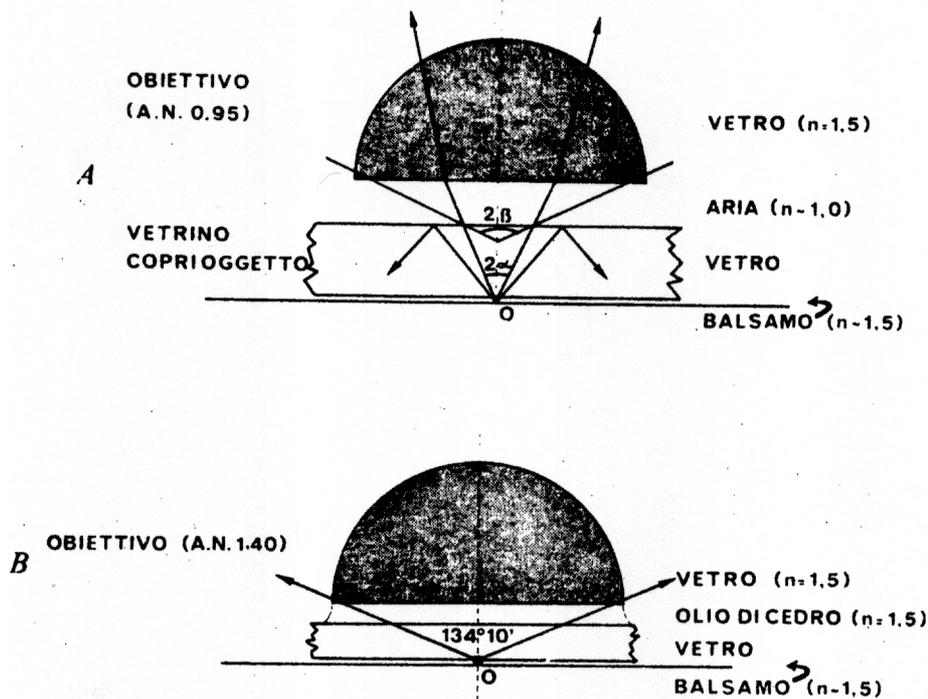


Figura 11. Apertura numerica dell'obiettivo. In A un obiettivo a secco con apertura numerica pari a 0,95. In B un obiettivo ad immersione d'olio nel quale l'angolo di emissione della luce è sfruttato completamente e l'apertura numerica è pari a 1,40.

Sulla maggior parte degli obiettivi è incisa l'indicazione dell'ingrandimento, l'apertura numerica e a volte la focale. L'ingrandimento è quello che si ottiene quando l'obiettivo è usato in corrispondenza dei suoi punti coniugati e quindi con la lunghezza ottica del tubo per cui è stato progettato. Gli obiettivi per microscopi hanno solitamente poteri molto elevati e le loro prestazioni ottiche decadono rapidamente se sono usati a distanze coniugate non corrette. Quando sono indicati sia l'ingrandimento sia la focale è semplice calcolare le distanze coniugate e quindi la lunghezza ottica del tubo, come sarà mostrato più avanti.

Il campo di vista del microscopio composto

La dimensione massima dell'oggetto visibile attraverso il microscopio è detta **campo oggetto lineare**.

Per evitare aberrazioni troppo forti il valore massimo della **grandezza apparente immagine**, ossia la tangente dell'angolo ω'_2 sotto il quale è vista l'immagine virtuale data dall'oculare, è limitata normalmente a 18° , per cui (figura 12), se l'immagine virtuale è posta a 250 mm dall'occhio, si ha

$$2y'_2 = 2 \operatorname{tg}(18^\circ) \times (-250 \text{ mm}) \tag{13}$$

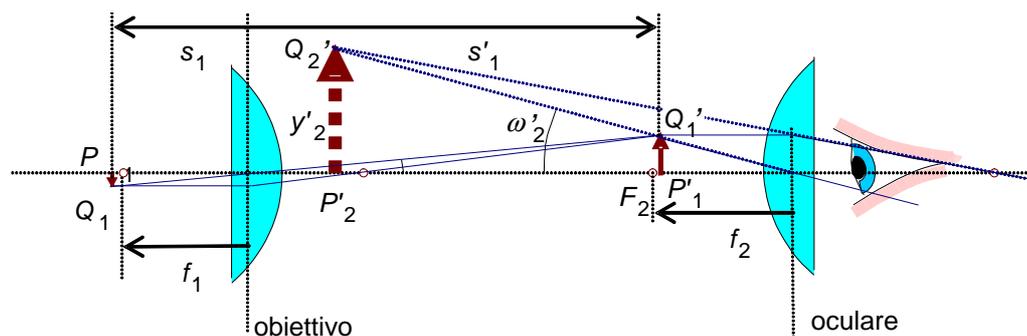


Figura 12. Schema del microscopio composto - osservazione visuale.

Le dimensioni del campo oggetto lineare si ottengono dividendo l'espressione precedente per l'ingrandimento, ossia

$$2y_1 = \frac{2y'_2}{l_\omega} = \frac{-2 \times 250 \text{ mm} \times \text{tg } 18^\circ}{l_\omega} \quad (14)$$

Se per esempio $l = -100$, risulta $2y_1 = 5,625 \text{ mm}$.

Si può notare che le dimensioni massime dell'oggetto visibile sono inversamente proporzionali all'ingrandimento totale: maggiore è l'ingrandimento, minore sarà la porzione di oggetto visibile; questo è un altro fattore che consiglia di limitare l'ingrandimento massimo da utilizzare; già si è visto come, con l'ingrandimento, diminuisce la profondità di campo (valgono infatti, per il microscopio composto, le stesse formule che si applicano al microscopio semplice).

Il microscopio utilizzato per la microfotografia

Si esamini ora la figura 13: lo stesso microscopio della figura precedente dà questa volta un'immagine reale, situata in posizione finita e a destra dell'oculare. Come si può dedurre dal confronto tra le figura 12 e 13, a parità di lenti (focali) e della loro distanza reciproca, si ottiene la nuova disposizione allontanando il corpo del microscopio dal campione (oggetto) in esame, sebbene di una quantità minima. La disposizione della figura 13 è necessaria per la microfotografia, quando al microscopio viene collegata una macchina fotografica, o quando si voglia proiettare l'immagine fornita dal microscopio su uno schermo, o ancora se un ipermetrope (il cui punto remoto cade dietro l'occhio) voglia utilizzare lo strumento senza l'uso di occhiali.

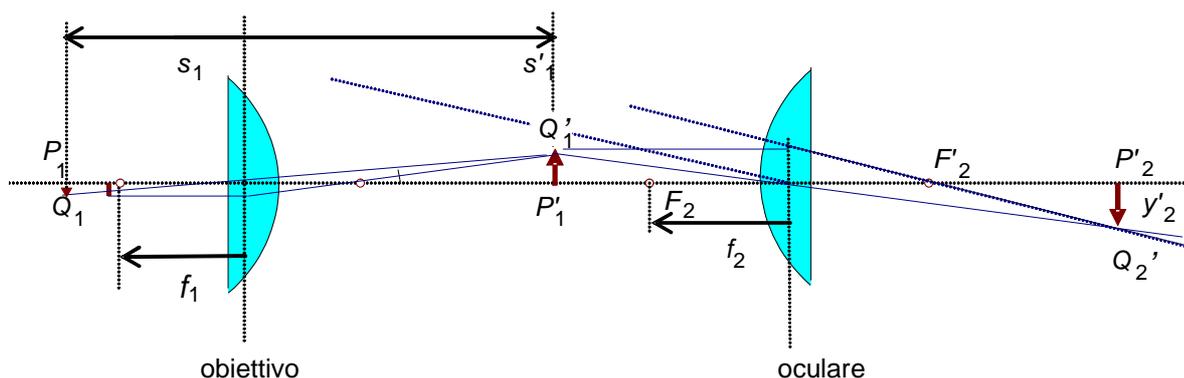


Figura 13. Schema del microscopio composto - disposizione per microfotografia.

L'obiettivo

Sia l'obiettivo che l'oculare sono sempre costituiti da sistemi di lenti. Infatti l'obiettivo, per avere un potere elevato, dovrebbe avere facce molto incurvate e coprire un campo non piccolo: sarebbe quindi soggetto ad aberrazioni importanti, per ridurre le quali occorre sostituire alla singola lente più elementi, come mostra la figura 10. Così gli obiettivi acromatici sono corretti per due lunghezze d'onda, generalmente il rosso e il blu, tramite un doppietto, che consente anche la correzione dell'aberrazione sferica. Gli obiettivi apocromatici (tripletti) sono corretti per tre lunghezze d'onda, rosso, blu e giallo, e per l'aberrazione sferica per due lunghezze d'onda: sono più pregiati e costosi dei precedenti.

Sia gli obiettivi acromatici che quelli apocromatici non hanno però la correzione dell'aberrazione cromatica d'ingrandimento, per cui vengono usati con oculari che presentano la stessa aberrazione, ma di segno opposto, e per questo vengono detti oculari compensatori. Se, oltre all'aberrazione cromatica, è corretta anche la curvatura di campo, si hanno obiettivi plan-acromatici o plan-apocromatici; vengono utilizzati insieme ad oculari complanatici e sono particolarmente adatti per microfotografie e proiezioni.

Tutte queste aberrazioni verranno descritte in modo particolareggiato in un capitolo successivo, ma è bene sottolineare fin d'ora che la loro correzione costituisce il compito più difficile nella progettazione di un qualunque sistema ottico. Si tenga presente anche che l'immagine data dall'obiettivo o **immagine intermedia**, diventa oggetto per l'oculare: questo la

ingrandisce ulteriormente, compresi tutti i difetti in essa presenti; questo significa che non è possibile che l'oculare migliori l'immagine o renda visibili particolari che non siano già presenti nell'immagine intermedia.

Se l_{ob} e f'_{ob} sono indicati sull'obiettivo, la lunghezza ottica g del tubo per cui è stato progettato è data da $g = l_{ob} \times f'_{ob}$ e la distanza dell'immagine dal piano principale immagine è $s'_{ob} = g + f'_{ob}$. Poiché l'obiettivo è un sistema di lenti complesso il piano principale immagine è generalmente al suo interno e per obiettivi di potere elevato la distanza tra la prima lente e l'oggetto, ossia la **distanza di lavoro**, è molto piccola. Il progetto dell'obiettivo mira a ottenere la migliore qualità possibile per l'immagine con la massima apertura numerica compatibile con un costo accettabile.

L'oculare

L'oculare ingrandisce l'immagine intermedia I' per ottenere un'immagine finale I'' all'infinito o a una distanza minore per la quale si abbia una visione confortevole. L'oculare più semplice è una singola lente d'ingrandimento. Di norma però gli oculari sono costituiti da almeno due lenti separate: la prima lente, rivolta verso l'obiettivo, è chiamata **lente di campo**; la seconda lente, rivolta verso l'occhio, è chiamata **lente dell'occhio**. La funzione della lente di campo consiste nell'indirizzare verso la lente dell'occhio tutti i raggi che concorrono alla formazione dell'immagine intermedia. La lente dell'occhio ha invece la finzione di ingrandire l'angolo visuale.

Come vedremo più avanti, tutti gli oculari si rifanno a due tipi fondamentali: l'oculare di Huygens, formato da due lenti piano-convesse con la superficie piana rivolta verso l'occhio, e l'oculare di Ramsden, formato da due lenti piano-convesse con le superfici curve affacciate. Da questi due modelli fondamentali, oggi non più in uso, sono derivati molti altri tipi di oculari, come l'oculare ortoscopico (esente da distorsione), l'oculare compensatore (per la compensazione dell'aberrazione cromatica di ingrandimento), l'oculare complanatico (esente da curvatura di campo). Alcuni oculari non possono essere utilizzati come lenti d'ingrandimento perché il loro fuoco oggetto è all'interno del sistema di lenti; la formula per l'ingrandimento dell'oculare è comunque sempre la stessa formula (4) che è stata ricavata per le lenti d'ingrandimento.

I diaframmi

La regolazione dei fasci luminosi che attraversano il microscopio avviene tramite due diaframmi, di apertura e di campo. Il diaframma di apertura (DA) viene posto sul fuoco immagine F'_1 dell'obiettivo: esso costituisce quindi la pupilla di uscita dell'obiettivo, mentre la pupilla di entrata, coniugata con il diaframma rispetto all'obiettivo, risulta all'infinito. A sua volta l'immagine del diaframma di apertura formata dall'oculare costituisce la pupilla di uscita del sistema, che viene a trovarsi sul piano focale immagine del microscopio. E' in quella posizione, poco oltre il fuoco immagine F'_2 dell'oculare (normalmente tra 10 e 20 mm dietro l'oculare), che convergono tutti i raggi emergenti dallo strumento e quindi lì andrà posizionato l'occhio dell'osservatore per raccogliere tutti i raggi e avere il massimo della luminosità.

Le dimensioni del diaframma di entrata andrebbero calcolate in modo che la pupilla di uscita del microscopio abbia diametro all'incirca uguale a quello dell'iride dell'occhio. Se la pupilla dell'occhio è più piccola della pupilla di uscita dello strumento l'iride dell'osservatore diviene il diaframma di apertura del sistema composto dal microscopio e dall'occhio si può muovere un poco l'occhio senza che si perda l'illuminazione del campo di vista, e le condizioni di visione divengono molto confortevoli, ma diminuisce la luminosità perché solo parte dell'energia luminosa che attraversa il microscopio viene raccolta dall'osservatore. poiché però l'obiettivo del microscopio è una lente di corta focale che raramente ha un diametro superiore a 10 mm, il diametro della pupilla di uscita del microscopio è solitamente di 1 o 2 mm, minore del diametro della pupilla di entrata dell'occhio.

Quando l'occhio è nella posizione corretta il campo di vista è definito dal diametro dell'oculare. Vi è un effetto di vignettatura, che può essere fastidioso. Per questo normalmente si pone un diaframma di campo coincidente con l'immagine intermedia I' . In questo modo si ha un bordo nitido del campo di vista che ha tutto la stessa luminosità purché l'occhio si trovi nella posizione della pupilla di uscita dello strumento. Poiché l'immagine intermedia si trova nel fuoco oggetto F_2 dell'oculare, la sua immagine, ossia l'apertura di uscita, sarà all'infinito. L'apertura di entrata, invece, visto che il diaframma di campo coincide con y'_1 , sarà coniugata con l'oggetto y_1 , cioè è sovrapposta al campione in osservazione, limitandone le dimensioni, ossia regolando

il campo di vista. Per molti microscopi viene indicato il cosiddetto **coefficiente di campo**, che indica l'altezza dell'immagine intermedia $2y'_i$; da qui si può risalire facilmente alla dimensione massima per l'oggetto in osservazione.

L'illuminazione

Il campione da osservare viene posto sotto lo strumento, su un tavolino portaoggetti solidale con lo strumento; si rende necessaria pertanto una conveniente illuminazione. I campioni da esaminare, a seconda della loro consistenza o dimensione, possono essere osservati in luce riflessa o, più spesso, con luce trasmessa. Il primo caso si riferisce a corpi opachi che vengono illuminati obliquamente e appaiono luminosi per luce riflessa su uno sfondo più scuro (da non confondere con la microscopia in campo oscuro, che è una tecnica particolare che permette di mettere in evidenza elementi di piccole dimensioni su uno sfondo scuro). Il secondo caso si ha illuminando il preparato (costituito da uno strato sottilissimo e quindi trasparente) per trasmissione: il preparato assorbe e diffonde parte dei raggi luminosi che lo attraversano e appare quindi su uno sfondo più chiaro illuminato uniformemente.

E' quindi necessario dotare il microscopio di un opportuno sistema di illuminazione. A questo si provvede, nei casi più semplici, con uno specchietto che convoglia sull'oggetto il fascio luminoso proveniente da una sorgente, costituita da una lampada opalina, affinché l'illuminazione risulti uniforme. Più spesso si usa un **condensatore**, cioè una lente o un sistema di lenti, posto sotto il preparato, che serve a convogliare correttamente su di esso la giusta quantità di luce.

Il sistema di illuminazione più diffuso è il sistema secondo Köhler (figura 14). Esso è costituito da: 1) una sorgente luminosa (S); 2) una lente colletttrice (CC); 3) un diaframma di campo (DC); un diaframma di apertura (DA); un condensatore (COND). La sorgente è costituita da una microlampada a filamento molto piccolo, ma di elevata luminanza. La lente colletttrice forma l'immagine della sorgente nella posizione in cui è situato il diaframma di apertura DA. Esso diventa a questo punto la sorgente di luce per il microscopio; regolando correttamente la sua apertura si può variare il valore dell'apertura numerica del condensatore (sul condensatore è indicata normalmente l'apertura numerica a diaframma tutto aperto), che per ottenere condizioni di osservazione ottimali dovrà essere uguale all'apertura numerica dell'obiettivo del microscopio.

Il diaframma di apertura DA, che è anche la pupilla di entrata del condensatore, regola la quantità di luce entrante, ed è situato nel fuoco oggetto del condensatore: in questo modo tutti i raggi che raggiungono il campione da esaminare provenendo da uno stesso punto del piano del diaframma di apertura sono paralleli tra loro, e ogni punto del campione risulta quindi illuminato nello stesso modo.

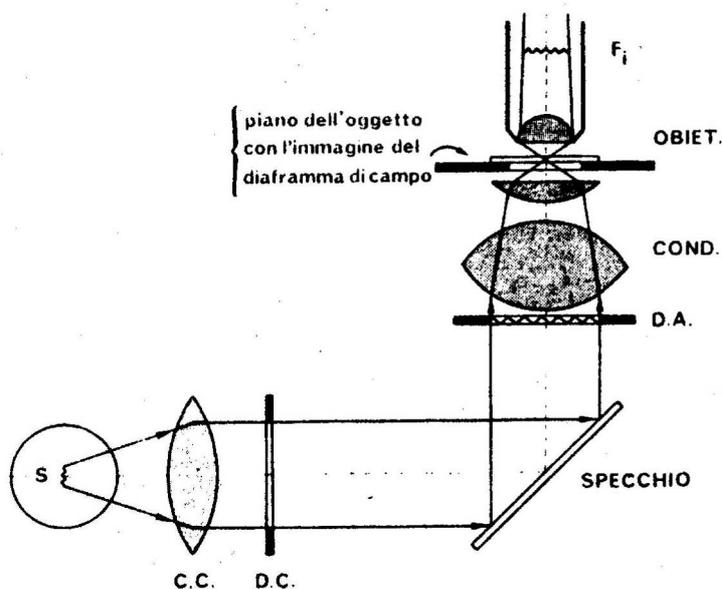


Figura 14. Il sistema di illuminazione secondo Köhler.

Il condensatore, inoltre, forma l'immagine del diaframma di campo della lente collettiva in corrispondenza del preparato, in modo che osservata attraverso il microscopio l'immagine del diaframma di campo appare sovrapposta all'immagine del preparato. Il diaframma di campo della lente collettiva regola quindi le dimensioni del campo illuminato e delimitato nitidamente.

Esempio

Sull'obiettivo di un microscopio è indicato:

20× AN 0,5 EFL 9 mm

mentre sull'oculare è indicato 12,5×. Calcolare la lunghezza ottica del tubo e la distanza tra le lenti, supposte sottili, quando il microscopio fornisce un'immagine finale all'infinito.

Calcolare anche quanto deve essere avvicinato lo strumento all'oggetto o quanto deve essere avvicinato l'oculare all'obiettivo per porre l'immagine finale alla distanza di visione distinta. Fare un disegno in scala di quest'ultimo caso e calcolare l'ingrandimento finale in entrambi i casi.

L'ingrandimento dell'oculare è calcolato mediante la formula

$$I_{oc} = \frac{q}{f'_{oc}}$$

dove q è -250 mm, la distanza convenzionale di visione distinta (misurata dalla lente dell'oculare). Nel nostro caso quindi f'_{oc} deve essere 20 mm.

Sull'obiettivo è indicata una focale equivalente di 9 mm e perciò la lunghezza ottica del tubo per cui l'obiettivo è progettato, che si ottiene dalla formula $l_{ob} = g/f'_{ob}$, è

$$g = 180 \text{ mm}$$

Considerando sia l'obiettivo sia l'oculare come lenti sottili (cosa che molto probabilmente non corrisponde alla realtà) la distanza a cui si devono trovare l'uno rispetto all'altro perché l'immagine finale sia all'infinito è $9 + 180 + 20 = 209$ mm. L'ingrandimento dello strumento è in questo caso $20 \times 12,5 = 250\times$.

La distanza dall'oculare dell'immagine intermedia perché l'immagine finale sia a 250 mm dall'oculare si ottiene mediante la formula

$$\frac{1}{-250} = \frac{1}{s_{oc}} + \frac{1}{20}$$

da cui si ricava

$$s_{oc} = -18,5 \text{ mm}$$

L'oculare deve quindi essere avvicinato all'obiettivo di 1,5 mm, l'ingrandimento dell'oculare è ora $I_{oc} + 1$ e l'ingrandimento complessivo diviene $20 \times 13,5 = 270\times$.

Si può anche spostare l'immagine intermedia perché sia a 190,5 mm dall'obiettivo. La distanza dell'oggetto dall'obiettivo è data allora da

$$\frac{1}{+190,5} = \frac{1}{s_{ob}} + \frac{1}{9}$$

da cui si ricava

$$s_{ob} = -9,4463 \text{ mm}$$

La distanza di lavoro nel caso in cui l'immagine finale sia all'infinito è invece data da

$$\frac{1}{+189} = \frac{1}{s_{ob}} + \frac{1}{9}$$

da cui si ricava

$$s_{ob} = -9,45 \text{ mm}$$

Quindi lo strumento deve essere avvicinato all'oggetto solo di 0,004 m e il nuovo

ingrandimento è dato da

$$\frac{190,5}{9,4463} \times 13,5 = 272 \times$$

Si ha perciò solo un incremento molto piccolo dell'ingrandimento rispetto al caso in cui si sposti l'oculare.

E' interessante notare che la profondità di fuoco associata a un occhio con accomodazione normale (4 D) è di soli 4 μm . Anche tollerando uno sfuocamento equivalente a 0,25 D a ciascun estremo di questo intervallo, la profondità di fuoco si incrementa solo a 4,5 μm . Quindi la montatura meccanica del microscopio deve essere molto accurata e molto stabile.

Esercizi

1. Indicare esattamente che cosa si intende per ingrandimento di un microscopio. Qual è l'ingrandimento di un microscopio che ha un obiettivo con focale di 16 mm, un oculare con focale di 32 mm e una lunghezza del tubo di 160 mm?
2. Un microscopio composto ha un obiettivo con focale di 15 mm e un oculare con focale di 30 mm, con una separazione tra le lenti di 180 mm. Qual deve essere la posizione dell'oggetto e qual è l'ingrandimento del microscopio messo a fuoco per una persona emmetrope con accomodazione rilassata?
3. Il microscopio dell'esercizio 2 è usato per formare un'immagine reale su una lastra fotografica posta a 0,5 m dall'oculare (fotomicrografia). Quanto deve essere mosso il microscopio e in che direzione rispetto all'oggetto dell'esercizio 2 e quale sarà l'ingrandimento trasversale dell'immagine?
4. Fare un disegno che mostri il percorso della luce attraverso un microscopio composto e dedurre la formula per l'ingrandimento dello strumento.
5. Due lenti convesse sottili poste a 250 mm l'una dall'altra formano un microscopio composto il cui ingrandimento angolare è 20. Se la focale della lente che rappresenta l'oculare è di 40 mm, qual è la focale dell'altra lente?

7. Strumenti ottici – Il cannocchiale

Il **cannocchiale** o **telescopio**, come noto, è uno strumento di osservazione e di puntamento. Esso serve per l'osservazione di oggetti lontani. Nella sua forma più schematica è costituito da due lenti, una rivolta verso gli oggetti da osservare, detta obiettivo, e l'altra detta oculare, rivolta verso l'occhio. Normalmente le due lenti sono sostituite da due sistemi di lenti, che conservano gli stessi nomi, per correggere le aberrazioni ed esaltare particolari caratteristiche (potere risolutivo, apertura di campo, ecc.) e ottenere particolari condizioni (limitazione delle dimensioni di ingombro, immagini soddisfacenti, ecc.). Se i due sistemi ottici sono entrambi positivi il cannocchiale prende il nome di cannocchiale di osservazione o astronomico o kepleriano. Se invece l'oculare è negativo il cannocchiale è detto galileiano.

Esistono cannocchiali destinati a usi particolari, aventi caratteristiche ottiche e meccaniche adatte all'uso specifico cui sono destinati. Abbiamo così per esempio i cannocchiali di puntamento, i cannocchiali anallattici e i cannocchiali periscopici o panoramici.

Il cannocchiale kepleriano

Un sistema telescopico ha un obiettivo e un oculare ed è perciò uno strumento composto simile a un microscopio, ma l'obiettivo ha un potere molto inferiore e può quindi avere un diametro più grande. I telescopi possono utilizzare elementi riflettenti come gli obiettivi di grande diametro dei moderni sistemi astronomici.

Nell'uso normale la luce proveniente da un oggetto distante arriva come un fascio collimato o quasi collimato ed è messa a fuoco dall'obiettivo nel suo fuoco immagine F'_{ob} come mostra la figura 1. Se il fuoco immagine dell'obiettivo coincide con il fuoco oggetto dell'oculare la luce è ricollimata attraverso la pupilla d'uscita e un occhio emmetrope non accomodato posto in coincidenza della pupilla d'uscita vede un'immagine nitida ingrandita all'infinito. Si dice che il cannocchiale è accomodato all'infinito.

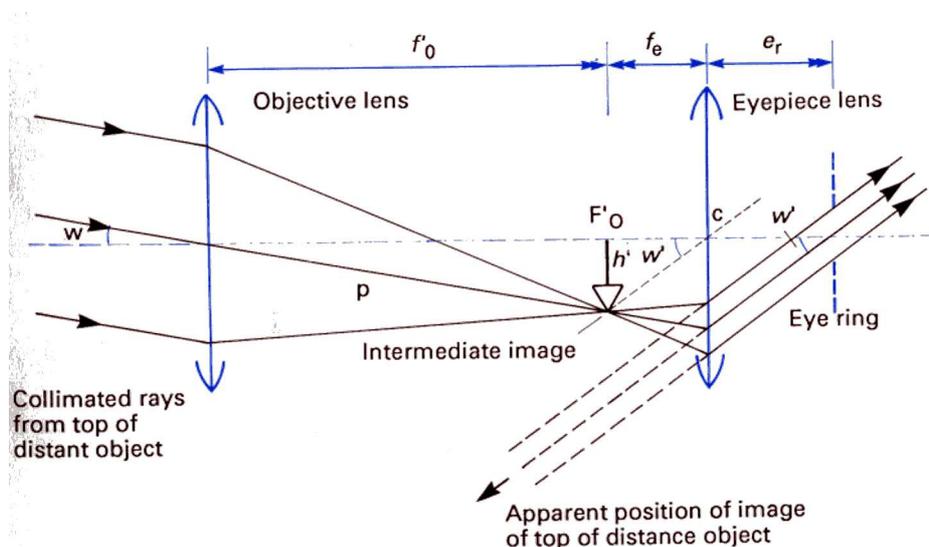


Figura 1. Schema del cannocchiale kepleriano.

Sfortunatamente, l'immagine vista attraverso il sistema mostrato nella figura 1 è capovolta. Questo tipo di strumento è comunemente chiamato **cannocchiale astronomico**: se è utilizzato per osservazioni astronomiche il fatto che l'immagine sia capovolta non disturba.

L'ingrandimento

Quando il cannocchiale è accomodato all'infinito il fuoco immagine dell'obiettivo coincide con il fuoco oggetto dell'oculare. La separazione e è data da:

$$e = f'_1 - f_2 = f'_1 + f'_2 = \frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2} \quad (1)$$

Ponendo questo valore nell'equazione per il potere equivalente di un sistema di due

lenti sottili si ottiene

$$\varphi_e = \varphi_1 + \varphi_2 - e\varphi_1\varphi_2 = \varphi_1 + \varphi_2 - \left(\frac{1}{\varphi_1} + \frac{1}{\varphi_2}\right)\varphi_1\varphi_2 = 0 \quad (2)$$

Un sistema di questi tipo, che ha potere equivalente nullo, è detto **sistema afocale**: poiché ha una focale infinita, i piani principali e i fuochi sono posti all'infinito. Un'importante caratteristica di questi sistemi è che l'ingrandimento trasversale è lo stesso per tutti i punti coniugati. Nella figura 2, per esempio, un raggio di luce parallelo all'asse ottico nello spazio oggetto è rifratto attraverso il fuoco comune ed emerge quindi parallelo all'asse ottico nello spazio immagine. Poiché i triangoli tra le lenti sono simili è chiaro che la distanza y del raggio oggetto dall'asse ottico è legata a y' , la distanza del raggio immagine dall'asse ottico, da

$$\frac{y'}{y} = \frac{f_{oc}}{f'_{ob}} \quad (3)$$

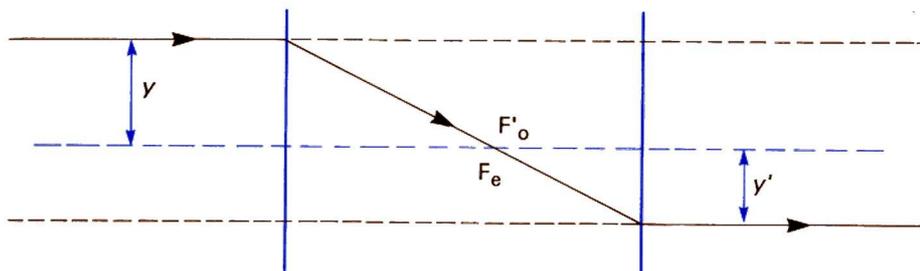


Figura 2. Schema di sistema afocale.

Un oggetto posto in un punto qualsiasi del raggio oggetto formerà un'immagine in un punto del raggio immagine. Quindi un oggetto esteso di altezza $h = y$ avrà un'immagine di altezza $h' = y'$. L'ingrandimento trasversale perciò ha un valore costante l dato da

$$l = \frac{h'}{h} = \frac{f_{oc}}{f'_{ob}} \quad (4)$$

Quando il sistema afocale ha lenti di diversa potenza (obiettivo e oculare) ed è usato come sistema telescopico come nella figura 1, si ottiene un ingrandimento perché l'occhio vede l'immagine di oggetti fuori asse sotto un angolo maggiore di quando guarda direttamente l'oggetto. È l'**ingrandimento angolare** fornito dal cannocchiale che ne caratterizza le prestazioni, più che l'ingrandimento trasversale dato dalla formula (4). L'ingrandimento angolare l_ω del cannocchiale è definito come il rapporto

$$l_\omega = \frac{\text{Angolo sotteso dall'immagine vista dall'occhio}}{\text{Angolo sotteso dall'oggetto visto senza il cannocchiale}} \quad (5)$$

A motivo delle grandi distanze con cui si ha a che fare l'angolo sotteso dall'oggetto rispetto all'obiettivo del cannocchiale è in pratica uguale a quello sotteso rispetto all'occhio senza cannocchiale. Nella figura 1 questi angoli sono indicati come ω e ω' . Poiché l'immagine intermedia è nel piano focale oggetto dell'oculare la luce emerge parallela al raggio ausiliario c , che quindi sottende un angolo ω' rispetto all'asse ottico. Usando i triangoli delimitati dalle lenti abbiamo, dall'equazione 5,

$$l_\omega = \frac{\omega'}{\omega} \approx \frac{\text{tg } \omega'}{\text{tg } \omega} = \frac{h'}{f_{oc}} \times \frac{f_{ob}}{h'} = \frac{f_{ob}}{f_{oc}} \quad (6)$$

Quindi l'ingrandimento angolare è maggiore di uno quando la focale dell'obiettivo è maggiore di quella dell'oculare. contrariamente a quanto avviene con l'ingrandimento trasversale l , che è maggiore di uno quando f_{oc} è maggiore di f_{ob} ; si ha in effetti

$$l_\omega = \frac{1}{l} \quad (7)$$

Il campo reale e il campo apparente

Sul piano dove si formano le immagini prodotte dall'obiettivo è posto il **diaframma di**

campo il cui diametro limita il campo reale del cannocchiale. Se indichiamo con ϕ_{DC} il diametro del diaframma di campo e con ω_0 l'angolo sotteso da un oggetto la cui immagine si trova sul bordo del diaframma di campo, si avrà:

$$\phi_{DC} = 2f'_{ob} \operatorname{tg} \omega_0 \quad (8)$$

Il **campo reale** complessivo del cannocchiale risulta uguale a $2\omega_0$. Per campo reale di un cannocchiale si intende quindi l'angolo sotto cui è visto il foro del diaframma di campo dal nodo immagine dell'obiettivo; esso rappresenta l'angolo di apertura del cono, avente il vertice nel nodo oggetto dell'obiettivo e per asse l'asse ottico dello strumento, dentro cui si devono trovare i punti dello spazio oggetto che risultano visibili entro il cannocchiale.

L'immagine, rovesciata rispetto al vero, viene osservata tramite l'**oculare** che serve ad ingrandire l'immagine. Attraverso l'oculare l'occhio vede l'immagine sotto un angolo molto maggiore di quello vero, corrispondente al **campo apparente**. Il campo apparente è dato dall'angolo di apertura del cono le cui generatrici sono rette coniugate delle generatrici del cono del campo reale. Esso risulta uguale all'angolo sotto cui il foro del diaframma di campo è visto dal nodo oggetto dell'oculare, ed è dato dal campo reale moltiplicato per l'ingrandimento angolare dello strumento.

La pupilla di uscita

La pupilla d'uscita del sistema costituito dal cannocchiale e dall'occhio è la pupilla dell'occhio o la pupilla d'uscita del cannocchiale, a seconda di quale tra le due è più piccola. Nel secondo caso l'obiettivo funge da diaframma di apertura. Come diaframma di campo può essere utilizzato lo stesso oculare e poiché esso è vicino all'occhio si può ottenere un campo di vista molto ampio, ma la qualità ottica ai bordi è generalmente scarsa a causa delle aberrazioni dell'oculare. Normalmente si ottiene un bordo netto del campo di vista inserendo un diaframma di campo in coincidenza dell'immagine intermedia.

La **pupilla di entrata** *PE* del cannocchiale è normalmente l'obiettivo, che funge da diaframma di apertura. La **pupilla di uscita** *PU* del cannocchiale (o cerchio oculare) è l'immagine della pupilla di entrata prodotta dall'oculare. Si calcola l'**ingrandimento pupillare** come rapporto tra il diametro della pupilla di entrata e quello della pupilla di uscita:

$$I_p = \frac{\phi_{PE}}{\phi_{PU}} \quad (9)$$

Si può dimostrare, considerando la figura 2, che l'ingrandimento pupillare ha lo stesso valore dell'ingrandimento angolare dato dalla relazione (6).

L'obiettivo del cannocchiale e la pupilla di uscita del cannocchiale risultano essere rispettivamente anche la pupilla di entrata e la pupilla di uscita del sistema costituito dal cannocchiale e dall'occhio, se la pupilla di uscita del cannocchiale è più piccola della pupilla dell'occhio. Durante l'osservazione la pupilla dell'occhio è posta in coincidenza con la pupilla di uscita *PU* dello strumento, in modo da raccogliere tutti i raggi luminosi che fuoriescono da esso.

È opportuno far coincidere le dimensioni della pupilla d'uscita del cannocchiale con quelle della pupilla dell'occhio. La pupilla dell'occhio però varia da un minimo di circa 2 mm a un massimo di circa 8 mm a seconda delle condizioni di illuminazione dell'ambiente. Quindi la coincidenza non è sempre ottenibile. In genere i cannocchiali hanno pupilla d'uscita di 2 o 3 mm se destinati alla visione diurna, 6 mm se destinati alla visione notturna; è questo il valore massimo che deve avere la pupilla d'uscita dello strumento, in quanto un valore maggiore sarebbe inutile e produrrebbe una parziale diaframmatrice dell'obiettivo.

Uno strumento da 12 centimetri di diametro, per esempio, deve quindi essere utilizzato con un ingrandimento minimo di 20 volte, al quale corrisponde una pupilla di uscita di 6 mm. L'ingrandimento che dà una pupilla di uscita uguale a quello della pupilla dell'occhio si dice equipupillare:

$$I_{eq} = \frac{\phi_{PE} \text{ (mm)}}{6} \quad (10)$$

Per variare l'ingrandimento si cambia l'oculare, tenendo presente quale valore assume

la pupilla di uscita; in ogni caso questa non deve essere troppo piccola perché ne risulterebbe faticosa l'osservazione.

Le dimensioni della pupilla d'uscita vengono fissate dai costruttori tenendo presenti anche altre considerazioni. Se uno strumento deve essere usato in condizioni tali per cui l'osservatore non possa rimanere ben fermo durante l'osservazione o abbia necessita di trovare immediatamente la mira, come avviene, per esempio, nei cannocchiali di puntamento usati sulle armi da fuoco, è opportuno che la pupilla d'uscita sia maggiore di quella dell'occhio, in modo che piccoli movimenti dell'occhio non facciano perdere di vista la mira dell'osservatore. Se si tratta invece di uno strumento da laboratorio, questo fatto non ha importanza e quindi la pupilla d'uscita può essere anche molto più piccola di quella dell'occhio, senza che l'uso dello strumento presenti inconvenienti.

I cannocchiali e i binocoli sono normalmente caratterizzati dal loro ingrandimento angolare e dal diametro in millimetri dell'obiettivo. Per esempio, un binocolo 8×50 ha un ingrandimento di 8× e gli obiettivi hanno un diametro di 50 mm. Dall'equazione (9) si trova che le pupille di uscita hanno un diametro di 6,25 mm e quindi corrispondono bene alle pupille degli occhi fino a bassi livelli di illuminazione. Un binocolo 10×30, invece, ha pupille di uscita di soli 3 mm di diametro e dà un'immagine che appare scura con bassi livelli di illuminazione quando le pupille degli occhi sono dilatate.

Il potere risolutivo

Si chiama **potere risolutivo** di un cannocchiale l'inverso dell'angolo sotto il quale si vedono due punti oggetto vicini, quando le loro immagini ci appaiono ancora distinte. Spesso si dà il nome di potere risolutivo direttamente all'angolo. Esso dipende da numerosi e molteplici fattori sia ambientali (luminosità e contrasto dell'oggetto osservato, trasparenza del mezzo interposto tra l'oggetto e il cannocchiale, ecc.) sia strumentali (dimensioni della pupilla di entrata, grado di correzione delle aberrazioni dei sistemi ottici, ingrandimento del cannocchiale, ecc.).

Come si studierà in modo più approfondito più avanti, quando la luce attraversa un'apertura circolare di diametro D viene dispersa per effetto del fenomeno della diffrazione entro un cono di ampiezza angolare α (in radianti) data dalla relazione

$$\alpha = \frac{1,22\lambda}{D} \quad (11)$$

circondato da una serie di anelli di debole intensità (disco di Airy) Questa formula stabilisce il limite teorico per il potere risolutivo di un cannocchiale con un obiettivo di apertura D . Affinché risulti $\alpha = 1'' \approx 5 \times 10^{-6}$ rad, considerando un valore medio di $\lambda = 5 \times 10^{-4}$ mm, deve essere

$$D = 1,22 \frac{5 \times 10^{-4}}{5 \times 10^{-6}} \approx 120 \text{ mm}$$

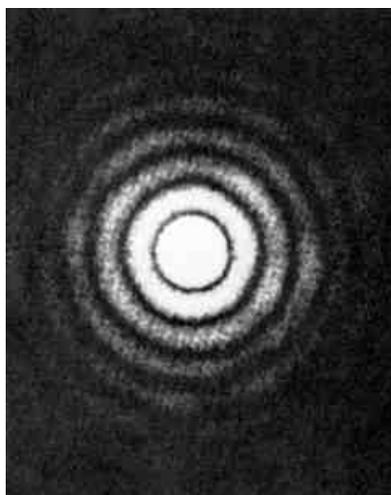


Figura 3. Disco di Airy: immagine di un oggetto puntiforme prodotta da un sistema ottico per effetto della diffrazione.

Ne consegue per il potere risolutivo la formula pratica

$$P_r = 120''/D \quad (12)$$

dove D deve essere espresso in millimetri.

Se lo strumento è utilizzato in congiunzione con l'occhio dell'osservatore, concorre in modo complesso alla determinazione del potere risolutivo anche la presenza dell'occhio. In pratica si ottengono risultati molto ben concordanti con l'esperienza adoperando la formula empirica

$$P_r = \frac{76}{D} e^{0,002I+0,38\frac{D}{I}} \quad (13)$$

dove I è l'ingrandimento ed e è la base dei logaritmi naturali. Il miglior ingrandimento, per un cannocchiale che sia privo di aberrazioni e di altri difetti e in condizioni ottimali di osservazione, risulta allora dato dalla formula

$$I = 13,8\sqrt{D} \quad (14)$$

Valori dell'ingrandimento superiori a quello corrispondente alla formula (14) invece di aumentare il potere risolutivo dello strumento, lo fanno diminuire.

Il raddrizzamento dell'immagine

Si è visto che l'immagine prodotta dal cannocchiale astronomico, o kepleriano, è capovolta. Ciò non costituisce un problema quando il cannocchiale è utilizzato per osservazioni astronomiche, ma se lo strumento è utilizzato per osservazioni terrestri è necessario dotarlo di un opportuno sistema di raddrizzamento dell'immagine.

L'immagine capovolta può essere raddrizzata mediante:

1. un sistema di prismi;
2. un secondo sistema telescopico di basso ingrandimento;
3. un oculare di potere negativo.

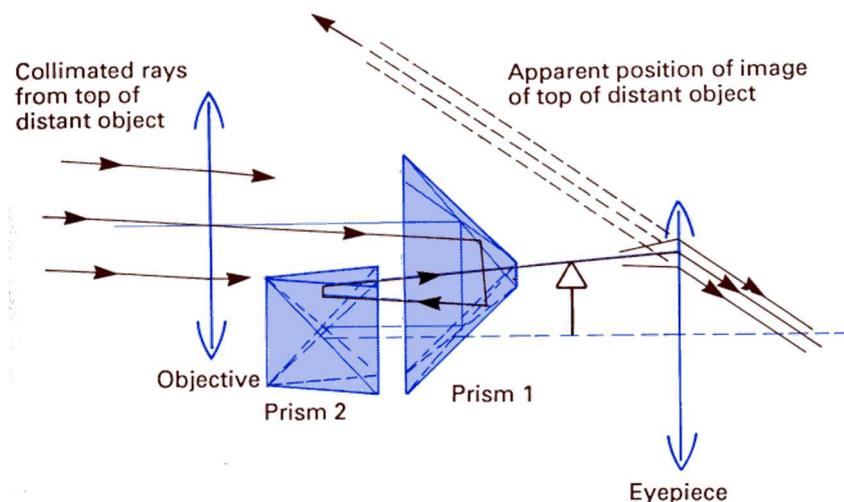


Figura 4. Raddrizzamento dell'immagine mediante due prismi di Porro.

L'uso di un sistemi di prismi per il raddrizzamento dell'immagine è il metodo più comunemente utilizzato. Esso è impiegato normalmente nei binocoli, che sono strumenti nei quali due cannocchiali uguali sono montati su uno stesso supporto in modo da utilizzare entrambi gli occhi per la visione. La soluzione più comune è il sistema di Porro, illustrata dalla figura 4. Essa si basa sull'uso di due prismi a riflessione totale con angolo al vertice di 90°, montati perpendicolarmente l'uno rispetto all'altro. La luce, che nella figura è vista provenire dalla parte superiore dell'oggetto, ha una prima riflessione nel prisma 1 ed è rinviata indietro nella direzione da cui proveniva. Il prisma 2 riflette come se fosse uno specchio singolo perché

il suo vertice si trova nello stesso piano dei raggi di luce. Quindi la luce viene inviata verso l'alto verso l'immagine intermedia ed è poi rifratta verso il basso dall'oculare.

L'uso di questo sistema di raddrizzamento dell'immagine è conveniente nel caso dei binocoli per due motivi: 1) il ripiegamento dell'asse ottico da parte dei prismi rende complessivamente più corto lo strumento, 2) i prismi di Porro spostano gli assi ottici e permettono quindi di porre gli obiettivi più distanti tra loro che gli oculari, consentendo così di utilizzare obiettivi di grande diametro e aumentando l'effetto stereoscopico. Esistono anche strumenti di qualità superiore e più costosi che utilizzano prismi che hanno prismi a tetto centrale e non danno spostamenti dei fasci di luce.

Il secondo metodo per il raddrizzamento dell'immagine, ossia l'utilizzo di un secondo sistema telescopico di basso ingrandimento, rende lo strumento molto lungo, come i cannocchiali utilizzati sulle navi dei secoli diciassettesimo e diciottesimo. La figura 5 mostra il principio di funzionamento di un sistema nel quale un cannocchiale da 4×, costituito dalle lenti F_0 e F_{e1} , è seguito da un secondo cannocchiale da 2×, costituito dalle lenti F_{e2} e F_{e3} , per dare un'immagine raddrizzata.

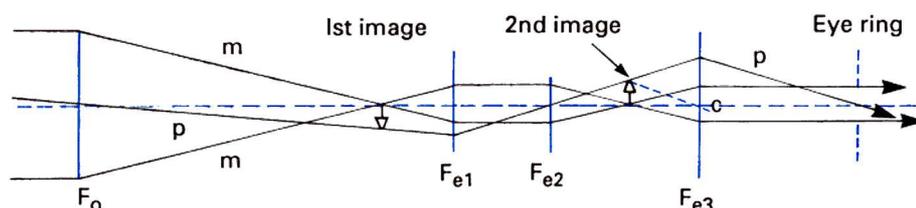


Figura 5. Telescopio raddrizzatore.

Il terzo metodo, ossia l'uso di un oculare negativo, dà uno strumento corto, chiamato **cannocchiale galileiano** (era di questo tipo il primo cannocchiale costruito da Galileo), mostrato nella figura 6. L'oculare negativo ricollima la luce **prima** che si formi un'immagine e la pupilla di uscita si trova allora **all'interno** dello strumento. L'occhio non può essere posto in quella posizione. Mentre la pupilla di uscita dell'occhio resta il diaframma di entrata del sistema cannocchiale-occhio, la pupilla di uscita interna allo strumento diviene ora l'apertura di uscita, facendo dell'obiettivo il diaframma di campo. Ciò limita considerevolmente il campo di vista per l'occhio anche se si utilizza un obiettivo di grande diametro. Tuttavia, per bassi ingrandimenti come 2× o 3× questo schema dà uno strumento economico con un campo di vista accettabile. I mirini delle macchine fotografiche più economiche sono normalmente cannocchiali galileiani. Disposti in coppia per una visione binoculare sono comunemente chiamati "binocoli da teatro" e sono spesso utilizzati nei teatri per vedere la scena dai posti più distanti.

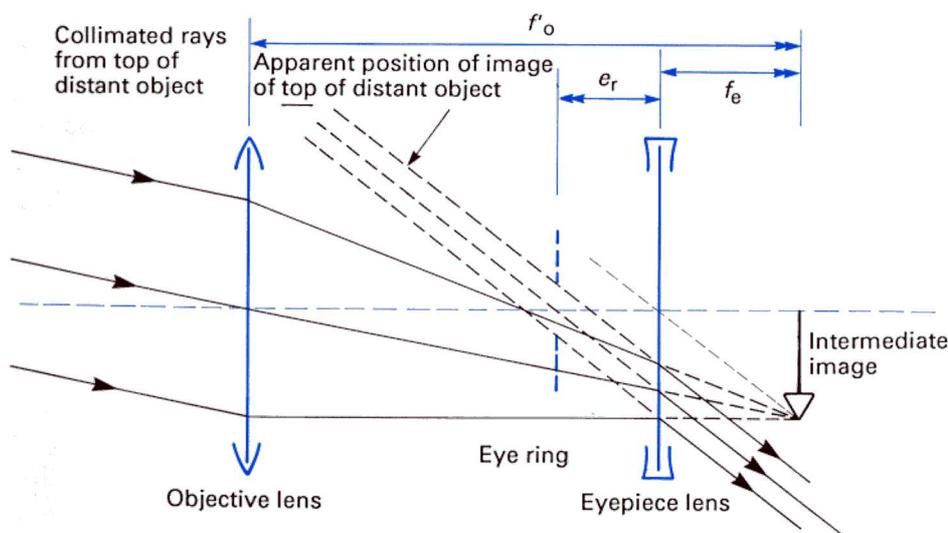


Figura 6 Cannocchiale galileiano.

I diversi tipi di telescopi

La quantità di luce raccolta da un cannocchiale è direttamente proporzionale all'area dell'obiettivo. Poiché nelle osservazioni astronomiche è necessario osservare oggetti di debolissima luminosità, risulta conveniente disporre di strumenti con obiettivi di grande diametro. Normalmente questi strumenti utilizzano specchi come obiettivi, anziché sistemi di lenti. È infatti più facile realizzare uno specchio di grandi dimensioni, piuttosto che una lente dello stesso diametro. Inoltre una lente di grande diametro risulta anche molto spessa e, anche se è realizzata con vetro di buona trasparenza, assorbe molta della luce incidente.

Si usa riservare il termine "cannocchiale" agli strumenti il cui obiettivo è costituito da un sistema di lenti (sono detti anche "telescopi rifrattori"). Si indicano invece come "telescopi" (o "telescopi riflettori") gli strumenti il cui obiettivo è costituito da uno specchio. Sono chiamati a volte "astrografi" gli strumenti utilizzati unicamente per la fotografia astronomica.

Tra i più grandi rifrattori ancora in servizio negli osservatori troviamo quello dello Yerkes Observatory con diametro di 102 cm e focale di 19,3 metri e quello del Lick Observatory sul monte Hamilton in California che ha un diametro di 91 cm e una focale di 17,6 metri. I più grandi telescopi riflettori attualmente in servizio sono i due telescopi gemelli del Keck Observatory (Hawaii), ciascuno con un obiettivo del diametro di 10 m costituito da un mosaico di specchi, e i quattro telescopi gemelli dell'ESO (sul monte Paranal in Cile) ciascuno con un obiettivo singolo del diametro di 8,2 m.

Il telescopio di Newton

Non conoscendo la possibilità di costruire lenti acromatiche, Newton intraprese lo studio sui riflettori. Gli specchi infatti sono esenti da aberrazione cromatica. I telescopi del tipo costruito da Newton sono ancora tra i più usati dagli astronomi dilettanti. L'inventore lo presentò alla società Reale di Londra nel 1672. Lo specchio primario di ottone aveva il diametro di 37 mm e la focale era di 16 cm. La luce, proveniente dall'infinito, incide sullo specchio parabolico S (figura 7) che la concentrerebbe nel fuoco primario F_1 se non fosse deviata in F' dallo specchietto piano S_1 inclinato di 45° rispetto all'asse ottico ed avente forma ellittica. La radiazione inclinata rispetto all'asse va al fuoco F'' dopo aver subito la stessa sorte di quella che si propaga parallelamente all'asse ottico.

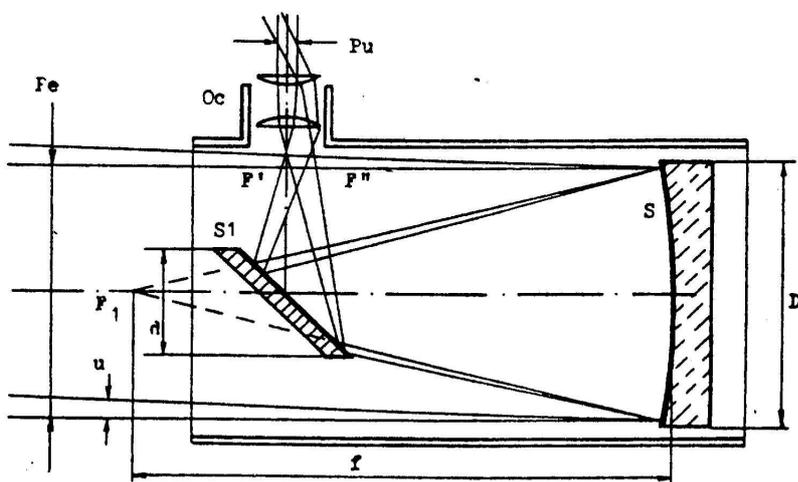


Figura 7. Schema del telescopio newtoniano.

L'immagine viene osservata dall'oculare O_c oltre il quale, in prossimità della pupilla d'uscita, è posto l'occhio dell'osservatore. I primi telescopi di questo tipo, tra i quali sono famosi quelli di Herschel, avevano gli specchi in ottone lucidato, di forma sferica; attualmente si costruiscono con vetri industriali o, meglio, con vetri a basso coefficiente di dilatazione tipo Duran 50 o Zerodur prodotti dalla Zeiss. Le superfici degli specchi sono lavorate da una sola parte e con forma parabolica, per eliminare l'aberrazione sferica, alluminate e protette con uno strato di quarzo purissimo depositato sotto vuoto con procedimenti industriali.

A causa della presenza dello specchietto S_1 lo strumento risulta parzialmente otturato. Il coefficiente di otturazione lineare è $K_0 = d/D$ mentre l'otturazione riferita alla superficie totale

dello specchio è uguale al quadrato di K_0 . Se lo specchio secondario ha il diametro uguale a 30 mm e quello del principale è di 150 mm, l'otturazione lineare sarà $K_0 = 30/150 = 0,2$ mentre quella in superficie risulta: $K_s = (30/150)^2 = 0,04$. La presenza del secondario toglie solo il 4% della luce incidente sullo strumento. L'otturazione, mentre riduce la luminosità del sistema ottico, produce anche una sensibile diminuzione del potere risolutivo del telescopio per il conseguente aumento di intensità luminosa del primo anello di diffrazione.

Il calcolo dei parametri strumentali non presenta eccessive difficoltà; occorre tener presente che anche la luce che entra nello strumento con una certa inclinazione rispetto all'asse ottico deve essere intercettata dal secondario S_1 che dovrà avere un diametro appropriato, leggermente superiore a quello teorico e calcolato considerando solo i raggi paralleli all'asse. Essendo di forma ellittica, il secondario avrà l'asse minore uguale a d (figura 6) mentre l'asse maggiore sarà uguale a d moltiplicato per la radice quadrata di 2 (1,41) perché è inclinato di 45° rispetto all'asse. Il calcolo delle dimensioni del secondario è importante, soprattutto per quanto riguarda l'illuminazione del campo visuale, che deve essere più uniforme possibile: in caso contrario si avrà la vignettatura. Se per l'osservazione visuale non è un grave difetto, per la fotografia è piuttosto fastidioso e ben visibile.

Il telescopio Cassegrain e i suoi derivati

Qualche tempo dopo l'invenzione del telescopio di Newton un oscuro professore del Collegio di Chartres, il Cassegrain, fece conoscere il progetto di un telescopio a specchio secondario convesso. Le reazioni non si fecero attendere: alcuni grandi dell'epoca, tra i quali il famoso ottico Huygens, attaccarono violentemente Cassegrain che, di fronte a tanta autorità, non ebbe nemmeno il coraggio di reagire. Secondo quanto riferiscono Danjon e Couder, Newton in una "condanna" in sette punti conclude: "Vorrei che il sig. Cassegrain avesse controllato il suo disegno prima di divulgarlo; ma se, per ulteriore soddisfazione, avrà la bontà di verificarlo, credo che il 'successo' che otterrà gli farà capire che progetti simili hanno fama durevole finché non sono messi in pratica". Ciò non di meno il "Cassegrain" ha avuto notevoli applicazioni ed è entrato a far parte della strumentazione di quasi tutti gli osservatori, oltre ad essere utilizzato da molti astronomi dilettanti.

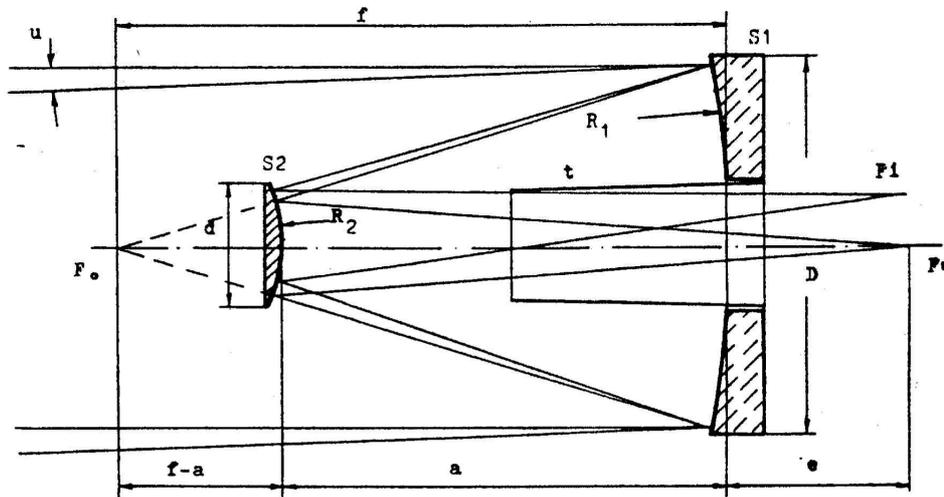


Figura 8. Schema del telescopio Cassegrain.

L'onda luminosa piana proveniente dall'astro in osservazione incide sullo specchio parabolico S_1 che la riflette e, per una proprietà della parabola, la trasforma in onda perfettamente sferica con centro in F_0 (figura 8). La radiazione luminosa viene però intercettata dallo specchietto secondario S_2 , di forma iperbolica, che la rinvia nel fuoco F_c dello strumento, trasformando l'onda incidente in onda sferica riflessa con centro in F_c . La luce, che giunge allo specchio con direzione di propagazione inclinata rispetto all'asse ottico di un angolo u , dopo le due riflessioni si focalizza in F_i . La presenza del secondario allunga il cono luminoso riflesso da S_1 e, in definitiva, introduce nello strumento un ingrandimento proprio in quanto allunga la focale del sistema dal valore f al valore $f_{eq} = fy$ che si dice focale equivalente. La grandezza y è l'ingrandimento dovuto al secondario. Il tubo paraflessi t impedisce alla luce proveniente dall'oggetto o dal fondo del cielo di entrare direttamente nell'oculare. Anche nel caso del

telescopio Cassegrain la presenza del secondario, a causa dell'otturazione, fa diminuire il potere risolutivo dello strumento. La pratica ha dimostrato che l'otturazione lineare non dovrebbe superare il 30%.

Il Cassegrain è corretto da aberrazione sferica e presenta un coma abbastanza debole; è uno strumento corto e compatto, particolarmente adatto all'osservazione planetaria per la sua lunga focale equivalente. Come nel cannocchiale astronomico le immagini sono rovesciate. Nelle diverse versioni è in uso tra gli astrofili che lo preferiscono per la facilità di trasporto e per le ridotte dimensioni in rapporto alla focale.

Chretien ha proposto uno strumento simile a quello descritto, ma con gli specchi entrambi iperbolici, conosciuto col nome di Ritchey-Chretien, privo di aberrazione sferica e di coma, quindi perfettamente aplanatico. È un telescopio che ha dato ottimi risultati soprattutto in fotografia ed è stato utilizzato anche nello spazio. Nel tentativo di diminuire le difficoltà costruttive, Dall e Kirkham, nel 1951, hanno proposto uno strumento con specchio primario ellittico e secondario sferico; il primo è un po' meno deformato di un normale paraboloide mentre il secondo si lavora con maggiore facilità. Questa versione presenta un coma più elevato del Cassegrain ma sempre contenuto entro valori non molto pericolosi. Pressman e Camichel (1947 e 1954) hanno adottato una soluzione di un certo interesse, anche perché permette di disassare lo specchio grande, evitando così la otturazione dovuta al secondario. Lo specchio principale è sferico ed il secondario ha sezione meridiana ellittica. L'ellisse che rappresenta la forma dello specchietto ha l'asse minore coincidente con quello ottico, ragion per cui il raggio di curvatura risulta minore al bordo che non al centro dello specchio stesso. Il più grave difetto di questo strumento è il coma veramente elevato.

Nella tabella sono indicate le forme degli specchi nei vari tipi di strumenti derivati dal Cassegrain.

Strumento	Primario	Secondario	Aberrazione sferica	Coma
Cassegrain	Parabola	Iperbole	Corretta	Debole
Ritchey-Chretien	Iperbole	Iperbole	Corretta	Nulla
Dall-Kirkham	Ellisse	Sfera	Corretta	Forte
Presmann-Camichel	Sfera	Ellisse	Corretta	Enorme

Sia il Cassegrain che i suoi derivati hanno le superfici ottiche generate dalla rotazione di sezioni coniche (circonferenze, parabole, iperboli, ellissi) intorno al proprio asse geometrico.

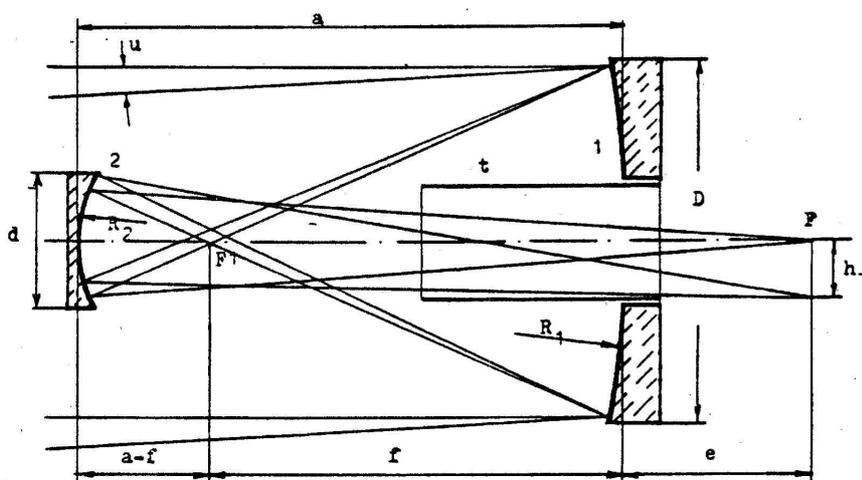


Figura 9. Schema del telescopio gregoriano.

Il telescopio gregoriano

L'inglese J. Gregory nella sua opera intitolata *Optica Promota* (Londra 1663) descrive il telescopio che porta il suo nome. Lo specchio principale è parabolico e il secondario ellittico. Il

fuoco F_1 del paraboloide coincide con uno dei fuochi dell'ellisse mentre il fuoco principale dello strumento è il centro dell'onda luminosa riflessa dallo specchio secondario (figura 9). Anche qui è presente il tubo parariflessi t onde evitare l'illuminamento diretto del campo visuale. Si noti come la distanza tra gli specchi sia superiore alla lunghezza focale del primario. Il secondario amplifica di un certo numero di volte la focale f per cui lo strumento ha una focale equivalente uguale a:

$$f_{eq} = yf \quad (15)$$

Rispetto al Cassegrain il gregoriano presenta gli svantaggi di una maggiore lunghezza del tubo e dell'otturazione più elevata. L'aberrazione sferica è corretta e il coma debole. Può essere usato per l'osservazione terrestre senza modifiche in quanto l'immagine risulta diritta. Attualmente è poco usato.

L'obiettivo catadiottrico Maksutov

Si dice catadiottrico uno strumento composto sia da lenti che da specchi. L'onda luminosa delimitata dal diaframma di apertura d , dopo aver attraversato il menisco di vetro ottico m , viene riflessa dallo specchio concavo S e dal convesso S_1 per giungere al fuoco dello strumento, situato oltre la lente p (figura 10). Il menisco serve a correggere l'aberrazione sferica del sistema, mentre la lente ha la funzione di spianare il campo. Nella configurazione indicata nella figura 10 lo strumento è stato proposto da D. Maksutov dell'Istituto di ottica di Mosca come obiettivo fotografico, ma si presta bene anche per le osservazioni astronomiche sia visuali che fotografiche. Tutte le superfici sono sferiche e l'aberrazione cromatica introdotta dal menisco è praticamente trascurabile, sempre che lo stesso venga costruito con un vetro a dispersione molto bassa.

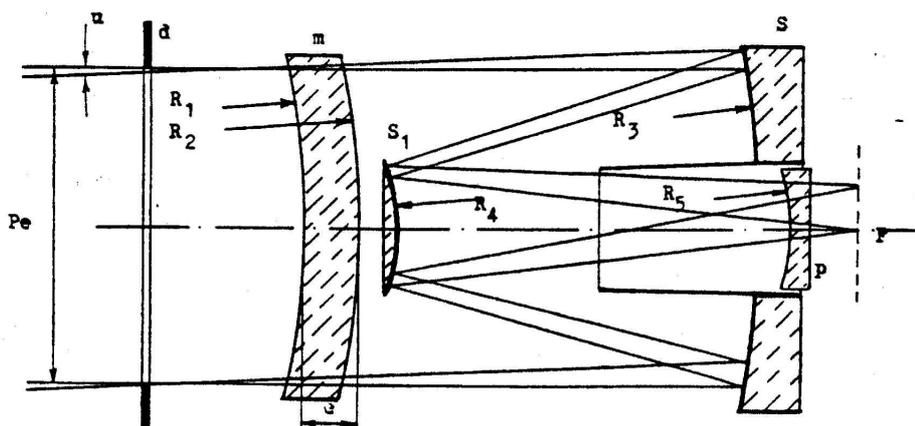


Figura 10. Schema dell'obiettivo catadiottrico Maksutov

L'astrografo di Schmidt

Per la fotografia astronomica è molto usato l'astrografo inventato e costruito per la prima volta da Bernard Schmidt, tecnico dell'osservatorio di Amburgo, durante gli anni '30. È uno strumento molto originale; è corretto da aberrazione sferica, coma, astigmatismo e distorsione. Rimane la curvatura del campo alla quale si ovvia curvando la lastra fotografica. Lo specchio principale è sferico e nel suo centro di curvatura è posta la lastra L costruita con vetro ottico (figura 11). Essa ha lo scopo di correggere l'aberrazione sferica dello specchio principale. La superficie della lastra è generata da una quadrica di rivoluzione intorno all'asse. L'equazione della sua sezione meridiana è:

$$x = \frac{h^4 - 2kH^2h^2}{4(n-1)R^3} \quad (33)$$

h è la distanza generica dell'asse, H è la semiapertura massima, R è il raggio di curvatura dello specchio, n è l'indice di rifrazione del vetro con il quale si costruisce la lastra, k è un coefficiente compreso tra 0 e 3. Di solito per facilitare la costruzione si pone $k = 0,5$, in modo da avere una x

al bordo uguale a zero; X_m è il valore massimo della deformazione della lastra che si ha in corrispondenza della zona distante dall'asse $H/\sqrt{2}$.

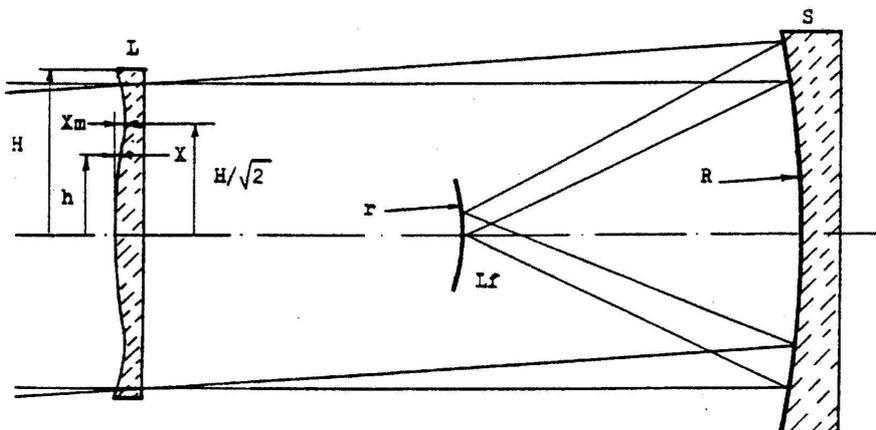


Figura 11. Schema dell'astrografo di Schmidt.

La lastra fotografica L_f ha il raggio di curvatura r uguale alla distanza focale dello specchio ed è posta a metà tra quest'ultimo e la lastra correttiva L . Lo strumento è anche aplanatico essendo privo di aberrazione sferica e coma; è ortoscopico perché non ha distorsione e acromatico in quanto la lastra correttiva introduce un cromatismo trascurabile.

Schmidt ha inventato anche il procedimento per la costruzione della lastra. Una piastra di vetro, con le facce piane e parallele, si appoggia sui bordi di un recipiente circolare a tenuta d'aria. Si fa il vuoto così che la pressione atmosferica possa deformare la lastra nel cui centro si misura la freccia, in modo da arrestare l'operazione di vuotatura quando la freccia ha raggiunto il valore voluto. La lastra così deformata viene lavorata e resa piana. Poi si fa entrare l'aria nel recipiente: in tal modo la lastra, non essendo più sollecitata, assume la forma calcolata.

L'astrografo di Schmidt ha generalmente un rapporto di apertura molto elevato: $D/f = 1/2$ ed anche maggiore. Le fotografie di campi stellari, ammassi, nebulose, ecc. si eseguono con pose di pochi minuti. La lastra fotografica, oltre ad essere curvata, dovrà essere ritagliata in forma di dischetto circolare e maneggiata con cura onde evitare infiltrazioni di luce. Moltissimi sono gli osservatori dotati di astrografo Schmidt: in Italia è importante quello installato all'osservatorio di Asiago.

Il telescopio Schmidt-Cassegrain

Ottimo strumento per le osservazioni visuali specie delle superfici planetarie, è praticamente un Cassegrain a specchi sferici davanti al quale è posta la lastra correttiva del tipo Schmidt (figura 12). Occorre però contenere l'otturazione dovuta al secondario entro valori bassi (0,2-0,3) altrimenti il potere risolutivo diminuisce sensibilmente.

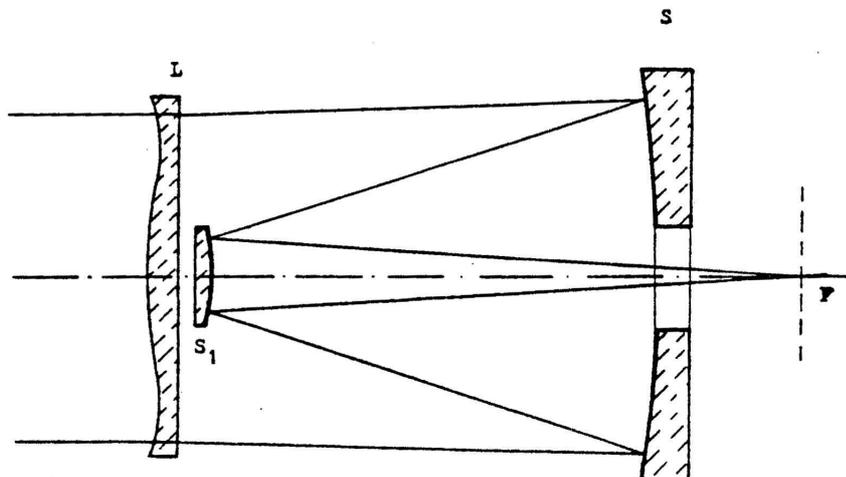


Figura 12. Schema del telescopio Schmidt-Cassegrain.

Rispetto al Cassegrain classico ha il vantaggio di essere chiuso e di conseguenza la turbolenza dell'aria all'interno del tubo è ridotta; inoltre, non essendoci la crociera che sostiene il secondario, essendo lo stesso sostenuto dalla lastra, non si notano nelle immagini stellari i caratteristici "baffi" dovuti ai raggi della crociera. Dal punto di vista costruttivo vi è la difficoltà dovuta alla lastra oltre al fatto che gli specchi sono due e devono essere lavorati con cura e centrati con precisione.

Il telescopio Maksutov modificato

Per correggere l'aberrazione sferica, invece della lastra si può usare un menisco di Maksutov. Nello strumento indicato nella figura 13, che ha tutte le superfici sferiche, lo specchietto secondario è rappresentato da una zona circolare alluminata, concentrica rispetto all'asse, sulla seconda superficie del menisco. Questo è costruito con vetro ottico a bassa dispersione per ridurre il lieve cromatismo introdotto nel telescopio dal vetro stesso. Lo strumento è di costruzione abbastanza semplice e presenta gli stessi vantaggi del precedente senza dover ricorrere alla lastra correttrice. Talvolta lo specchietto secondario può essere riportato come in figura 8 ed avere il raggio di curvatura diverso da quello del menisco.

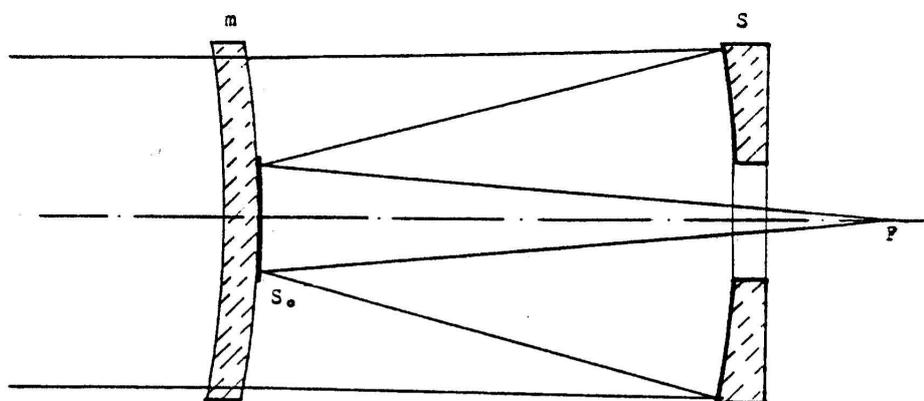


Figura 13. Schema del telescopio Maksutov modificato.

Esercizi

1. Fare un disegno dettagliato che mostri il percorso della luce attraverso un cannocchiale astronomico. Un cannocchiale lungo 30 cm deve avere un ingrandimento di otto volte. Trovare le focali dell'obiettivo e dell'oculare se il cannocchiale è (a) astronomico, (b) galileiano.

2. Mostrare per mezzo di un disegno come è prodotta un'immagine ingrandita per mezzo di un cannocchiale galileiano. Un cannocchiale galileiano che ingrandisce 5 volte ha un obiettivo con focale di 180 mm; trovare la focale dell'oculare e la sua distanza dall'obiettivo quando il cannocchiale è messo a fuoco all'infinito da un occhio miope di 4 D.

3. Un cannocchiale astronomico ha un obiettivo con diametro di 150 mm e focale di 850 mm. Se l'oculare ha una focale di 25 mm e un diametro di 15 mm calcolare l'ingrandimento angolare, il diametro della pupilla di uscita e il campo di vista apparente (dal centro della pupilla di uscita).

4. Descrivere le parti costitutive e il principio di funzionamento di un semplice cannocchiale, e mostrare come, aggiungendo (a) lenti, (b) prismi, può essere ottenuta un'immagine dritta anziché capovolta.

5. L'obiettivo di un cannocchiale ha una focale di 250 mm e l'oculare di 50 mm. Il cannocchiale è messo a fuoco su un oggetto distante 1 m, e l'immagine è formata alla distanza di visione distinta (250 mm). Disegnare uno schema che mostra il percorso dei raggi di luce attraverso il cannocchiale. Calcolare l'ingrandimento e la lunghezza del cannocchiale.

6. Un cannocchiale galileiano ha un obiettivo con focale di 120 mm e ingrandisce cinque volte se è usato da un occhio emmetrope per osservare un oggetto lontano. Che regolazione deve essere effettuata se il cannocchiale deve essere utilizzato da (a) un miope di 10 D, (b) un ipermetrope di 5 D? Trovare l'ingrandimento in entrambi i casi.

8. Strumenti ottici – Gli oculari

Gli strumenti ottici utilizzati in combinazione con l'occhio, cioè gli strumenti **visuali**, sono costituiti da una lente o gruppo di lenti detta **obiettivo**, rivolta verso l'oggetto, di cui fornisce un'immagine; tale immagine viene raccolta da un **oculare** e ingrandita. L'oculare convoglia i raggi in una posizione opportuna, dove andrà posto l'occhio dell'osservatore. I raggi dovranno uscire dallo strumento paralleli, in modo da non affaticare l'osservatore; pertanto l'immagine fornita dall'obiettivo dovrà trovarsi nel fuoco oggetto dell'oculare.

Gli oculari - principi generali

Normalmente gli oculari sono formati da due lenti (o due gruppi di lenti) separate da un intervallo d'aria. La prima lente, chiamata **lente di campo**, è disposta vicino all'immagine fornita dall'obiettivo. La seconda lente è detta **lente dell'occhio**. Le due lenti formano un sistema convergente, ma la suddivisione in due componenti permette controllare in modo più efficace le aberrazioni e consente di costruire lenti di diametro maggiore.

Il punto di partenza per la capire il funzionamento degli oculari è la comprensione del ruolo della lente che viene aggiunta in coincidenza con l'immagine intermedia, ossia della **lente di campo**. Il suo nome deriva dal fatto che essa agisce come un diaframma di campo. La sua funzione principale consiste nel deviare la luce senza agire però sull'immagine intermedia in modo che la **lente dell'occhio** possa essere di diametro inferiore. Questo effetto è mostrato nella figura 1, nella quale sono mostrati i raggi luminosi che attraversano un cannocchiale costituito da un obiettivo e da un oculare a due lenti (la linea tratteggiata mostra invece il percorso dei raggi nel caso di un oculare costituito dalla sola lente dell'occhio). La riduzione in diametro della lente dell'occhio fa sì che possa essere di focale più corta mantenendo lo stesso livello di controllo delle aberrazioni e che quindi anche l'obiettivo possa essere più potente e che, per un dato ingrandimento, lo strumento divenga più corto.

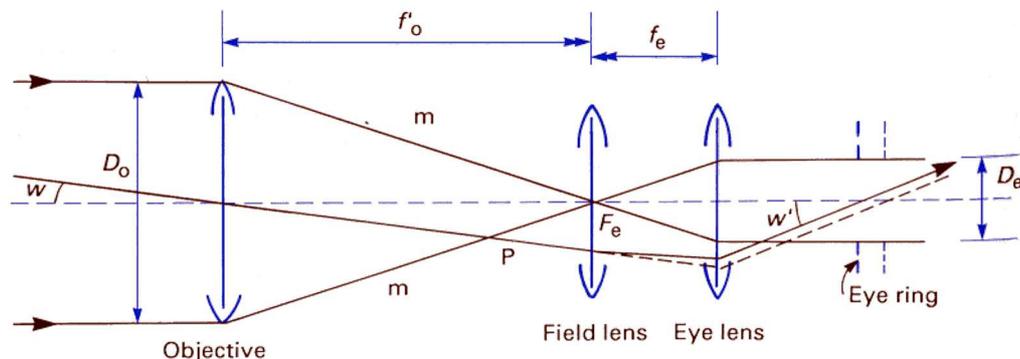


Figura 1. Percorso dei raggi luminosi che attraversano un cannocchiale costituito da un obiettivo e da un oculare a due lenti.

La presenza della lente di campo influisce anche sulla pupilla di uscita, che si avvicina alla lente dell'occhio come è pure mostrato nella figura 1. La distanza tra la lente dell'occhio e la pupilla di uscita è detta **estrazione pupillare**. Si ha una visione confortevole quando essa è compresa tra 10 mm e 20 mm. Se il sistema è accomodato all'infinito, quando la lente di campo coincide con l'immagine intermedia coincide anche con il fuoco oggetto della lente dell'occhio. Dal percorso dei raggi marginali m nella figura 1 si vede che il potere equivalente resta quello che si avrebbe con un oculare fatto con la sola lente dell'occhio. L'ingrandimento del cannocchiale quindi non viene cambiato dalla presenza della lente di campo.

Anche se la **posizione** della pupilla di uscita è modificata dalla lente di campo, il diametro della pupilla di uscita non cambia perché il potere dell'oculare non dipende dalla presenza della lente di campo. Come sistema, quindi, l'oculare ha lo stesso fuoco oggetto e lo stesso piano principale oggetto della lente dell'occhio, ma sono spostati il fuoco immagine e il piano principale immagine anche se la focale equivalente resta la stessa di quella della lente singola.

Ovviamente il potere della lente di campo non deve essere troppo elevato o la pupilla di

uscita si troverà davanti alla lente dell'occhio. E' comunque chiaro che la lente di campo può essere utilizzata per controllare l'estrazione pupillare senza modificare gli altri parametri dello strumento.

Uno svantaggio della lente di campo coincidente con l'immagine intermedia è che ogni particella di polvere sulla sua superficie viene messa a fuoco con l'immagine finale. Nei sistemi di misura è necessario porre un reticolo o una crociera che deve essere coincidente con l'immagine intermedia e quindi la lente di campo è normalmente spostata avanti o indietro rispetto a questo punto. Le due possibilità portano ai due principali tipi di oculari, l'oculare di Huygens e l'oculare di Ramsden. (Poiché in questi due tipi di oculari la lente di campo non coincide esattamente con l'immagine intermedia, quanto è stato detto finora riguardo alla sua funzione risulta vero solo in modo approssimato).

L'oculare di Huygens

Nell'**oculare di Huygens**, la lente di campo è spostata in avanti verso l'obiettivo per dare il sistema mostrato nella figura 2. Un oculare di questo tipo è stato proposto per la prima volta da Huygens nel 1703. La focale della lente di campo è normalmente tra 2 e 3 volte la focale della lente dell'occhio. La distanza tra le due lenti è uguale alla media delle due focali perché in questo modo viene corretta l'aberrazione cromatica laterale, come verrà spiegato più avanti. Questa separazione fa sì che il fuoco oggetto si trovi all'interno del sistema e che la pupilla di uscita sia troppo vicina alla lente dell'occhio perché la visione sia confortevole.

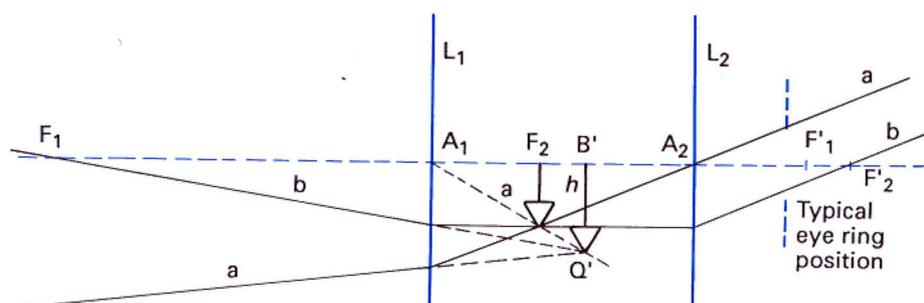


Figura 2. Schema dell'oculare di Huygens.

Nella figura 2 i poteri delle lenti e le loro separazioni sono dati da

$$f_1 = 2,5f_2 \quad e = \frac{f_1 + f_2}{2} \quad (1)$$

I raggi sono tracciati per l'oculare accomodato all'infinito e, poiché non sono dati dettagli riguardo all'obiettivo, i raggi paralleli che emergono a destra della lente dell'occhio sono stati tracciati per primi. Il raggio ausiliario *a*, che passa per *A*₂, il centro della lente dell'occhio, è tracciato con un angolo ragionevolmente inclinato perché gli oculari generalmente forniscono un ampio campo di vista apparente. Sappiamo che l'immagine deve trovarsi nel fuoco oggetto *F*₂ della lente dell'occhio, ma questa non è la posizione dell'immagine intermedia formata dall'obiettivo. Un raggio ausiliario utile è *b*, tracciato attraverso *F*'₂, parallelo al primo raggio. Tra le lenti questo raggio è parallelo all'asse ottico e deve essere arrivato alla lente di campo dall'obiettivo passando per *F*₁.

Questi raggi confermano che l'immagine è in *F*₂. E' mostrato tratteggiato un altro raggio ausiliario *a* che passa per *A*₁, il centro della lente di campo. La posizione dell'immagine intermedia può essere trovata ora dall'intersezione di questo raggio e del raggio che passa per *F*₁. Si definisce così *Q'*, la posizione nella quale si sarebbe dovuta trovare l'immagine **come sarebbe stata formata dal solo obiettivo** per un oculare accomodato all'infinito. Il diaframma di campo dell'oculare, però, è posto in *F*₂.

Il fatto che il fuoco di questo oculare sia al suo interno significa che esso non può essere utilizzato come una semplice lente d'ingrandimento. E' comunque usato comunemente nei microscopi, e l'ingrandimento effettivo del microscopio composto dato dall'equazione

$$I_{\omega} = I_{ob} \times I_{oc} = (-) \frac{g}{f'_{ob}} \times \frac{q}{f'_{oc}} = \frac{-160}{f'_{ob}} \times \frac{-250}{-f'_{oc}} = -\frac{\varphi_{ob}\varphi_{oc}}{24} \quad (2)$$

comprende il termine $I_{oc} = f'_{oc}/q$ che è l'ingrandimento angolare dell'oculare che fa parte del microscopio. Questo termine, che era stato ricavato assumendo che l'oculare fosse costituito da una singola lente positiva, deve ora essere calcolato utilizzando la focale equivalente dell'oculare.

Le due lenti dell'oculare di Huygens sono in genere piano-convesse, con la faccia piana rivolta verso l'occhio. Le posizioni dei punti cardinali di un oculare di Huygens sono date nella figura 3.

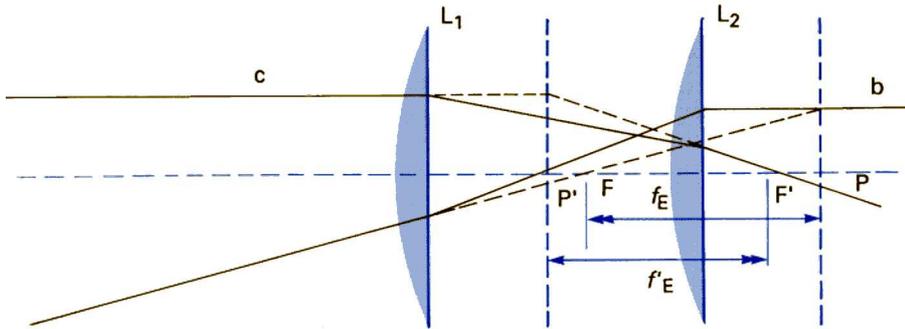


Figura 3. Posizione dei piani principali dell'oculare di Huygens.

Si vede che i piani principali spostati a tal punto che i fuochi si trovano al loro interno. Il fuoco immagine si trova così vicino alla lente dell'occhio che anche la pupilla di uscita si forma troppo vicino alla lente dell'occhio perché l'estrazione pupillare sia confortevole. Se, per esempio, f'_e fosse 20 mm, si vede dalla figura 3 che si avrebbero solo 7 mm (f_i) dalla lente dell'occhio.

Con

$$f_1 = 2,5f_2 \quad \text{e} \quad e = \frac{f_1 + f_2}{2}$$

la focale equivalente, che è data dalla formula

$$f'_e = \frac{f'_1 f'_2}{f'_1 + f'_2 - e} \quad (3)$$

è data da

$$f'_e = \frac{2,5f'_2 \times f'_2}{2,5f'_2 + f'_2 - \frac{3,5}{2}f'_2} = 1,43f'_2 \quad (4)$$

Quindi la lente dell'occhio deve essere più potente del 43% rispetto al potere richiesto per l'oculare.

Senza conoscere l'apertura e la focale dell'obiettivo (o l'apertura e la lunghezza ottica del tubo nel caso del microscopio) non è possibile stabilire la dimensione e la posizione della pupilla di uscita. L'esempio che segue dà dei valori tipici per un oculare da 10× realizzato con un rapporto di focali 2,5:1. Viene fatto anche un confronto con oculari con un rapporto di focali 2:1 e 3:1.

Esempio

Un oculare da 10× ha una focale equivalente di 25 mm. Calcolare i poteri delle due lenti che lo compongono, se è un oculare di Huygens con

$$f'_1 = 2,5f'_2 \quad \text{e} \quad e = \frac{f'_1 + f'_2}{2}$$

Calcolare anche l'estrazione pupillare per un obiettivo posto 200 mm davanti all'immagine intermedia. Assumere una accomodazione all'infinito.

Abbiamo

$$f_1 = 2,5f_2$$

$$e = \frac{f_1' + f_2'}{2}$$

$$f_e' = \frac{f_1' f_2'}{f_1' + f_2' - e}$$

Quindi, per un ingrandimento di 10x corrispondente a una focale equivalente di 25 mm, si ha

$$f_e' = \frac{5f_2'}{3,5} = +25 \text{ mm}$$

e perciò

$$f_2' = \frac{3,5 \times 25}{5} = +17,5 \text{ mm}$$

$$f_1 = 2,5f_2 = +43,75 \text{ mm}$$

$$e = 30,625 \text{ mm}$$

La frontale immagine, ossia la distanza del fuoco immagine dell'oculare dalla lente dell'occhio, è data da

$$f_v' = \frac{f_2'(f_1' - e)}{f_1' + f_2' - e} = \frac{17,5(43,75 - 30,625)}{30,625} = 7,5 \text{ mm}$$

La posizione della pupilla d'uscita, ossia dell'immagine dell'obiettivo vista attraverso l'oculare, si trova utilizzando l'equazione di Newton $xx' = ff'$; se la distanza dell'obiettivo è 200 mm abbiamo

$$x' = \frac{25 \times 25}{200} = 3,125 \text{ mm}$$

Quindi l'estrazione pupillare è $f_v' + x' = 10,625$ mm. Questa posizione è mostrata in scala nella figura 3; i raggi ausiliari *a* e *b* approssimano i raggi che effettivamente provengono dalla parte inferiore e da quella superiore dell'obiettivo considerato in questo esempio.

Per lo stesso oculare da 10x ma con differenti rapporti abbiamo, per $f_1 = 2f_2$:

$$25 \text{ mm} = \frac{4f_2'}{3}$$

Quindi

$$f_2' = 18,75 \text{ mm} \quad f_1 = 37,5 \text{ mm} \quad e = 28,125 \text{ mm} \quad f_v' = 6,25 \text{ mm}$$

Perciò l'estrazione pupillare è $6,25 + 3,125 \text{ mm} = 9,375 \text{ mm}$.

Per $f_1 = 3f_2$:

$$25 \text{ mm} = \frac{3f_2'}{2}$$

Quindi

$$f_2' = 16,67 \text{ mm} \quad f_1 = 50 \text{ mm} \quad e = 33,335 \text{ mm} \quad f_v' = 8,34 \text{ mm}$$

Perciò l'estrazione pupillare è $8,34 + 3,125 \text{ mm} = 11,46 \text{ mm}$.

Discostarsi dal rapporto di poteri ottimale per il controllo dell'aberrazione non aiuta particolarmente a risolvere il problema dell'estrazione pupillare. Comunque l'oculare di Huygens

ha uno schema efficiente ed economico.

Per lo schema standard dell'oculare di Huygens con $f_1 = 2,5f_2$ ed $e = (f_1 + f_2)/2$ è possibile esprimere la separazione (e), i poteri delle lenti che lo compongono (f_1 e f_2) e la frontale posteriore (f'_v) in termini della focale equivalente (f'_e) in questo modo

$$\left. \begin{aligned} e &= 1,224f'_e \\ f'_1 &= 1,75f'_e \\ f'_2 &= 0,7f'_e \\ f'_v &= 0,3f'_e \end{aligned} \right\} \text{ per un oculare di Huygens standard} \quad (5)$$

L'oculare di Ramsden

Nell'oculare di Ramsden le due lenti hanno poteri uguali o quasi uguali. La separazione è ridotta in modo da essere la somma delle focali divisa per 3. Questo tipo di oculare è stato proposto nel 1783 da Ramsden, che molto probabilmente non era a conoscenza del lavoro di Huygens.

Nell'oculare di Ramsden il fuoco oggetto si trova fuori dal sistema e l'oculare può essere usato come lente d'ingrandimento. L'oculare di Ramsden è utile anche per l'uso con strumenti di misura, come vedremo più avanti, perché un reticolo posto nel fuoco oggetto è ingrandito dalle due lenti allo stesso modo dell'immagine intermedia.

La figura 4 mostra lo schema del sistema con l'obiettivo posto fuori della pagina a sinistra. Con il sistema accomodato all'infinito i raggi emergenti possono essere tracciati da destra verso sinistra con un raggio a che passa senza essere deviato attraverso A_2 verso l'immagine in F_2 . Il raggio b è tracciato attraverso F'_2 parallelo ad a ed è rifratto tra le lenti in direzione parallela all'asse ottico. Questo raggio deve essere giunto dall'obiettivo alla prima lente passando per F_1 . Un raggio a che dall'immagine in F_2 passa per A_1 , il centro della prima lente, è usato per definire l'immagine intermedia osservata dall'oculare quando è accomodato all'infinito.

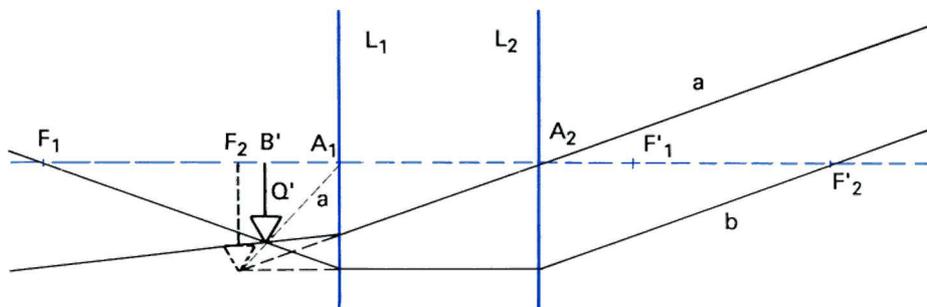


Figura 4. Schema dell'oculare di Ramsden.

Nell'oculare di Ramsden le due lenti sono normalmente piano-convesse con la superficie convessa rivolta verso l'interno. I punti cardinali sono calcolati in modo semplice quando $f_1 = f_2 = f'$ e

$$e = \frac{f'_1 + f'_2}{3} = \frac{2f'}{3}$$

La focale equivalente f'_e è

$$f'_e = \frac{f'^2}{2f' - 2f'/3} = \frac{f'^2}{4f'/3} = \frac{3f'}{4} \quad (6)$$

(per un oculare di Ramsden di tipo standard) cosicché ogni lente è meno potente del sistema nel suo complesso. Poiché le due lenti sono uguali i punti cardinali sono disposti in modo simmetrico (figura 5). L'equazione per la frontale oggetto f_v è la stessa (col segno cambiato) di quella che fornisce la frontale immagine f'_v :

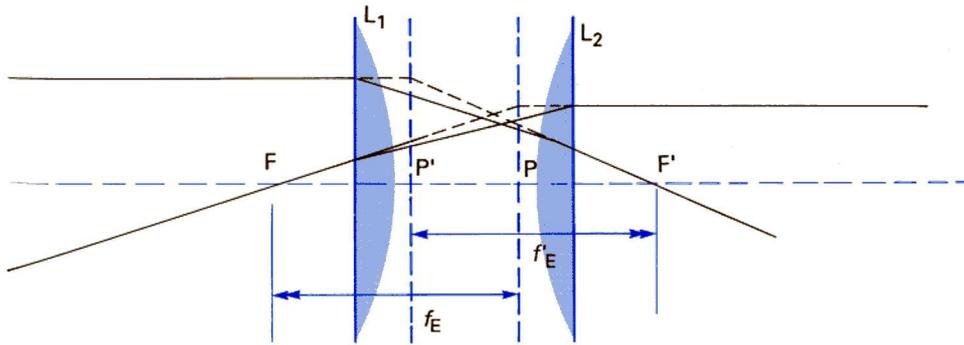


Figura 5. Posizione die punti principali dell'oculare di Ramsden.

$$f'_v = \frac{f'_2(f'_1 - e)}{f'_1 - f'_2 - e'} = \frac{f'(f' - e)}{2f_2 - e} = \frac{ff'/3}{4f'/3} = \frac{f'}{4} \quad (7)$$

Se è nota la focale equivalente f'_e dell'oculare di Ramsden perché è noto il suo ingrandimento angolare, è possibile definire la separazione e , il potere f' delle lenti che lo compongono e la frontale posteriore f'_v dalle seguenti formule:

$$\left. \begin{aligned} e &= \frac{8}{9} f'_e \\ f' &= \frac{4}{3} f'_e \\ f'_v &= \frac{1}{3} f'_e \end{aligned} \right\} \text{ per un oculare di Ramsden di tipo standard} \quad (8)$$

Se non si conoscono l'apertura e la focale dell'obiettivo non è possibile stabilire la dimensione e la posizione della pupilla di uscita. L'esempio che segue dà dei valori tipici per un oculare da 10× utilizzato con un obiettivo con una focale di 200 mm. I risultati possono essere confrontati con quelli dell'oculare di Huygens del paragrafo precedente.

Esempio

Un oculare da 10× ha una focale equivalente di 25 mm. Calcolare i poteri delle lenti nel caso sia un oculare di Ramsden con

$$f_1 = f_2 \quad e \quad e = \frac{f_1 + f_2}{3}$$

Calcolare l'estrazione pupillare per un obiettivo posto 200 mm davanti all'immagine intermedia. Assumere una accomodazione all'infinito.

Da $f'_e = 25$ mm e dalle equazioni (8) abbiamo

$$e = \frac{8}{9} f'_e = 22,22 \text{ mm}$$

$$f' = \frac{4}{3} f'_e = 33,33 \text{ mm}$$

$$f'_v = \frac{1}{3} f'_e = 8,33 \text{ mm}$$

Dall'equazione di Newton $xx' = ff'$ con l'obiettivo 200 mm davanti all'immagine intermedia (con accomodazione all'infinito) si ha $x = 200$ mm. Quindi

$$x' = \frac{25 \times 25}{200} = 3,125 \text{ mm}$$

La pupilla di uscita si trova quindi a una distanza $f'_v + x'$ dalla lente dell'occhio, perciò l'estrazione pupillare è 11,45 mm, che non differisce praticamente da quella di un oculare di Huygens di tipo standard.

Confronto tra l'oculare di Huygens e l'oculare di Ramsden

Ricordando che la distanza x' della pupilla di uscita dipende solo dalla focale equivalente dell'oculare e dalla distanza dell'obiettivo e non dalla costruzione interna dell'oculare, vediamo dalle ultime formule riportate nelle equazioni (5) e (8) che c'è poca differenza per quanto riguarda l'estrazione pupillare tra i due tipi di oculare e che, per poteri elevati come per esempio $25\times$, ossia $f_e = 10$ mm, si hanno estrazioni pupillari di 3,5 mm e 3,8 mm nei due casi rispettivamente. Entrambi i tipi di oculari comportano quindi problemi nel caso di forti poteri.

In pratica nell'oculare di Huygens si controllano meglio le aberrazioni; l'oculare di Ramsden è spesso migliorato usando un doppietto come seconda lente. A volte l'oculare di Huygens è detto oculare negativo e quello di Ramsden oculare positivo. Si tratta di una terminologia scorretta perché entrambi gli oculari hanno un potere positivo. La principale differenza sta nella posizione dell'immagine intermedia. Il fatto che nell'oculare di Huygens l'immagine sia interna significa che esso non può essere usato come microscopio semplice mentre l'oculare di Ramsden può essere usato come microscopio semplice e si adatta meglio all'uso con un reticolo.

Altri tipi di oculari

Negli oculari a due lenti come l'oculare di Huygens e l'oculare di Ramsden si hanno in genere rilevanti aberrazioni, in particolare, per effetto della curvatura di campo, la superficie focale è sensibilmente curva. Ciò comporta una sfocatura delle zone extrassiali quando sia messa a fuoco la zona centrale o parassiale e viceversa. Con lo scopo di eliminare per quanto possibile le aberrazioni sono stati progettati diversi altri tipi di oculari, composti generalmente da più di due lenti realizzate con vetri diversi.

L'oculare di Kellner

Dall'oculare di Ramsden fu derivato, nel 1849, l'oculare di Kellner a tre lenti (figura 6), che ha un campo apparente massimo di 40° . Il doppietto dell'occhio permette di ridurre notevolmente la cromatica di ingrandimento, di ottenere una posizione facilmente accessibile per la pupilla di uscita e del piano focale senza dover mantenere le condizioni di Huygens. Una versione più moderna di questo tipo di oculare ha la lente di campo biconvessa asimmetrica. Un'altra modifica dovuta a Schröder (1866) ha la lente positiva rivolta verso l'occhio e presenta un astigmatismo al bordo leggermente inferiore. Tutti i tipi di oculari Kellner e derivati sono privi di aberrazione sferica: ciò è molto importante specialmente per oculari a lunga focale.

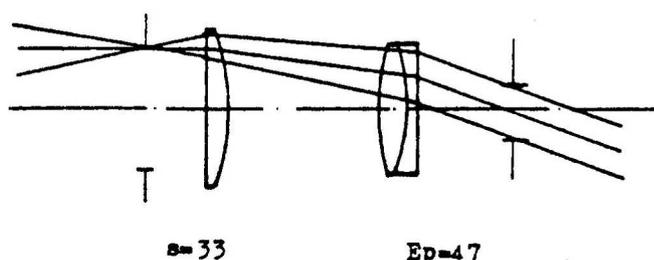


Figura 6. Schema dell'oculare di Kellner.

L'oculare di König

Anche nell'oculare di Kellner, come in quelli di Huygens e di Ramsden, si ha una notevole curvatura di campo. Si è potuto notare che questo difetto è dovuto alla notevole distanza tra le singole lenti. Lo sviluppo del calcolo di nuovi tipi di oculari portò perciò a una sensibile riduzione degli interspazi d'aria fra le lenti, allo scopo di spianare il campo. L'esempio più significativo della nuova impostazione progettuale è rappresentato dall'oculare di König, direttore dell'ufficio calcoli della ditta Zeiss (figura 7), il cui campo apparente può arrivare a 50° ; la stessa tendenza si nota negli oculari che seguono.

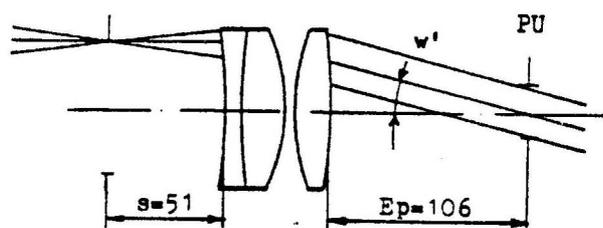


Figura 7. Schema dell'oculare di König.

L'oculare ortoscopico

È dovuto ad Abbe ed è molto diffuso sia nei telescopi che nei binocoli e nei cannocchiali per l'osservazione terrestre (figura 8). Ha aberrazioni molto ridotte specie per quanto riguarda la distorsione (da qui il nome). L'esempio riportato è tutt'ora costruito con vetri moderni che permettono ulteriori riduzioni delle aberrazioni. Il campo apparente può raggiungere i 50° , come nel caso dell'oculare di König.

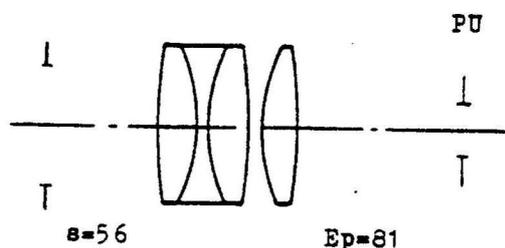


Figura 8. Schema dell'oculare ortoscopico.

L'oculare di Plössl

È costituito da due doppietti incollati ed è usato sia in astronomia che nelle osservazioni terrestri (figura 9). Rispetto all'oculare ortoscopico e all'oculare di König non presenta sensibili miglioramenti nelle aberrazioni. Talvolta alcuni raggi di curvatura delle lenti risultano uguali e talvolta i due doppietti sono simmetrici, per cui la costruzione di questo oculare è notevolmente semplificata. Il campo apparente può arrivare a 60° .

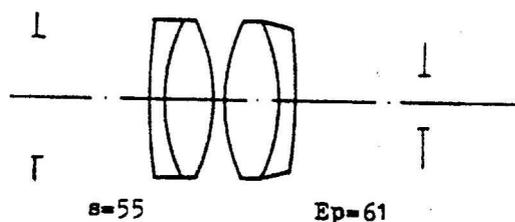


Figura 9. Schema dell'oculare di Plössl.

L'oculare monocentrico

In questo oculare la differenza di ingrandimento nei vari colori, soprattutto nel rosso e nel blu, è quasi del tutto eliminata da una opportuna scelta dei vetri e dei raggi di curvatura delle tre lenti (figura 10). Quel poco che rimane è dovuto al forte spessore complessivo dell'oculare rispetto alla lunghezza focale. L'oculare monocentrico è stato inventato da Steinheil (1865) e, a rigore, non è monocentrico in quanto i centri di curvatura delle superfici delle lenti non coincidono perfettamente. Malgrado il limitato campo visuale (30° al massimo) ha avuto in astronomia grande importanza poiché, non avendo all'interno superfici di separazione tra vetro e aria, è praticamente privo di riflessi. Il campo è piuttosto curvo, ma l'astigmatismo non è molto forte.

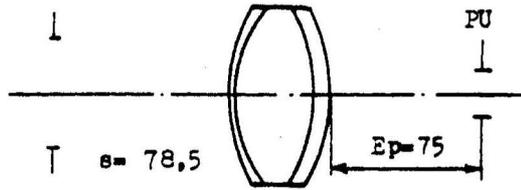


Figura 10. L'oculare monocentrico.

L'oculare di Erfle

Ha una lente singola compresa tra due doppietti acromatici (figura 11). Vi sono diverse versioni di questo oculare: quella indicata nella figura è dovuta a Köhler. Siccome si può utilizzare per un campo visuale molto ampio fino a circa 70° è notevolmente diffuso in strumenti tipo cerca-comete e binocoli.

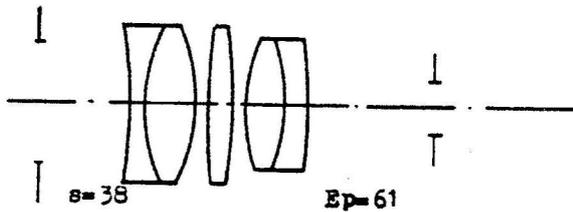


Figura 11. Schema dell'oculare di Erfle.

Gli oculari di Bertele

Negli anni venti Bertele ha notevolmente migliorato la correzione degli oculari riducendo sensibilmente la curvatura di campo senza peggiorare le altre aberrazioni. Lo schema della figura 12 rappresenta un oculare con campo visuale di 70° con un raggio di curvatura della superficie di miglior fuoco che è uguale al doppio della lunghezza focale dell'oculare. La principale innovazione introdotta da Bertele nel progetto degli oculari consiste nel grosso menisco ben visibile nella figura 13, che prende il posto della lente di campo. Un'altra versione di questo oculare è rappresentata nella figura 14: utilizza ben sei lenti e si può usare per campi visuali di circa 70°.

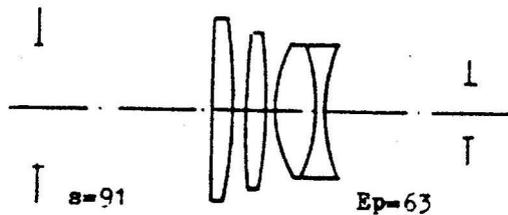


Figura 12. Schema di oculare di Bertele.

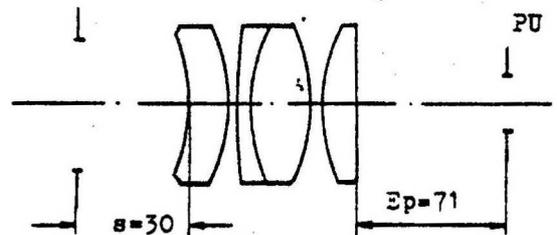


Figura 13. Schema di oculare di Bertele (derivato).

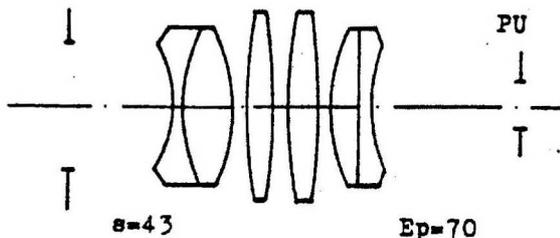


Figura 14. Schema di oculare di Bertele (derivato).

L'oculare astronomico a campo piano

Le principali modifiche tendenti a spianare il campo sono state introdotte anche in astronomia con l'oculare indicato nella figura 15. Ha una buona posizione della pupilla d'uscita e quindi comoda posizione di osservazione. Pur essendo utilizzabile per campi visuali solo fino a 50° , è notevolmente migliorata la visione in tutto il campo, che risulta molto nitido ed inciso in modo particolare sul bordo, dove, invece, in molti tipi di oculare è abbastanza confusa. Per le osservazioni astronomiche è da considerarsi eccellente, anche se costoso, perché rappresenta un notevole passo avanti rispetto ad altri tipi usati in astronomia.

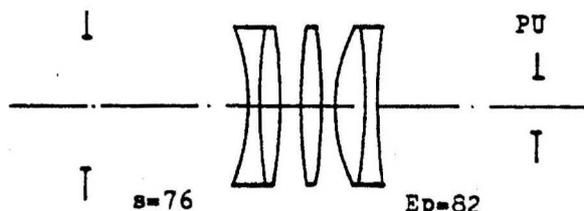


Figura 15. schema di oculare astronomico a campo piano.

L'oculare di Richter

Per correggere la distorsione e contemporaneamente portare il campo al valore di 70° , Richter ha calcolato un oculare con una superficie asferica che ha trovato impiego specialmente nei binocoli (fig. 16). Si è dovuto rinunciare alla piccola curvatura del campo senza peraltro riuscire a correggere la distorsione, con il risultato di ottenere un oculare, se non peggiore, certamente non migliore di quelli proposti dal Bertele. Ora questo oculare è in disuso.

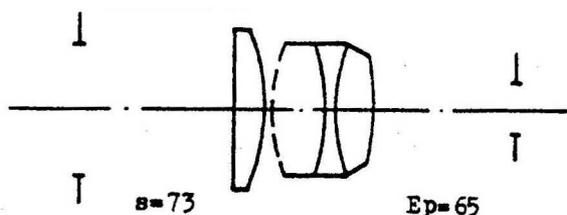


Figura 16. Schema dell'oculare di Richter.

L'oculare per forti ingrandimenti

È dovuto a Sonnefeld ed è utilizzato per strumenti che richiedono fortissimi ingrandimenti (figura 17). Questo tipo di oculare è stato sviluppato dallo schema di Huygens in modo da ridurre il diametro delle lenti poste in vicinanza dell'occhio. Come si vede il numero delle lenti costituenti l'oculare è molto elevato e ciò rappresenta un impegno notevole per il costruttore ed evidentemente un costo elevato. Il campo visuale può arrivare a 120° .

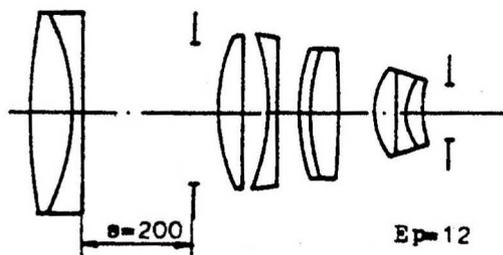


Figura 17. Schema dell'oculare per forti ingrandimenti.

I reticoli

I reticoli comunemente usati con gli oculari possono essere del tipo semplice a crociera che non richiede un supporto di vetro. Quando sono usati per ottenere l'allineamento con linee verticali dell'immagine è meglio porre la crociera a 45° , come mostra la figura 18, in modo che l'occhio possa giudicare la miglior posizione di simmetria. Se si tratta di osservare solamente

linee si può ottenere un'accuratezza molto elevata con il reticolo mostrato nella figura 19 nel quale le due linee sono poste simmetricamente da ciascuna parte della linea dell'immagine. L'interazione dell'occhio con il reticolo è importante. Un cannocchiale può essere messo a fuoco più facilmente se è dotato di un reticolo fisso che aiuta l'occhio a evitare cambiamenti involontari di accomodazione. A volte il reticolo è fisso nel fuoco oggetto dell'oculare e si muove con l'oculare quando lo strumento è messo a fuoco. Più spesso, nei microscopi di misura, il reticolo è fisso con il tubo in modo che l'oculare può essere messo a fuoco come si desidera sul reticolo e poi la combinazione oculare-reticolo può essere messa a fuoco sull'immagine formata dall'obiettivo.

Alcuni reticoli sono usati per misure dirette ed hanno una scala millimetrata, in dimensioni reali o a scala ridotta, mediante la quale l'occhio può misurare la dimensione apparente di particolari dell'immagine. Nella maggior parte degli strumenti più semplici un cambio di messa a fuoco fa variare le dimensioni dell'immagine. I reticoli possono essere usati sia negli oculari di Huygens, quando non è richiesta una grande accuratezza, sia negli oculari di Ramsden. Con entrambi i tipi di oculari quando è usata una scala graduata essa deve essere calibrata ponendo una scala di dimensioni note nel piano di lavoro del microscopio.

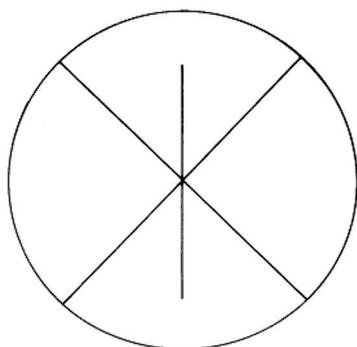


Figura 18. Reticolo utilizzato per l'allineamento con linee verticali dell'immagine.

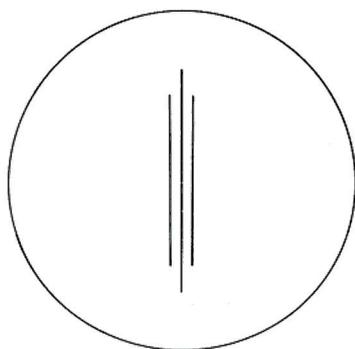


Figura 19. Reticolo utilizzato per il posizionamento di linee.

Esercizi

1. Un oculare di Huygens consiste di due lenti che hanno focale di 60 mm e 24 mm, separate da 42 mm; trovare la focale equivalente e la posizione dei fuochi. Qual è l'ingrandimento di un cannocchiale che ha un obiettivo con focale di 480 mm con questo oculare?
2. Trovare la posizione dei punti cardinali di un oculare composto di due lenti uguali di focale 40 mm separate da 30 mm. Se questo sistema è usato con un obiettivo con focale di 600 mm e diametro di 60 mm, trovare il diametro e la posizione della pupilla di uscita. Assumere che sia messo a fuoco all'infinito.

9. Strumenti ottici – Strumenti di misura

Ci occuperemo ora di alcuni strumenti di misura visuale utilizzati in ottica oftalmica, con i quali si utilizza l'occhio per effettuare misure lungo l'asse ottico, regolando lo strumento nella migliore posizione di messa a fuoco.

L'accomodazione e la precisione delle misure

In molti strumenti ottici la misura viene effettuata regolando lo strumento nella migliore posizione di messa a fuoco. La capacità dell'occhio di valutare la migliore messa a fuoco è però limitata dalla profondità di fuoco associata alla dimensione della sua pupilla (o alla pupilla di uscita dello strumento) e dalla sua capacità di accomodazione. In particolare gli osservatori più giovani, quando usano un solo occhio, possono esercitare un'accomodazione di 5-6 D senza rendersene conto. Ciò limita la precisione delle misure.

Se si tratta di osservare con un semplice cannocchiale monoculare accomodato all'infinito come quello mostrato nella figura 1 l'occhio non è in grado di distinguere la differenza tra un'immagine apparente all'infinito (linee continue) e un'immagine posta a 200 mm (linee tratteggiate). Per l'equazione di Newton l'immagine intermedia più vicina che si trova in l_a è più vicina alla lente dell'occhio di una distanza x_e data da

$$x_e = \frac{f_e f'_e}{200 \text{ mm}} = \frac{f_e f'_e}{1000/D_e} = x'_o \quad (1)$$

dove D_e è l'accomodazione in diottrie e l'occhio è assunto essere molto vicino al fuoco immagine della lente dell'occhio. Questa nuova posizione si trova a una distanza x'_o dal fuoco immagine dell'obiettivo e quindi la posizione dell'oggetto x_o che è la sua coniugata è data ancora dall'equazione di Newton:

$$x_o = \frac{f_o f'_o}{x'_o} = \frac{f_o f'_o}{f_e f'_e} \frac{1000}{D_e} = \frac{1000}{D_o} \quad (2)$$

dove D_o è il valore in diottrie per la posizione dell'oggetto. Quindi l'errore in diottrie è ridotto della radice quadrata dell'ingrandimento l_ω del cannocchiale, come ci si può aspettare dal calcolo dell'ingrandimento assiale del cannocchiale,

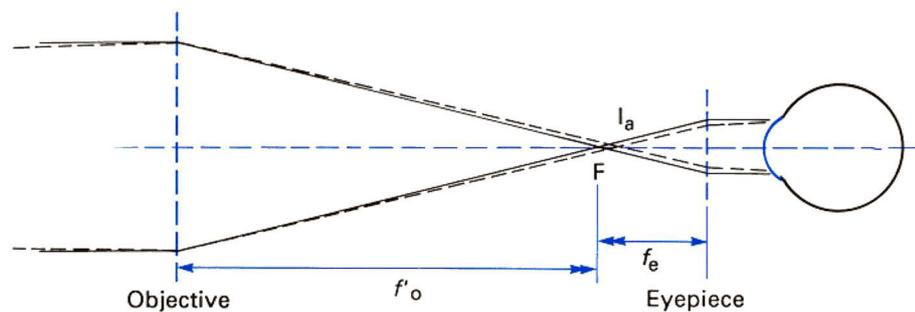


Figura 1.

$$D_o = D_e \frac{(f_e f'_e)}{(f_o f'_o)} = \frac{D_e}{l_\omega^2} \quad (3)$$

In un cannocchiale con ingrandimento $7\times$ l'errore di 5 D dell'occhio si riduce a un errore di solo 0,1 D nello spazio oggetto. La situazione è però peggiore in un mirino di una macchina fotografica nel quale l'ingrandimento trasversale può essere di soli $2\times$, e nel caso del microscopio per il quale il piccolo diametro della pupilla di uscita può aumentare la profondità di fuoco rispetto a quanto corrisponde all'errore di accomodazione.

Quando è introdotto un reticolo nel piano dell'immagine intermedia, l'errore di accomodazione è ridotto se l'osservatore cerca di mettere a fuoco allo stesso tempo l'immagine

e le tracce del reticolo. Osservatori non allenati possono però cambiare inconsciamente l'accomodazione nel passare l'attenzione da un'immagine all'altra. Anche la visione binoculare aiuta a ridurre le fluttuazioni di accomodazione perché la risposta accomodativa dell'occhio è legata alla convergenza tra i due occhi necessaria per fondere le due immagini. Anche in questo caso ciò non avviene con osservatori non allenati che tendono spesso a sopprimere la visione di un occhio guardando negli oculari.

Uno schermo diffusore posto nella posizione dell'immagine intermedia può portare un beneficio perché una sfocatura non può più essere compensata accomodando e la diffusione aumenta le dimensioni effettive della pupilla di uscita, riducendo quindi la profondità di fuoco. Sfortunatamente si ha però una considerevole perdita di luminosità dell'immagine e la granulosità dello schermo rende difficile vedere i dettagli più fini dell'immagine con i quali viene valutata la messa a fuoco.

Il frontifocometro

Il **frontifocometro** è uno strumento che misura il potere frontale delle lenti e si basa sulla valutazione della "messa a fuoco" fatta dall'occhio.

E' costituito da (figura 2):

- 1) una sorgente luminosa che illumina una mira;
- 2) una mira, che può essere spostata lungo l'asse ottico del sistema, posta vicino al fuoco oggetto F_A di una lente convergente ausiliaria A di potere maggiore della lente più potente che si può misurare con lo strumento;
- 3) un telescopio accomodato all'infinito, che convoglia la luce uscente verso l'occhio dell'osservatore.

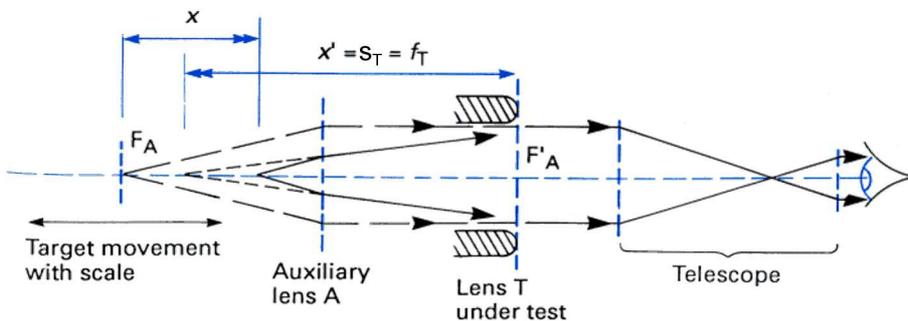


Figura 2. Schema del frontifocometro.

Se non è presente la lente da esaminare e la mira è posta esattamente nel fuoco oggetto F_A della lente ausiliaria A , l'immagine della mira prodotta dalla lente A è all'infinito e i raggi luminosi raggiungono l'obiettivo del telescopio paralleli all'asse ottico; poiché il telescopio è accomodato all'infinito, l'osservatore vede l'immagine nitida della mira.

Il dispositivo è realizzato in modo che la lente da misurare è sempre posta nel fuoco immagine F'_A della lente A mediante un supporto circolare contro cui può essere trattenuta, come è mostrato nella figura 2. Una volta collocata la lente da esaminare, i raggi luminosi non raggiungeranno più l'obiettivo del telescopio paralleli all'asse ottico e l'immagine della mira osservata nel telescopio risulterà sfuocata. Perché l'immagine torni nitida, ossia perché i raggi che raggiungono il telescopio tornino a essere collimati, è necessario che l'immagine della mira prodotta dalla lente A si trovi nel fuoco oggetto della lente da esaminare. Poiché la lente da misurare è nel fuoco immagine della lente ausiliaria abbiamo

$$s_T = f_T = x' = \frac{1}{\varphi_T} \quad (4)$$

dove f_T e φ_T sono la focale e il potere della lente da misurare, mentre si riferisce alla lente A ed è x' è la distanza dell'immagine della mira dal fuoco immagine F'_A di A .

Se si avesse un'immagine a fuoco con l'oggetto nel fuoco oggetto della lente A , la luce

dovrebbe essere collimata sia prima che dopo la lente da misurare e quindi φ_T risulterebbe zero; la posizione della mira quando ciò si verifica viene marcata con 0,0D sulla scala dello strumento.

Se il potere della lente da misurare è diverso da zero, la mira deve essere spostata di una distanza x per avere un'immagine nitida nel telescopio; per l'equazione di Newton si ha

$$x' = \frac{1}{\varphi_T} = \frac{f_a f'_a}{x}$$

da cui si ricava

$$\varphi_T = \frac{x}{f_a f'_a} \quad (5)$$

dove f_a e f'_a sono le focali della lente ausiliaria A. Quindi la distanza di cui si muove la mira è **direttamente proporzionale** al potere della lente da misurare. Se la lente da misurare è negativa l'oggetto si allontana dalla lente A mentre se è positiva l'oggetto si avvicina alla lente A. Quindi la scala può essere segnata in diottrie con i valori positivi e negativi dalle due parti opposte della posizione dello zero.

Nel frontofocometro a proiezione il telescopio è sostituito da uno schermo smerigliato attraverso cui può essere vista l'immagine formata dalla combinazione della lente ausiliaria e della lente da misurare. La mira deve ora essere ben illuminata da un piccolo condensatore. Lo schermo è posto normalmente a circa 1 m dalla lente da misurare e per tenerne conto è necessaria una ricalibrazione della scala. In linea di principio il sistema a proiezione dovrebbe essere più accurato di quello a telescopio perché l'occhio deve mettere a fuoco lo schermo. Entrambi i sistemi sono tuttavia spesso limitati dalle aberrazioni della lente da esaminare e dall'accuratezza con cui essa può essere posizionata. La figura 3 mostra lo schema di un frontofocometro a proiezione nel quale alcuni specchi sono utilizzati per deviare i raggi di luce e rendere più compatto lo strumento.

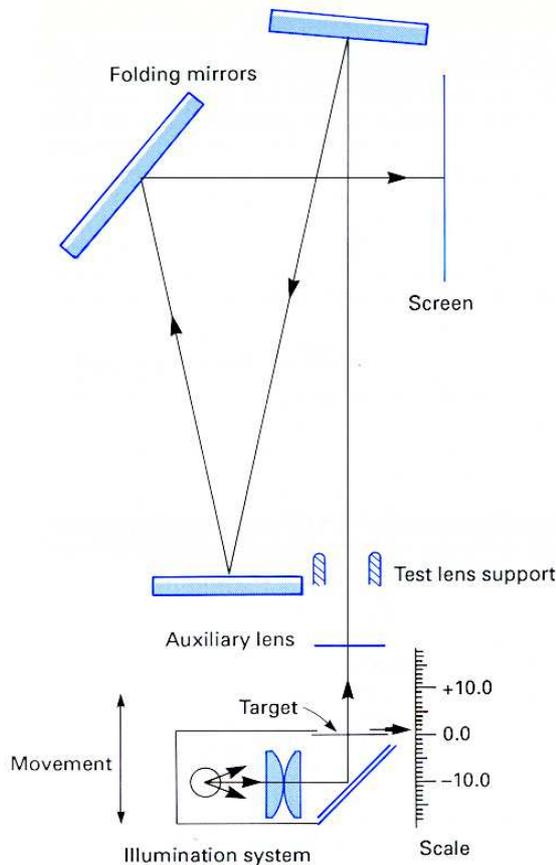


Figura 3. Schema di un frontofocometro a proiezione.

Esempio

Se un frontifocometro a telescopio è modificato in frontifocometro a proiezione con lo schermo posto a 1 m dalla lente da misurare, come dovrebbe essere modificata la lettura della scala originale in diottrie per ottenere il valore corretto, assumendo che il telescopio fosse stato accomodato all'infinito?

Nel caso originale (o) le vergenze per la lente da misurare di potere φ sono:

$$\sigma'_o = 0 = \sigma_o + \varphi$$

Nel caso modificato (m) le vergenze per la lente da misurare sono:

$$\sigma'_m = 1 = \sigma_m + \varphi$$

Quindi

$$\sigma_m = 1 - \varphi = 1 + \sigma_o$$

Perciò il frontifocometro darà una misura σ_o come se avesse una lente più debole di 1 D ($\sigma_m - 1$) e tutte le letture dovranno essere aumentate di +1 D.

Si può anche immaginare di avere una lente da misurare che consista di due lenti poste a contatto, di potere +3 D e +1 D. Se a fuoco correttamente sul frontifocometro modificato, la lente da +1 D metterà a fuoco luce collimata sullo schermo. La parte originaria del frontifocometro darà una lettura come se stesse facendo emergere luce collimata da una lente da +3 D. Quindi il sistema di lenti da misurare da 4 D darà una lettura come una lente da 3 D. Conviene in questi casi cambiare la scala dello strumento.

Il raggimetro

Un altro strumento di misura che pure si basa sulla messa a fuoco di un'immagine è il **raggimetro**. E' usato per misurare la curvatura delle superfici di dispositivi ottici di piccolo raggio come le lenti a contatto.

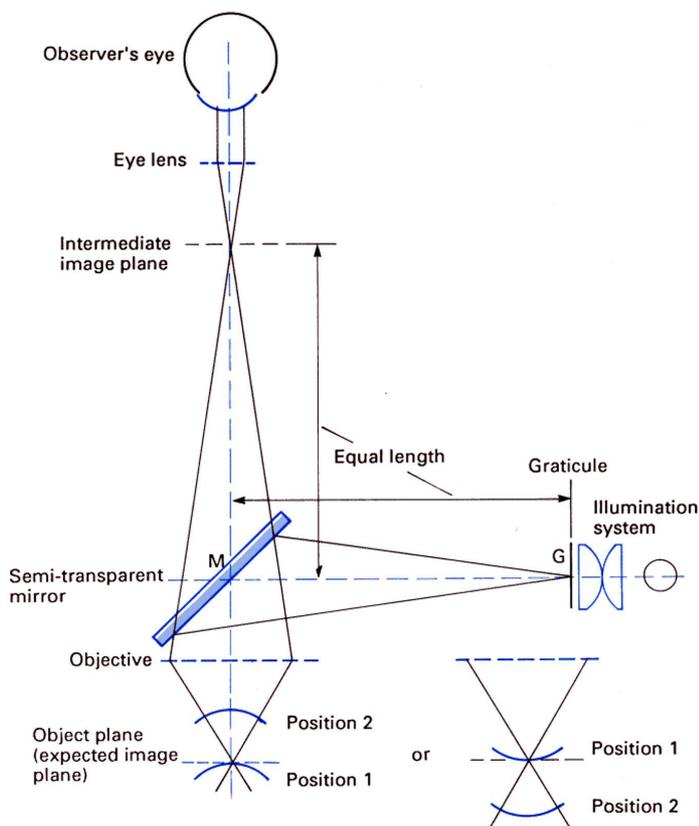


Figura 4. Schema del raggimetro.

Nota anche come **metodo di Drysdale**, il sistema usa un microscopio con un obiettivo di circa 20 mm di focale. Un reticolo illuminato G è fatto apparire nella stessa posizione del piano dell'immagine intermedia mediante riflessione su uno specchio semitrasparente M , come è mostrato nella figura 4. Questo reticolo è poi messo a fuoco dall'obiettivo sul piano dell'oggetto, coniugato con l'immagine intermedia. L'oggetto da misurare è sostenuto da un supporto dotato di un movimento micrometrico verticale. Se una superficie riflettente è posta su questo supporto e mossa in modo da coincidere con il piano dell'oggetto, la luce è riflessa indietro all'obiettivo e poi all'occhio attraverso il piano dell'immagine intermedia (posizione 1 nella figura 4).

Se la superficie riflettente si trova nel piano oggetto del microscopio, si osserverà un'immagine nitida sia nel caso di una superficie riflettente piana, sia nel caso di una superficie riflettente curva. Spostando la superficie riflettente dal piano oggetto del microscopio (posizione 1) di una quantità d , l'immagine osservata nel microscopio risulterà sfuocata, perché l'immagine del reticolo prodotta dalla superficie riflettente verrà a trovarsi a una distanza $2d$ diversa da zero dal piano oggetto del microscopio, come mostra la figura 5. Se però la superficie riflettente è curva, e lo spostamento è tale da portare il centro di curvatura della superficie riflettente nel piano oggetto del microscopio, l'immagine del reticolo si verrà a trovare nuovamente nel piano oggetto del microscopio e verrà vista di nuovo nitidamente (posizione 2 nelle figure 4 e 5). Lo spostamento d della superficie riflettente tra la posizione 1 e la posizione 2 è quindi uguale al raggio di curvatura della superficie.

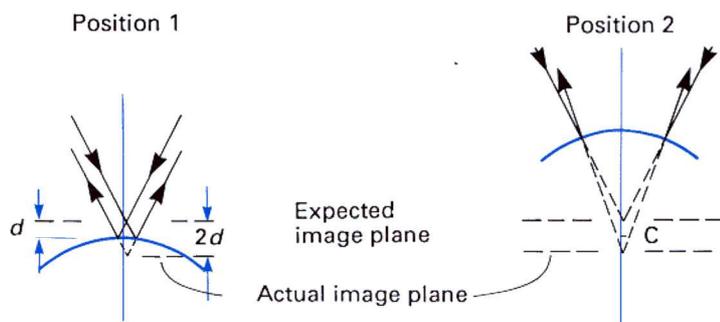


Figura 5. Schema delle riflessioni nel raggiometro.

Poiché l'immagine si muove del doppio di quanto si muove la superficie riflettente, raddoppia l'accuratezza della misura rispetto alla valutazione della messa a fuoco da parte dell'occhio. Sono comunque necessarie cura ed esperienza per ottenere l'accuratezza di 0,05-0,025 mm richiesta per la misura dei raggi di curvatura delle lenti a contatto. Il sistema funziona con superfici sferiche e si può fare in modo che funzioni anche con superfici toriche, ma nel caso di superfici asferiche o di superfici mal lavorate non vi è un unico centro di curvatura, la qualità dell'immagine nella posizione 2 è scarsa e ciò impedisce una lettura accurata. Poiché il raggio di curvatura si trova sottraendo una lettura dall'altra c'è un errore finale che è circa 1,4 volte il singolo errore medio di lettura.

10. Superfici ottiche asferiche

Praticamente tutte le superfici ottiche discusse fino ad ora erano sferiche. Anche le superfici piane sono superfici sferiche con un raggio di curvatura infinito. Le superfici sferiche sono molto comuni in ottica, dato che sono facili da realizzare per l'azione autocorrettrice che si ha quando una superficie convessa è sbozzata e lucidata con un utensile concavo e viceversa.

Le superfici che non hanno una forma sferica sono dette, in ottica, **superfici asferiche**. Il termine **asferico** significa propriamente "non sferico" e quindi corrisponde a una grandissima varietà di superfici. In ottica, però, il suo uso è generalmente riservato a superfici che hanno simmetria di rotazione rispetto a un asse. Si utilizzano superfici di questo tipo, per esempio, per ridurre lo spessore di lenti per occhiali con potere elevato, o per realizzare obiettivi fotografici nei quali siano ridotte le aberrazioni geometriche.

Le superfici asferiche sono generalmente difficili da realizzare. Superfici che hanno scostamenti controllati da una forma sferica richiedono particolare precisione e controllo per renderle soddisfacenti dal punto di vista ottico. Lo sviluppo di movimenti di alta precisione ha permesso di realizzare macchine a controllo numerico che raggiungono accuratèzze entro la lunghezza d'onda della luce.

Le superfici asferiche possono assumere diverse forme. In questo capitolo ne descriveremo alcune.

Superfici asferiche

In generale una superficie può essere descritta, in un sistema di coordinate cartesiane x, y, z , attraverso una funzione matematica

$$F(x, y, z) = 0 \quad (1)$$

Una delle tre variabili può essere esplicitata, per esempio la variabile x , in modo da ottenere una funzione nella forma

$$x = f(y, z) \quad (2)$$

Se poi la superficie è simmetrica rispetto all'asse x , il valore della funzione deve dipendere solamente dalla distanza ρ da questo asse, ossia si deve avere

$$x = f(\rho) \quad (3)$$

con $\rho^2 = (y^2 + z^2)$.

L'unico tipo di superficie che abbiamo finora considerato è la superficie sferica. Come si vede dalla figura 1, l'espressione (3) permette di descrivere una superficie sferica di raggio r passante per origine degli assi e con centro sull'asse x se si pone

$$x = r - \sqrt{r^2 - \rho^2} \quad (4)$$

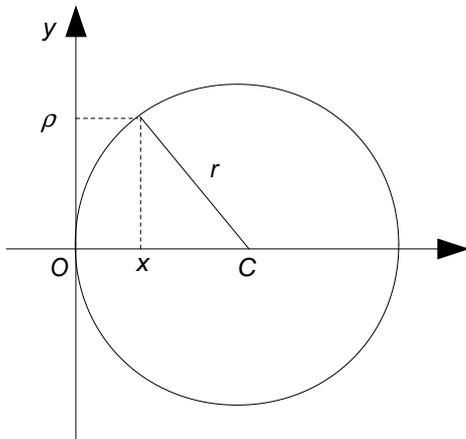


Figura 1. Sezione di superficie sferica di raggio r e centro C passante per l'origine degli assi.

La superficie sferica si ottiene ruotando una circonferenza intorno a un suo diametro. Sappiamo dalla geometria analitica che la circonferenza appartiene a una famiglia di curve dette **coniche**, di cui fanno parte anche l'ellisse, la parabola e l'iperbole. Dalla rotazione di queste curve intorno al loro asse si ottiene una famiglia di superfici dette **conicoidi**, di cui fanno parte oltre alla sfera anche l'ellissoide, il paraboloido e l'iperboloido. Si tratta di superfici asferiche utilizzate in ottica, di cui ci occuperemo ora.

Conicoidi approssimati

La formula (4), che come abbiamo visto sopra permette di descrivere una superficie sferica, può essere un poco trasformata e approssimata in modo da eliminare la radice quadrata che risulta sempre un poco fastidiosa nei calcoli.

Utilizzeremo un procedimento usato comunemente per trattare problemi matematici un poco complessi, che consiste nell'approssimare una funzione data (in questo caso la funzione che contiene la radice quadrata) con un polinomio. Vediamo come si procede, nel nostro caso.

La formula (4), che descrive la circonferenza mostrata nella figura 1, può essere riscritta nella forma

$$\sqrt{r^2 - \rho^2} = r - x \quad (5)$$

Elevando al quadrato si ottiene

$$r^2 - \rho^2 = r^2 - 2rx + x^2 \quad (6)$$

e quindi, semplificando,

$$\rho^2 = 2rx - x^2 \quad (7)$$

Se, come avviene normalmente in ottica, la curvatura delle superfici è piccola, e quindi il valore di della distanza x (che nella figura 1 corrisponde al segmento OX) è piccolo rispetto al raggio di curvatura r , allora in prima approssimazione il termine x^2 nella formula (7) può essere trascurato, e si può scrivere

$$\rho^2 \approx 2rx$$

e quindi

$$x \approx \frac{\rho^2}{2r} \quad (8)$$

Per renderci conto dell'approssimazione che viene utilizzata nel ricavare questa formula, consideriamo la superficie sferica di una lente che abbia un raggio pari a $\rho = 30$ mm e un raggio di curvatura $r = 83,333$ mm (che corrisponde a una superficie con un potere di 6,0 D se l'indice di rifrazione è $n = 1,5$). Il valore esatto della distanza OX calcolato con la formula (4) è

$$x = r - \sqrt{r^2 - \rho^2} = 83,333 - \sqrt{83,333^2 - 30^2} \text{ mm} = 5,587 \text{ mm}$$

mentre utilizzando la formula approssimata (8) si ha

$$x \approx \frac{\rho^2}{2r} = \frac{30^2}{2 \times 83,333} \text{ mm} = 5,400 \text{ mm}$$

L'errore che si ha utilizzando la formula approssimata (8) anziché la formula esatta (4) è quindi in questo caso pari a 0,18 mm, che corrispondono al 3% del valore esatto.

La formula (8), che non contiene più la radice quadrata, non è più l'equazione di una circonferenza, ma è l'equazione di una parabola, e precisamente è l'equazione di quella parabola che è tangente alla circonferenza nel suo vertice e l'approssima nel modo migliore.

Una descrizione più precisa della superficie sferica si ottiene aggiungendo un altro termine alla formula (8), ossia passando a un polinomio di grado superiore. Si può dimostrare, con metodi matematici un poco più avanzati, che l'espressione corretta è

$$x = \frac{\rho^2}{2r} + \frac{\rho^4}{8r^3} \quad (9)$$

Utilizzando questa nuova formula nel caso che abbiamo considerato sopra si otterrebbe

$$x \approx \frac{\rho^2}{2r} + \frac{\rho^4}{8r^3} = \frac{30^2}{2 \times 83,333} + \frac{30^4}{8 \times 83,333^3} \text{ mm} = 5,575 \text{ mm}$$

L'errore si riduce quindi a soli 0,012 mm, pari allo 0,2% del valore esatto. Non è ancora l'equazione della circonferenza, ma ci si avvicina abbastanza.

Sappiamo che la circonferenza e la parabola sono due casi particolari di curve che appartengono alla famiglia delle coniche, che comprende anche le ellissi e le iperboli. Ebbene, la formula (9) può essere utilizzata per rappresentare ogni tipo di conica, semplicemente introducendo un parametro che indichiamo con p , in questo modo:

$$x = \frac{\rho^2}{2r} + p \frac{\rho^4}{8r^3} \tag{10}$$

Se $p = 0$ si ritorna alla formula (8) e abbiamo una parabola (o meglio, un paraboloide, perché ρ può ruotare intorno all'asse x), se $p = 1$ abbiamo una sfera (formula 9), mentre per gli altri valori di p abbiamo iperboloide (se p è negativo) o ellissoidi (se p è positivo), come mostra la figura 2.

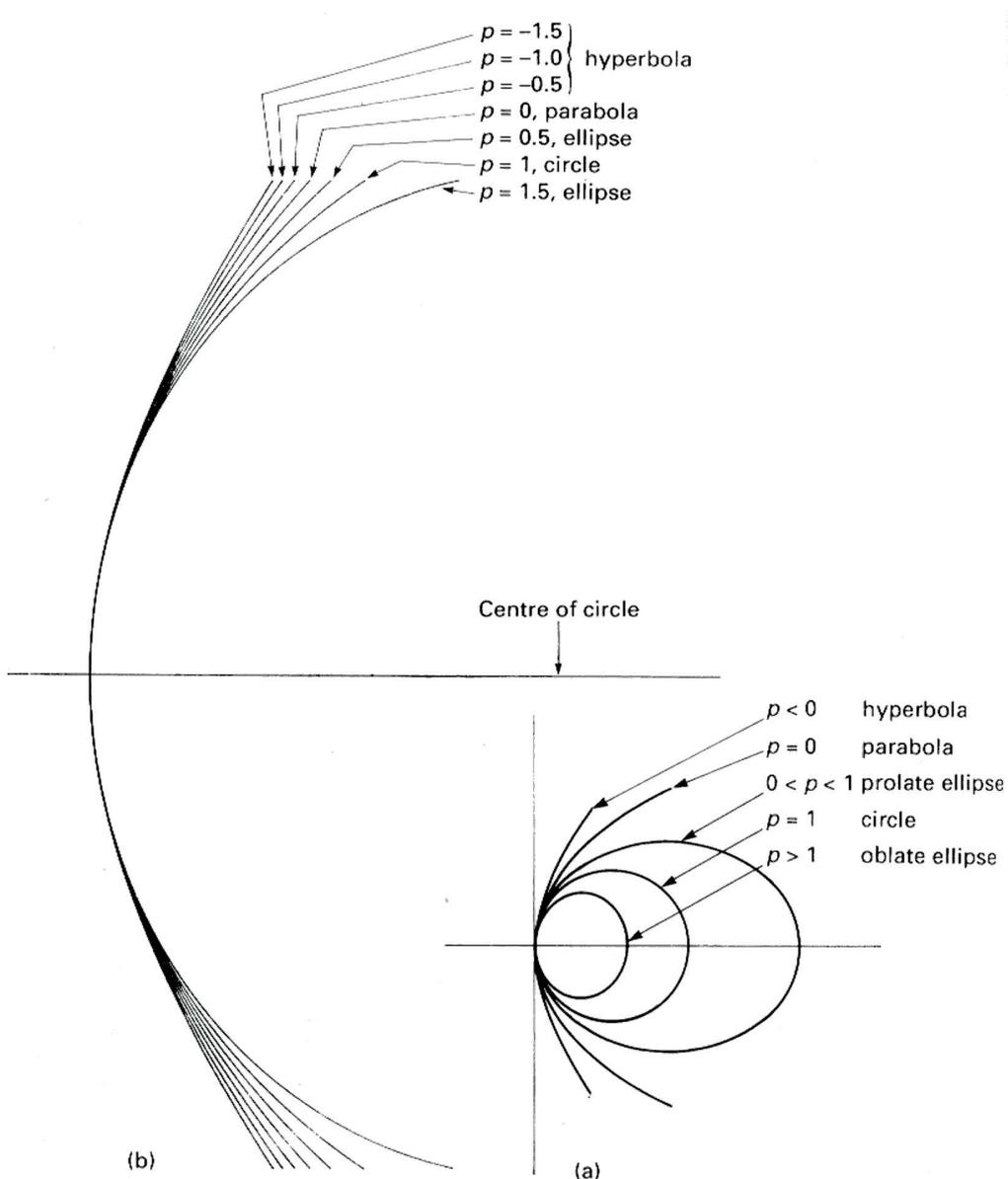


Figura 2. Curve coniche, come date nei testi di matematica (a) e come base per le superfici ottiche asferiche (b).

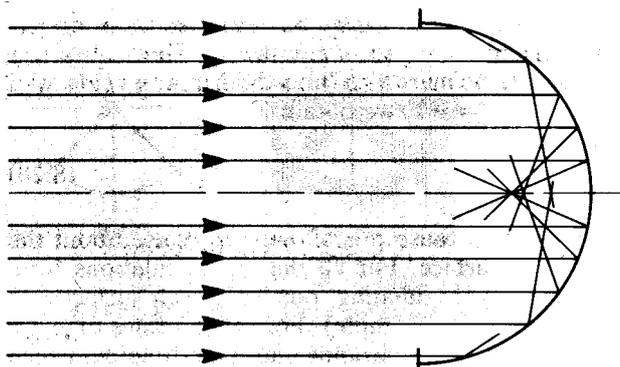


Figura 3. Aberrazione sferica di uno specchio sferico.

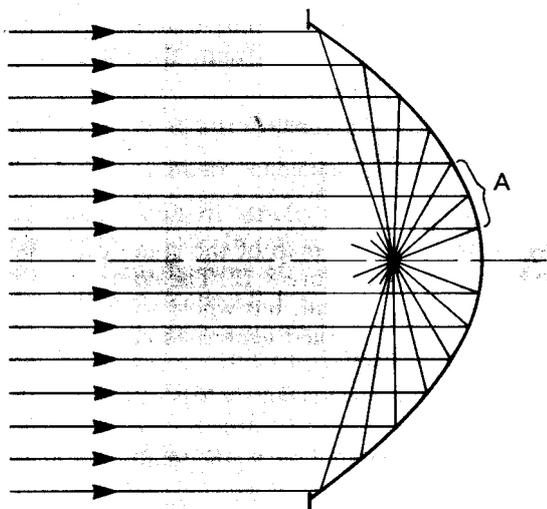


Figura 4. Specchio parabolico con aberrazione sferica nulla.

L'effetto più immediato che si ottiene rendendo asferica in questo modo una superficie sferica è la correzione dell'aberrazione sferica, ossia quel difetto delle superfici ottiche che si presenta quando gli angoli di incidenza sono grandi e non è più possibile utilizzare l'approssimazione dell'ottica di Gauss. La figura 3 dà un'idea dell'aberrazione sferica che si presenta nel caso di uno specchio concavo: non ha più senso parlare di immagine puntiforme se l'apertura dello specchio è grande. Questa aberrazione è completamente corretta se la superficie è resa parabolica come mostrato nella figura 4. Ciò dipende, naturalmente, dalla posizione dell'oggetto, e lo specchio parabolico è libero da aberrazione sferica solo per punti coniugati di cui uno è all'infinito. E' perciò usato nei telescopi e nei collimatori.

Specchi parabolici posti fuori asse sono comunemente usati in strumenti spettrofotometrici e per il collaudo di obiettivi. Usano una porzione fuori asse della superficie parabolica come quella indicata con A nella figura 4. Specchi di questo tipo, con un oggetto posto sull'asse ottico, producono un fascio collimato che non è oscurato dall'oggetto stesso.

Quindi, nel caso della riflessione su una superficie paraboloidale si può avere un'immagine perfetta per un oggetto posto a distanza infinita. Usando le altre superfici conicoidi si possono avere per riflessione immagini perfette di oggetti posti a distanze finite. E' necessario un ellissoide per punti coniugati finiti reali, e un iperboloidale quando uno dei punti coniugati è virtuale. Anche la sfera appartiene a questa famiglia di superfici perché fornisce un'immagine perfetta quando l'oggetto sull'asse e l'immagine coincidono.

La figura 5 mostra la sequenza delle situazioni possibili. Nei testi di matematica riguardanti la geometria analitica a due dimensioni i punti notevoli dell'ellisse, della parabola e dell'iperbole sono detti fuochi proprio in riferimento alle proprietà degli specchi tridimensionali mostrati nella figura 5.

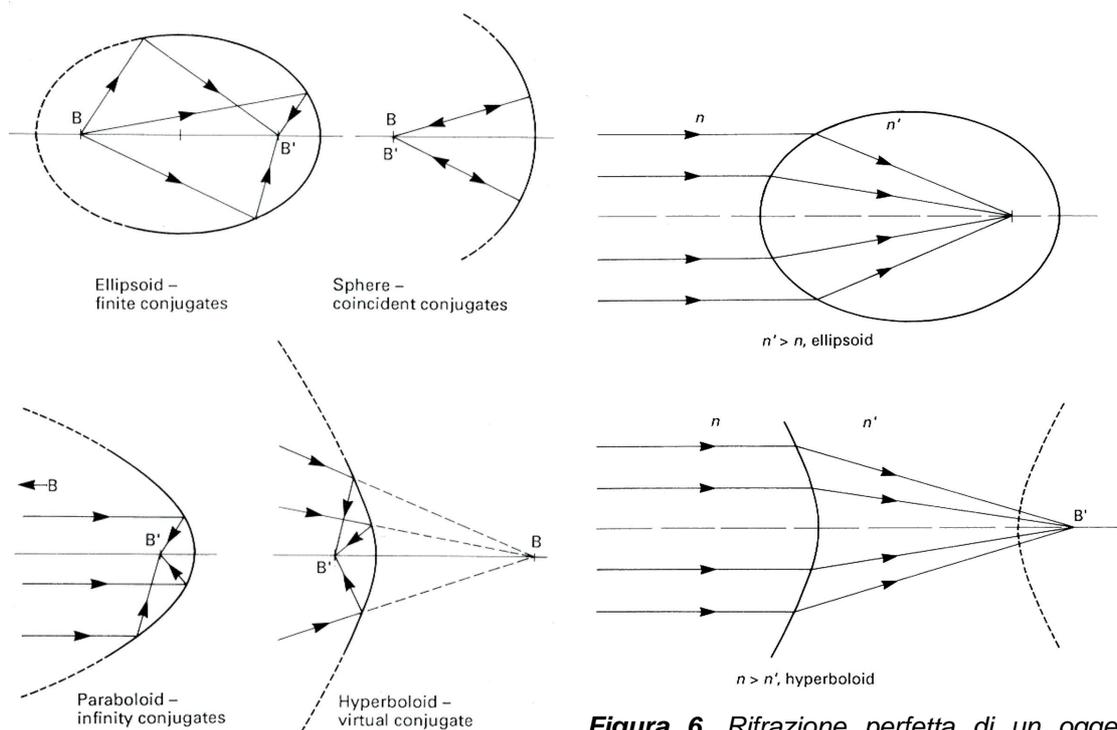


Figura 5. Riflessione perfetta di un oggetto sull'asse ottico da parte di specchi conicoidi.

Figura 6. Rifrazione perfetta di un oggetto distante posto sull'asse ottico da parte di una superficie conicoide.

Con la rifrazione la situazione è più complessa. E' possibile definire la superficie richiesta per ottenere un'immagine puntiforme perfetta calcolando la posizione per la quale vale la legge di Snell. Cartesio (che definì la legge di Snell prima di Snell!) eseguì questo calcolo e trovò che in generale le superfici sono asferiche ma non sono coniche. Si applica a queste superfici il nome di **ovali di Cartesio**. Per il caso speciale della riflessione queste superfici degenerano nelle superfici coniche definite sopra. Quando però l'oggetto puntiforme è all'infinito gli ovali di Cartesio degenerano in superfici coniche anche nel caso della rifrazione. Quando n' è maggiore di n si forma un'immagine puntiforme esente da aberrazione sull'asse di una superficie ellissoide in modo tale che metà della superficie rifrange la luce nel fuoco dell'altra metà. Quando n' è minore di n è necessaria una superficie iperboloida che rifrange la luce nell'altro fuoco. La forma della superficie dipende dagli indici di rifrazione e l'effetto è mostrato nella figura 6.

Con superfici coniche calcolate correttamente si possono ottenere immagini esenti da aberrazioni per punti posti sull'asse ottico. Superfici asferiche di questo tipo hanno trovato applicazioni nei sistemi di condensatori dove sono usati riflettori ellittici per ottenere immagini della sorgente, come è mostrato nella figura 7, e dove coppie di superfici rifrangenti ellittiche, ciascuna con un punto coniugato all'infinito, sono usate per ottenere un'immagine di una sorgente a distanza finita come mostrato nella figura 8.

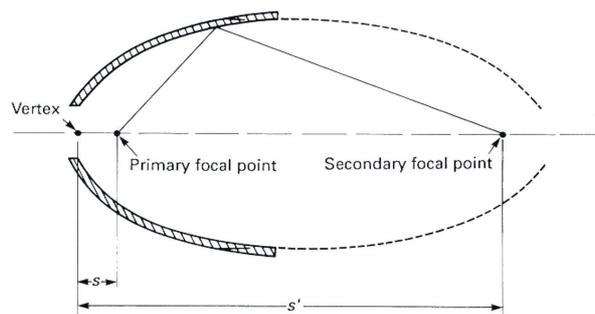


Figura 7. Condensatore con riflettore ellissoidale. Agli scopi pratici le distanze s e s' divengono più importanti della lunghezza focale.

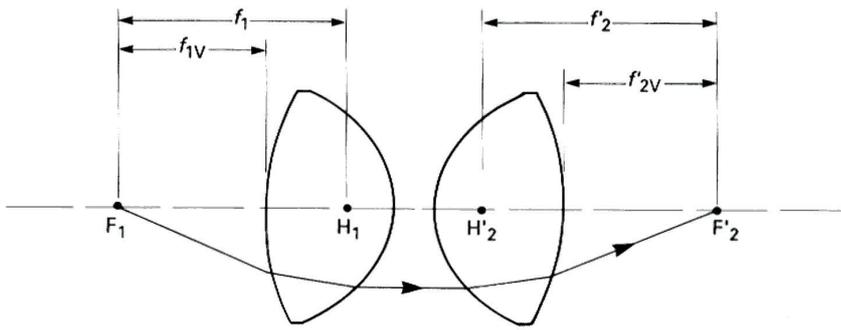


Figura 8. Condensatore con lenti asferiche. Le superfici affacciate sono ellissoidali. Una sorgente posta in F dà luce collimata priva di aberrazione sferica dopo la rifrazione da parte della prima lente. La seconda lente produce l'effetto inverso. Per ottenere una differente dimensione dell'immagine in F' si usano lenti asferiche con diversa focale, sempre mantenendo collimata la luce tra di esse.

Nel caso di una lente sottile singola una delle due superfici può essere resa asferica per correggere l'aberrazione sferica per una particolare coppia di punti coniugati. Il processo di asferizzazione può essere visto come la sovrapposizione di un sottile strato con potere nullo che ha uno spessore t che varia come il termine introdotto per ricavare le formule (9) e (10), che ora scriviamo come

$$t = an \frac{\rho^4}{8r^3} \quad (11)$$

dove a è una costante che in questo caso sostituisce il parametro p ed n è l'indice di rifrazione dello strato. Questo strato avrà la freccia della prima superficie data da

$$x_1 = \frac{\rho^2}{2r} + (1+an) \frac{\rho^4}{8r^3} \quad (12)$$

e quella della seconda superficie data da

$$x_2 = \frac{\rho^2}{2r} + \frac{\rho^4}{8r^3} \quad (13)$$

La figura 9 mostra come ciò si realizza. Qualunque sia il valore di r , questo strato sottile non ha potere. Il termine asferico gli dà una variazione di spessore che varia con ρ^4 e quindi corregge l'aberrazione sferica. Lo spessore della lente (in questo caso positiva) è ridotto della quantità corrispondente alla formula (11) rispetto al caso della lente di uguale potere con entrambe le superfici sferiche. Facciamo comunque presente che una lente calcolata in questo modo corregge l'aberrazione sferica ma introduce altre aberrazioni se il diaframma non è posto in corrispondenza della lente. Poiché nel caso delle lenti da occhiali il diaframma non è posto in corrispondenza della lente ma all'interno dell'occhio, in pratica vengono utilizzate superfici asferiche leggermente diverse da quelle qui indicate per ottenere una migliore prestazione della lente.

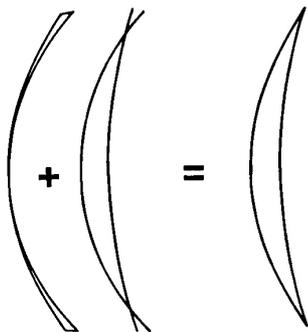


Figura 9. L'introduzione di uno strato asferico.

Un altro approccio al problema generale delle superfici asferiche è quello di approssimarle con una successione di superfici sferiche che si adattano l'una all'altra. Questo metodo viene utilizzato per le lenti oftalmiche fuse nelle quali il costo di realizzazione della superficie asferica è ridotta alla produzione dello stampo. Per la sua fabbricazione si utilizza una successione di superfici sferiche, normalmente quattro o cinque, che approssimano la superficie asferica richiesta, generalmente un'iperboloide, come è mostrato nella figura 10. Le zone di transizione raccordate levigando e lucidando la superficie con un utensile che rimuove preferenzialmente le zone preminenti. La qualità ottica di una superficie così realizzata sarebbe scarsa se la lente risultante (positiva) fosse usata a piena apertura. Per le lenti oftalmiche, però, la perdita di acuità visiva nel campo periferico non è peggiore di quella che si avrebbe con una lente sferica dello stesso potere. Lenti di questo tipo sono generalmente usate con poteri da circa +10 a +14 D con una diminuzione di potere di 4 o 5 D dal centro al bordo della lente.

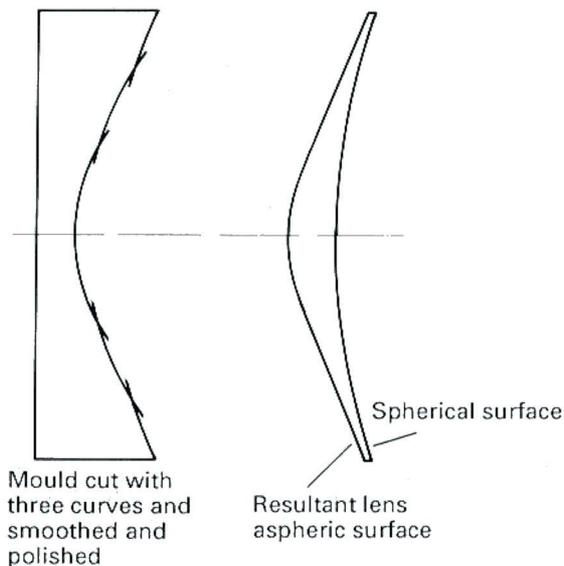


Figura 10. Metodo di produzione di una lente a curvatura variabile.

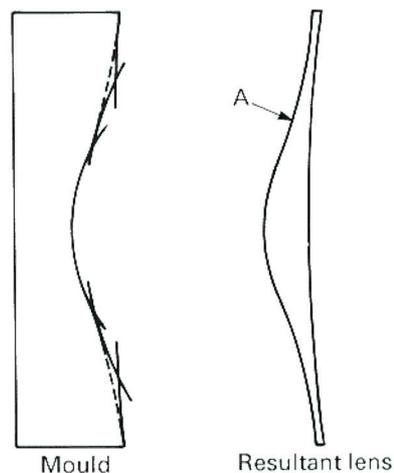


Figura 11. Lente per afachia.

Con lo stesso metodo si producono lenti con poteri ancora più elevati per le quali non ci si preoccupa però di correggere la visione periferica. La forma di queste lenti è mostrata nella figura 11. Nella regione indicata con A la superficie della lente diventa toroidale: c'è ancora potere positivo nel meridiano sagittale, ma il meridiano tangenziale ha potere negativo e ciò genera un considerevole astigmatismo. Lenti di questo tipo sono utilizzate per correggere l'**afachia**, ossia la condizione dell'occhio in cui è stato rimosso il cristallino in seguito a un'operazione di cataratta. Attualmente si usa però inserire nell'occhio una **lente intraoculare** per compensare la perdita di 16-22 D dovuta alla rimozione del cristallino.

11. Superfici toroidali e cilindriche

Un difetto della visione piuttosto frequente è l'**astigmatismo**, dovuto a mancanza di simmetria sferica del sistema ottico, in particolare della cornea, ha come effetto che l'immagine di un punto non sia più un punto, ma una lineetta, o una macchia più o meno ellittica. In pratica la cornea non ha più una forma sferica, ma è deformata come se fosse stata compressa (o dilatata) in una direzione. Ci proponiamo allora di studiare ora come si possono descrivere superfici che presentano questo tipo di deformazione, le caratteristiche delle immagini che vengono prodotte da queste superfici, e come questo difetto può essere corretto.

La superficie toroidale

Supponiamo di prendere una lente sottile a menisco, realizzata con materiale morbido, e schiacciarla come mostra la figura 1. La superficie si distorce dalla forma sferica. C'è un aumento di curvatura lungo la sezione YAY' , ma lungo la sezione ZAZ' la curvatura diminuisce perché la lente si flette per resistere allo sforzo. Ogni porzione della superficie ora ha due curvature che sono, in effetti, i valori massimo e minimo di una curvatura che cambia con l'orientazione della sezione. Quindi, in prima approssimazione, la freccia della corda YY' è s e anche la freccia della corda ZZ' è s , anche se queste corde sono di diversa lunghezza. Se sono scelte corde con diverse orientazioni, come VV' , la loro lunghezza varia da un minimo in YY' a un massimo in ZZ' e di nuovo a YY' due volte ad ogni rotazione.

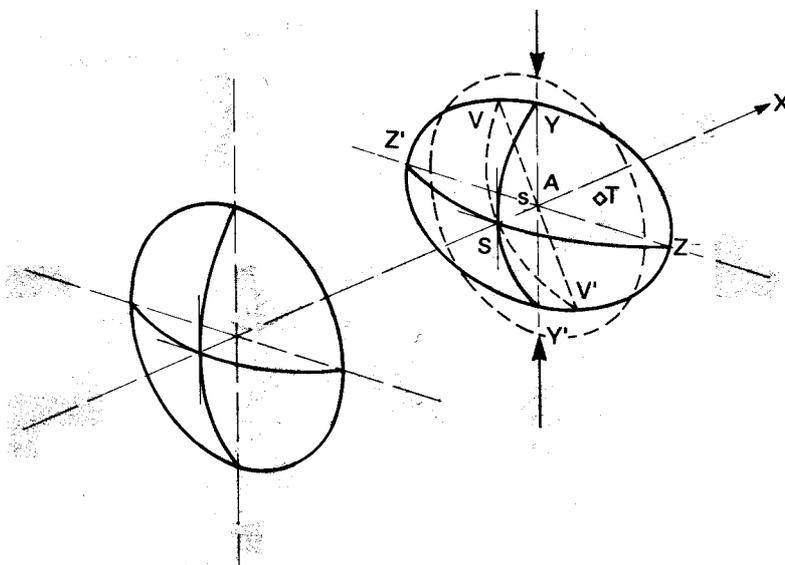


Figura 1. Deformazione di una superficie sferica per ottenere una superficie toroidale.

Questo tipo di superficie è detta **toroidale**. Dal punto di vista matematico, la superficie toroidale con una curvatura massima e una curvatura minima ortogonali tra loro è una superficie di carattere generale. Essa si ottiene dalla rotazione di una circonferenza intorno a un asse appartenente allo stesso piano in cui si trova la circonferenza. Il nome "toroidale" deriva dal fatto che quando l'asse è esterno alla circonferenza la superficie che si ottiene è a forma di ciambella (figura 2), e in latino il termine "torus" indicava, tra l'altro anche un cuscino a forma di ciambella. Tre casi particolari sono:

- la superficie **sferica** che si ha quando la curvatura massima e la curvatura minima sono uguali; si ottiene ruotando una circonferenza intorno a un proprio diametro;
- la superficie **cilindrica** che si ha quando la curvatura minima è nulla;
- la superficie **piana** che si ha quando entrambe le curvature sono nulle.

La figura 3 mostra esempi di superfici cilindriche e la figura 4 due diverse categorie di superfici toroidali.

Tutte queste superfici (tranne la superficie piana) hanno curvature che variano da un valore minimo e un valore massimo a seconda dell'orientazione della sezione o **meridiano** che

è stato scelto. Le orientazioni che contengono le curvature massima e minima sono chiamate **meridiani principali**. Nel caso di una lente cilindrica l'asse del cilindro di cui una parte forma la superficie è parallelo al meridiano principale che ha curvatura nulla. Questo meridiano è detto **asse meridiano** o **asse del cilindro**.

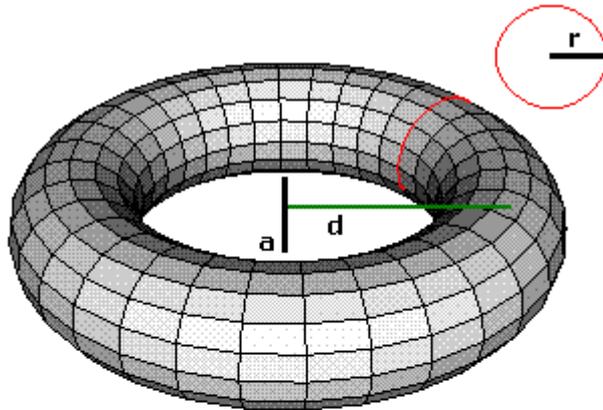


Figura 2. Superficie toroidale con asse esterno alla circonferenza generatrice, a forma di ciambella. Il raggio r della circonferenza generatrice è il raggio di curvatura minimo del toro.

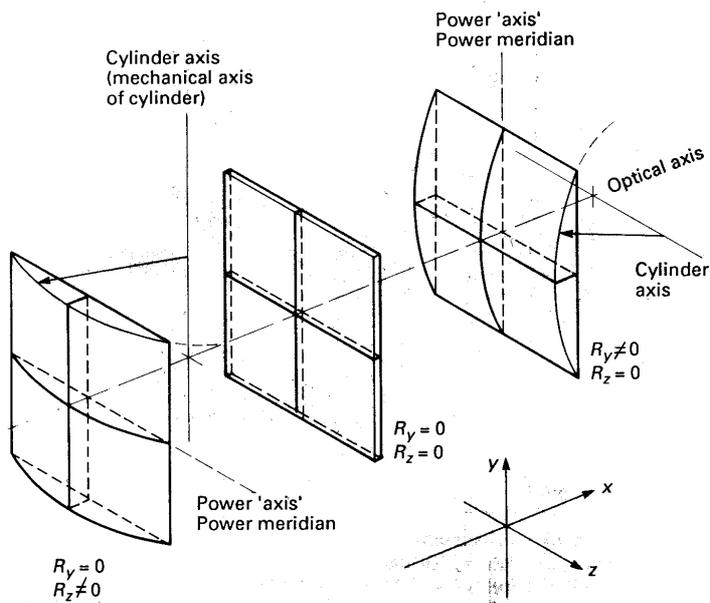


Figura 3. Lenti cilindriche.

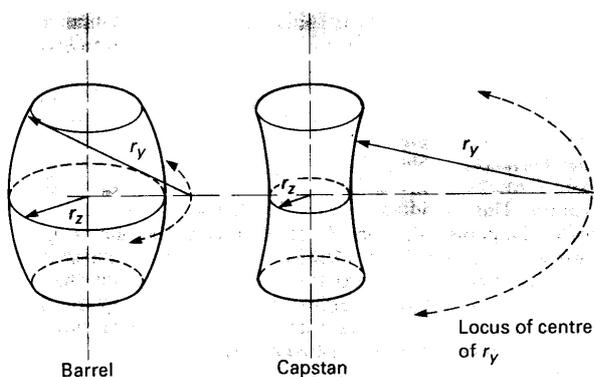


Figura 4. Altri esempi di superfici toroidali.

L'effetto rifrattivo di una lente cilindrica

Nella figura 5 si può vedere che per una lente cilindrica con asse del cilindro verticale la rifrazione della luce proveniente da un oggetto puntiforme posto sull'asse ottico si ha solo nel piano orizzontale, che in questo caso è il piano meridiano che ha la curvatura e, quindi, il potere della lente. Questo potere è detto **potere meridiano**. Ogni raggio di luce che raggiunge la lente è rifratto solo dal potere meridiano. Il risultato è un'immagine a forma di linea parallela all'asse del cilindro, ossia al meridiano di potere nullo della lente. La linea è dovuta all'assenza di potere, in questo caso, nel piano verticale.

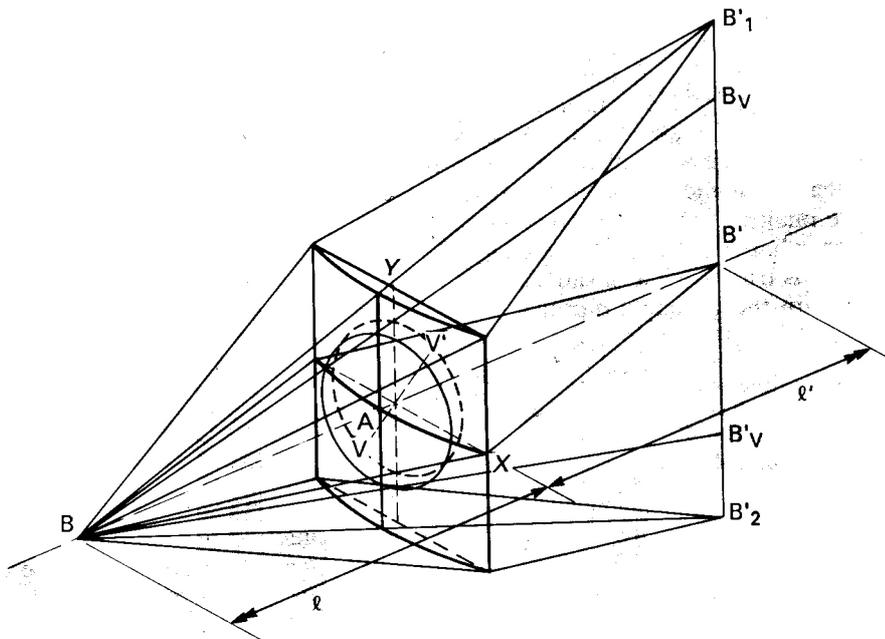


Figura 5. Una lente cilindrica in azione.

Quando l'apertura della lente è rettangolare la linea immagine di una sorgente puntiforme cambia poco di intensità lungo la sua lunghezza. Per una lente cilindrica di apertura circolare l'intensità si riduce allo stesso modo dell'ampiezza effettiva della lente, divenendo nulla nei punti B'_1 e B'_2 . Nel piano che contiene il potere meridiano non c'è nulla che distingue la lente da una lente sferica. Il potere della lente è dato da

$$\varphi_c = \rho_c(n-1) = \frac{n-1}{r_c} \quad (1)$$

dove il suffisso c indica una superficie cilindrica e n è l'indice di rifrazione.

Per una lente cilindrica nella quale l'altra superficie ha potere nullo si applicano le equazioni gaussiane fondamentali

$$\sigma' = \sigma + \varphi_c \quad (2)$$

e

$$\frac{1}{s'} = \frac{1}{s} + \frac{1}{f_c} \quad (3)$$

dove s è la distanza dell'oggetto puntiforme e s' la distanza della linea immagine.

L'effetto rifrattivo di una superficie toroidale

Se anziché una superficie cilindrica consideriamo una superficie toroidale, entrambi i meridiani hanno potere rifrattivo. L'ottica oftalmica fa un grande uso di superfici toroidali e ha sviluppato una propria terminologia: le lenti con superfici toroidali vengono dette **lenti toriche**. Salvo casi speciali una lente torica ha una superficie sferica e una toroidale.

Si può dimostrare che:

- l'effetto ottico di una superficie rifrangente toroidale è del tutto equivalente a quello che si otterrebbe con una successione di due superficie cilindriche con assi ortogonali tra loro disposti come i meridiani della superficie toroidale, con poteri corrispondenti a quelli della superficie toroidale:
- l'effetto ottico di una qualsiasi superficie toroidale è anche equivalente a quello di una superficie cilindrica più una superficie sferica. Per questo nell'ottica oftalmica è normale indicare una lente torica in termini del suo potere sferico *sf* e del suo potere cilindrico *cyl*.

La rifrazione attraverso questa superficie crea un fronte d'onda molto simile a quello formato dall'astigmatismo, l'aberrazione geometrica descritta nel capitolo G e che è chiamata astigmatismo obliquo per distinguerlo dall'effetto dovuto alle lenti toroidali e cilindriche che ora chiameremo **astigmatismo assiale**.

Nel caso di una lente con una superficie piana e l'altra superficie toroidale con poteri, per esempio, +6 D e +4 D nei suoi meridiani principali, l'effetto ottico è la formazione di due linee immagini nei suoi fuochi immagine, come si otterrebbe usando due superfici cilindriche di potere +6 D e +4 D con i loro assi posti ad angolo retto. Lo stesso effetto si sarebbe avuto usando una lente sottile sferica da +4 D a contatto con una lente cilindrica sottile con potere di +2 D. Lo stesso effetto può essere ottenuto anche usando una lente sferica sottile da +6 D a contatto con una lente cilindrica sottile con potere di -2 D.

Il potere di questa lente torica può essere indicato fornendo i valori dei due poteri cilindrici (che sono quelli che si ricavano dall'esame della lente al frontofocometro)::

$$Cyl_1 = +6 \text{ D} \quad Cyl_2 = +4 \text{ D}$$

oppure, come normalmente avviene nell'ottica oftalmica, fornendo il potere della componente sferica più il potere della componente cilindrica residue:

$$Sf = +4 \text{ D} \quad Cyl = +2 \text{ D}$$

o, in alternativa,

$$Sf = +6 \text{ D} \quad Cyl = -2 \text{ D} \quad (\text{ricetta trasposta})$$

La figura 6 mostra le due lenti cilindriche poste ad angolo retto. Di un oggetto puntiforme si formano due immagini a forma di linee ortogonali tra loro B'_1 e B'_2 . In italiano si usa indicare queste ciascuna delle due immagini a forma di linea con il termine "focalina", che è una contrazione dell'inglese "focal line" = linea focale.

Poiché ciascuna lente ha potere nullo nel piano meridiano dell'altra lente, le due focaline sono indipendenti l'una dall'altra. Un qualsiasi cambiamento nel potere della lente cilindrica che forma l'immagine B'_1 non influisce sulla posizione dell'immagine B'_2 . I valori dei poteri nei piani meridiani determinano indipendentemente le distanze delle due focaline.

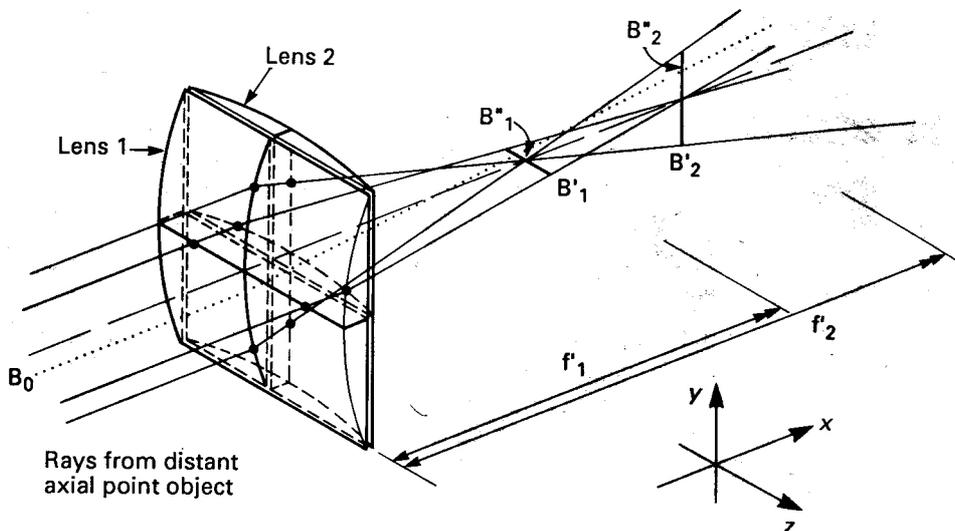


Figura 6. Lenti cilindriche incrociate ad angolo retto.

Consideriamo ora l'immagine di un oggetto puntiforme prodotta da una lente torica su uno schermo posto perpendicolarmente all'asse ottico, al variare della posizione dello schermo. La figura 7 mostra la forma di un fascio di raggi che provengono da un oggetto puntiforme sull'asse ottico e passano attraverso una lente torica che ha potere positivo in entrambi i meridiani. Se l'apertura della lente è circolare la sezione trasversale del fascio che emerge dalla lente è prima un'ellisse con l'asse maggiore parallelo all'asse del cilindro di potere maggiore, che si restringe fino a diventare una linea parallela all'asse del cilindro in B'_H . La sezione trasversale diventa poi circolare in $C_c C'_c$, dopo di che diventa ellittica con l'asse maggiore parallelo all'asse del cilindro di potere minore e degenera di nuovo in una linea in B'_V . La sezione trasversale circolare in $C_c C'_c$, dove il fascio ha le dimensioni trasversali minori, è detta **cerchio di minima confusione**. Le proprietà di un fascio di luce di questo tipo sono state studiate da Sturm nel 1838 e un fascio che ha la forma mostrata nella figura 7 è detto conoide di Sturm. La distanza tra le due focaline è nota come **intervallo di Sturm**.

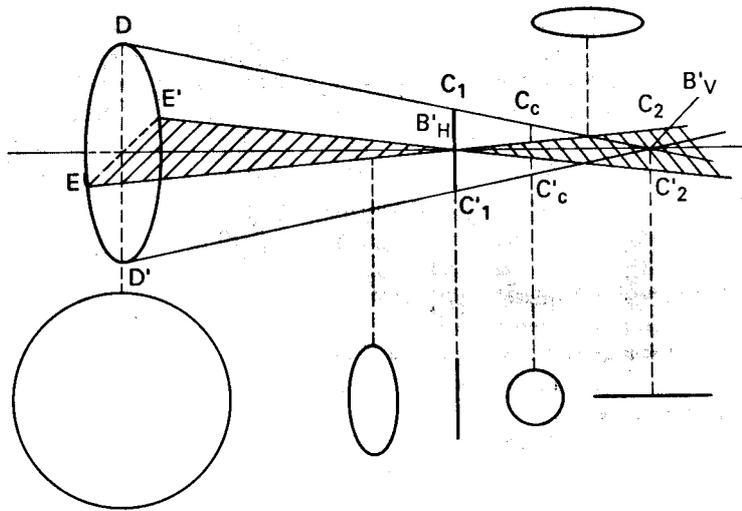


Figura 7. Fascio di raggi prodotto da una lente torica.

Le posizioni delle linee focali si trovano applicando l'espressione per i punti coniugati ($\sigma' = \sigma + \varphi$) ai due meridiani separatamente. Per trovare la lunghezza delle linee focali e la posizione e il diametro del cerchio di minima confusione è conveniente rappresentare le sezioni del fascio nei due piani meridiani in un unico piano, come nella figura 8, dove la sezione nel meridiano orizzontale è mostrata con linee continue e quella nel meridiano verticale con linee tratteggiate. Dalla figura 8 si ha

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_1 C'_1}{DD'} &= \frac{B'_H B'_V}{AB'_V} = \frac{s'_2 - s'_1}{s'_2} \\ & \text{o} \\ C_1 C'_1 &= DD' \left(\frac{\sigma'_2 - \sigma'_1}{\sigma'_1} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{C_2 C'_2}{DD'} &= \frac{B'_H B'_V}{AB'_H} = \frac{s'_2 - s'_1}{s'_1} \\ & \text{o} \\ C_2 C'_2 &= DD' \left(\frac{\sigma'_2 - \sigma'_1}{\sigma'_2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Per trovare la posizione del cerchio di minima confusione si ha

$$\frac{C_c C'_c}{DD'} = \frac{s'_c - s'_1}{s'_1} = \frac{s'_2 - s'_c}{s'_2} \quad (6)$$

da cui si ricava

$$s'_2 s'_c - s'_1 s'_2 = s'_1 s'_2 - s'_1 s'_c \quad (7)$$

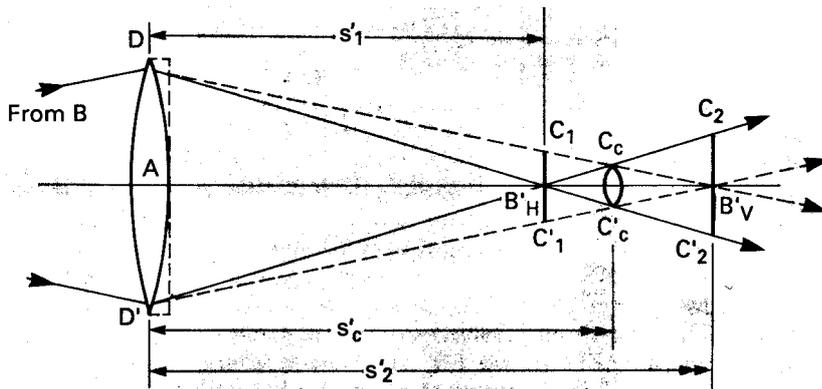


Figura 8. Lente torica - posizione e lunghezza delle focaline.

e quindi

$$s'_c = \frac{2s'_1s'_2}{s'_1 + s'_2} \quad (8)$$

ossia

$$\sigma'_c = \frac{1}{2}(\sigma'_1 + \sigma'_2) \quad (9)$$

L'equazione (6) può essere utilizzata anche per ricavare il diametro z del cerchio di minima confusione:

$$z = C_c C'_c = DD' \left(\frac{\sigma'_1 - \sigma'_2}{\sigma'_1 + \sigma'_2} \right) \quad (10)$$

Un sistema ottico che produce un'immagine puntiforme di un oggetto puntiforme si dice "stigmatico" (dal latino "stigma" che significa macchia o punto). Poiché la lente torica non produce un'immagine puntiforme di un oggetto puntiforme, si dice che il fascio di luce che essa produce è un **fascio astigmatico** (cioè "non stigmatico") e il difetto che presenta il sistema ottico si dice **astigmatismo** o "astigmatismo assiale", per distinguerlo dall'"astigmatismo dei raggi obliqui" che è un'aberrazione dei sistemi ottici che verrà studiata più avanti.

L'aspetto dell'immagine formata da una lente torica con i meridiani principali orizzontale e verticale è mostrata nella figura 9. Si noti che linee definite in modo netto nell'immagine sono perpendicolari al meridiano che si sta mettendo a fuoco nel piano dell'immagine.

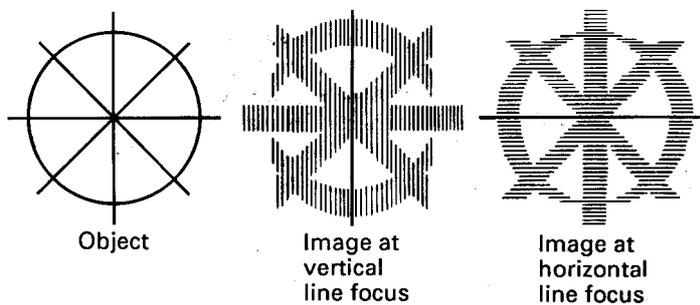


Figura 9. Immagini formate da una lente torica (astigmatica).

L'astigmatismo come difetto della visione

Intendiamo ora l'**astigmatismo** come il difetto della visione dovuto a mancanza di simmetria sferica del sistema ottico, in particolare della cornea. Esso ha come effetto che l'immagine di un punto non è più un punto, ma una lineetta, o una macchia più o meno ellittica. Questo perché il potere dell'occhio cambia da un valore massimo a un valore minimo su due

meridiani tra loro perpendicolari (e sono i soli casi che possono essere corretti adeguatamente). L'occhio si comporta come una superficie rifrangente toroidale. Un fascio di raggi paralleli che giunga su tale superficie viene fatto convergere in due linee focali tra loro ortogonali, la cui distanza si assume come misura dell'astigmatismo:

$$ast = \left| \frac{1}{f'_v - f'_o} \right| \quad (11)$$

Gli astigmatismi vengono divisi innanzitutto in **irregolari**, dovuti a lesioni della cornea, che presenta forti irregolarità sulla sua superficie, e sono difficilmente correggibili, e **regolari**. Questi ultimi vengono chiamati **secondo regola** quando il meridiano più incurvato, e quindi di raggio minore e perciò di maggior potere, è quello verticale (è dovuto molto spesso alla pressione continua della palpebra) e **contro regola** nel caso contrario.

Secondo la posizione delle linee focali rispetto alla retina si distinguono poi gli astigmatismi:

- 1) **semplice**, quando una delle focali cade sulla retina, e potrà essere miopico o ipermetropico, secondo regola o contro regola, con i quattro casi mostrati nella figura 10;
- 2) **composto**, quando entrambi i fuochi cadono davanti o dietro la retina; anche in questo caso può essere miopico o ipermetropico, secondo regola o contro regola, con i quattro casi mostrati nella figura 11;
- 3) **misto**, con un fuoco davanti e uno dietro la retina, ancora secondo regola o contro regola, con i due casi possibili mostrati nella figura 12.

La correzione dell'astigmatismo si dovrà fare con lenti che agiscano solo secondo un dato meridiano, quindi con lenti cilindriche o toriche o loro combinazioni.

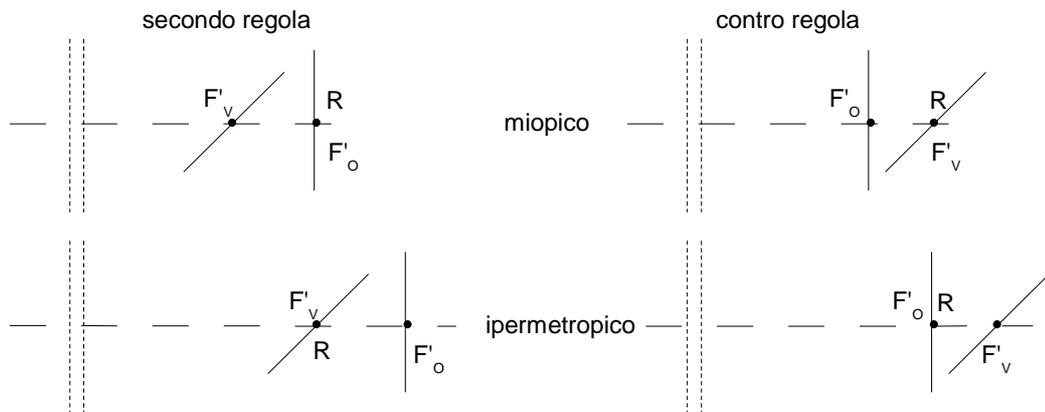


Figura 10. Astigmatismo semplice.

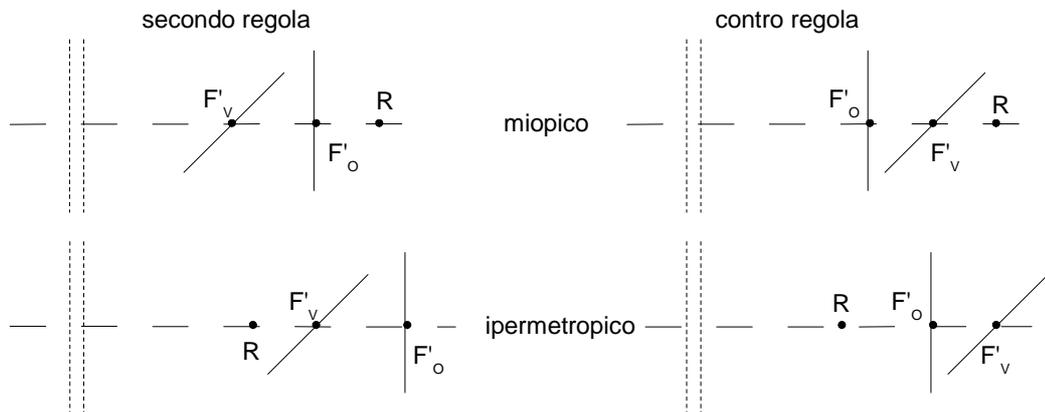


Figura 11. Astigmatismo composto.

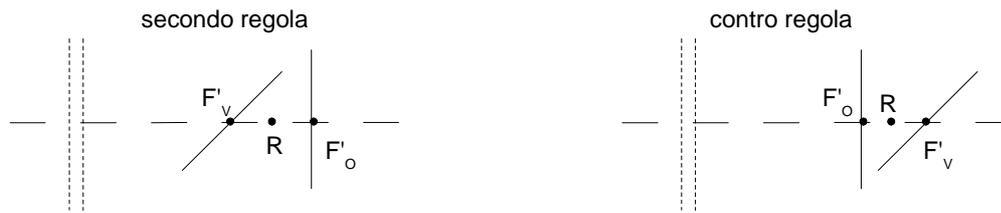


Figura 12. Astigmatismo misto.

Agli scopi oftalmici è necessario poter specificare l'angolo a cui deve essere orientato l'asse del cilindro della lente torica rispetto alla montatura dell'occhiale, in modo da correggere l'astigmatismo dell'occhio. Il sistema più usato è il sistema TABO (dal tedesco Technischer Ausschub für BrillenOptik). In questo sistema l'angolo che l'asse geometrico del cilindro (linea DD' della figura 7) forma con l'asse orizzontale è misurato **in senso antiorario** (si veda la figura 13.d) dal punto di vista di un osservatore (e non quindi dal punto di vista del paziente che usa la lente). L'escursione angolare può variare tra 0 e 180°.

Se per esempio una lente astigmatica ha le seguenti caratteristiche:

$$sf = +3 \text{ D} \quad cyl = -1 \text{ D} \quad \text{asse } 180^\circ$$

significa che la lente torica è equivalente a una lente sfero-cilindrica con:

- un diottro sferico di potere pari a +3 D;
- un diottro cilindrico di potere pari a -1 D;
- l'asse geometrico del cilindro è posizionato sul meridiano 180°, mentre il potere del cilindro si esercita sul meridiano 90°: su tale asse si sommano algebricamente il potere del cilindro e quello della sfera.

La rappresentazione TABO è quindi quella della figura 13.a. In tale rappresentazione simbolica i poteri dei cilindri vanno indicati tenendo conto di quanto fin qui detto, e cioè che il potere del cilindro si esercita sul meridiano perpendicolare a quello del suo asse geometrico. La posizione del cilindro è resa graficamente evidente con l'asse a 180°.

Se invece le caratteristiche della lente astigmatica sono:

$$sf = +2 \text{ D} \quad cyl = -1 \text{ D} \quad \text{asse } 90^\circ$$

l'asse del cilindro coincide con la linea verticale e quindi il suo potere si esercita sul meridiano 180° (figura 13.b). Se infine si ha

$$sf = -3 \text{ D} \quad cyl = -2 \text{ D} \quad \text{asse } 10^\circ$$

il meridiano dove si sommano i poteri del cilindro e della sfera è a 100° rispetto alla linea orizzontale. Infatti l'asse del cilindro è a 10° e l'asse del potere cilindrico è ortogonale ad esso (figura 13.c).

Un altro sistema usato ancora dagli oculisti per formulare le ricette è quello **Internazionale**. In tale sistema la posizione dell'occhio destro e di quello sinistro è ancora quella vista dall'osservatore ma la notazione dell'asse del cilindro segue la rotazione naso-temporale **antioraria per l'occhio destro** e **oraria per l'occhio sinistro**, come nella figura 13.e. In questo modo la ricetta per l'occhio destro è uguale a quella indicata nel sistema TABO, mentre quella per l'occhio sinistro è complementare speculare alla ricetta TABO. Nelle figure 13.d e 13.e una stessa prescrizione (occhio destro: $sf +2$, $cyl -1,50$, $ax 30^\circ$; occhio sinistro: $sf +3$, $cyl -2$, $ax 40^\circ$) è vista nei due sistemi.

Si intende infine per **equivalente sferico** (o **sfera equivalente SE**) di una lente torica quella lente sferica che approssima su tutti i meridiani l'effetto combinato di un potere sferico e di un potere cilindrico. Se una lente astigmatica ha un potere sferico sf e un potere cilindrico cyl , l'equivalente sferico si ottiene dalla relazione

$$SE = sf + \frac{cyl}{2} \quad (12)$$

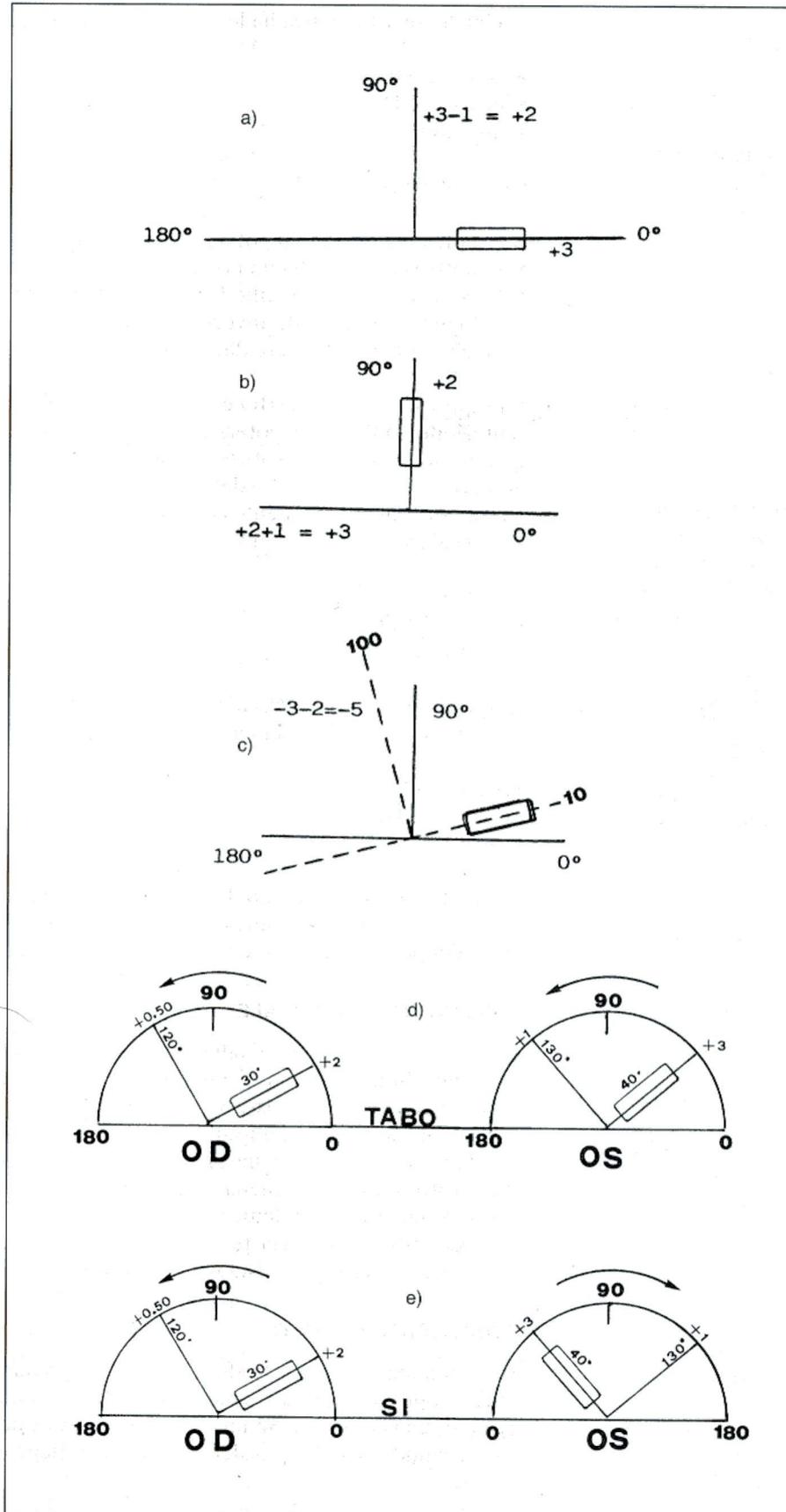


Figura 13. a - d) Rappresentazione TABO dell'orientamento di lenti sfero-cilindriche rispetto alla montatura dell'occhiale; e) rappresentazione secondo il sistema internazionale.

Esercizi

1. Una lente sottile ha superfici cilindriche di uguale curvatura, con gli assi dei cilindri ortogonali tra loro. Mostrare che l'effetto della lente è lo stesso di quello di una lente sferica con una curvatura uguale a quella comune ai due cilindri.
2. (a) Una sorgente puntiforme è posta 0,5 m davanti a una lente cilindrica con un potere di +5 D con l'asse del cilindro verticale e un diametro di 40 mm. Trovare la posizione, la lunghezza e la direzione della linea focale.

(b) Se una lente sferica da +3 D è posta a contatto con la lente cilindrica, quali saranno la lunghezza delle linee focali e la posizione e il diametro del cerchio di minima confusione?
3. Due lenti cilindriche sottili, una con un potere di +5 D e l'asse verticale e l'altra con un potere di +4 D e l'asse orizzontale, con un diametro di 45 mm, sono poste a contatto a 0,5 m da una sorgente di luce puntiforme. Trovare le dimensioni della macchia di luce che si forma su uno schermo parallelo al piano delle lenti a (a) 0,2 m, (b) 0,4 m e (c) 0,6 m dalle lenti.
4. Una lente sfero-cilindrica ha poteri +5,0 D sferico / -2,0 D cilindrico, con l'asse verticale. Si vuole realizzare una lente equivalente con una superficie piana; quali poteri devono essere dati all'altra superficie? Che tipo di superficie è? Fare un disegno.
5. Una lente fatta con vetro con indice di rifrazione 1,523 ha una superficie torica con poteri +10 D nel meridiano verticale e +6 D in quello orizzontale; l'altra superficie è piana. Trovare i raggi di curvatura delle superfici di una lente di uguale potere formata da due cilindri incrociati.
6. Un cilindro metallico lucidato con un diametro di 5 cm è posto verticalmente su un tavolo a una distanza di 3 m da una finestra larga 1,8 m. Qual è l'ampiezza dell'immagine vista riflessa nel cilindro?

12. Le lenti bifocali

Come già si è detto quando si è trattato dell'occhio come strumento ottico, la capacità di mettere a fuoco oggetti a diverse distanze (accomodazione) varia con l'età. Il cristallino subisce infatti con il passare degli anni delle modificazioni strutturali che comportano una perdita di elasticità e quindi una diminuzione della capacità di deformarsi. Una persona che non è più capace di vedere nitidamente alla distanza di lettura viene chiamata **presbite**; è un difetto soggettivo, che comincia a manifestarsi verso i cinquant'anni. La correzione di questo difetto richiede l'ausilio di una lente positiva, per compensare la quantità di potere diottrico che è venuta a mancare al cristallino.

Se però si hanno contemporaneamente anche altri difetti visivi (miopia o ipermetropia, astigmatismo), per evitare che il soggetto debba usare due occhiali distinti (uno per la visione da lontano e uno per la visione da vicino) si può ricorrere a occhiali con lenti multifocali. Le lenti multifocali trovano quindi impiego in ottica oftalmica quando sia necessario ottenere due o più distinti poteri con una stessa lente per realizzare le opportune correzioni visive alle varie distanze. Le prime lenti multifocali sono state le lenti bifocali, che sono ormai poco diffuse e sostituite dalle lenti multifocali progressive.

Gli occhiali con lenti bifocali sono stati inventati nel XVIII secolo da Benjamin Franklin incollando due mezzelenti di diverso potere: quella superiore per la visione da lontano, e quella inferiore, di potere maggiore, per la visione da vicino (figura 1). Questa disposizione delle due semi-lenti corrisponde al fatto che nella maggior parte dei casi alziamo lo sguardo per osservare oggetti che si trovano lontano (panorami, ecc.) e lo abbassiamo per osservare oggetti vicini (un libro, ecc.).

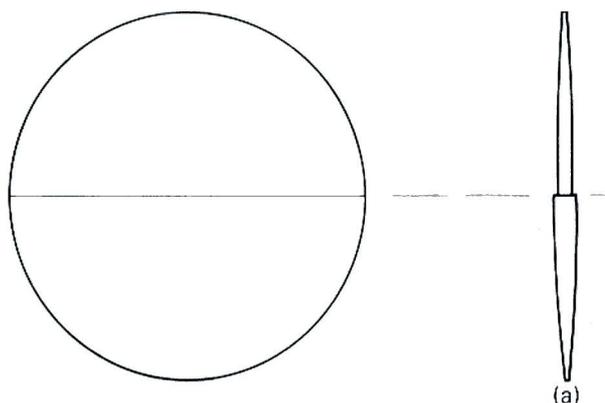


Figura 1. Lente bifocale di Franklin.

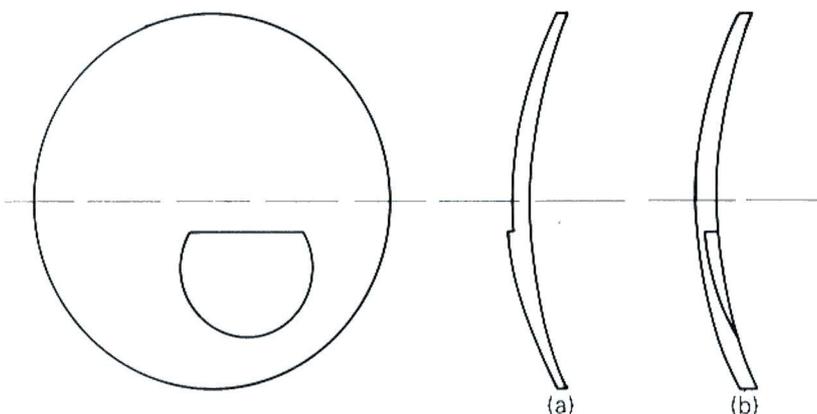


Figura 2. Lente bifocale per l'occhio destro: a) a unghia; b) a disco fuso.

Nella versione moderna della lente bifocale (figura 2) si distingue la lente **base**, utilizzata per la visione da lontano, e una lente detta **addizione** che viene impiegata per la visione da vicino. La zona ottica in cui si sommano i poteri della lente base e dell'addizione è detta **zona per vicino**. Nella zona per vicino il potere è determinato dalla somma algebrica dei poteri per lontano e dell'addizione, cioè

$$\varphi_V = \varphi_L + \text{Add.} \quad (1)$$

La zona per vicino in una lente bifocale si può ricavare in due diversi modi:

- ricavandola dalla superficie inferiore (esterna o interna) della lente base con un'opportuna variazione della geometria; la lente si dice **ad unghia**;
- cementando la lente addizionale (di indice di rifrazione maggiore di quello della base) sulla lente portante, in fase di realizzazione di quest'ultima.

Nella figura 3 sono rappresentate due lenti bifocali del tipo ruotabile (a) e non ruotabile (b). Si distinguono i seguenti punti e distanze principali:

- $AB = D$ diametro della lente base;
- $PQ = d$ diametro del cerchio di appartenenza della lunetta;
- $EF = l$ ampiezza lineare massima della lunetta;
- C_L centro ottico della zona per lontano;
- C_V centro ottico della zona per vicino;
- B_N punto di riferimento principale della lunetta; è il punto di intersezione dell'asse visivo quando l'occhio utilizza la zona per vicino;
- e decentramento orizzontale del punto di riferimento principale B_N rispetto alla verticale;
- ω angolo di rotazione della lunetta rispetto alla lente base;
- T punto più alto della lunetta;
- k distanza tra i punti C_L e B_N ;
- h distanza tra i punti T e C_L ;
- a altezza della lunetta intesa come distanza tra i punti T e S .

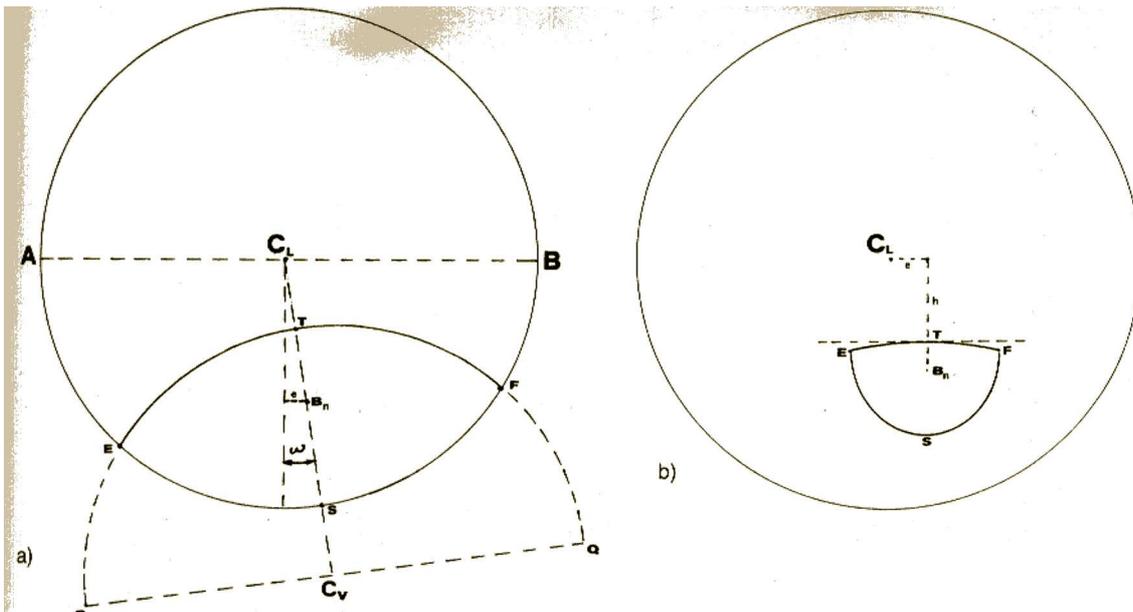


Figura 3. Lente bifocale ruotabile (a) e non ruotabile (b).

Nelle lenti bifocali di tipo ruotabile la zona per vicino è di forma circolare a unghia. In questo tipo di lente bifocale il punto di riferimento principale può essere decentrato nasalmente rispetto alla verticale condotta per C_L di un angolo ω il cui valore è dato da

$$\text{sen } \omega = \frac{e}{k} \quad (2)$$

Mentre una lente a base sferica con lunetta ruotabile può essere orientata in un senso o nell'altro, ciò non può farsi se la base è astigmatica in quanto le rotazioni della lunetta influiscono sulla posizione dell'asse del cilindro.

Lenti monoblocco a unghia

Le lenti di questo tipo sono realizzate agendo sulla geometria della lente, in due modi: a unghia visibile interna (figura 4) o a unghia visibile esterna (figura 5). Disassando

opportunamente il centro di curvatura dell'addizione (R_3) l'unghia può anche essere resa invisibile.

Una panoramica completa delle possibili geometrie delle lenti bifocali monoblocco è illustrata nella figura 6. Per ciascuna di esse sono indicati l'intervallo di valori di addizione possibili, la sezione ottica e la geometria frontale.

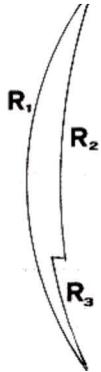


Figura 4. Lente a unghia visibile interna.



Figura 5. Lente a unghia visibile esterna.

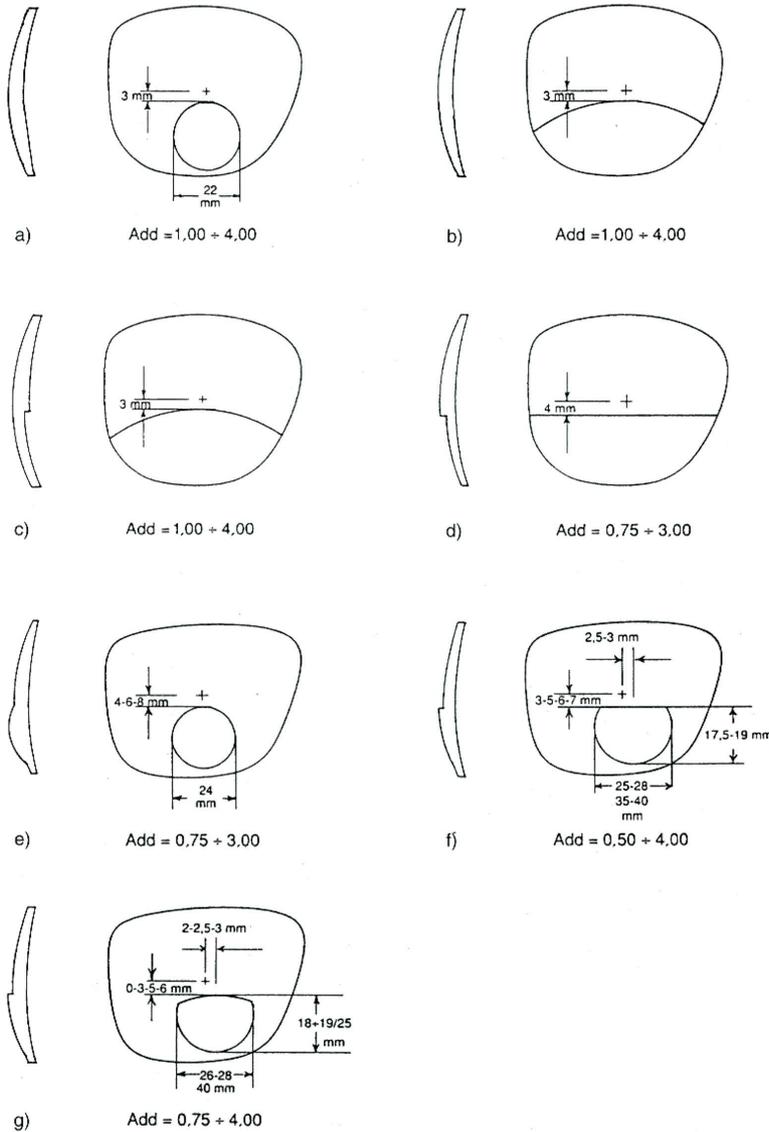


Figura 6. Possibili geometrie delle lenti bifocali monoblocco.

Con riferimento alla figura 5, il potere della superficie di raggio R_3 si ottiene dalle relazioni:

$$\varphi_L = \varphi_1 + \varphi_2, \quad \varphi_V = \varphi_3 + \varphi_2, \quad \text{Add} = \varphi_V - \varphi_L = \varphi_3 - \varphi_1 \quad (3)$$

da cui

$$\varphi_3 = \varphi_1 + \text{Add} \quad (4)$$

e quindi

$$R_3 = \frac{n-1}{\varphi_3} \quad (5)$$

E' inoltre evidente che, per addizioni positive, si ha pure

$$\text{Add} > 0, \quad \varphi_3 > \varphi_1, \quad R_3 < R_1$$

Se invece si vuole realizzare l'addizione variando la geometria della superficie interna, come nella figura 28, allora si ha

$$\text{Add} = \varphi_V - \varphi_L > 0 \quad \text{e} \quad \text{Add} = (\varphi_1 + \varphi_3) - (\varphi_1 + \varphi_2) = \varphi_3 - \varphi_2 > 0$$

e, tenendo conto che i poteri φ_3 e φ_2 sono negativi, si ha

$$R_3 > R_2$$

Esempio 1. Lente bifocale a unghia esterna; indice di rifrazione 1,5:

$$(\text{base}) \varphi_2 = -4,00 \text{ D}, \quad \varphi_L = +1,5 \text{ D}, \quad \text{Add} = +2,00 \text{ D}; \quad \varphi_1 = \varphi_L - \varphi_2 = +5,50 \text{ D} = \frac{1,5-1}{R_1}$$

da cui

$$R_1 = \frac{0,50}{5,50} \times 100 \text{ cm} = +9,09 \text{ cm}; \quad R_2 = \frac{1-1,50}{-4,00} \times 100 \text{ cm} = +12,50 \text{ cm}$$

$$\varphi_3 = \varphi_1 + \text{Add} = 5,50 \text{ D} + 2,00 \text{ D} = 7,50 \text{ D}$$

$$R_3 = \frac{1,50-1}{7,50} \times 100 \text{ cm} = +6,66 \text{ cm}$$

Esempio 2. Lente bifocale a unghia interna, con gli stessi dati dell'esempio precedente:

$$\varphi_1 = +5,50 \text{ D}, \quad \varphi_2 = +4,00 \text{ D}, \quad \varphi_3 = \varphi_2 + \text{Add} = -4,00 \text{ D} + 2,00 \text{ D} = -2,00 \text{ D}$$

$$R_1 = +9,09 \text{ cm}; \quad R_2 = +12,50 \text{ cm} \quad R_3 = \frac{1-1,50}{-2} \times 100 \text{ cm} = +25 \text{ cm}$$

Lenti a disco fuso

Le lenti bifocali a disco fuso (dette anche a variazione di indice) si realizzano praticando sulla lente portante una depressione che accoglie una lente biconvessa di indice di rifrazione maggiore (1,7 - 1,9) di quello della lente portante stessa, con raggio anteriore (o posteriore) uguale a quello della lente portante e raggio posteriore (o anteriore) da calcolarsi in base al valore dell'addizione desiderata. Nella figura 7 sono illustrate le varie geometrie frontali dell'addizione:

a) **a circoletto**; il disco di addizione è un circoletto con il centro ottico coincidente con il centro geometrico; lo spessore al bordo è a lama di coltello;

b) **a disco 3/4**; l'addizione è realizzata con un circoletto sviluppato per 3/4 della sua estensione e chiuso superiormente da una linea orizzontale;

c) **pantoscopica**; assomiglia alla forma precedente ma la linea di chiusura superiore è curva.

Nelle versioni a 3/4 e pantoscopica il bordo superiore dell'addizione presenta un certo spessore che può provocare riflessioni.

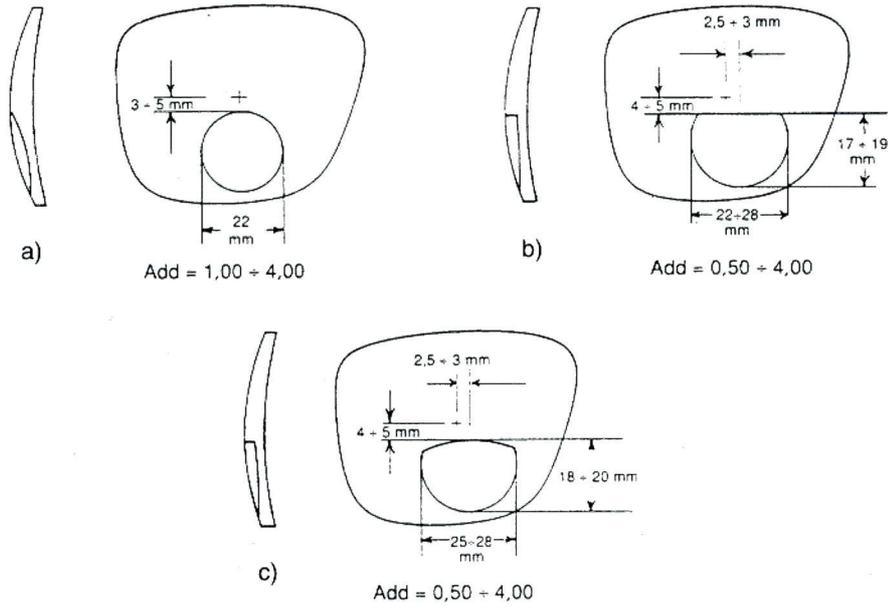


Figura 7. Possibili geometrie delle lenti bifocali a disco fuso.

Per ottenere una buona formazione dell'immagine generalmente la fusione dell'addizione avviene nella parte posteriore della lente portante. Il centro ottico della zona per vicino è decentrato nasalmente rispetto a quello della zona per lontano: bisogna infatti tener conto del fatto che nella visione di oggetti vicini, alla distanza di lettura, l'asse visivo dell'occhio converge nasalmente.

Fissati che siano i valori degli indici di rifrazione e dei poteri per lontano e dell'addizione (n_L, n_A, φ_L, Add) si può risalire alla geometria della lente e in particolare al valore della curva di depressione R_3 . Infatti la potenza della zona per vicino è data da

$$\varphi_V = \varphi_L + Add = \varphi_4 + \varphi_3 + \varphi_2 \tag{6}$$

da cui

$$\varphi_3 = \varphi_L + Add - \varphi_4 - \varphi_2 \tag{7}$$

Osservando che la curva anteriore (figura 8) è la stessa per la zona ottica per lontano e per quella per vicino ($R_1 = \frac{n_L - 1}{\varphi_1} = \frac{n_A - 1}{\varphi_4}$), si può stabilire il valore di $\varphi_4 = \frac{n_A - 1}{n_L - 1}(\varphi_L - \varphi_2)$; in definitiva, passando ai raggi e semplificando, si ha

$$R_3 = \frac{(n_L - n_A)(n_L - 1)}{Add(n_L - 1) + (\varphi_L - \varphi_2)(n_L - n_A)} \tag{8}$$

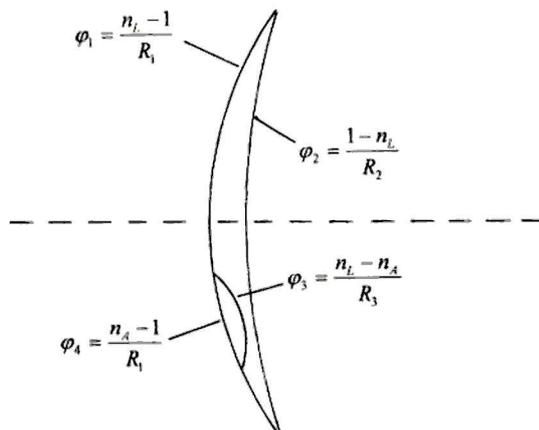


Figura 8. Sezione di una lente bifocale a disco fuso.

Esempio 3. Lente bifocale a disco fuso esternamente con i seguenti parametri: $n_L = 1,523$; $n_A = 1,636$; $\varphi_L = +2,00$ D; Add = $+2,50$ D; $\varphi_2 = -6,00$ D. Con questi dati si ha subito

$$R_3 = \frac{(-0,113) \times 0,523}{2,50 \times 0,523 + 8,00 \times (-0,113)} \text{ m} = -0,1464 \text{ m} = -14,64 \text{ cm}$$

(il segno negativo indica che la curva di depressione è concava alla luce, come deve essere).

Il salto d'immagine

Un problema ottico che si presenta nelle lenti bifocali è il salto d'immagine nella zona limite tra lente base e addizione. In presenza di poteri prismatici diversi nell'immediata vicinanza della linea che divide la zona per lontano e quella per vicino, l'oggetto fissato sembra "saltare" quando la linea di fissazione dell'occhio passa da una zona all'altra. Si consideri la figura 9: la linea L individua la linea di sguardo principale attraverso la zona per lontano mentre V individua la linea di sguardo principale attraverso la zona ottica per vicino. La linea F rappresenta la linea di fissazione dell'occhio e Z il centro di rotazione dell'occhio. A causa della diversa potenza prismatica delle due diverse zone, si forma una zona cieca di ampiezza ω tale per cui gli oggetti osservati lungo la linea F "saltano" da L a V .

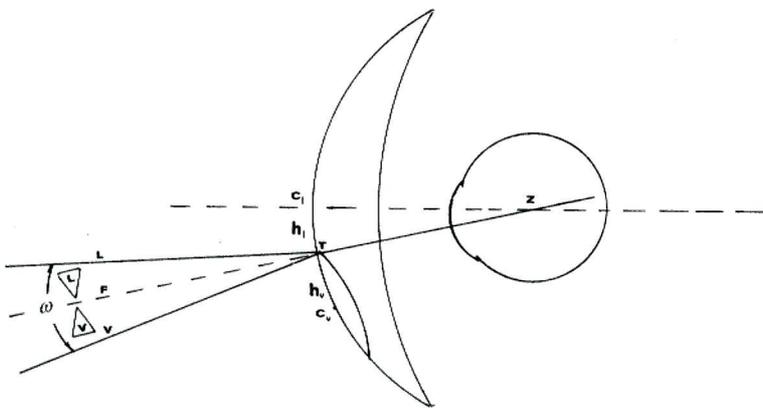


Figura 9. Salto d'immagine con lente bifocale con base positiva.

L'ampiezza dell'angolo ω è la somma delle singole deviazioni prismatiche calcolate secondo la formula

$$\delta = \frac{h\varphi}{10} \quad (9)$$

Se si misura h in millimetri e il potere in diottrie, la deviazione prismatica sarà misurata direttamente in diottrie prismatiche. Si ha allora

$$\delta_i = \delta_L + \delta_V = \frac{h_L\varphi_L}{10} + \frac{h_V\varphi_V}{10} \quad (10)$$

avendo indicato con h_L e h_V le distanze dei centri ottici per lontano e per vicino dalla linea di separazione T delle due zone. L'eliminazione del salto d'immagine è quindi possibile per un'opportuna combinazione che soddisfi la condizione $\delta_L + \delta_V = 0$.

Dal punto di vista costruttivo l'eliminazione del salto d'immagine dipende dal tipo di lente bifocale (se a disco fuso o ad unghia) e dal valore in potere e segno delle due zone. Facciamo qualche esempio.

Lenti bifocali a disco fuso. In questo caso, per effetto dell'equazione (10), l'eliminazione del salto d'immagine è possibile solo quando i poteri delle due zone hanno segno diverso. In pratica ciò avviene se la lente portante è negativa con zona per vicino positiva. In questa situazione i prismi delle due zone, lungo la linea T di separazione, si presentano orientati dalla stessa parte come nella figura 10.a.

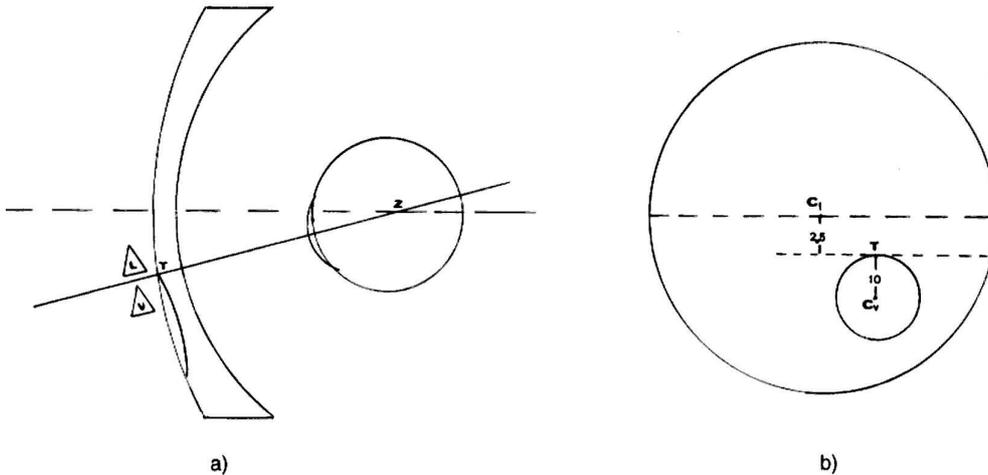


Figura 10. Correzione del salto d'immagine con lente bifocale a disco fuso con base negativa.

Esempio 4. Lente bifocale a disco fuso con i seguenti parametri: $\varphi_L = -4,00$ D; $\varphi_V = +1,00$ D; $h_V = 10$ mm. La condizione perché si abbia l'eliminazione del salto d'immagine è

$$\frac{h_L \times (-4)}{10} + \frac{10 \times 1}{10} = 0$$

da cui si ricava

$$h_L = \frac{10}{4} = 2,5 \text{ mm}$$

Invece nella situazione presentata nella figura 9 la lente portante è positiva con zona per vicino positiva (i prismi sono contrapposti per i vertici): i salti d'immagine corrispondenti hanno lo stesso segno e pertanto si sommano.

Esempio 5. Lente bifocale a disco fuso con i seguenti parametri: $\varphi_L = +4,00$ D; $\varphi_V = +1,00$ D; $h^L = 2,5$ mm; $h_V = 10$ mm. Con questi valori il salto d'immagine risulta

$$\delta_i = \frac{2,5 \times 4}{10} + \frac{10 \times 1}{10} = 2\Delta$$

Lenti bifocali a unghia. Nelle lenti a unghia l'eliminazione del salto d'immagine dipende dalla particolare posizione dei centri di curvatura. In particolare, decentrando la zona per vicino si induce un effetto prismatico uguale e opposto in segno a quello prodotto dalla zona per lontano.

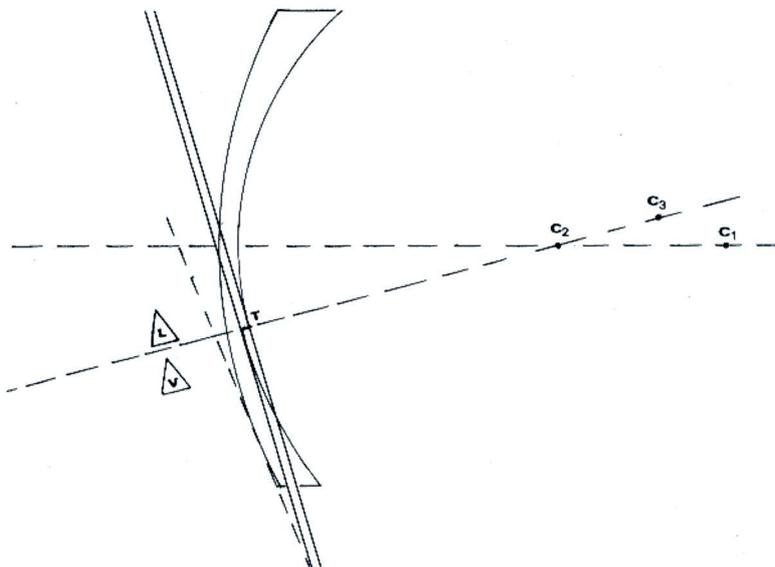


Figura 11. Correzione del salto d'immagine con lente bifocale a unghia con base negativa.

Da un punto di vista geometrico ciò si ottiene quando le tangenti condotte per il punto T alla superficie di raggio R_2 (zona per lontano) e alla superficie di raggio R_3 (zona per vicino) risultano tra loro parallele in modo da produrre un **effetto lamina tra le due superfici**. Come si vede dalle figure 11 e 12 (rispettivamente per lenti negative e positive per lontano) i prismi generati dalla superficie anteriore di raggio R_1 con le superfici di raggio R_2 e R_3 hanno la stessa ampiezza e sono orientati nello stesso verso. Il parallelismo tra le due tangenti comporta necessariamente la formazione di uno scalino tra le due zone e quindi l'unghia è visibile.

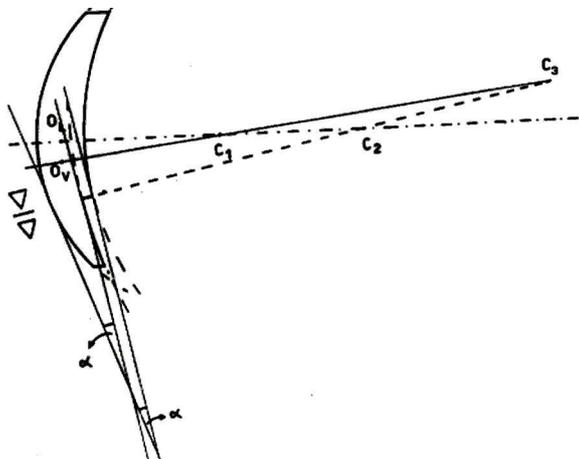


Figura 12. Correzione del salto d'immagine con lente bifocale a unghia con base positiva.

Esempio 6. Lente a unghia visibile (sulla superficie interna) con i seguenti parametri: $\varphi_L = -3,00$ D; Add = $+2,00$ D; $h_L = 6$ mm. Con questi valori la potenza per vicino risulta $\varphi_V = -1,00$ D e la condizione perché risulti nullo il salto d'immagine è

$$\frac{6 \times (-3)}{10} + \frac{h_V \times (-1)}{10} = 0$$

da cui si ricava $h_V = -18$ mm (figura 13).

Esempio 7. Lente a unghia visibile (sulla superficie interna) con i seguenti parametri: $\varphi_L = -1,25$ D; $\varphi_V = +0,75$ D; $h_L = 6$ mm. Perché risulti nullo il salto d'immagine si deve avere

$$\frac{6 \times (-1,25)}{10} + \frac{h_V \times 0,75}{10} = 0$$

da cui si ricava $h_V = +10$ mm (figura 14).

Il segno positivo di h_V questa volta indica che il centro per vicino si trova dalla stessa parte della zona per vicino, e cioè al di sotto della linea di separazione T .

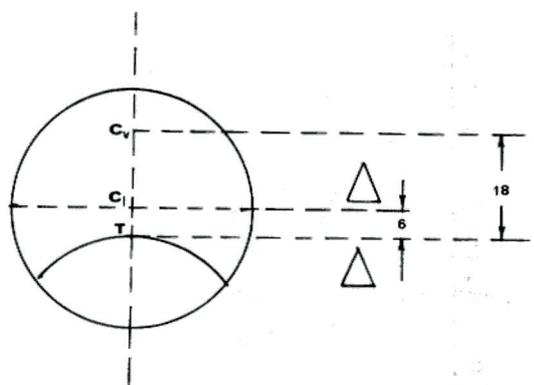


Figura 13. Esempio 6.

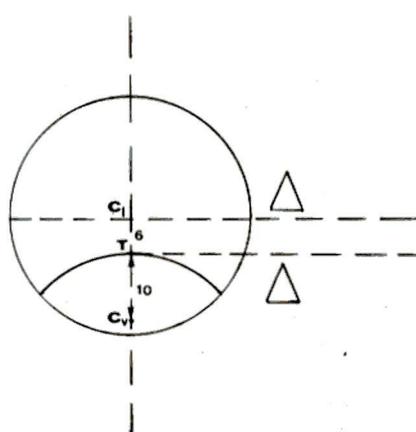


Figura 14. Esempio 7.

Nelle lenti a unghia invisibile il raccordo tra zona per lontano e zona per vicino è privo di scalino, ma ciò comporta che il centro di curvatura C_3 non si trova più lungo la linea $T - C_2$ (figura 15). Pertanto le tangenti condotte per T alle due superfici non saranno più parallele tra loro. Anche se i prismi delle due zone sono orientati nello stesso verso, si genera un salto d'immagine.

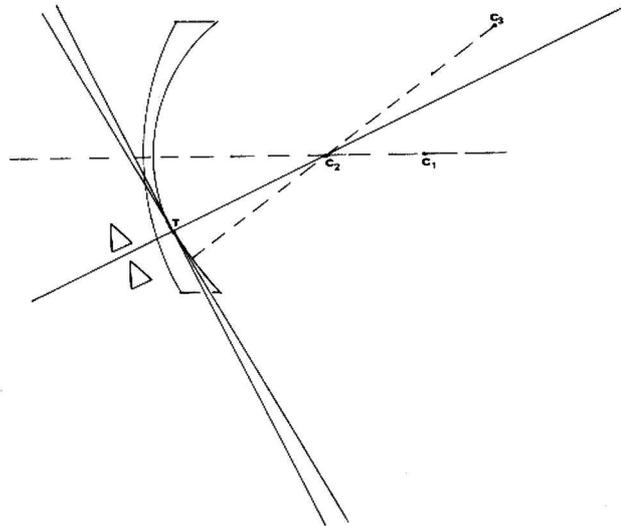


Figura 15. Raccordo tra zona per lontano e zona per vicino in una lente a unghia invisibile.

Esempio 8. Lente a unghia invisibile con i seguenti parametri: $\varphi_L = +0,50$ D; $\varphi_V = +2,50$ D; $h_L = 4$ mm; $h_V = 15$ mm (figura 16). Si ha subito

$$\delta_i = \frac{4 \times 0,50}{10} + \frac{15 \times 2,50}{10} = 0,2 + 3,75 = 3,9\Delta$$

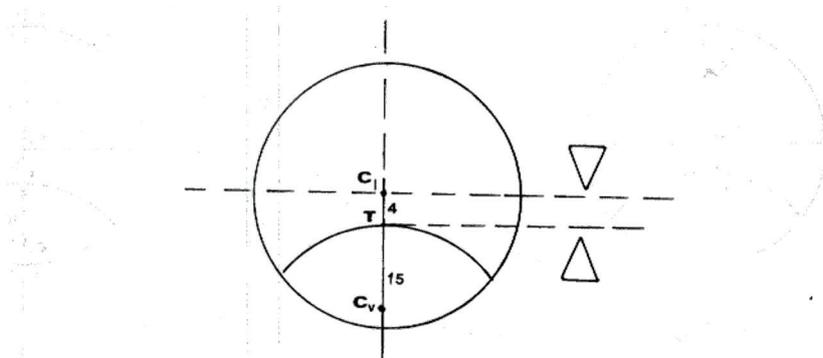


Figura 16. Esempio 8.

Esercizi

7. Una lente bifocale a unghia presenta le seguenti caratteristiche: $\varphi_L = -1,50$ D; Add = 2,00 D; $h_L = 6$ mm; $h_V = 10$ mm. Determinare il valore del salto d'immagine.
8. Una lente bifocale a unghia visibile presenta le seguenti caratteristiche: $\varphi_L = -1,50$ D; $h_L = 5$ mm; $\varphi_V = +2,00$ D. Determinare il valore di h_V perché sia nullo il salto d'immagine.
9. E' data una lente con le seguenti caratteristiche: $n = 1,523$; $R_1 = +8,4$ cm; $R_2 = +9,13$ cm; $R_3 = +16,15$ cm; $h_L = 4$ mm; $h_V = 21$ mm. Determinare il salto d'immagine risultante.
10. Una lente bifocale a disco fuso ha le seguenti caratteristiche: $R_1 = +66,7$ cm; $R_2 = +40$ cm; $n_L = 1,50$; $n_A = 1,60$; Add = +2,25 D. Determinare il potere della zona per vicino e il raggio della depressione.
11. Con riferimento alla lente dell'esercizio precedente, sapendo che $h_L = 5$ mm e $h_V = 10$ mm, determinare il valore del salto d'immagine.
12. Una lente bifocale a unghia visibile (interna) ha le seguenti caratteristiche: $\varphi_1 = +1,50$ D; $\varphi_2 = -5,00$ D; $h_L = 5$ mm; $h_V = -17,5$ mm; $n = 1,523$. Determinare il valore di R_3 perché non vi sia salto d'immagine.
13. Una lente bifocale a unghia visibile presenta le seguenti caratteristiche: $n = 1,5$; $R_1 = +12,5$ cm; $\varphi_V = +2,00$ D; $h_L = 5$ mm; $h_V = 3,75$ mm. Determinare il valore di R_2 perché si abbia un salto d'immagine $\delta i = 1,25 \Delta$.
14. E' data una lente bifocale a disco fuso avente le seguenti caratteristiche: $R_1 = +12,5$ cm; $n_L = 1,50$; $n_A = 1,70$; $\varphi_L = +2,00$ D; $\varphi_V = +4,50$ D; $h_V = 10$ mm; $h_L = 5$ mm. Determinare il raggio della depressione e il salto d'immagine.

13. Le lenti progressive

La possibilità di modulare il potere di una lente in funzione del raggio di curvatura di una delle due superfici ha trovato la sua applicazione più avanzata nelle **lenti progressive**. Esse sono state introdotte nel 1959, e da quella data sono state realizzate lenti progressive sempre più sofisticate. Nella figura 1 è illustrato il diverso principio costruttivo delle lenti monofocali (a), bifocali (b), trifocali (c) e progressive (d). Dal punto di vista dell'evoluzione tecnologica si parla di lenti progressive di prima, seconda e terza generazione.

In una lente progressiva si distinguono due zone funzionali, una per lontano e una per vicino. Il passaggio da una zona all'altra tuttavia non è brusco, come nelle lenti bifocali, ma è realizzato attraverso un **canale di progressione** dove il potere della lente varia molto gradualmente in modo da assicurare una visione nitida a tutte le distanze intermedie e senza salto d'immagine. A parte questa funzionalità ottica, le lenti progressive non presentando separazione visibile tra le due zone e sono quindi più accettate sotto il profilo estetico.

Come si vede nella figura 2, nel canale di progressione il potere varia con continuità dal valore per lontano al valore per vicino. La larghezza di questo canale, in senso orizzontale, è inversamente proporzionale al valore dell'addizione (figura 3). Le zone a lato del canale di progressione non sono funzionali.

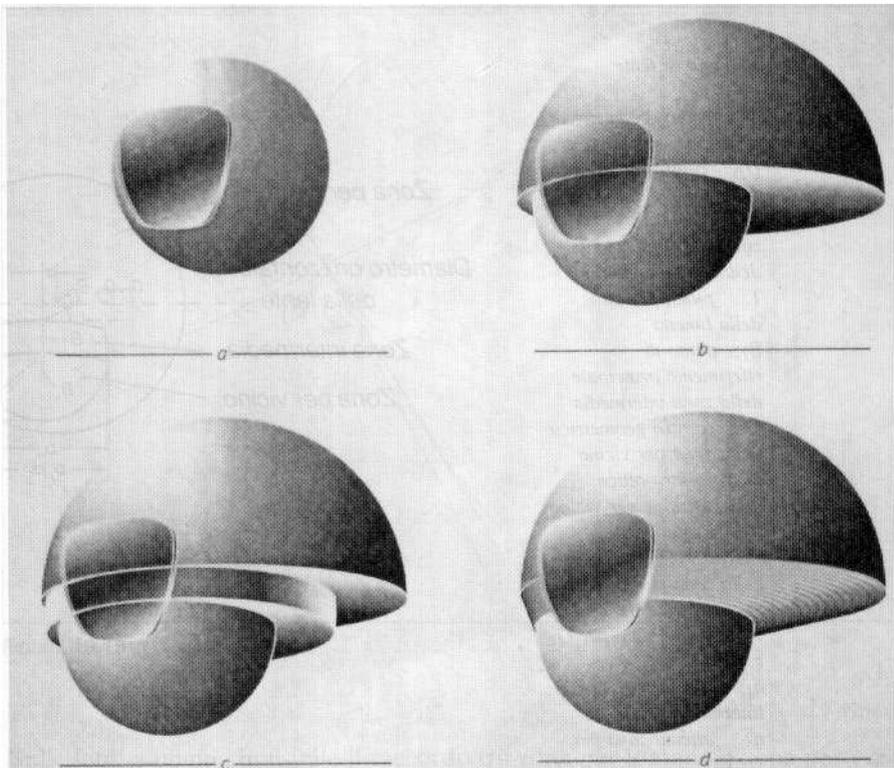


Figura 1. Principio costruttivo di una lente monofocale (a), bifocale (b), trifocale (c) e progressiva (d).

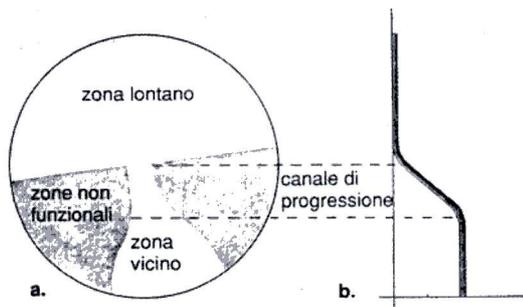


Figura 2. Zone di una lente progressiva e canale di progressione.

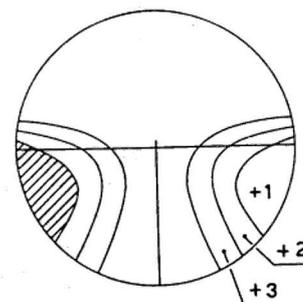


Figura 3. Riduzione dell'ampiezza delle zone funzionali all'aumentare dell'addizione.

Nelle lenti progressive di prima generazione (figura 4) la variazione del potere era realizzata mediante superfici sferiche il cui raggio di curvatura veniva fatto diminuire gradualmente e i cui centri descrivevano un'evolva (figura 5). Questo tipo di lente progressiva comportava che la curvatura della superficie diventava sempre più accentuata nella zona periferica, con effetti di distorsione tanto più accentuati quanto maggiore era l'addizione. Il comfort visivo risultava problematico a causa dell'astigmatismo nelle zone non funzionali e soprattutto in regime dinamico, con sensazioni di vertigini.

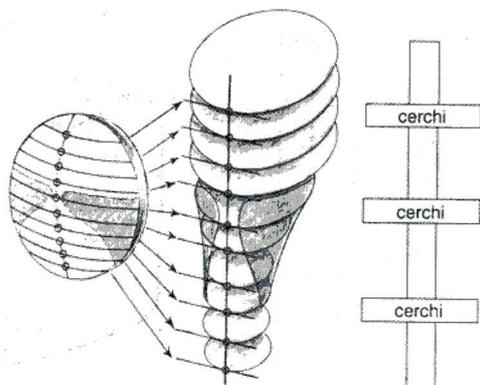


Figura 4. Rappresentazione schematica della superficie anteriore in una lente progressiva di prima generazione.

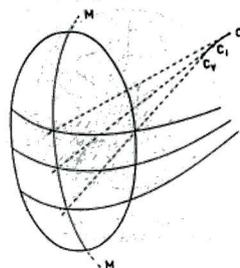


Figura 5. Disposizione dei centri di curvatura in una lente progressiva di prima generazione.

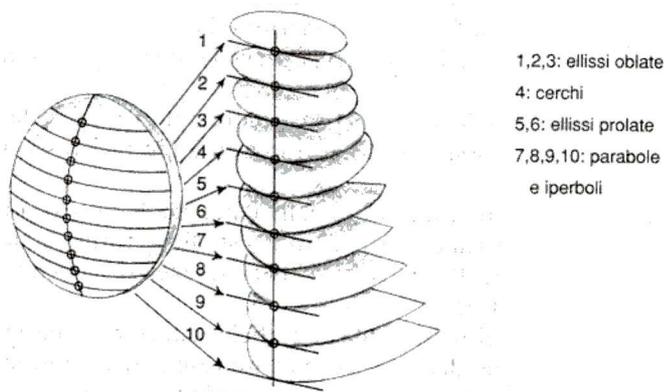


Figura 6. Rappresentazione della superficie anteriore in una lente progressiva di seconda generazione.

Nelle lenti di seconda generazione sono state introdotte delle geometrie asferiche per ridurre l'astigmatismo. La variazione di curvatura dalla zona per lontano alla zona per vicino è resa meno traumatica con l'impiego di sezioni coniche, secondo lo schema della figura 6.

Nelle lenti di terza generazione (quelle ormai proposte nei cataloghi di tutti i produttori di lenti oftalmiche) la modulazione del potere è ottenuta attraverso un processo di calcolo molto complesso in cui confluiscono diverse esigenze, tra cui anche quella di assicurare un comfort adeguato in regime di visione periferica e dinamica. Ciò è ottenuto mediante la cosiddetta **funzione di merito**, ovvero un sistema di calcolo per ottimizzare il sistema, in cui confluiscono più parametri che sono tra loro parzialmente contraddittori. Con la funzione di merito si può quindi tener conto sia delle esigenze di tipo fisiologico (comfort visivo) che di tipo strettamente ottico.

Il luogo dei punti della superficie anteriore della lente che hanno lo stesso potere definisce una linea isometrica e l'insieme di queste linee forma la mappa isometrica della lente, come nella figura 7.a (per un'addizione di 2,50 D). Lo stesso grafico visto in una rappresentazione tridimensionale è mostrato nella figura 7.b. In modo analogo, il luogo dei punti della superficie anteriore della lente che hanno lo stesso astigmatismo definisce una linea isoastigmatica e l'insieme di queste linee forma la mappa isoastigmatica della lente, come nella figura 8. Gli effetti prismatici prodotti dalle diverse zone di una lente progressiva vengono studiati mediante un grafico a griglia come nella figura 9.

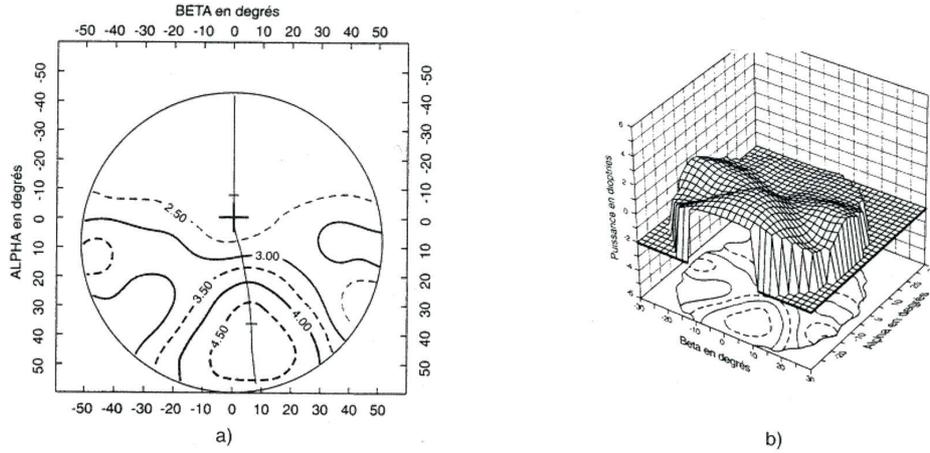


Figura 7. Mappa isometrica di una lente progressiva e sua rappresentazione tridimensionale.

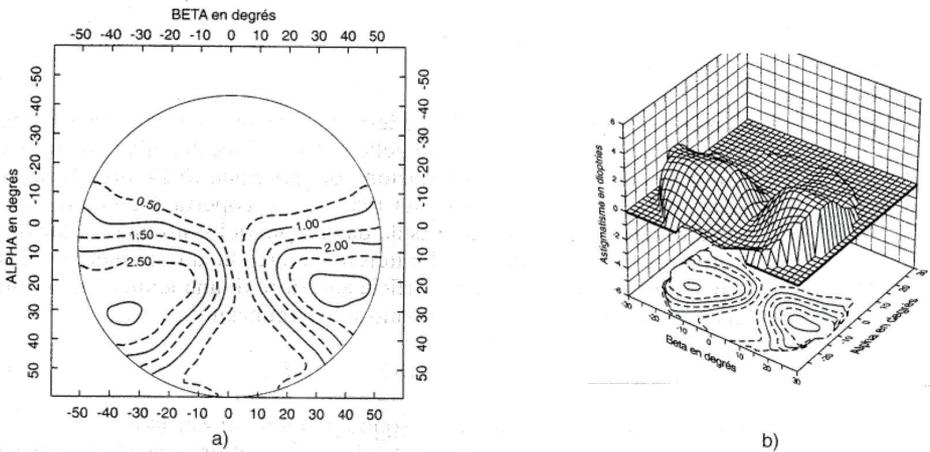


Figura 8. Mappa isoastigmatica di una lente progressiva e sua rappresentazione tridimensionale..

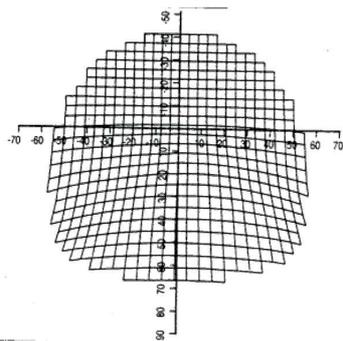


Figura 9. Grafico a griglia dell'effetto prismatico di una lente progressiva.

La modulazione del potere di una lente progressiva di terza generazione viene realizzata attraverso lo studio delle variazioni locali della curvatura. Ciò è reso possibile attraverso mediante l'applicazione dei **polinomi di Zernike** (fisico olandese, 1888-1966, premio Nobel nel 1953 per la scoperta del metodo del contrasto di fase in microscopia). Esula dagli scopi di questo testo una trattazione più approfondita dell'argomento.

La tecnologia delle lenti progressive è in continua evoluzione ed è orientata all'ottenimento di prestazioni visive che assicurino il miglior compromesso possibile tra le esigenze di carattere fisiologico e quelle di carattere ottico.