ANALISI STATISTICA DEI DATI

STATISTICA E PROBABILITA'

Misura di una grandezza fisica

Errori dovuti a:
- ***Strumenti di misura***
- ***Parametri non controllabili da sperimentatore***

↓

- **$\neq$ da valore vero grandezza**
- **varia da misura a misura**

La misura è fenomeno casuale e la singola misura sarà evento casuale.

Evento casuale (o *aleatorio*): evento ripetibile (*infinite volte*) che si manifesta in modo non prevedibile singolarmente
(*es. lancio dado/moneta, estrazione carta* ...)

S

S: insieme di tutti i modi possibili del fenomeno casuale

E: generica modalità dell'evento casuale (*generico evento casuale*)

$E \xrightarrow{\text{in modo univoco}} x(E)$ **(numero reale)**

x(E): variabile casuale definita nell'insieme S.

Variabili casuali { *discrete o continue* / *numero finito o infinito di valori*

La misura di una grandezza fisica può essere considerata come un evento casuale e il numero (che si ottiene) la variabile casuale associata all'evento.

PROBLEMA DELLA MISURA

insieme di misure della stessa grandezza fisica ←?→ **valore vero**

↓ **Analisi statistica delle misure che utilizza teoria della probabilità**

Definire intervallo di valori della variabile casuale "misura" con assegnata probabilità di contenere valore vero della grandezza

La STATISTICA è un ramo della matematica che studia i fenomeni casuali utilizzando la TEORIA della PROBABILITA`

PROBABILITA`

1) Definizione "classica"

Probabilità P(E) di un evento casuale E: rapporto fra numero dei casi "favorevoli" (casi in cui si presenta E) e numero totale casi possibili, purché tutti i casi possibili siano equiprobabili

COROLLARIO: $0 = P = 1$

numero reale

PROBLEMA: *Tautologia (per definire probabilità è necessario valutare equiprobabilità)*

Es. 1. *Lotto*

$$P(n) = \frac{1}{90} \qquad P(\text{pari}) = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$$

Es. 2. *3 figli non dello stesso sesso*

MMM MMF MFM FMM MFF FMF FFM FFF

Tot casi possibili = 8

$$P(\text{non stesso sesso}) = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

2) Definizione "empirica" (Frequenzistica)

Frequenza relativa di E : f (E)

$$f(E) = \frac{n}{N}$$

N: ***numero totale prove***

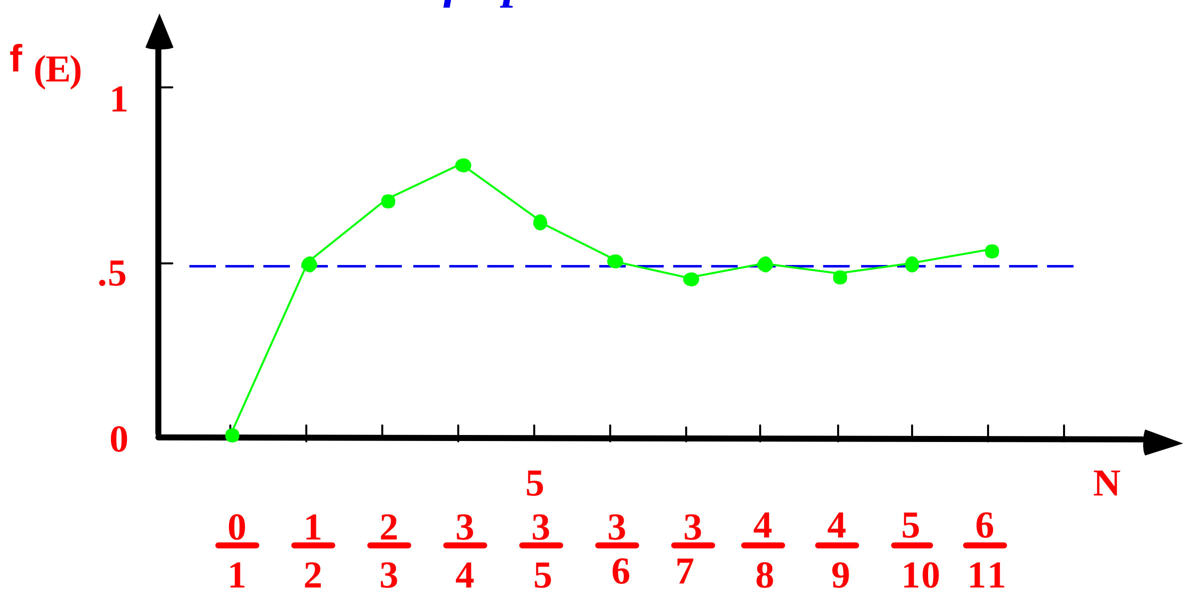
n: ***numero volte in cui si è presentato E su N prove***

Si definisce:

$$\boxed{P(E) = \lim_{N \to \infty} f(E) = \lim_{N \to \infty} \frac{n}{N}}$$

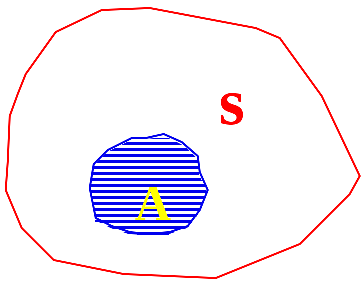
PROBLEMA:

- *postula che* **lim f (E)** *sia numero definito*
- *non è def. operativa*



E: testa su lancio moneta

2) Definizione "assiomatica"



S: **Insieme di tutti i possibili E**

A: **Sottoinsieme di S**

P(A) **E' un numero associato univocamente ad A tale che:**

$\cup$ *Unione*

$\cap$ *Intersezione*

$\supset$ *Contenuto*

- **P(A) = 0 per ogni A**
- **P(S) = 1**
- **P(A+B) = P(A) + P(B)**   **se $A \cap B = 0$**

  $A \cup B$

PROBLEMA: **Non ci dice quanto vale P**

L'asseganzione di P ad A è un modello matematico

A partire da definizione assiomatica di P si può dimostrare che:

$f(E) \longrightarrow P(E)$ **per $N \longrightarrow 8$**

LEGGE DEI GRANDI NUMERI

LEGGE DEI GRANDI NUMERI

Dato evento casuale E a cui è associata P(E),

se $f(E) = \frac{n}{N}$ (su N prove), scelti due numeri positivi a piacere e', e" è possibile definire un N tale che, per ogni M > N:

$$P\,(|f(E) - (E)| > e') < e''$$

(In analisi: $|f(E) - P(E)| < e$)

Si dimostra a partire dalla diseguaglianza

di BIENAYME' - ČEBIČEV

PROPRIETA` DELLA PROBABILITA`

1) Evento complementare di E : $\overline{E}$

$$f(\overline{E}) = \frac{N-n}{N} = 1 - \frac{n}{N} = 1 - f(E)$$

$$P(\overline{E}) = 1 - P(E)$$

$$P(E) + P(\overline{E}) = 1$$

Se $E_1 \ldots E_m$: insieme di tutti gli eventi possibili in S, mutuamente esclusivi:

$$\boxed{\sum_{i=1}^{m} P(E_i) = 1}$$

Evento complesso = prodotto logico di due eventi casuali E, F (es.: *moneta/carta*)

Su N prove

	F	$\overline{F}$
E	n_{11}	n_{12}
$\overline{E}$	n_{21}	n_{22}

4 possibili casi:

EF
$E\overline{F}$
$\overline{E}F$
$\overline{E}\,\overline{F}$

$$f\,(EF) = \frac{n_{11}}{N}\,; \quad f(E\bar{F}) = \frac{n_{21}}{N}\,; \quad f(E\bar{F}) = \frac{n_{12}}{N}\,; \quad f(\bar{E}\bar{F}) = \frac{n_{22}}{N}\,;$$

$$f\,(E) = \frac{n_{11}+n_{12}}{N} = f\,(EF) + f\,(E\bar{F})$$

$$f\,(F) = \frac{n_{11}+n_{21}}{N} = f\,(EF) + f\,(E\bar{F})$$

$$P(E) = P(EF) + P(E\bar{F})$$

$$P(F) = P(EF) + P(\bar{E}F)$$

PROBABILITA` CONDIZIONATA:

Probabilità che si verifichi E se si è verificato F (o viceversa)

$P(E|F)$ $\qquad$ $P(F|E)$

$$f\,(E|F) = \frac{n_{11}}{n_{11}+n_{21}} = \frac{n_{11}}{N} \cdot \frac{N}{n_{11}+n_{21}} = \frac{f\,(EF)}{f\,(F)}$$

$$f\,(F|E) = \frac{n_{11}}{n_{11}+n_{12}} = \frac{f\,(EF)}{f\,(E)}$$

$$P(E|F) = \frac{P(EF)}{P(F)} \qquad P(EF) = P(F) \cdot P(E|F)$$

$$P(F|E) = \frac{P(EF)}{P(E)} \qquad P(EF) = P(E) \cdot P(F|E)$$

2) LEGGE DELLE PROBABILITA` COMPOSTE

Se E ed F sono statisticamente indipendenti

$$P(E|F) = P(E) \qquad P(F|E) = P(F)$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\begin{gathered} P(EF) = P(E) \cdot P(F) \\ P(E_1 \cdot E_2 \ldots \cdot E_m) = \prod_{i=1}^{m} P(E_i) \end{gathered}}$$

La probabilità che avvengano contemporaneamente E ed F (*prodotto logico*) è uguale al prodotto delle probabilità dell'evento E e dell'evento F

se E ed F sono statisticamente indipendenti

Es. 2 dadi - Probabilità che escano due 4

$$P(4,4) = P(4) \cdot P(4) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{36}$$

Se E ed F sono mutuamente esclusivi:

$$\Downarrow$$

$$P(E|F) = P(F|E) = 0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P(EF) = 0}$$

3) LEGGE DELLE PROBABILITA` TOTALI

f(E + F) : evento **E** o evento **F** o ambedue

$$f(E + F) = \frac{n_{11} + n_{12} + n_{21}}{N} = \frac{(n_{11} + n_{12}) + (n_{21} + n_{11}) - n_{11}}{N}$$

$$f(E + F) = f(E) + f(F) - f(EF)$$

$$P(E + F) = P(E) + P(F) - P(EF)$$

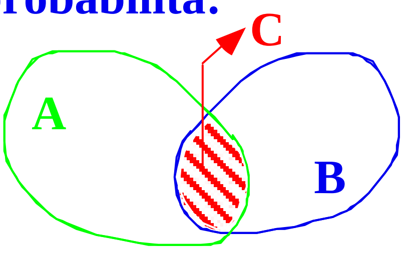
Se E ed F sono mutuamente esclusivi

$$P(EF) = 0$$

$$P(E + F) = P(E) + P(F)$$

$$P(E_1 \ldots E_m) = \sum_{i=1}^{m} P(E_i)$$

Dimostrabile anche usando la definizione assiomatica di probabilità:



A = (A - C) + C

B = (B - C) + C

(A - C),(B - C), C: disgiunti

Da III assioma: $\big(P(A + B) = P(A) + (P(B)\big)$ se A,B disgiunti;

$$P(A) = P(A - C) + P(C) \qquad P(A - C) = P(A) - P(C)$$

$$P(B) = P(B - C) + P(C) \qquad P(B - C) = P(B) - P(C)$$

Se ora consideriamo insieme somma A+B :

$$A + B = (A - C) + (B - C) + C$$

$$P(A + B) = P(A - C) + P(B - C) + P(C)$$

$$P(A + B) = P(A) - P(C) + P(B) - \cancel{P(C)} + \cancel{P(C)}$$

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(C)$$

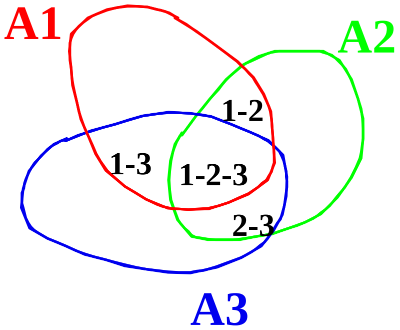
$$P(A \cdot B)$$

$$\boxed{P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)}$$

Se considero 3 eventi casuali :

$$P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3)$$

$$- P(A_2 \cdot A_3) + (\, P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3)$$



STATISTICAMENTE INDIPENDENTI

$$P(E|F) = P(\bar{E}) \qquad P(F|E) = P(F)$$

$$\longrightarrow P(EF) = P(E) \cdot P(F)$$

STATISTICAMENTE DIPENDENTI

MAZZO CON 42 CARTE (solo KQJ fiori)

E estrazione FIORI
F estrazione RE

$$P(E) = \frac{3}{42} \qquad P(F) = \frac{4}{42}$$

$$P(E|F) = \frac{1}{4} \qquad P(F|E) = \frac{1}{3}$$

$$P(E \cdot F) = \frac{3}{42} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{42} \quad \# \quad P(E) \cdot P(F)$$

$$P(E) \ P(F|E)$$

$$\frac{1}{\cancel{12}_{\,3}} \cdot \frac{\cancel{4}}{42} = \frac{1}{126}$$

SOMMARIO

	statisticamente indipendenti	*statisticamente dipendenti*	*statisticamente esclusivi*
$P(A \cdot B)$	$P(A) \cdot P(B)$	$\begin{cases} P(A) \cdot P(B \mid A) \\ P(B) \cdot P(A \mid B) \end{cases}$	$= 0$
$P(A + B)$	$P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$	$P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$	$P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$

Es.: efficienza di scanning nella ricerca di eventi rari

N : N. di eventi rari presenti nel campione (incognito)

$N_{12} + N_1$: N. di eventi trovati nella 1ª ricerca

$N_{12} + N_2$: N. di eventi trovati nella 2ª ricerca

N_{12} : N. di eventi trovati in ambedue

$$P(1) = \frac{N_{12} + N_1}{N}$$

(1) e (2) *statisticamente indipendenti*

$$P(2) = \frac{N_{12} + N_2}{N}$$

$$P(1,2) = \frac{N_{12}}{N} = P(1) \cdot P(2) \Rightarrow N = \frac{(N_{12} + N_1)\cdot(N_{12} + N_2)}{N_{12}}$$

$$P(1) = \frac{N_{12}}{N_{12} + N_2} \qquad P(2) = \frac{N_{12}}{(N_{12} + N_1)}$$

Probabilità di trovare un evento nelle due ricerche:

$$P(1+2) = P(1) + P(2) - P(1) \cdot P(2) = \frac{(N_{12} + N_1)}{N} + \frac{(N_{12} + N_2)}{N} - \frac{N_{12}}{N} =$$

$$= \frac{N_{12}}{(N_{12} + N_1)\cdot(N_{12} + N_2)} \cdot (N_1 + N_2 + N_{12})$$

DISTRIBUZIONE DI PROBABILITA`
E
DENSITA` DI PROBABILITA`

1) Variabile casuale discreta x_i $\quad i = 1, \ldots$

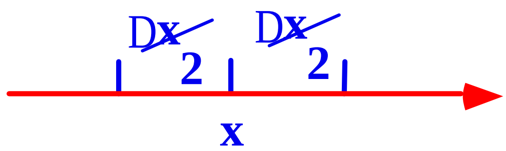
$$x_i \longrightarrow P_i(x_i) = \lim_{N \to \infty} \frac{n(x_i)}{N}$$

$$\sum_{i} P_i(x_i) = 1$$

L'insieme di P_i costituisce la

distribuzione di probabilità della variabile casuale

2) Variabile casuale continua x



$f\left(x - \frac{\Delta x}{2}, x + \frac{\Delta x}{2}\right)$ **: frequenza in** $x \pm \frac{\Delta x}{2}$

$$\frac{n\left(x \pm \frac{\Delta x}{2}\right)}{N}$$

Frequenza limite per unità di Δx:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f\left(x - \frac{\Delta x}{2}, x + \frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x} = f(x)$$

$$\Downarrow \qquad N \longrightarrow \infty$$

f(x) : DENSITA` DI PROBABILITA` o
FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE

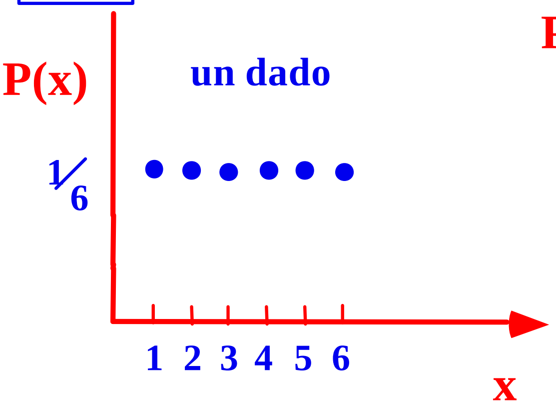
$$\frac{dP(x, x + dx)}{dx} = f(x)$$

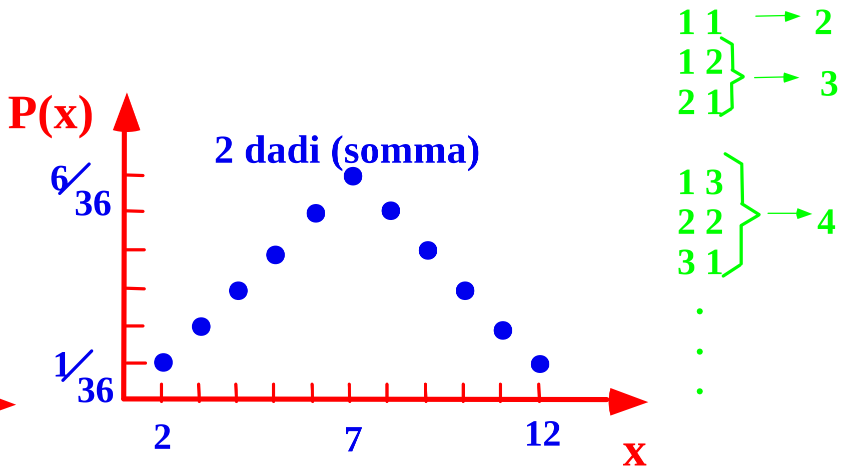
$$dP = f(x)\,dx$$

$P(a, b) = \int_a^b =$ *probabilità che la variabile casuale cada in (a,b)* $= \int_a^b f(x)\,dx$

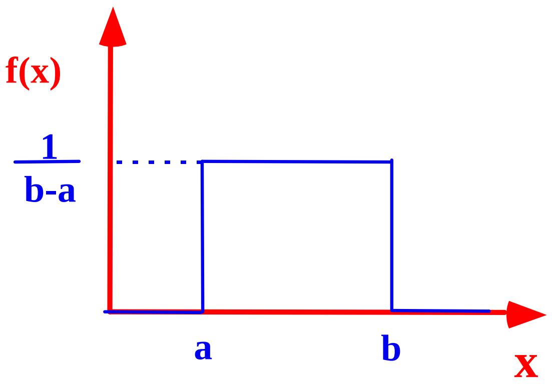
$$\int_{\sigma} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$$

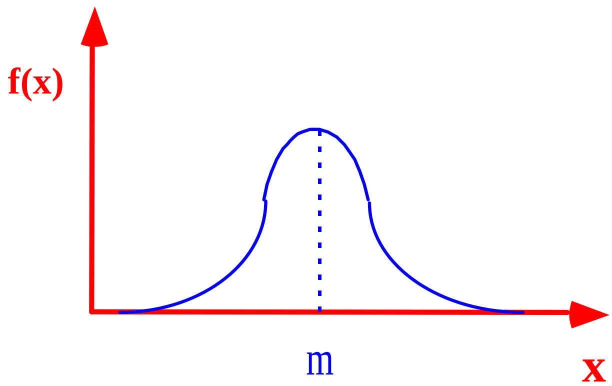
Es.





Es.





Densità uniforme di probabilità

$$f(x) = C \qquad \int_a^b C \cdot dx = C \cdot (b - a) = 1 \qquad C = \frac{1}{b - a}$$

CUMULATIVA DI UNA FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE

Funzione cumulativa: $\boxed{F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')\,dx'}$

PROPRIETA':

- $F(x) = P(-\infty < x' < x)$

- $P(a < x < b) = \int_{a}^{b} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = F(b) - F(a)$

$$f(x)dx = F(x + dx) - F(x) = dF(x)$$

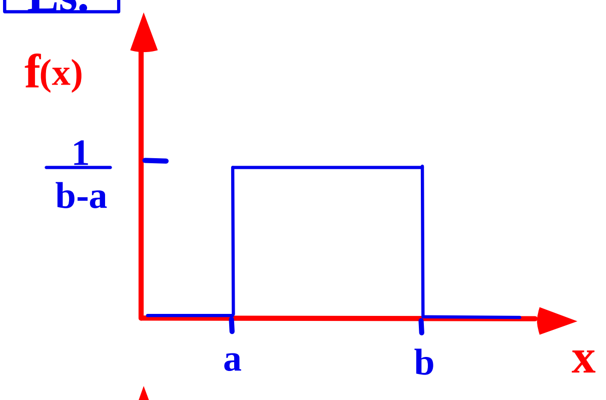
$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

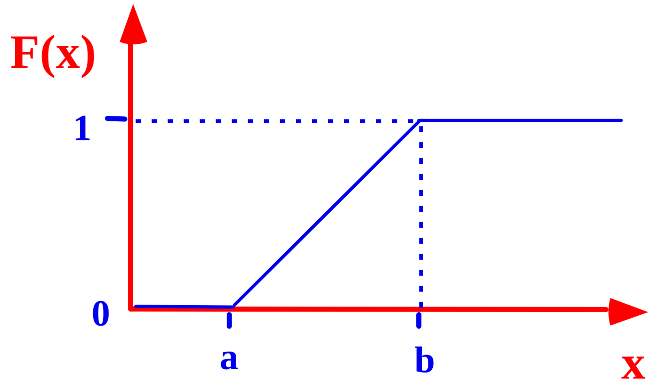
F(x) è monotona crescente dato che $f(x) \geq 0$ sempre

- Se x è definito fra a e b:

$$F(a) = 0 \qquad F(b) = 1 \qquad (F(-\infty) = 0;\ F(+\infty) = 1)$$

Es.





$$F(x) = \frac{1}{b-a}\int_{a}^{x} dx' = \frac{x-a}{b-a}$$

PARAMETRI CARATTERISTICI
RIBUZIONI DI PROBABILITA`

1) La "posizione" della distribuzione

I La moda: x per cui la distribuzione ha il massimo (*unimodali, multimodali*)

II La mediana: x_M che divide a metà la distribuzione

$$\int_{-\infty}^{x_M} f(x)\,dx = \int_{x_M}^{+\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}$$

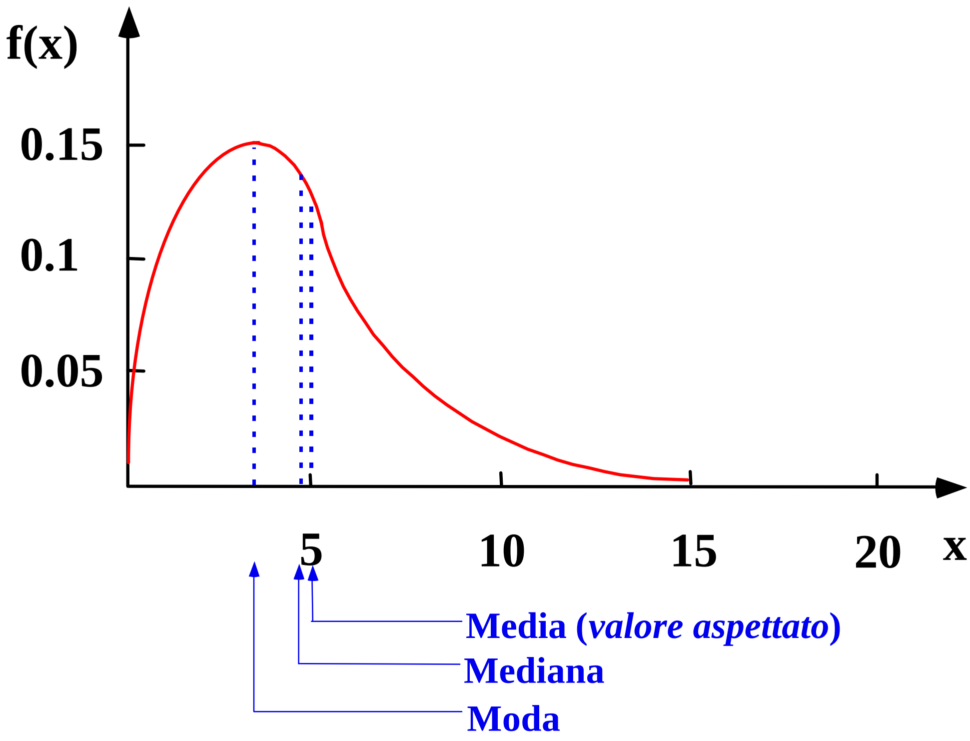
III La media (o valore aspettato) : (= μ)

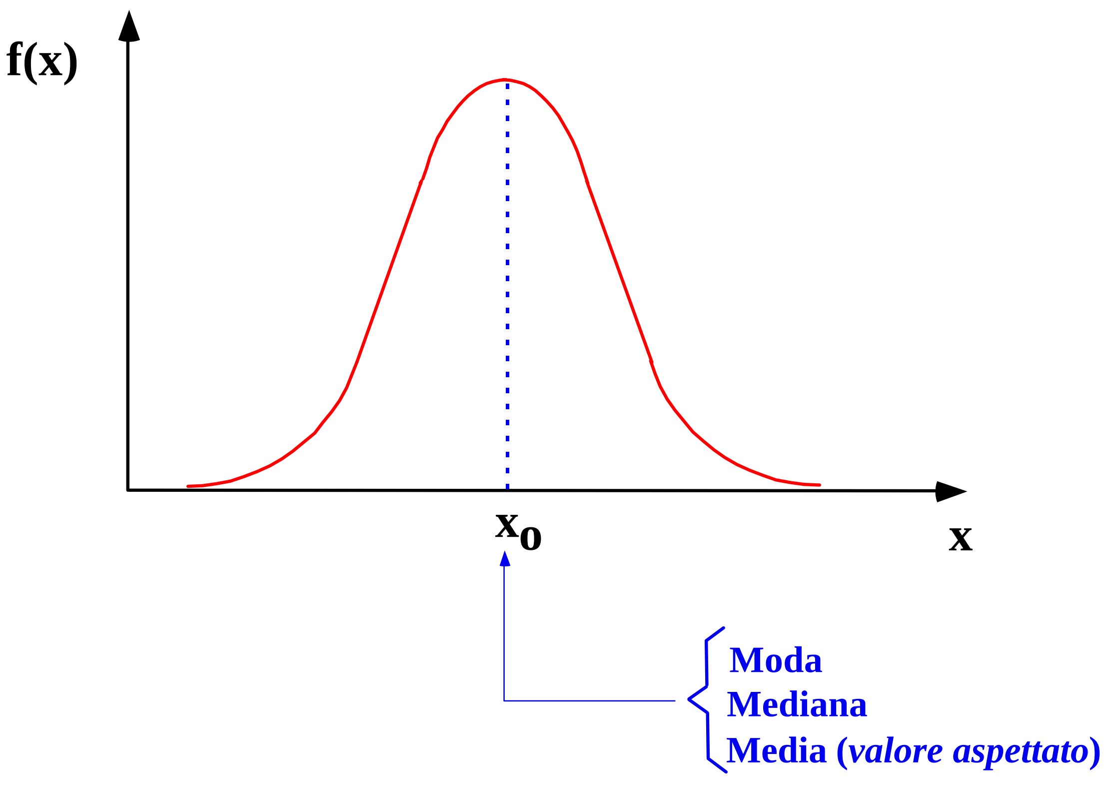
$$E[x] = \mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x)\,dx \qquad \textit{continuo}$$

$$E[x] = \mu = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P_i(x_i) \qquad \textit{discreto}$$

In generale si definisce il valore aspettato di una funzione di x, $g(x)$ (se x variabile casuale $g(x)$ è anche variabile casuale):

$$E[g(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \cdot f(x)\,dx$$


f(x)
0.15
0.1
0.05
5
10
15
20
x
Media (*valore aspettato*)
Mediana
Moda


f(x)
x_o
x
Moda
Mediana
Media (*valore aspettato*)

Proprietà del valore aspettato:

$$E[\Sigma_k a_k \cdot g_k(x)] = \Sigma_k a_k \cdot E[g_k(x)]$$

Casi notevoli:

$$E[a] = a \qquad \int a \cdot f(x)\,dx = a \cdot \underbrace{\int f(x)\,dx}_{=1} = a$$

$$E[a \cdot g(x)] = a \cdot E[g(x)]$$

Notare:

$$E[(x-\mu)] = E[x] - \mu = 0$$

2) La "larghezza" della distribuzione = varianza
= valore aspettato di $(x-\mu)^2$

$$\boxed{\text{Varianza} = \sigma^2 \rightarrow E[(x-\mu)^2]}$$

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^2 \cdot f(x)\,dx \qquad \textit{continuo}$$

$$\sigma^2 = \Sigma_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2 \cdot P_i(x_i) \qquad \textit{discreto}$$

$$E[(x-\mu)^2] = E[(x^2 + \mu^2 - 2\mu x)] =$$

$$E[x^2] + \mu^2 - 2\mu \underbrace{E[x]}_{=\mu} = E[x^2] - \mu^2 = E[x^2] - (E[x])^2$$

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \textit{deviazione standard}$$

3) La "asimmetria" della distribuzione

(valore aspettato di $(x - \mu)^3$)

SKEWNESS

$$SK = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu)^3 f(x)\, dx}{\sigma^3}$$

> 0: *coda a destra*
< 0: *coda a sinistra*
rispetto a μ

= 0 *per distribuzioni* f(x) *simmetriche*

- **CURTOSIS**

$$\frac{E\left[(x-\mu)^4\right]}{\sigma^4} - 3$$

= 0 per gaussiana
> 0 *più piccata*
< 0 *meno piccata*

In generale la funzione di distribuzione è completamente definita dall'insieme dei suoi momenti:

Momento k-esimo di f(x) rispetto a x_o =
$= \mu_k(x_o) = E\left[(x - x_o)^k\right]$

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{+\infty} (x - x_o)^k \cdot f(x)\, dx \\ \Sigma_i (x_i - x_o)^k \; P_i(x_i) \end{cases}$$

$\mu_o(0) = 1 \qquad \mu_o(\mu) = 1$

Si può dimostrare che:

$$\mu_k(x_o) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^r \cdot \binom{k}{r} \cdot x_o^r \cdot \mu_{k-r}(0)$$

coefficiente binomiale

Funzione simmetrica rispetto a μ $\rightarrow$ momenti dispari rispetto μ = 0

VALORE ASPETTATO : $\mu_1(0) = \mu$ = momento primo rispetto a $x_o = 0$

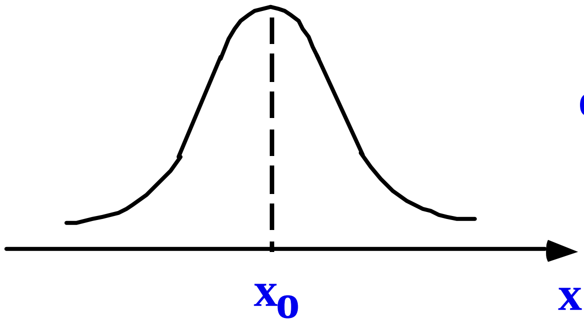
VARIANZA : $\mu_2(\mu) = \sigma^2$ = momento secondo rispetto a $x_o = \mu$

SKEWNESS : $\mu_3(\mu/\sigma^3)$ = momento terzo rispetto a μ / σ^3

CURTOSIS : momento quarto rispetto a μ / σ^4

⋮

VALORE ASPETTATO



di f(x) simmetrica rispetto a x_o

$$\mu = x_o$$

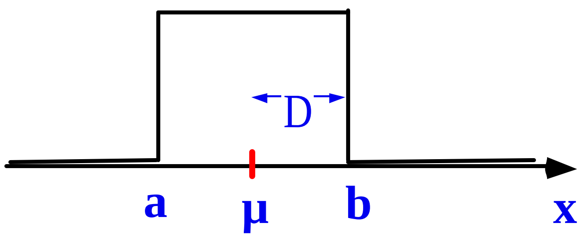
Infatti:

$$\mu = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{+\infty} (x' + x_o)\ f(x' + x_o)\, dx' =$$

$x' = x - x_o$ $\qquad x = x' + x_o$ $\qquad dx = dx'$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} x' \cdot f(x' + x_o)\, dx'}_{= 0 \text{ (f dispari} \cdot \text{f pari)}} + x_o \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x' + x_o)\, dx'}_{= 1} = x_o$$

VARIANZA di una distribuzione uniforme



$$f(x) = \begin{cases} 0 & \begin{cases} -\infty & a \\ b & +\infty \end{cases} \\ c = \dfrac{1}{b-a} & a,b \end{cases}$$

$$\mu = \int_a^b x\, f(x)\, dx = \int_a^b \frac{1}{b-a}\, x\ dx = \frac{1}{b-a}\left(\frac{b^2 - a^2}{2}\right) = \frac{b+a}{2}$$

$$\sigma^2 = \int_a^b (x-\mu)^2 f(x)\, dx = \int_a^b x^2 f(x)\, dx - \mu^2 =$$

$$= \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{(b-a)}{\sqrt{12}}} = \frac{(b-a)}{2}\ \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$

FUNZIONE GENERATRICE DEI MOMENTI

Funzione della variabile casuale x :

$$G_x(t) = E\left[e^{xt}\right]$$

Sviluppano in serie e^{xt} :

$$G_x(t) = E\left[1 + xt + \frac{x^2\ t^2}{2} + \ldots \frac{x^k\ t^k}{k!} + \ldots\right] =$$

$$= 1 + \mu_1(0)t + \mu_2(0)\frac{t^2}{2} \ldots \mu_k(0)\ \frac{t^k}{k!} + \ldots$$

I coefficienti dello sviluppo della $G_x(t)$ in serie di potenze di t sono i *momenti* intorno all'origine.

$$\frac{d^k\ G_x(t)}{dt^k} = E\left[\frac{d^k}{dt^k}\ e^{xt}\right] = E\left[x^k \cdot e^{xt}\right]$$

$$\boxed{\frac{d^k\ G_x(0)}{dt^k} = E\left[x^k\right] = \mu_k(0)}$$

PROPRIETA` NOTEVOLI :

I $\quad G_{cx}(t) = E\left[e^{c\cdot x\cdot t}\right] = E\left[e^{x\cdot ct}\right] = G_x(ct)$

II $\quad G_{c+x}(t) = E\left[e^{(c+x)\cdot t}\right] = e^{ct}\, E\left[e^{xt}\right] = e^{ct}\cdot G_x(t)$

III $\quad G_x(0) = 1$

La II ci permette di calcolare i momenti centrali:

Es. s^2 : momento secondo di $(x - \mu)$

$$G_{x-\mu}(t) = e^{-\mu t}\; G_x(t)$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} G_{x-\mu}(t) = -\mu\, e^{-\mu t}\, G_x(t) + e^{-\mu t} \cdot \dfrac{d}{dt} G_x(t) \\[2ex] \dfrac{d^2}{dt^2} G_{x-\mu}(t) = \mu^2 e^{-\mu t}\, G_x(t) - \mu\, e^{-\mu t} \cdot \dfrac{d}{dt} G_x(t) + \end{cases}$$

$$-\mu \cdot e^{-\mu t} \cdot \frac{d}{dt} G_x(t) + e^{-\mu t} \cdot \frac{d^2}{dt^2} G_x(t)$$

$$\frac{d}{dt} G_{x-\mu}(0) = -\mu\, \underbrace{G_x(0)}_{=1} + \underbrace{\frac{d}{dt} G_x(0)}_{=\mu} = 0$$

$$\boxed{\frac{d}{dt} G_x(0) = \mu}$$

$$\underbrace{\frac{d^2}{dt^2} G_{x-\mu}(0)}_{s^2} = \mu^2 - \mu^2 - \mu \cdot \underbrace{\frac{d}{dt} G_x(0)}_{=\mu} + \frac{d^2}{dt^2} G_x(0)$$

$$\boxed{s^2 = \frac{d^2}{dt^2} G_x(0) - \mu^2}$$

FUNZIONE DI DISTRIBUZIONE PER FUNZIONE DELLA VARIABILE CASUALE

$x \rightarrow f(x) \qquad y = y(x) \qquad \rightarrow \qquad f(y)\ ?$

corr. biunivoca

$$dP(x, x + dx) = dP(y, \underbrace{y + dy)}_{y(x)}$$

$$\Downarrow$$

$$f(x)\, dx = f(y)\, dy$$

$$\boxed{f(y) = \left| \frac{dx\ (y)}{dy} \right| \cdot\ f(x(y))}$$

$$\Uparrow$$

$| \quad |$ *dato che* f *deve essere sempre • 0*

NOTARE :

$$E[g(x)] = \int g(x) \cdot f(x) \cdot \, dx$$

$$g(x) = y$$

$$E[y] = \int y \cdot f(x) \cdot dx = \int y \cdot f(y) \cdot dy$$

Infatti:

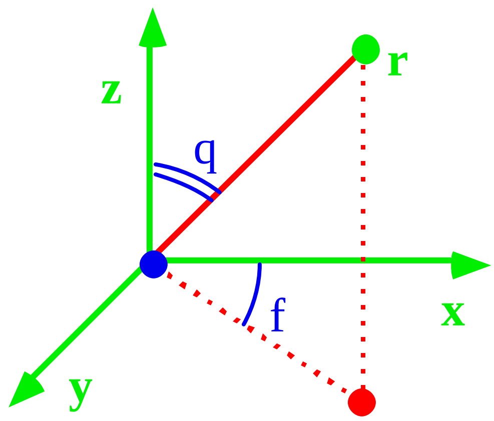
$$f(y) = \left| \frac{dx}{dy} \right| \cdot f(x)$$

$$E[y] = \int y \quad f(y) \, dy =$$

$$= \int y \cdot \left| \frac{dx}{dy} \right| f(x) \cdot dy =$$

$$= \int y(x) f(x) \cdot dx$$

Es. **SORGENTE DI PARTICELLE ISOTROPA**



Isotropa: ***flusso di particelle emesso (per unità di tempo) proporzionale ad angolo solido e costante***

$$dS_{sfera} = r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \qquad d\Omega = \frac{dS_{sfera}}{r^2} = d(\cos\theta) \cdot d\varphi$$

Quindi la funzione di distribuzione di $\cos\theta$ sarà costante fra -1, +1; $f(\cos\theta) = \frac{1}{2}$

Funzione di distribuzione di θ ?

$$-1 < x < 1$$

$$\theta = \arccos(\cos\theta)$$

$$\pi > y > 0$$

$$f(y) = f(x) \cdot \left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{1}{2}\left|\frac{d\cos\theta}{d\theta}\right| = \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\sin\theta \, d\theta = -\frac{1}{2}\cos\theta \Big|_0^{\pi} = 1$$

Es. **CUMULATIVA** **F(x) è variabile casuale funzione di x**

$$y = F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x')\,dx' \qquad \frac{dy}{dx} = f(x)$$

Funzione di distribuzione di y : $f(y) = f(x)\left|\frac{dx}{dy}\right| = \frac{f(x)}{f(x)} = 1$

$$\left|\frac{dx}{dy}\right| \rightarrow \frac{1}{f(x)}$$

uniforme fra 0 e 1

Dato che F(x) è distribuita uniforme (0, 1) posso ottenere variabili casuali con funzione di distribuzione qualsiasi a partire da variabile casuale con distribuzione uniforme fra 0 e 1 ***(utile nei calcolatori).***

Es. **DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE**

$$x \rightarrow f(x) = \frac{1}{x_o} e^{-\frac{x}{x_o}}$$

$$\int_0^{\infty} f(x)\, dx = 1$$

$$y = F(x) = \int_0^{x} \frac{1}{x_o} e^{-\frac{x'}{x_o}} dx' = 1 - e^{-\frac{x}{x_o}}$$

Se y è la cumulativa di f(x), generato y uniforme, x = g(y) sarà distribuito secondo f(x)

$$y = 1 - e^{-\frac{x}{x_o}}$$

$$lg_e (1 - y) = -\frac{x}{x_o} \qquad x = - x_o\, lg_e (1 - y)$$

Per generare gaussiana($\mu = 0$, $\sigma = 1$) :

$$x = \sin (2\pi y_1) \cdot \sqrt{- 2\ lg_e y_2}$$

y_1, y_2 : 2 *numeri casuali con distribuzione uniforme*

VALORE ASPETTATO E VARIANZA DI y

$y = g(x)$

Siano μ_x e σ_x^2 valore aspettato e varianza di x.

Sviluppo y(x) in serie di Taylor intorno a μ_x:

$$\underbrace{y(x) = y(\mu_x) + \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\mu_x}(x-\mu_x) +}_{A} \ \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{\mu_x}(x-\mu_x)^2 + \dots$$

$$\mu_y = E[y] = y(\mu_x) + \left(\frac{dy}{dx}\right)_{\mu_x}\cdot \underbrace{E\,[(x-\mu_x)]}_{=0} + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_{\mu_x}\cdot E\left[(x-\mu_x)^2\right] + \dots$$

Trascurando i termini di ordine più alto:

$$\boxed{\mu_y = E\,[y] \simeq y(\mu_x)}$$

$$\underbrace{E\left[\left(y - y(\mu_x)\right)^2\right]}_{\mu(y)} = \overset{\text{dalla } A}{\simeq} E\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2_{\mu_x}(x-\mu_x)^2\right] = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2_{\mu_x}\cdot \underbrace{E\left[(x-\mu_x)^2\right]}_{\sigma_x^2}$$

$$\boxed{\sigma_y^2 = E\left[\left(y - y(\mu_x)\right)^2\right] = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2_{\mu_x}\cdot \sigma_x^2}$$

approssimata

$y = g(x)$

Se y è funzione lineare di x :

$$y = ax + b$$

$$\mu_y = a\mu_x + b$$

$$s_y^2 = a^2 \, s_x^2$$

ESATTA

DISTRIBUZIONE BINOMIALE

Processo casuale generico

"successo" : una certa modalità E di presentarsi nel processo casuale con probabilità p (*evento complementare* $\bar{E}$, *probabilità* (1 - p))

Se facciamo *n* prove, quale è la probabilità che il successo si presenti *k* volte?

$$P_{n,p}(k)$$

Da teorema delle probabilità composte (*le prove sono statisticamente indipendenti*) :

k successi, n-k insuccessi

$p^k\,(1 - p)^{n-k}$ k volte (SI), (n-k) volte (NO)

$p\,(1 - p)^{n-k}\;p^{k-1}$ SI, (n-k) volte NO, (k-1) SI

.
.
.

Sommare su tutte le possibili combinazioni:

$$\left(\text{n. di combinazioni n oggetti k a k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\right)$$

PERMUTAZIONI (P)

Dati n oggetti distinti, in quanti modi se ne possono selezionare r?

$${}_nP_r = n \cdot (n - 1) \ldots (n - r + 1)$$

$${}_nP_n = n \cdot (n - 1) \ldots (n \cancel{-} n \cancel{+} 1) = n!$$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n - r)!}$$

RICORDARE:

$$0! = 1$$

COMBINAZIONI (C)

Se non siamo interessati all'ordine in cui compaiono gli r oggetti:

$${}_nC_r = \frac{n!}{(n - r)!\, r!} = \binom{n}{r} = \frac{n \cdot (n - 1) \ldots (n - r + 1)}{r!}$$

$$\boxed{{}_nC_r \cdot r! = {}_nP_r}$$

$$\boxed{{}_nC_r = \frac{n!}{(n - r)!\, r!}}$$

$$P_{n,p}(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$k = 0 \to n$$

DISTRIBUZIONE BINOMIALE

Distribuzione di probabilità nella variabile casuale k
(*n. finito di valori: 0 . . . n*)

$$\sum_{0}^{n}{}_k P_{n,p}(k) = \sum_{0}^{n}{}_k \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \left(\cancel{p} + (1-\cancel{p})\right)^n = 1$$

Ricordare che:

$$(a+b)^n = \sum_{0}^{n}{}_k \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Es.

Probabilità di un 2 su 10 lanci di un dado:

$p = \dfrac{1}{6}$ ***probabilità evento favorevole***

$n = 10$ ***numero prove***

$$P_{10,\frac{1}{6}}(1) = \frac{10!}{1!\,(10-1)!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^1 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^9 = 0.32$$

Probabilità di nessun 2 :

$$P_{10,\frac{1}{6}}(0) = \frac{10!}{0!\,10!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{10} = 0.16$$

Probabilità di tutti 2:

$$P_{10,\frac{1}{6}}(6) = \frac{10!}{10!\,0!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \left(\frac{5}{6}\right)^0 = 1.7 \cdot 10^{-8}$$

Probabilità di avere almeno un 2:

$$\sum_{k=1}^{10} P_{10,1/6}(k) = 1 - P_{10,1/6}(0) = 1 - 0.16 = 0.84$$

Proprietà notevoli della binomiale:

1 Valore aspettato e varianza

$$\mu = E[k] = \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} =$$

1 *dato che k = 0 annulla primo termine*

$$= n \cdot p \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}\, p^{k-1} \cdot (1-p)^{n-k}$$

$$\begin{cases} k' = k - 1 \\ n' = n - 1 \end{cases}$$

$$= n \cdot p \underbrace{\sum_{k'=0}^{n'} \frac{n'!}{k'!\,(n'-k')!}\, p^{k'} \cdot (1-p)^{n'-k'}}_{= 1}$$

$$\boxed{\mu = n \cdot p}$$

$$\sigma^2 = E\left[(k - np)^2\right] = E[k^2] - (np)^2$$

$$E[k^2] = \sum_{0}^{n}{}_{k}\; k^2 \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\, p^k\;(1-p)^{n-k} \quad =$$

$$= n\,p \;\sum_{1}^{n}{}_{k}\; k \frac{(n-1)!}{(k-1)!\,(n-k)!}\; p^{k-1}(1-p)^{n-k} \;=$$

$k' = k - 1$

$n' = n - 1$

$$= n\,p \;\sum_{0}^{n'} (k'+1)\, P_{n',p}\,(k') =$$

su n-1 prove

$$= np \cdot E[(k'+1)] = np \cdot (E[k'] + 1) =$$

$E[k'] \Rightarrow (n-1)\cdot p$

$$= np \cdot \{(n-1)\cdot p + 1\} = n\;(n-1)\cdot p^2 + n\cdot p$$

$$\sigma^2 = n\,(\cancel{n}-1)\cdot p^2 + n\cdot p\;\; \cancel{-(n\cdot p)^2} \quad = np(1-p)$$

$$\boxed{\sigma^2 = np\cdot(1-p)}$$

$$\boxed{\sigma = \sqrt{np\,(1-p)}}$$

Distribuzione binomiale:

$$p_{n,p}\,(k) = \binom{n}{k} p^k\, q^{n-k} \qquad q = (1-p)$$

$$\mu = np \qquad \sigma = \sqrt{npq}$$

AS-34

μ e s^2 della distribuzione binomiale usando funzione generatrice dei momenti

$$\begin{cases} \mu = \mu_1(0) \\ s^2 = \mu_2(\mu) \end{cases} \qquad P_{N,p}(k) = \binom{N}{k} \cdot p^k \, q^{N-k}$$

$$G_k(t) = E\,[e^{tk}] = S_{0}^{N}{}_k \; e^{tk} \binom{N}{k} \; p^k \, q^{N-k} =$$

$$= S_{0}^{N}{}_k \binom{N}{k} \cdot (\quad p)^k \cdot q^{N-k} = \left(\textit{sviluppo di un binomio} \right)$$

$$= (e^t \cdot p + q)^N$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} G_k(t) = N \cdot (e^t \cdot p + q)^{N-1} \cdot p \cdot e^t \\ \dfrac{d^2}{dt^2} G_k(t) = N \cdot (e^t \cdot p + q)^{N-1} \cdot p \cdot e^t \quad + \\ \qquad + N \cdot (N-1) \cdot (e^t \cdot p + q)^{N-2} \; p^2 \cdot e^{2t} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_1(0) = \dfrac{d}{dt} G_k(0) \\ \mu_2(\mu) = s^2 = \dfrac{d^2}{dt^2} G_e(0) - \mu^2 \end{cases}$$

$$\mu = \frac{d}{dt} G_k(0) = N \cdot \underbrace{(p+q)^{N-1}}_{=1} \cdot p = \boxed{N \cdot p}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} G_k(0) = N \cdot \underbrace{(p+q)^{N-1}}_{=1} \cdot p +$$

$$+ N (N-1) \cdot \underbrace{(p+q)^{N-2}}_{=1} \cdot p^2 =$$

$$= N \cdot p + N \cdot (N-1) \cdot p^2$$

$$s^2 = \frac{d^2}{dt^2} Gk(0) - \mu^2 = Np + N^2p^2 - Np^2 +$$

$$-(Np)^2 = Np \cdot (1-p) =$$

$$= \boxed{N \cdot p \cdot q}$$

1 Massimo della distribuzione

Massimo in corrispondenza a $k \simeq np$ $\left(\text{se } np >> 1\right)$

$$\frac{P_{N,p}(k+1)}{P_{N,p}(k)} = \frac{\dfrac{\cancel{N!}}{(k+1)!\,(N-k-1)!}}{\dfrac{\cancel{N!}}{k!\,(N-k)!}} \cdot \frac{p^{k+1}\; q^{N-k-1}}{p^{k} \cdot q^{N-k}} =$$

$$= \frac{N-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q}$$

Distribuzione crescente per :

$$\frac{N-k}{k+1} \cdot \frac{p}{q} = 1$$

$$\boxed{k = Np - q}$$

2 Massimo della distribuzione

Massimo in corrispondenza a $k \simeq np$ $\left(\text{se } np >> 1 \right)$

3 se p = 0.5

$$p_{n,1/2}(k) = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \left(\frac{1}{2}\right)^{k} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

$$p_{n,1/2}(n-k) = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{k}$$

$$\boxed{p(k) = p\,(n-k)}$$

Se p = 0.5 distribuzione simmetrica intorno a np (*intero*)

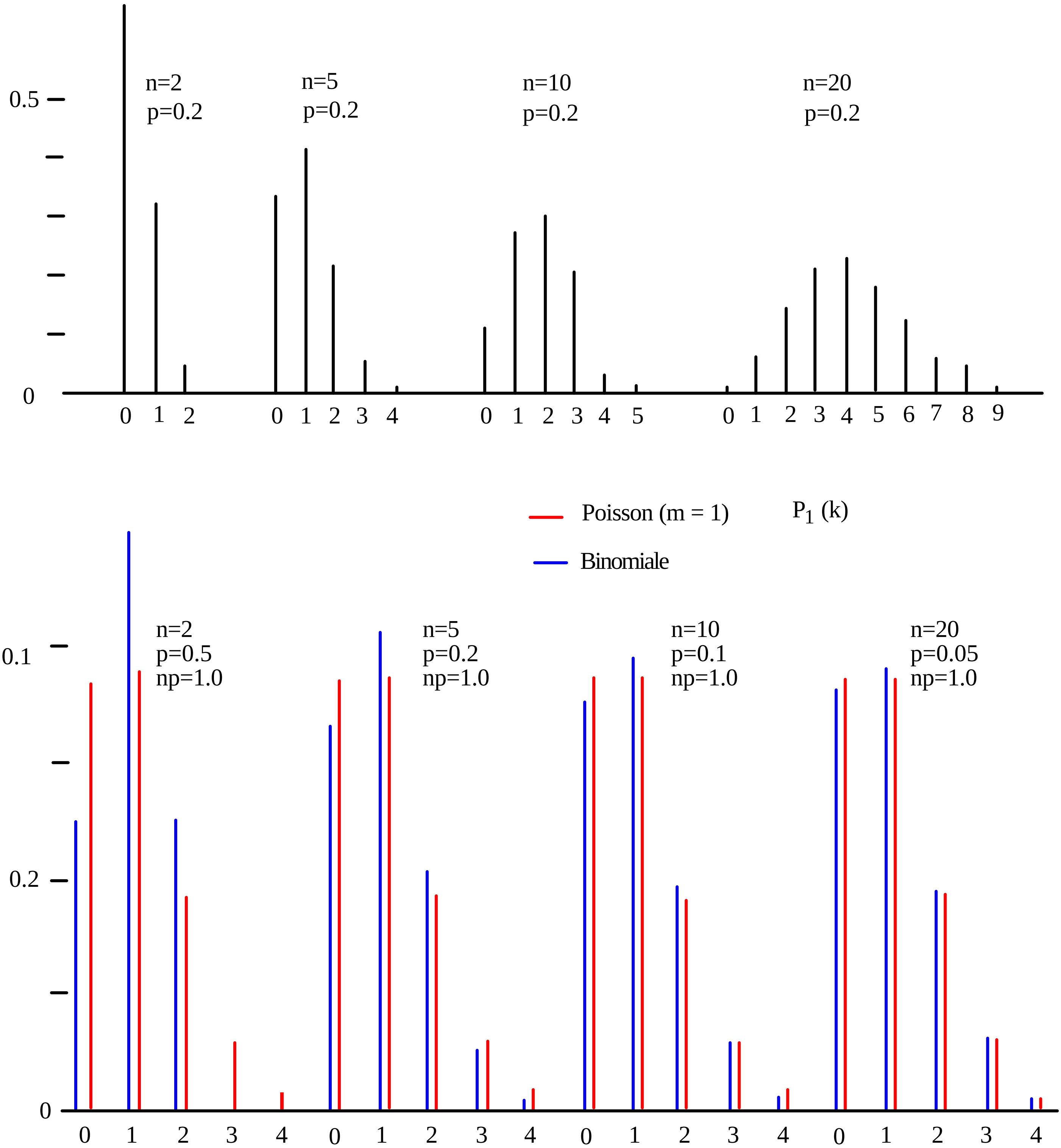
4 $n \to 8$, p = costante

Tende alla distribuzione "normale" (*gaussiana*) con:

$$\mu = np \qquad s = \sqrt{np \cdot (1-p)}$$

5 $n \to 8$, np = costante

Tende alla distribuzione di Poisson



0.5
0
n=2
p=0.2
n=5
p=0.2
n=10
p=0.2
n=20
p=0.2
0 1 2
0 1 2 3 4
0 1 2 3 4 5
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9
Poisson (m = 1)
P_1 (k)
Binomiale
0.1
0.2
0
n=2
p=0.5
np=1.0
n=5
p=0.2
np=1.0
n=10
p=0.1
np=1.0
n=20
p=0.05
np=1.0
0 1 2 3 4
0 1 2 3 4
0 1 2 3 4
0 1 2 3 4

AS-39

Es. **Frequenza su n prove**

(Evento favorevole con probabilità p)

$$\boxed{n = \frac{\mathbf{k}}{\mathbf{n}}}$$

$$\mu = E[n] = \frac{1}{n} \quad E[k] = \frac{\cancel{n}p}{\cancel{n}} = p$$

$$s_n^2 = E[(n - \mu_n)^2] = E\left[\left(\frac{k}{n} - p\right)^2\right] =$$

vedi AS-34

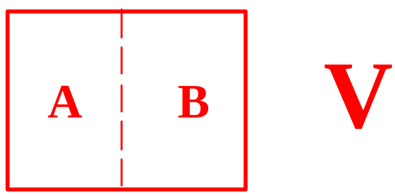
$$= E\left[\left(\frac{k}{n}\right)^2\right] - p^2 = \frac{1}{n^2}\left\{n(n-1)\,p^2 + np\right\} - p^2$$

$$= \frac{1}{n^2}\cdot np\cdot(1-p) = \frac{p\cdot(1-p)}{n}$$

$$\begin{cases} s_n \longrightarrow 0 & \text{per } n \longrightarrow \bullet \\ n \longrightarrow p & \text{per } n \longrightarrow \bullet \end{cases}$$

Vedi anche
Teorema di Bernoulli

Es. **Fluttuazioni di densità in un gas ideale**



Date N molecole in V, sia p la probabilità per <u>generica molecola</u> di essere in A e (1 - p) la probabilità di essere in B.

(Nessuna interazione fra molecole, a parte urti ® posizione molecola indipendente da posizione altre molecole).

Probabilità ad un certo istante di avere n_A molecole in A?

Ogni molecola è una prova indipendente

e "evento favorevole" = essere in A.

$$P_{N,p_A}(n_A) = \binom{N}{n_A} \cdot p_A^{n_A} \cdot (1 - p_A)^{N-n_A}$$

se $p_A = (1 - p_A) = \frac{1}{2}$ *(dato che i volumi sono uguali)*

$$P_{N,\frac{1}{2}}(n_A) = \frac{N!}{n_A!\,(N - n_A)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^N$$

$$\mu\,(n_A) = \frac{N}{2} \qquad s(n_A) = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{N}$$

Applicando la ***formula di Stirling*** *alla* variabile x:

$$x = \frac{n_A - \frac{N}{2}}{\frac{N}{2}}$$

(scarto relativo di n_A dal suo valore aspettato)

$$P(x) = \sqrt{\frac{2}{p \cdot N}} \cdot e^{-(N-1)\cdot\frac{x^2}{2}}$$

Dato che nell'esponente compare $-\frac{N \cdot x^2}{2}$ con N molto grande,

appena x si scosta da 0, P ® 0 ($x = 10^{-8}$, $P \simeq 0$).

UN GAS HA SEMPRE DENSITA` UNIFORME

DISTRIBUZIONI SPERIMENTALI

● ***Variabile casuale discreta***

Es. **Somma di due dadi**

x	2	3	4	...	12
$P(x)$	P_2	P_3	P_4	...	P_{12}

N Esperimenti ripetuti (lancio dadi)

Risultato: $n_2 \quad n_3 \quad \ldots \quad n_{12} \qquad \Sigma n = N$

$$F_2 = \frac{n_2}{N} \quad F_3 = \frac{n_3}{N} \quad \ldots \quad F_{12} = \frac{n_{12}}{N}$$

Per il Teorema di Bernoulli $\quad N \to \infty$

$$P_2 \quad P_3 \quad \ldots \quad P_{12}$$

Consideriamo un particolare valore della variabile casuale (Es. 2):

- **N ® 8** $\quad$ **n_2 ® NP_2**
- **N finito:** $\quad$ **F_2 ? P_2** $\quad$ **n_2 ? NP_2**

Quale è la distribuzione di probabilità di **n_2?**

$$P_{N,\,P_2}(k) = \binom{N}{k} P_2^{\,k}(1 - P_2)^{N-k} \qquad \textit{(binomiale)}$$

Se P_2 è probabilità della variabile 2, la probabilità di k(=n_2) successi su N prove si ottiene dalla distribuzione binomiale

Ripetendo M volte la serie di N lanci (N cost) i valori di n_2 che si ottengono saranno distribuiti secondo la $P_{N,\,P_2}(n_2)$ ($0 \le n_2 \le N$). [Se N grande e P_2 piccolo la distribuzione tenderà alla poissoniana con $m = NP_2$. Vedi dopo.

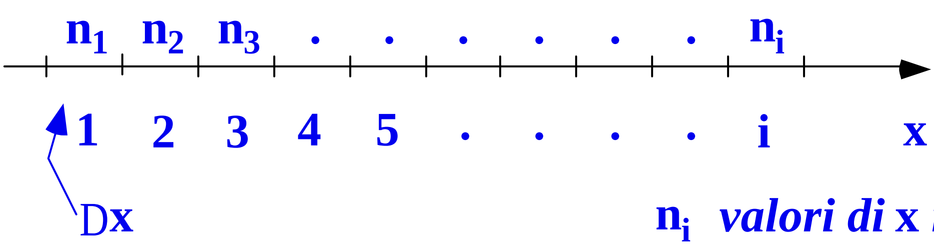
Valore aspettato e varianza di n_2:

$$\mu(n_2) = NP_2$$

$$s^2(n_2) = N \cdot P_2 \cdot (1 - P_2)$$

Variabile casuale continua

N prove : $x_1 \; . \; . \; . \; . \; . \; x_N$



n_i *valori di* x *in intervallo* i

$$\frac{n_i}{N} \xrightarrow{N \,®\, 8} DP_i = \int_{x_i}^{x_i+Dx} f(x)\,dx \simeq f(x_i) \cdot Dx$$

Per N finito n_i ? NDP.

Ripetendo M volte la serie di N misure il contenuto n_i del generico Dx avrà distribuzione binomiale $P_{N,f(x_i)Dx}(n_i)$ [tenderà alla poissoniana con $m(n_i) = N \cdot f(x_i) \cdot Dx$ per N grande e DP piccolo].

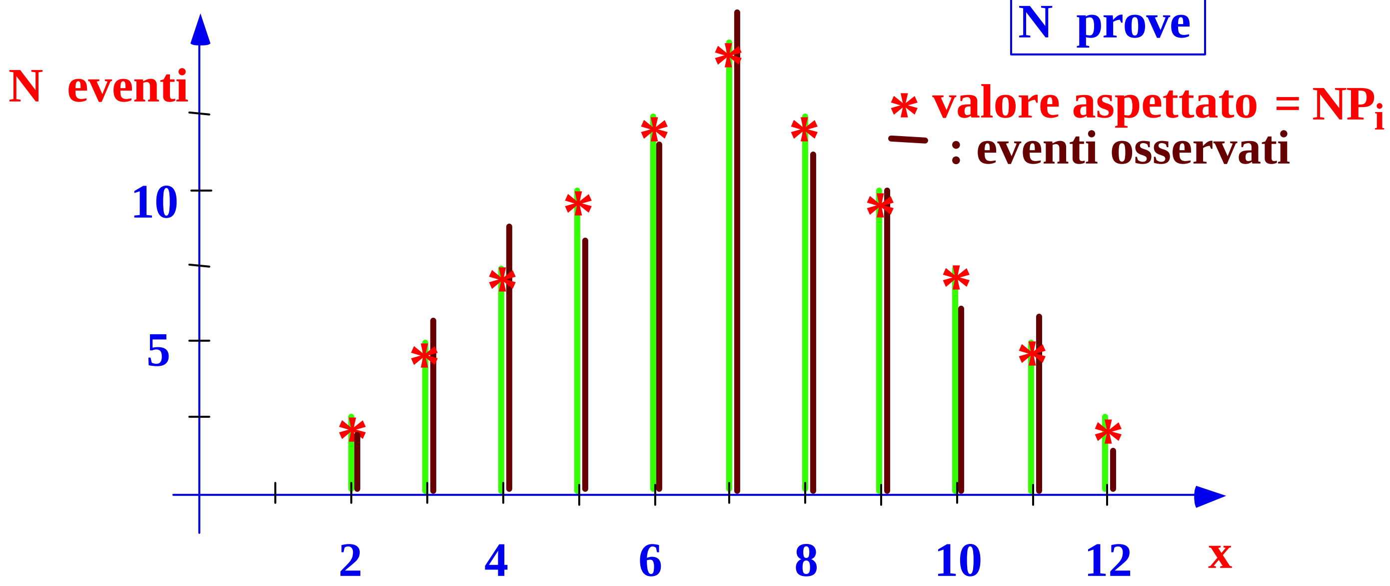
Valore aspettato di n_i :

$$\mu(n_i) = N\, f(x_i) \cdot Dx$$

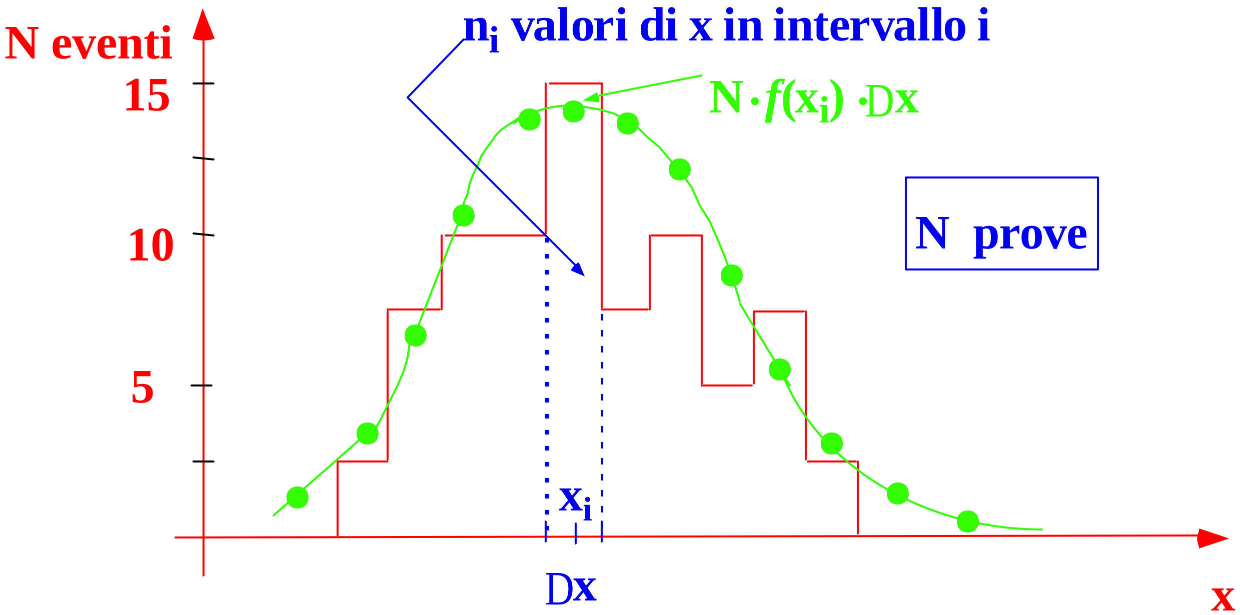
$$s^2(n_i) = N \cdot f(x_i) \cdot Dx \cdot (1 - f(x_i) \cdot Dx)$$

Rappresentazione grafica
(*istogrammi*)

caso discreto



caso continuo



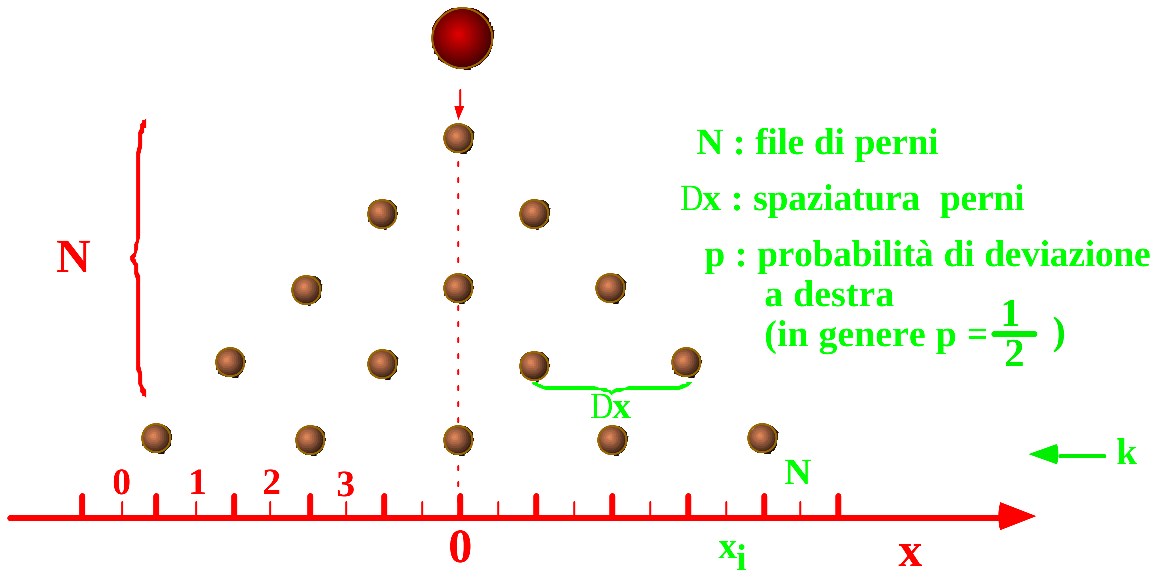
$$\text{Area} = \sum_i n_i\,\Delta x = \Delta x \sum_i n_i = \Delta x \cdot N$$

Valore aspettato in intervallo i:

$$\mu_i = N\,f(x_i) \cdot \Delta x$$

$$\text{Area} = \sum_i \mu_i\,\Delta x = N \cdot \Delta x \underbrace{\sum_i f(x_i)\,\Delta x}_{\int_S f(x)\,dx = 1} = \Delta x \cdot N$$

QUINCONCE DI GALTON



Ad ogni urto la pallina subirà spostamento $\frac{\Delta x}{2}$

Coordinata x_i finale della pallina :

$$x_i = \left(n_D - \frac{N}{2}\right) \Delta x$$

Infatti:

n_D **: n. urti con deviazione a _destra_**

$n_S = (N - n_D)$**: n. urti con deviazione a _sinistra_**

$$x = n_D \cdot \frac{\Delta x}{2} - (N - n_D) \frac{\Delta x}{2} =$$

$$= (2n_D - N) \frac{\Delta x}{2} = \left(n_D - \frac{N}{2}\right) \Delta x$$

$n_D = 0, \ldots, N$ $\quad$ **$N + 1$ valori**

$x = -\frac{N}{2}, \ldots, \frac{N}{2}$ $\quad$ $(\Delta x = 1)$

Vogliamo valutare la probabilità che la pallina abbia alla fine x_i

$$P(x_i) = P(n_D)$$

Evento favorevole : ***deviazione a destra***

Un singolo urto : ***una prova ogni fila di perni***

Dopo N prove (= N di file di perni), la probabilità che evento favorevole si sia presentato n_D volte (essendo p la probabilità di deviazione a destra) :

$$P_{N,p}(n_D) = \binom{N}{n_D} \cdot p^{n_D} \cdot (1-p)^{N-n_D}$$

$$\mu(n_D) = N \cdot p$$

$$\sigma^2(n_D) = N \cdot p \cdot (1-p)$$

Se considero ora la variabile $x = f(n_D)$:

$$y = az + b \qquad P(y) = P\left(z = \frac{1}{a}\{y - b\}\right)$$

$$\downarrow$$

$$\mu_z, \ \sigma_z^2 \qquad \mu(y) = a \cdot \mu_z + b$$

$$\sigma^2(y) = a^2 \cdot \sigma_z^2$$

$$x = \left(n_D - \frac{N}{2}\right) \Delta x$$

$$n_D = \frac{x}{\Delta x} + \frac{N}{2}$$

$$P(x) = P\,(n_D \textit{ calcolato in } x) = \binom{N}{n_D} \cdot p^{n_D} \cdot (1-p)^{N-n_D}$$

$$\mu(x) = \left(N \cdot p - \frac{N}{2}\right) \cdot \Delta x$$

$$\sigma^2(x) = \left(N \cdot p \cdot (1-p)\right) \cdot \Delta x^2$$

La probabilità che la pallina abbia coord. finale x è una

BINOMIALE con $\begin{cases} \textit{n. prove = n. file chiodi} \\ \textit{p = prob. urto a destra} \end{cases}$

LANCI RIPETUTI

Numeriamo caselle di arrivo della pallina da 0 a N

(k (*numero della casella*) = n_D)

$$x_k = (\textit{coordinata centro cella}) = \left(k - \frac{N}{2}\right) \quad \text{avendo posto:}$$

$$P(k) = P(n_D) = P(x_k) \qquad Dx = 1$$

Se faccio N lanci di palline, quale è la probabilità di trovare m_k palline in cella k?

Se eseguiamo N lanci (N prove) e se P(k) è la probabilità che la pallina vada nella cella k (*evento favorevole*), la distribuzione di probabilità per la variabile casuale m_k (= numero di successi su N prove, cioè numero di palline in cella k) è una *binomiale*:

$$P_{N\,,p(k)}(m_k) = \binom{N}{m_k} \cdot \{P(k)\}^{m_k} \cdot \{Q(k)\}^{N-m_k}$$

Q=1-P

$$0 = m_k = N$$

con

$$P(k) = P_{N,p}(k) = \binom{N}{k} p^k \cdot (1 - p)^{N-k}$$

N: *numero di file di chiodi*

p: *probabilità di deviazione a destra*

La variabile casuale m_k avrà valore aspettato e varianza:

$$\mu(m_k) = N \cdot P(k)$$

$$\sigma^2(m_k) = N \cdot P(k) \cdot (1 - P(k))$$

Dove $\mu(m_k)$ rappresenta il numero aspettato di palline nella cella k se si eseguono N lanci e σ (= $\sqrt{\text{varianza}}$ = deviazione standard) è la larghezza della distribuzione intorno al valore aspettato. Notare che:

$$\frac{\sigma(m_k)}{\mu(m_k)} = \frac{\sqrt{N \cdot P(k) \cdot (1 - P(k))}}{N \cdot P(k)} = \frac{1}{\sqrt{N}} \cdot \sqrt{\frac{1}{P(k)} - 1}$$

Larghezza relativa distribuzione = intervallo fluttuazione valori osservati intorno a valore aspettato/valore aspettato

Quindi $\frac{\sigma}{\mu}$ decresce come $\frac{1}{\sqrt{N}}$ per un dato P(k)

NOTARE:

se $P(k) \ll 1$, $(1 - P(k)) \approx 1$

$$\sigma^2(m_k) \sim \mu(m_k) \qquad \frac{\sigma}{\mu} = \frac{1}{\sqrt{\mu}}$$

TRACCIA SUGGERITA ESPERIENZA

(P = 0.5; XD = 1)

1 Verifica valore aspettato e varianza variabile x

N determinazioni di x con N lanci

Miglior stima di μ e s :

$$\bar{x} = \frac{S_i\, x_i}{N}$$

$$s = \sqrt{\frac{S_i\,(x_i - \bar{x})^2}{(N-1)}} \simeq \sqrt{\frac{S_i\, x_i^2}{N} - \bar{x}^2}$$

$$(N - 1) \sim N$$

Nella generica cella k, m_k palline;

→ **osservato m_k volte $x_k = \left(k - \frac{N}{2}\right)$**

$$\overset{N}{\underset{1}{S}}{}_i\, x_i = \overset{N}{\underset{0}{S}}{}_k\, x_k \cdot m_k$$

$$\overset{N}{\underset{1}{S}}{}_i\, x_i^2 = \overset{N}{\underset{0}{S}}{}_k\, (x_k \cdot m_k)^2$$

Confronto valori misurati → valori aspettati

(Stime)

$\bar{x}$, s(x) $\mu(x)$, s(x)

Per buon accordo alto numero N di lanci

(N = 30, N = 10.000)

2

Confronto distribuzione aspettata e distribuzione osservata variabile m_k

Valore aspettato di m_k in cella k avendo effettuato N lanci:

$$\mu_k = \mu(m_k) = N \cdot P(k)$$

Confrontare, per ogni cella k, μ_k con valore osservato m_k.

Verificare, utilizzando il test del c^2 (vedi dopo), l'accordo fra distribuzione aspettata e distribuzione osservata.

Accordo (visivo) migliora con $N \rightarrow \left(\frac{s}{\mu} \mu \frac{1}{\sqrt{N}} \right)$

Con stesso valore di N fare due serie
con N piccolo e N grande

$N = 30$ $\quad N_1 = 100$

$N_2 = 10000$

3

Confronto distribuzione osservata e distribuzione aspettata per un determinato m_k

Fisso una cella k

M serie di N lanci

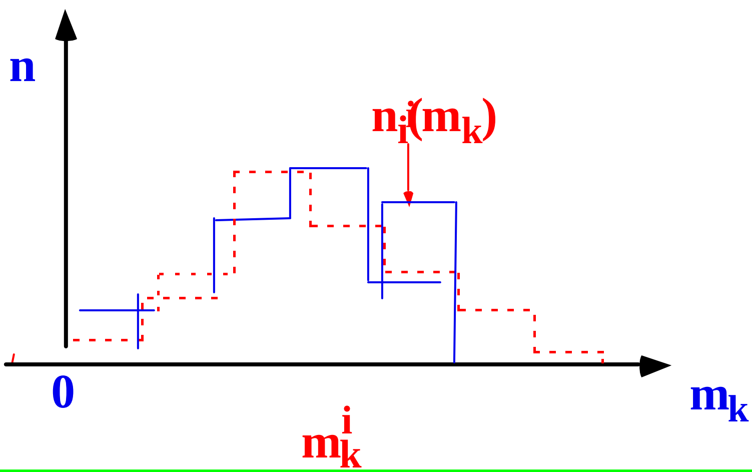
${}^j m_k$ = numero di palline in cella k nella serie j(j = 1, M)

Distribuzione aspettata per n_i,

n_i = numero di volte che si osserva m_k^i in cella k

$$n_i(m_k^i) = M \cdot P(m_k^i)$$

con $$P(m_k^i) = \binom{N}{m_k^i} \cdot \{P(k)\}^{m_k^i} \cdot \{Q(k)\}^{N-m_k^i}$$



DISTRIBUZIONE DI POISSON

Evento casuale E cui è associata variabile casuale t con le seguenti caratteristiche :

1) Densità di probabilità uniforme $f(t) = \lambda$

$$dP = \lambda\, dt$$

2) Eventi statisticamente indipendenti

3) Probabilità trascurabile di avere più di un evento in dt

Distribuzione di probabilità che in un intervallo (0, t) si verifichino k eventi:

$$P(k, t)$$

$$dP(1, dt) = \lambda\, dt \qquad\qquad dP(0, dt) = 1 - \lambda\, dt$$

$$P(k, t + dt) = P(k-1, t) \cdot dP(1, dt) + P(k,t)\; dP(0, dt)$$

$$= P(k-1, t) \cdot \lambda\, dt + P(k, t) \cdot (1 - \lambda\, dt)$$

$$\frac{P(k, t + dt) - P(k, t)}{dt} = \lambda \cdot P(k - 1, t) - \lambda \cdot P(k, t)$$

$$\boxed{\frac{dP(k, t)}{dt} + \lambda \cdot P(k, t) - \lambda \cdot P(k - 1, t) = 0}$$

$k = 0 \longrightarrow P(k-1, t) = 0$

$$\frac{dP(0,t)}{dt} = -\lambda\, P(0,t)$$

$$\boxed{P(0,t) = e^{-\lambda t}}$$

$P(0,0) = 1$

$k = 1$

$$\frac{dP(1,t)}{dt} + \lambda \cdot P(1,t) - \lambda\, e^{-\lambda t} = 0$$

Sol. : $\boxed{P(1,t) = \lambda t \cdot e^{-\lambda t}}$ infatti:

$$\cancel{\lambda e^{-\lambda t}} - \cancel{\lambda^2 t e^{-\lambda t}} + \cancel{\lambda^2 t e^{-\lambda t}} - \cancel{\lambda e^{-\lambda t}} = 0$$

$k = 2$

$$\frac{dP(2,t)}{dt} + \lambda \cdot P(2,t) - \lambda^2 t \cdot e^{-\lambda t} = 0$$

⋮

$\boxed{k}$

$$\boxed{P(k,t) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}\, e^{-\lambda t}}$$

t : costante; $\mu = \lambda t$ costante

$$\boxed{P_\mu(k) = \frac{\mu^k}{k!}\, e^{-\mu}}$$

Distribuzione di Poisson

(dipende da un solo parametro: μ)

k: variabile casuale discreta fra $0 \rightarrow +\infty$

Normalizzazione :

$$\sum_{0}^{\infty}{}_k \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu} = e^{-\mu} \cdot \underbrace{\sum_{0}^{\infty}{}_k \frac{\mu^k}{k!}}_{} = e^{-\mu} \cdot e^{+\mu} = 1$$

sviluppo in serie di e^{μ}

Valore aspettato : 0 = k = 8

$$\mu = E[k] = \overset{8}{\underset{0\,\to\,1}{S}}{}_k\, k \,\frac{m^k}{k!} e^{-m} = m \cdot e^{-m} \cdot \overset{8}{\underset{1}{S}}{}_k \frac{m^{k-1}}{(k-1)!}$$

k' = k - 1

$$= m \cdot e^{-m} \underbrace{\overset{8}{\underset{0}{S}}{}_{k'} \frac{m^{k'}}{k'!}}_{e^{m}} = m \cdot \cancel{e^{-m}} \cdot \cancel{e^{m}}$$

$$\boxed{\mu = m}$$

Notare:

- $P_m(k) = P_m(k-1) \cdot \frac{m}{k}$

  crescente fino a
  k = m

- $P_m(m) = P_m(m-1)$

Varianza :

$$s^2 = E\left[(k-m)^2\right] = E\left[k^2\right] - m^2$$

$$E\left[k^2\right] = \overset{8}{\underset{0\,\to\,1}{S}}{}_k\, k^2 \frac{m^k}{k!} e^{-m} = m \overset{8}{\underset{1}{S}}{}_k\, k \frac{m^{k-1}}{(k-1)!} e^{-m} =$$

k' = k - 1

$$= m \overset{8}{\underset{0}{S}}{}_{k'} (k'+1) \frac{m^{k'}}{k'!} e^{-m} =$$

$$= m \; E\,[k'+1] = m\,(m+1)$$

$$s^2 = m(m+1) - m^2$$

$$\boxed{s^2 = m} \qquad \boxed{s = \sqrt{m}}$$

La distribuzione di Poisson si può anche ottenere da distribuzione binomiale per n molto grande, p molto piccolo (n .p *limitato*).

Infatti (*esempio decadimento radioattivo*): per ogni intervallo di tempo t:

p : *probabilità di decadere*

1) Si fanno n prove (n nuclei che possono decadere)

2) Si ottengono k "successi" (= k decadimenti)

p : *molto piccolo*   n : *molto grande*   np : *limitato*

$$P_{n,p}(k) = \lim_{\substack{n \to \infty \\ np=\text{cost.}}} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} =$$

1-p~1 se p piccolo

$$\mu(k) = \underbrace{n \cdot p} \qquad \sigma^2(k) \simeq n\ p$$

in Poisson

$$\mu \longrightarrow p = \frac{\mu}{n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1)}{k!} \left(\frac{\mu}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \cdot \frac{n \cdot (n-1) \ldots (n-k+1)}{n^k} \; \frac{\mu^k}{k!} \; \frac{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^k} =$$

= 1 *dato che k finito*

$$= \lim_{n \to \infty} 1\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1-\frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{\mu^k}{k!} \cdot \frac{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^n}{\left(1-\frac{\mu}{n}\right)^k} = \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

$\boxed{\text{c.v.d.}}$

Ricordare che:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a \qquad \lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{\mu}{n}\right)^n = e^{-\mu}$$

DIMOSTRAZIONE ALTERNATIVA:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ p=\frac{m}{n}}} \frac{n!}{k!\,(n-k)!} \cdot p^k (1-p)^{n-k} =$$

FORMULA DI STIRLING : $$n! \underset{n>>1}{\simeq} \sqrt{2\pi n} \cdot n^n \cdot e^{-n}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{k!} \underbrace{\frac{\sqrt{2\pi n}}{\sqrt{2\pi (n-k)}}}_{=1} \cdot \frac{n^{\cancel{n}\, n-k} \cdot e^{-\cancel{n}}}{(n-k)^{n-k} \cdot e^{-(\cancel{n}-k)}} \cdot \left(\frac{m}{\cancel{n}}\right)^k \cdot \left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-k} =$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{k!} \frac{1}{\underbrace{\left(1-\frac{k}{n}\right)^{n-k}}_{e^{-k}} \cdot e^k} m^k \underbrace{\left(1-\frac{m}{n}\right)^{n-k}}_{e^{-m}} =$$

Ricordare:

$$\lim_{x \to \infty} \left(1+\frac{a}{x}\right)^x = e^a$$

$$= \frac{1}{k!} m^k \cdot e^{-m}$$

Es. **Decadimento nuclei radioattivi :**

Se m è numero medio di decadimenti per unità di tempo (m = media), la probabilità di osservare k dec. nell'unità di tempo è data dalla :

$$P_m(k) = \frac{m^k}{k!} e^{-m}$$

10 dec./U.T. ; **Probabilità di 0 dec.?**

$$P_{10}(0) = \frac{10^0}{0!} e^{-10} = 4.5 \ 10^{-5}$$

$$P_{10}(10) = \frac{10^{10}}{10!} e^{-10} = 0.13$$

$\mu = m$ $s = \sqrt{m}$

$$P(m - \sqrt{m} = k = m + \sqrt{m}) \quad ?$$

$$P_{10}(7 = k = 13) = F_{10}(13) - F_{10}(7) = 0.865 - 0.220 = 0.645$$

Se m = 4:

$$P_4(2 = k = 6) = F_4(6) - F_4(2) = 0.889 - 0.238 = 0.651$$

Es. *(Esperimento di Rutherford)*

Sorgente a su bersaglio

- **conteggio numero di particelle con angolo di "scattering" q**
- **2608 conteggi da 7.5 s; 10·094 particelle in totale.**

$$\frac{10\cdot094}{2608} = \text{in media } 3.87 \text{ particelle/conteggio} = m$$

Verifica della distribuzione Poisson del numero di particelle osservate in un conteggio:

- **Prove fatte: 2608 = N**
- **Probabilità di osservare k particelle in un conteggio :**

$$P_m(k) = \frac{m^k}{k!}e^{-m}$$

- **Numero aspettato di conteggi in cui osservo k particelle, avendo fatto N prove (da binomiale) :**

$$n_k = N \cdot P_m(k)$$

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	=10
n_k *(osservato)*	57	203	383	525	532	408	273	139	45	27	11
n_k *(aspettato)*	54	210	407	526	508	393	254	140	68	29	17
s_{n_k}	7	14	20	23	22	20	16	12	8	5	4

Es. Conteggi da rivelatore con $\varepsilon < 1$

- **numero medio per unità di tempo di particelle nel rivelatore :** ν
  (*con distribuzione di Poisson*)
- **r: numero di particelle osservate nell'unità di tempo**

quale è: P (r) ?

Per avere r conteggi, = r particelle nel rivelatore con
p = probabilità del rivelatore di osservare particella

$$P(r) = \sum_{n=r}^{\infty} P_{\nu}(n) \cdot B_{n,p}(r) =$$

$$= \sum_{n=r}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \nu^{n} \cdot e^{-\nu} \cdot \binom{n}{r} p^{r} (1-p)^{n-r} =$$

$$= \frac{1}{r!} \cdot (p\nu)^{r} \; e^{-\nu} \underbrace{\sum_{n=r}^{\infty} \frac{1}{(n-r)!} \cdot \{\nu \cdot (1-p)\}^{n-r}}_{\text{sviluppo in serie di } e^{k} \text{ con } k = \nu(1-p)} =$$

$$= \frac{1}{r!} \cdot (p\nu)^{r} \cdot e^{-\nu} \cdot e^{(1-p)\nu} =$$

$$= \frac{1}{r!} \cdot (p\nu)^{r} \cdot e^{-p\nu} = P_{p\nu}(r)$$

Poisson con m = $p\nu$

DISTRIBUZIONE UNIFORME

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \qquad\qquad F(x) = \frac{b-x}{b-a}$$

$$\mu = E[x] = \int_a^b x \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\left.\frac{x^2}{2}\right]_a^b =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{b^2-a^2}{b-a} = \frac{1}{2}\,(b+a)$$

$$\sigma^2 = E\left[(x-\mu)^2\right] = E\left[x^2\right] - \mu^2$$

$$E\left[x^2\right] = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\,\frac{b^3-a^3}{3}$$

$$\sigma^2 = \frac{b^3-a^3}{3(b-a)} - \frac{(b+a)^2}{4} = \frac{1}{12} = \frac{(b-a)^3}{b-a} = \frac{1}{12}\,(b-a)^2$$

$$\boxed{\mu = \frac{1}{2}\,(b+a)}$$

$$\boxed{\sigma^2 = \frac{1}{12}(b-a)^2}$$

$$\boxed{\sigma = \frac{1}{\sqrt{12}}(b-a)}$$

$$(b-a) = 2\cdot\Delta x \quad \boxed{\sigma = \frac{1}{\sqrt{3}}\,\Delta x} \longrightarrow P(\mu-\sigma \le x \le \mu+\sigma) = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}\Delta x}{2\,\Delta x} = 0.58$$

DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE

$$f_b(x) = \frac{1}{b}\, e^{-x/b} \qquad 0 = x = 8$$

$$b > 0$$

$$\int_0^8 f(x)\,dx = \frac{1}{b}\int_0^8 e^{-x/b}\,dx = -e^{-x/b}\Big|_0^8 = 1$$

$$\mu(x) = \frac{1}{b}\int_0^8 x\cdot e^{-x/b}\,dx = \underbrace{-x\cdot e^{-x/b}\Big|_0^8}_{=0} + \int_0^8 e^{-x/b}\,dx =$$

integrando per parti :

$$u = x \qquad v = e^{-x/b}$$

$$dv = -\frac{1}{b}\, e^{-x/b}\,dx$$

$$= b$$

$$s^2 = \frac{1}{b}\int_0^8 x^2\, e^{-x/b}\,dx - b^2 = \frac{1}{b}\cdot 2b^3 - b^2 = b^2$$

$$\int x^2 e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right)$$

$$f_m(x) = \frac{1}{m}\, e^{-x/m} \qquad \begin{cases} \mu(x) = \mu \\ s^2(x) = \mu^2 \end{cases}$$

CUMULATIVA DELLA DISTRIBUZIONE ESPONENZIALE

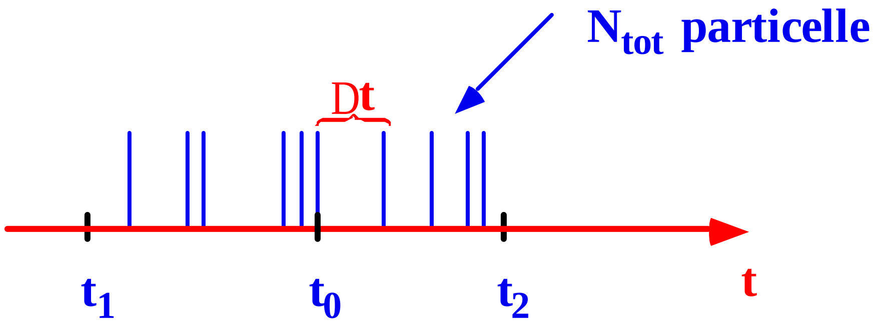
$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{m} e^{-x'/m}\, dx' = 1 - e^{-x/m}$$

$$P(\mu - s = x = \mu + s) = F(2\mu) = 1 - e^{-2} = 0.86$$

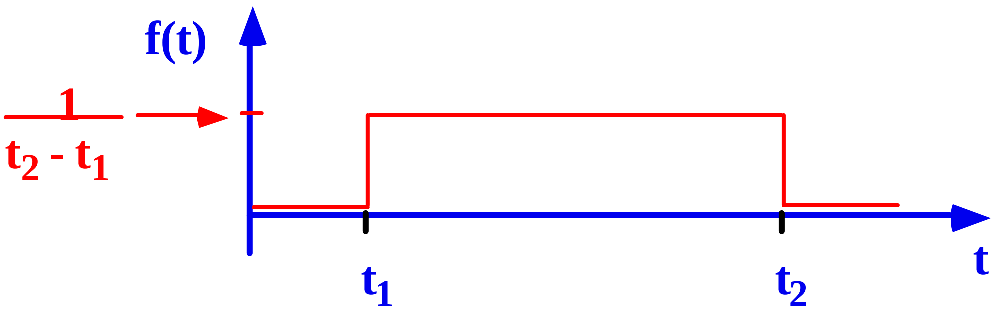
$0 \qquad 2\mu$

Esempio

Distribuzione del Δt fra due particelle consecutive in un fascio con distribuzione temporale uniforme.



f(t) = cost



Fissato arbitrariamente t_0 :

0	**particella in**	Δt
1	**" "**	**dt**

$$dP(\Delta t) = \underbrace{e^{-\lambda \Delta t}}_{P(0,\,t)} \cdot \underbrace{\lambda\, dt}_{dP(1,\,dt)}$$

P(0, t) *(vedi pag.* AS-54)

$$f(\Delta t) = \frac{dP(\Delta t)}{dt} = \lambda \cdot e^{-\lambda \Delta t}$$

$$\lambda = \frac{N_{tot}}{t_2 - t_1} \qquad \mu(\Delta t) = \frac{1}{\lambda} = \frac{t_2 - t_1}{N_{tot}}$$

DISTRIBUZIONE DI GAUSS
(*NORMALE*)

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,p} \cdot a} \cdot e^{-\frac{(x - x_o)^2}{2a^2}} \quad ; \quad \int_{-8}^{+8} f(x)dx = 1$$

1 Simmetria intorno a: $x = x_o$

2 $x_o - a,\ x_o + a$ sono i punti di flesso $\left(\frac{d^2f}{dx^2}\right) = 0$

a misura la larghezza della distribuzione

3 massimo: $f(x = x_o) = \frac{1}{\sqrt{2\,p} \cdot a}$ $\left(\frac{df}{dx}\right) = 0$

Valore aspettato

$$\mu = E[x] = \frac{1}{\sqrt{2\,p} \cdot a} \int_{-8}^{+8} x e^{-\frac{(x - x_o)^2}{2a^2}} dx =$$

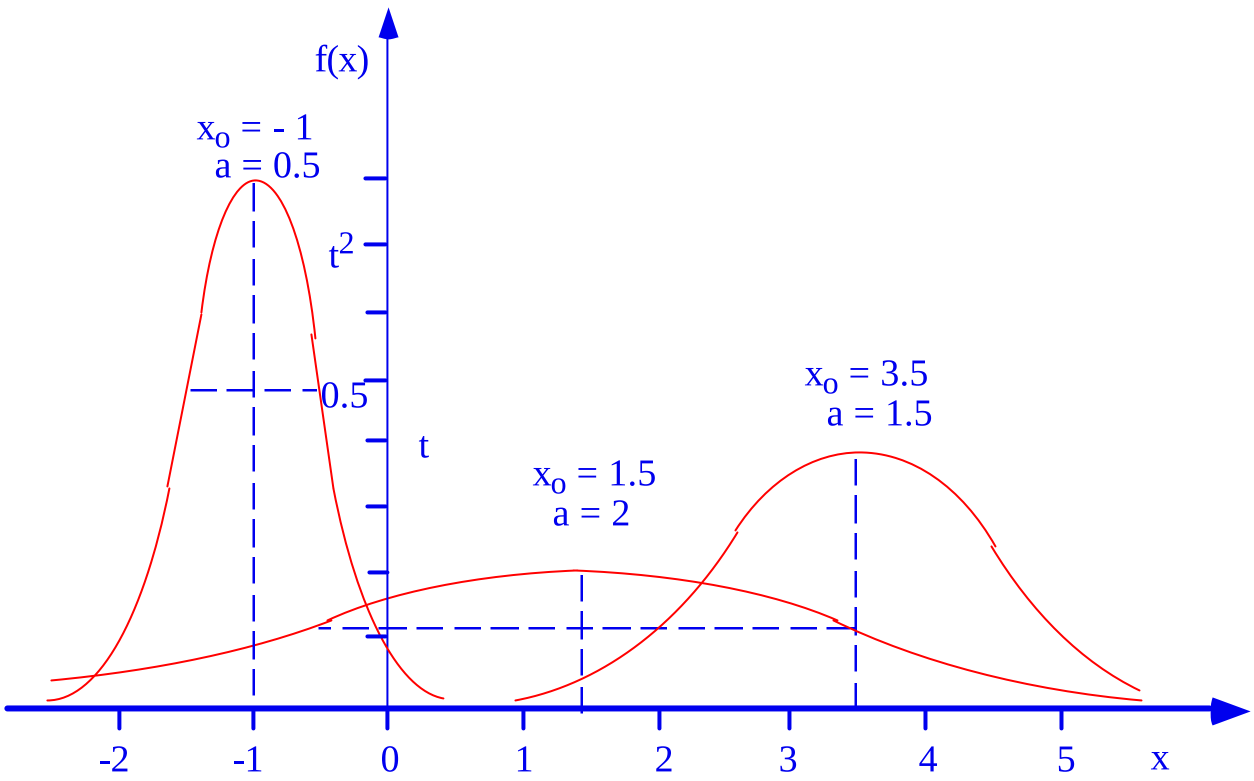
cambiando variabile:

$$t = \frac{x - x_o}{a} \qquad dt = \frac{1}{a} dx$$

$$\int_{-8}^{+8} \text{Gauss con } \begin{cases} x_o = 0 \\ a = 1 \end{cases} = 1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\,p}} \int_{-8}^{+8} (a \cdot t + x_o)\, e^{-\frac{t^2}{2}} dt =$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\,p}}\, a \int_{-8}^{+8} t \cdot e^{-\frac{t^2}{2}} dt}_{= 0} + \frac{x_o}{\sqrt{2\,p}} \int_{-8}^{+8} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = x_o$$



AS-66

Varianza

$$= x_o$$

$$s^2 = E\left[(x-\mu)^2\right] = \frac{1}{\sqrt{2\,p}\;a}\int_{-8}^{+8}(x-\mu)^2\, e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2a^2}}\,dx =$$

$$t = \frac{x-\mu}{a} \qquad dt = \frac{1}{a}\,dx$$

$$= \frac{a^2}{\sqrt{2\,p}}\int_{-8}^{+8} t^2 \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt = \left(\textit{integrando per parti}\right)$$

$$u = t \qquad du = dt$$

$$v = e^{-\frac{t^2}{2}} \qquad dv = t\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt$$

$$= \int_{-8}^{+8} u\cdot dv = \left[u\cdot v\right]_{-8}^{+8} - \int_{-8}^{+8} v\,du =$$

$$= \underbrace{-\frac{a^2 t}{\sqrt{2\,p}}\cdot e^{-\frac{t^2}{2}}\Big|_{-8}^{+8}}_{=0} + \frac{a^2}{\sqrt{2\,p}}\int_{-8}^{+8} e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt =$$

$$= 1$$

Gauss $\quad x = 0$

$a = 1$

$$= a^2$$

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\,p}\;s}\cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2s^2}}}$$

Distribuzione di Gauss

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\, e^{-\frac{(x'-\mu)^2}{2\sigma^2}}\, dx'$$ **Cumulativa**

Variabile ridotta

$$t = \frac{x-\mu}{\sigma} \qquad dt = \frac{dx}{\sigma}$$

Se x ha *funzione di distribuzione* $f(x)$,

$$t = t(x) \longrightarrow g(t) = \left|\frac{dx}{dt}\right| \cdot f(x = t)$$

Funzione universale

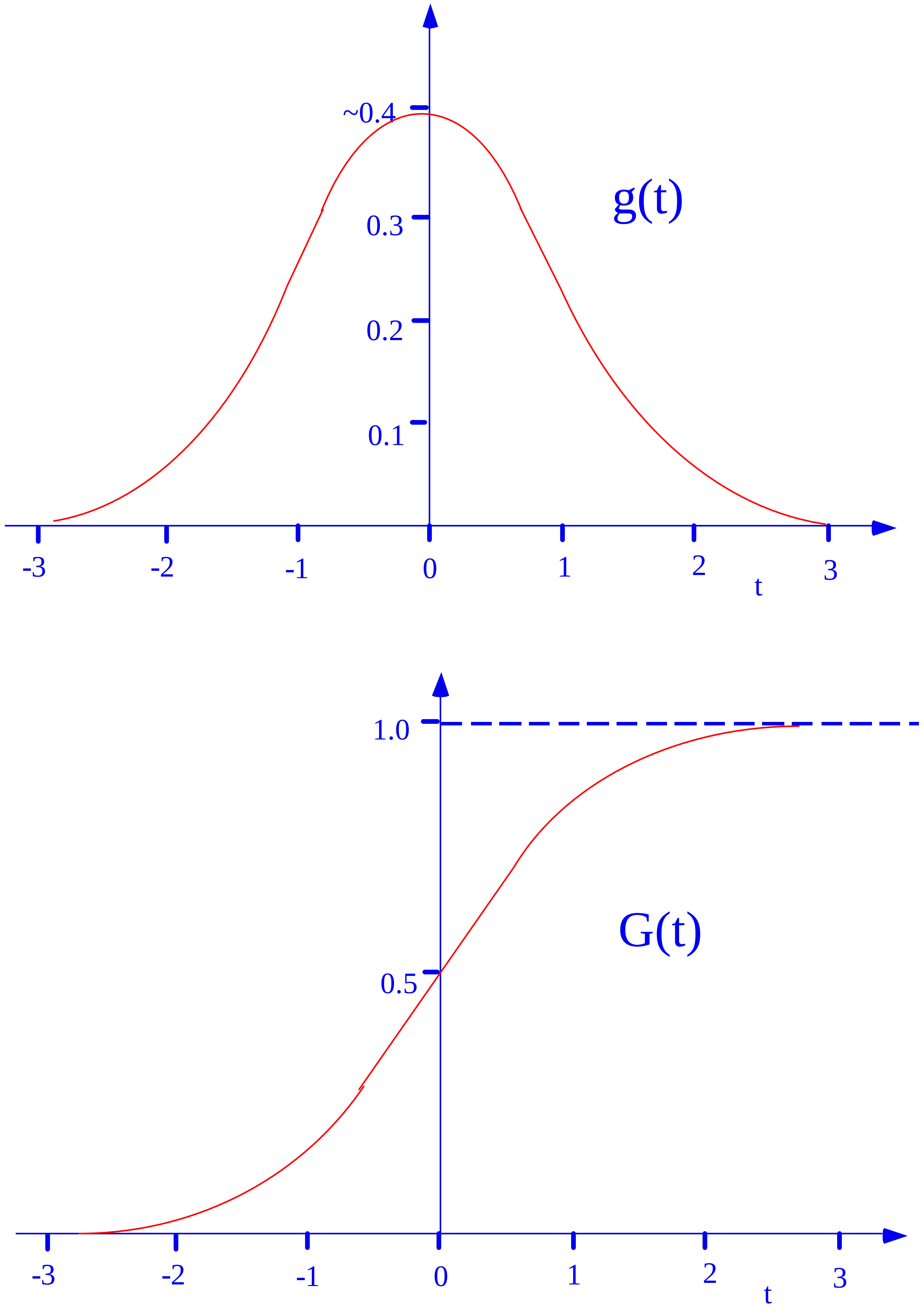
$$g(t) = \cancel{\sigma} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\cancel{\sigma}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}$$

Gaussiana $\begin{cases} \mu = 0 \\ \sigma = 1 \end{cases}$

Cumulativa

$$G(t) = \int_{-\infty}^{t} g(t')\, dt'$$

$g(t)$ e $G(t)$ tabulate.



AS-69

Il contenuto probabilistico di un intervallo Δx per la funzione di Gauss si ottiene usando G(t):

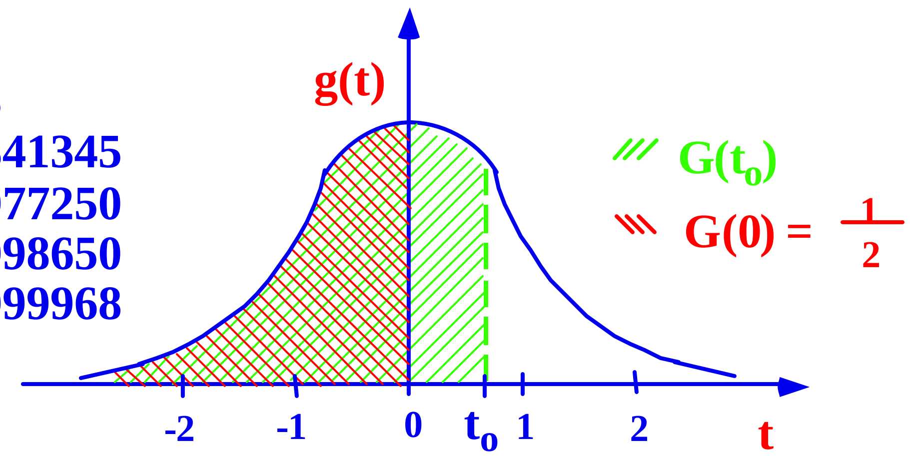
$$P_{\mu,\sigma}(\mu-\Delta,\ \mu+\Delta) = P(-t_o, t_o) = \int_{-t_o}^{t_o} g(t)\,dt = 2\int_{0}^{t_o} g(t)\,dt =$$

$$t_o = \frac{x_o - \mu}{\sigma}$$

$$= \left(\begin{array}{c}\textit{Se si ha G(t)}\\ \textit{tabulata}\\ \textit{fra 0 e t}\end{array}\right) \quad 2\left\{\int_{-\infty}^{t_o} g(t)\,dt - \int_{-\infty}^{0} g(t)\,dt\right\} =$$

$$= 2\{G(t_o) - \underbrace{G(0)}_{\frac{1}{2}}\} = 2G(t_o) - 1$$

G(0) = 0.5
G(1) = 0.841345
G(2) = 0.977250
G(3) = 0.998650
G(4) = 0.999968



$P(\mu \pm 1\sigma) = 2\cdot G(1) - 1 = 0.6827$ $\quad$ $P(\mu \pm 3\sigma) = 2\cdot G(3) - 1 = 0.9973$

$P(\mu \pm 2\sigma) = 2\cdot G(2) - 1 = 0.9545$ $\quad$ $P(\mu \pm 4\sigma) = 2\cdot G(4) - 1 = 0.99994$

$$P(a = x = b) = G\left(\frac{b - \mu}{s}\right) - G\left(\frac{a - \mu}{s}\right)$$

Se, fissato $P = P_o$, voglio ricavare (a, b) ?

$$P_o = G\left(\frac{b - \mu}{s}\right) - G\left(\frac{a - \mu}{s}\right)$$ ***infinite soluzioni***

Se richiedo intervallo simmetrico: (intorno a μ)

$$P_o = 2G\left(\frac{b - \mu}{s}\right) - 1$$

$$G\left(\frac{b - \mu}{s}\right) = \frac{P_o + 1}{2}$$

Es: $P_o = 0.9 \longrightarrow G\left(\frac{b - \mu}{s}\right) = 0.95$

$$\frac{b - \mu}{s} = 1.645 \qquad b - \mu = 1.645 \cdot s$$

$$P(x > \mu + n_S) = 1 - G(n)$$

$$P(\mu - n_S = x = \mu + n_S) = 2(1 - G(n))$$

Funzione di distribuzione di più variabili casuali

Dato un *fenomeno causale* che dipende da più variabili casuali

$$\underline{x} \equiv (x_1, x_2, \dots x_n)$$

Si può definire una *densità di probabilità congiunta*

$$f(\underline{x}) = f(x_1, \dots x_n)$$

$$\int_{c^n} f(\underline{x})\, d\underline{x} = 1$$

$$E\{G(\underline{x})\} = \int_{c^n} G(\underline{x})\, f(\underline{x})\, d\underline{x}$$

$$E\{x_i\} = \int_{c^n} x_i\, f(\underline{x})\, d\underline{x} = \mu_i$$

$$E\{(x_i - \mu_i)^2\} = \int_{c^n} (x_i - \mu_i)^2\, f(\underline{x})\, d\underline{x}$$

$$E\{(x_i - \mu_i) \cdot (x_j - \mu_j)\} = \int_{c^n} (x_i - \mu_i)\,(x_j - \mu_j)\, f(\underline{x})\, d\underline{x}$$

$$= \int_{c^n} (x_i x_j + \mu_i \mu_j - x_i \mu_j - x_j \mu_i)\, f(\underline{x})\, d\underline{x} =$$

$$= E\left\{x_i x_j\right\} + \mu_i \mu_j - 2\mu_i \mu_j$$

$$= E\left\{x_i x_j\right\} - E\left\{x_i\right\} \cdot E\left\{x_j\right\} = V_{ij}$$

V_{ij} : *matrice di covarianza*

I è una matrice simmetrica $V_{ij} = V_{ji}$

II elementi diagonali $V_{ii} = s^2 (x_i)$

III $i \; ? \; j$ $\; V_{ij}$: covarianza (x_i, x_j) $\left(\begin{matrix} > 0 \\ < 0 \end{matrix}\right)$

Coefficiente di correlazione $r\,(x_i, x_j)$:

$$r\,(x_i, x_j) = \frac{V_{ij}}{\sqrt{V_{ii} \cdot V_{jj}}} = \frac{cov(x_i, x_j)}{s_i \cdot s_j}$$

$$-1 = r(x_i, x_j) = 1$$

$r = 0$ *scorrelate*

$r = \pm 1$ *completamente correlate*

Infatti : (es)

$$s^2(x_1 + a x_2) = s^2(x_1) + a^2 s^2(x_2) + 2a \cdot cov(x_1 x_2)$$

[*Vedi dopo combinazioni lineari di variabili casuali*]

Dato che $s^2(x_1 + a x_2)$ è per definizione = 0 :

$$s^2(x_1) + a^2 s^2(x_2) + 2a\ \mathrm{cov}(x_1 x_2) = 0$$

Dividendo per $s^2(x_1)$:

$$1 + a^2 \underbrace{\frac{s^2(x_2)}{s^2(x_1)}}_{a^2} + 2a \underbrace{\frac{s(x_2)}{s(x_1)}}_{a} \cdot \underbrace{\frac{\mathrm{cov}(x_1 x_2)}{s(x_1) \cdot s(x_2)}}_{r(x_1 x_2)} = 0$$

$$1 + a^2 + 2\, a\, r = 0 \qquad \textit{per ogni } a$$

$$\longrightarrow \quad r^2 = 1 \qquad -1 = r = 1$$

Se le x_i sono mutuamente indipendenti:

$$f(x_1 \dots x_n) = f(x_1)\ f(x_2) \dots f(x_n)$$

$$E\{x_i\, x_j\} = \int x_i\, x_j\, f(x_i) \dots f(x_n)\, dx_1 \dots dx_n =$$

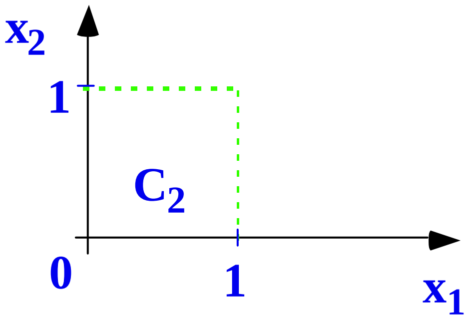
$$= \int x_i\, x_j\, f(x_i) \cdot f(x_j)\, dx_i\, dx_j =$$

$$= \int x_i\, f(x_i)\, dx_i \cdot \int x_j\, f(x_j)\, dx_j = E\{x_i\} \cdot E\{x_j\}$$

(vedi pag. prec.) $\longrightarrow$ $\mathrm{cov}(x_i x_j) = 0$ **per** $j\ ?\ i$

Es. x_1 e x_2 indipendenti

$0 < x_1 < 1 \qquad 0 < x_2 < 1$



F. di distribuzione uniforme entro C_2

$$f(x_1, x_2) = 1$$

Infatti:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2 = 1$$

$$\mu_{x_1} = \int_1 \int_2 x_1 f(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2 = \left.\frac{x_1^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

$$\mu_{x_2} = \int_1 \int_2 x_2 \quad \text{"} \quad = \left.\frac{x_2^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

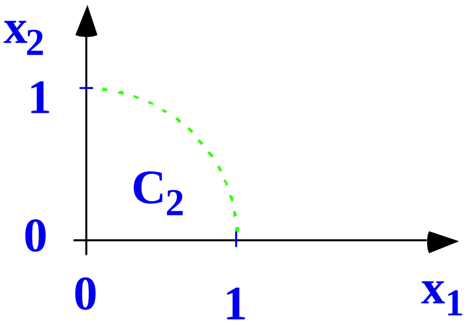
$$s^2_{x_1} = V_{11} = \int_1 \int_2 (x_1-\mu_{x_1})^2 \cdot f(x_1,x_2) \cdot dx_1 \cdot dx_2 = \int_0^1 (x_1-\mu_{x_1})^2\, dx_1 =$$

$$= E\left[\, x_1^2 \,\right] - \mu^2_{x_1} = \left.\frac{x_1^3}{3}\right]_0^1 - \mu^2_{x_1} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

$$V_{12} = \int \int (x_1 - \mu_{x_1}) \quad (x_2 - \mu_{x_2})\, f(x_1 x_2)\, dx_1\, dx_2 =$$

$$= \int (x_1 - \mu_1)\, dx_1 \int (x_2 - \mu_2)\, dx_2 = 0$$

x_1 e x_2 correlati



$0 < x_1 < 1$

$0 < x_2 < 1$

$x_1^2 + x_2^2 = 1$

F. di distribuzione uniforme entro C_2

$$f(x_1,x_2) = \text{cost.}$$

$$\int_{C_2} f(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2 = 1$$

$$f(x_1,x_2) = \frac{4}{\pi} \qquad \left(\text{area} = \frac{\pi R^2}{4}\right)$$

$$\mu_{x_1} = \frac{4}{\pi}\int_0^1 x_1\, dx_1 \cdot \int_0^{\sqrt{1-x_1^2}} dx_2 = \frac{4}{\pi}\int_0^1 x_1 \cdot \sqrt{1-x_1^2}\cdot dx_1 = 0.42$$

$$\sigma_{x_1}^2 = V_{11} = \frac{4}{\pi}\int_0^1 (x_1-\mu_{x_1})^2 \cdot dx_1 \cdot \int_0^{\sqrt{1-x_1^2}} dx_2 = \frac{4}{\pi}\int_0^1 (x_1-\mu_{x_1})^2 \cdot \sqrt{1-x_1^2}\, dx_1 = 0.07$$

$$V_{12} = \frac{4}{\pi}\int_0^1 (x_1-\mu_{x_1})\; dx_1 \int_0^{\sqrt{1-x_1^2}} (x_2-\mu_{x_2})\; dx_2 = -0.022$$

$$r_{12} = \frac{-0.022}{\sqrt{0.07}\cdot\sqrt{0.07}} = -0.31$$

DISTRIBUZIONE GAUSSIANA MULTIVARIATA

La funzione di distribuzione di n variabili casuali gaussiane correlate:

$$f(\underline{x}) = k \cdot e^{-1/2(\underline{x} - \underline{a})^{T} \cdot B \ (\underline{x} - \underline{a})}$$

$$k = \frac{1}{(2p)^{n/2} \cdot (\mathrm{DET}\ B^{-1})^{1/2}}$$

Con:

$$\underline{a} = (\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_n)$$

$$B^{-1} = C$$

Matrice delle covarianze di $x_1, \ldots x_n$

$$\int f(\underline{x}) \cdot d\underline{x} = 1$$

$$(x_1 - \mu_1, \ldots x_n - \mu_n) \ . \begin{pmatrix} B_{11} \ldots\ldots B_{1n} \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \\ \cdot \qquad\qquad \cdot \\ B_{n1} \ldots\ldots B_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - \mu_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n - \mu_n \end{pmatrix}$$

DISTRIBUZIONE GAUSSIANA BIDIMENSIONALE

Distribuzione binormale

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \mathrm{cov}\,(x_1\, x_2) \\ \mathrm{cov}\,(x_1\, x_2) & \sigma_2^2 \end{pmatrix} = B^{-1}$$

$$B = \frac{1}{\sigma_1^2 \;\; \sigma_2^2 \; - \mathrm{cov}\,(x_1\, x_2)^2} \cdot \begin{pmatrix} \sigma_2^2 & - \mathrm{cov}\,(x_1\, x_2) \\ - \mathrm{cov}\,(x_1\, x_2) & \sigma_1^2 \end{pmatrix}$$

se $(x_1\; x_2)$ sono scorrelate $(\mathrm{cov}\,(x_1\;\; x_2) = 0)$:

$$B = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

$$(x_1 - \mu_1, x_2 - \mu_2) \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 - \mu_1 \\ x_2 - \mu_2 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1, \mu_1,\;\; x_2 - \mu_2) \begin{pmatrix} \dfrac{x_1 - \mu_1}{\sigma_1^2} \\ \dfrac{x_2 - \mu_2}{\sigma_2^2} \end{pmatrix} = \frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2}$$

$$f\,(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \cdot \sigma_1 \sigma_2} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_1 - \mu_1)^2}{\sigma_1^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{(x_2 - \mu_2)^2}{\sigma_2^2}}$$

Prodotto di 2 gaussiane

Nel caso in cui x_1 e x_2 sono correlate:

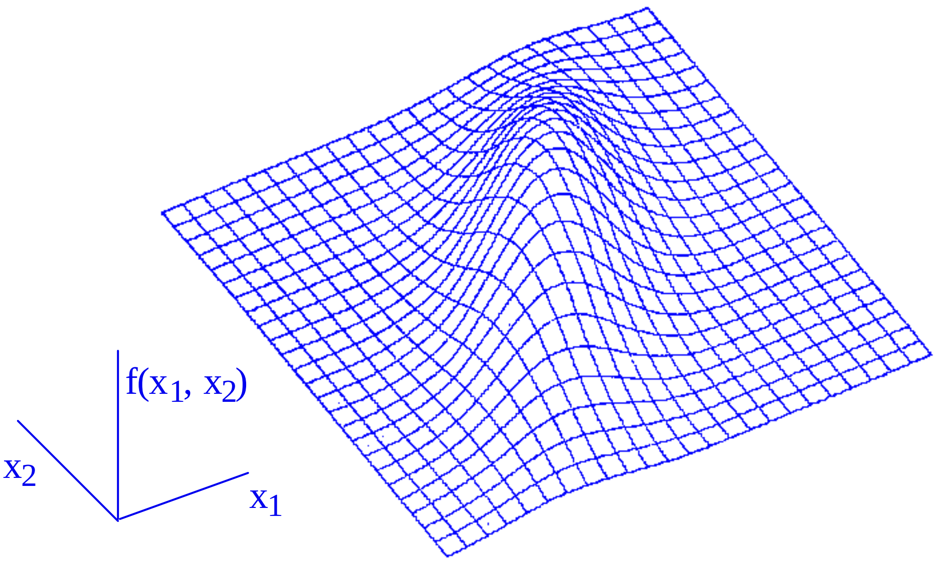
$$r = \frac{\mathrm{cov}\,(x_1\, x_2)}{s_1 s_2} \xrightarrow{\textit{moltiplico e divido per } s_1 s_2} C = s_1 s_2 \begin{pmatrix} s_1/s_2 & r \\ r & s_2/s_1 \end{pmatrix}$$

B può essere scritta:

$$B = \frac{1}{1 - r^2} \begin{pmatrix} 1/s_1^2 & -r/s_1 s_2 \\ -r/s_1 s_2 & 1/s_2^2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{f(x_1\, x_2) = \frac{1}{2p\; s_1 s_2 \sqrt{1 - r^2}} \cdot e^{-1/2\, G}}$$

$$G = \frac{1}{1 - r^2} \left\{ \frac{(x_1 - \mu_1)^2}{s_1^2} + \frac{(x_2 - \mu_2)^2}{s_2^2} - 2\, r \left(\frac{x_1 - \mu_1}{s_1} \right) \left(\frac{x_2 - \mu_2}{s_2} \right) \right\}$$



Probability density of a bivariate Gaussian distribution

FUNZIONI LINEARI DI VARIABILI CASUALI

$$y(x_1, \dots x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, x_i$$

Valore aspettato:

$$E[y] = E[\textstyle\sum_i a_i\, x_i\,] = \sum_i a_i\, E[x_i] = \sum_i a_i\, \mu_i$$

Dato che E è un operatore lineare

Varianza:

$$E[(y - \mu_y)^2] =$$

$$= E\left[\left(\textstyle\sum_i a_i\, x_i - \sum_i a_i\, \mu_i\right)^2\right] =$$

$$= E\left[\left(\textstyle\sum_i a_i\, (x_i - \mu_i)\right)^2\right] =$$

$$= E\left[\textstyle\sum_i a_i^2 (x_i - \mu_i)^2 + \sum_{i \neq j} a_i a_j\, (x_i - \mu_i)\,(x_j - \mu_j)\right] =$$

$$= \sum_i a_i^2\, \sigma_i^2 + \sum_{i \neq j} a_i a_j \cdot \mathrm{cov}\,(x_i\,,\, x_j)$$

Se le variabili x_i sono indipendenti:

$$y = \overset{N}{\underset{i=1}{?}} a_i \cdot x_i \quad \longrightarrow \quad \begin{array}{l} \mu_y = \overset{N}{\underset{i=1}{?}} a_i \cdot \mu_{x_i} \\ s_y^2 = \overset{N}{\underset{i=1}{?}} a_i^2 \cdot s_{x_i}^2 \end{array}$$

Ma: forma della f_y, date le f_{x_i}?

Difficile in generale ma:

- Alcuni casi particolari

a) Distribuzioni gaussiane

b) "Tante" $f(x_i)$ qualsiasi

(sotto particolari condizioni)

FUNZIONI LINEARI DI VARIABILI CASUALI CON DISTRIBUZIONE "NORMALE" (GAUSSIANA)

Date n variabili casuali x_i con funzione di distribuzione gaussiana ("*normale*") $f(\mu_i, \sigma_i)$ la funzione :

$$y = \sum_{1}^{n}{}_{i}\, a_i \cdot x_i$$

avrà ancora una funzione di distribuzione "*normale*"

$$f(\mu_y, \sigma_y)$$

(*si può dimostrare*)

con :

$$\mu_y = \sum_i a_i \cdot \mu_i$$

$$\sigma_y^2 = \sum_i a_i^2 \cdot \sigma_i^2$$

Ne segue che la media $\bar{x} = \sum_{1}^{N}{}_{i} \frac{x_i}{N}$ di un campione di dimensione N di una variabile "normale" (σ_x, μ_x) è ancora una variabile "normale" con: $\mu_{\bar{x}} = \mu_x$ e $\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{N}}$

[Ogni x_i può essere considerata una variabile casuale con f. di distribuzione normale]

TEOREMA DEL LIMITE CENTRALE

Date n variabili casuali indipendenti x_i con funzioni di distribuzione qualsiasi (μ_i, s_i finita), la funzione:

$$y = ?_1^n {}_i\ a_i \cdot x_i$$

nel limite n ® 8 avrà distribuzione "normale" con :

$$\mu_y = ?_i\ a_i\, \mu_i$$

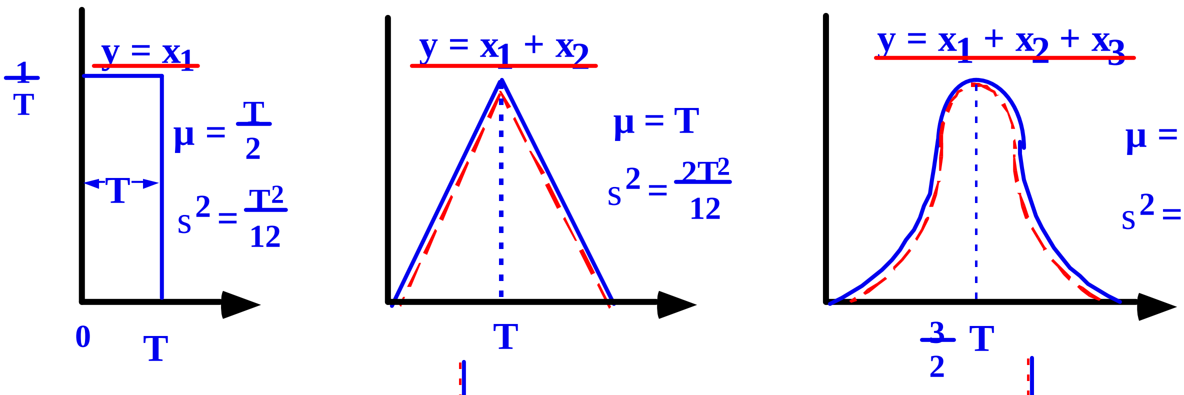
$$s_y^2 = ?\ a_i^2\ s_i^2$$

Condizioni di validità molto ampie, ma :

è importante che le s_i^2 siano tutte finite e paragonabili, cioè nessuna domina le altre.

N.B. ***Se le f_i sono concentrate attorno al valore aspettato (s_i piccole), il teorema è valido già per valori piccoli di N.***

Es.:



$$\frac{1}{T}\sqrt{\frac{3}{\pi}}\, e^{-3(x-T)^2/T^2}$$

Gaussiana con stessa μ, σ

$$\frac{1}{T}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-2(x-1.5\,T)^2/T^2}$$

Gaussiana con stessa μ, σ

ES. **Generatore di numeri a caso con distribuzione Gauss G (0, σ): ottenuto con la somma di n numeri a caso con distribuzione uniforme in (0, 1).**

$$\boxed{y = \sum_{i=1}^{n} x_i - \frac{n}{2}} \qquad \begin{cases} \mu = n \cdot \frac{1}{2} - \frac{n}{2} = 0 \\ \sigma^2 = n \cdot \frac{1}{12} \end{cases}$$

Buon accordo con gaussiana per n > 5÷10. Per n = 12 si ottiene G (0, 1)

N.B. ***Il teorema del L.C. ha validità più generale.***

Il modello di Laplace degli errori di misura

Sia x il valore vero di una grandezza fisica, x il risultato di una generica misura.*

$x \neq x^*$ a causa degli errori di misura che assumeremo puramente casuali

Modello di Laplace : errore di misura = insieme estremamente grande (® 8) di disturbi contemporanei molto piccoli (® infinitesimi)

- Ogni disturbo = ± e (50% + e, 50% - e)
- Ogni disturbo è statisticamente indipendente

Se N sono i disturbi e k i disturbi +e :

$$x = x^* + k\mathrm{e} - (N - k)\,\mathrm{e} = x^* + (2k - N)\,\mathrm{e}$$

$$P_{N,p}(k) = \frac{N!}{k!\,(N-k)!}\, p^k \cdot q^{N-k}$$

con :

$$p = \text{probabilità di disturbo} + \mathrm{e} = \frac{1}{2}$$

$\mu(k) = N \cdot p$ $\qquad\qquad$ $s^2(k) = Npq$

l : *scarto di k dal suo valore aspettato*

$\boxed{k - Np = l}$

$$\begin{cases} k = Np + l \\ N - k = N \cdot q - l \end{cases}$$

$0 = k = N$

$-Np = l = N \cdot q$

$$P_{N,p}(l) = \frac{N!}{(Np + l)!\,(Nq - l)!} \cdot p^{Np + l} \cdot q^{Nq - l}$$

$$\mu(l) = E[l] = E[k] - N \cdot p = 0$$

$$s^2(l) = E[(l - \underbrace{E(l)}_{= 0})^2] =$$

$$= E[(k - Np)^2] = Npq$$

Al crescere di N si può utilizzare per N! la formula di Stirling :

$$N! \cong \sqrt{2p} \cdot N^{N+1/2} \; e^{-N}$$

1 $\quad (Np + l)! = \sqrt{2p}\,(Np + l)^{Np+l+1/2} \cdot e^{-Np-l} =$

$$= \sqrt{2p}\,\left(1 + \frac{l}{Np}\right)^{Np+l+1/2} \cdot e^{-Np-l} \cdot (Np)^{Np+l+1/2}$$

II $(Nq-\lambda) = \sqrt{2\pi}\left(1-\frac{\lambda}{Nq}\right)^{Nq-\lambda+\frac{1}{2}} e^{-Nq+\lambda}\,(Nq)^{Nq-\lambda+\frac{1}{2}}$

I e II valide per λ lontano dai suoi limiti $\begin{cases} -Np \\ Nq \end{cases}$

$$P_{N,p}(\lambda) = \frac{\cancel{\sqrt{2\pi}}\;\cancel{N^{Nq+\frac{1}{2}}}\;\cancel{e^{-N}}}{\cancel{\sqrt{2\pi}}\left(1+\frac{\lambda}{Nq}\right)^{Np+\lambda+1/2}\sqrt{2\pi}\left(1-\frac{\lambda}{Nq}\right)^{Np-\lambda+1/2}\cancel{e^{-Nq}}\,e^{-Nq}\cdot N^{N+1}_{1/2}}\cdot$$

$= N$

$$\cdot\ \frac{\cancel{p^{Np+\lambda}}\cdot\cancel{q^{Nq-\lambda}}}{p^{\cancel{Np+\lambda}+\frac{1}{2}}\cdot q^{\cancel{Nq-\lambda}+\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{Npq}}\cdot\left(1+\frac{\lambda}{Nq}\right)^{-Np-\lambda-\frac{1}{2}}\cdot\left(1-\frac{\lambda}{Nq}\right)^{-Np+\lambda-\frac{1}{2}}$$

NOTE:

I $P_{N,p}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sqrt{Npq}}$

Valore massimo

$$\boxed{\sum_k P(k) = 1}$$

P(0) → 0 come $\sqrt{N}$; quindi il numero di valori di λ per cui P(λ) non è trascurabile rispetto a P(0) deve divergere come $\sqrt{N}$, anche se il numero totale di valori di λ diverge come N+1.

II La formula approssimata per P(λ) non è valida per λ ~ -Np e λ ~ Nq; ma in questi intorni P(λ) è trascurabile rispetto a P(0).

Consideriamo ora:

$$\lg = \left\{ \left(1 + \frac{\lambda}{Np}\right)^{Np - \lambda - \frac{1}{2}} \left(1 - \frac{\lambda}{Nq}\right)^{Np + \lambda - \frac{1}{2}} \right\} =$$

$$= \left(Np + \lambda + \frac{1}{2}\right) \lg\left(1 + \frac{\lambda}{Np}\right) - \left(Nq - \lambda + \frac{1}{2}\right) \lg\left(1 - \frac{\lambda}{Nq}\right) =$$

$\frac{\lambda}{Np}$ e $\frac{\lambda}{Nq}$ sono << 1 lontano dagli estremi.

$$\lg(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \ldots.$$

$$= \left(Np + \lambda + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\lambda}{Np} - \frac{\lambda^2}{2N^2p^2} + \ldots\right)\left(Np - \lambda + \frac{1}{2}\right)\left(-\frac{\lambda}{Nq} - \frac{\lambda^2}{2N^2q^2} + \ldots\right) =$$

$$= -\frac{\lambda^2}{2Npq} - \frac{\lambda}{2N} - \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{q}\right) + \frac{\lambda^3}{6N^2}\left(\frac{1}{p^2} - \frac{1}{q^2}\right) + \ldots$$

Per $\lambda \sim \sqrt{N}$ (unici valori non trascurabili) solo I termine finito (secondo $\to 0\ \frac{1}{\sqrt{N}}$, terzo $\to 0\ \frac{1}{\sqrt{N}}$, altri come $\frac{1}{N}$).

$$\lg\ k \simeq -\frac{l^2}{2Npq} \qquad\qquad k = e^{-\frac{l^2}{2Npq}}$$

$$P(l) \simeq \frac{1}{\sqrt{2p}\ \sqrt{Npq}}\ e^{-\frac{1}{2}\frac{l^2}{Npq}}$$

$$\boxed{P(l) \simeq \frac{1}{\sqrt{2p}\ s_l} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{l^2}{s_l^2}}}$$

Ma nel modello di Laplace:

$$p = \frac{1}{2}$$

$$x = l^* + \underbrace{(2k - N)}_{\to\ Np + l} . e =$$

$$\boxed{\begin{array}{l} 2Np + 2l - N = \\ 2 \cdot N \cdot 1/2 + 2l - N \\ = 2l \end{array}}$$

$$= x^* + 2le \longrightarrow (x - x^*) = 2le$$

$$E[x] = E[x^* + 2le] = x^* + 2e\, \underbrace{E[l]}_{\to\ = 0}$$

$$E[(x - x^*)^2] = E[(2le)^2] = 4e^2\, E[l^2] = 4e^2 s^2_l$$

Per $\varepsilon \to 0$ (x da discreta a continua) :

$$P(x) = \left| \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right| \cdot P(\lambda)$$

$$\lambda = \lambda(x)$$

$$\left| \frac{\partial \lambda}{\partial x} \right| = \frac{1}{2\varepsilon}$$

$$P(x) = \frac{1}{2\varepsilon} \; \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\lambda} \cdot e^{-\frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{\sigma_\lambda^2}}$$

$$\begin{cases} x = x^* + 2\lambda\varepsilon \\ \sigma_x = 2\varepsilon\sigma_\lambda \end{cases}$$

$$\boxed{P(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_x} \, e^{-\frac{1}{2}\frac{(x - x^*)^2}{\sigma_x^2}}}$$

c.v.d

In questo caso P(x) rappresenta una densità di probabilità

La misura di una grandezza fisica è una variabile casuale con f. di distribuzione gaussiana (normale). Il valore aspettato di tale variabile casuale è proprio il valore vero della grandezza.

MISURA DI UNA GRANDEZZA FISICA
(Caso generale)

1) Ammettiamo che esista un valore "vero" x^* della grandezza.

2) Ammettiamo che esistano molte sorgenti (N) di disturbo della misura. Queste sorgenti generano degli errori casuali ε_i che hanno le seguenti proprietà:

$$\begin{cases} \mu(\varepsilon_i) = \int \varepsilon_i \, f(\varepsilon_i) \, d\varepsilon_i = 0 \\ \sigma^2(\varepsilon_i) = \int \varepsilon_i^2 \, f(\varepsilon_i) \, d\varepsilon_i \qquad \textit{finito} \end{cases}$$

(Nessuna ipotesi sul tipo delle $f(\varepsilon_i)$)

Potremo quindi scrivere per la generica misura di x, x_M:

$$x_M = x^* + \sum_{1}^{N}{}_i \varepsilon_i \qquad\qquad x_M = x^* + \varepsilon$$

$$\varepsilon = \sum_{1}^{N}{}_i \varepsilon_i$$

Per il teorema del limite centrale la variabile casuale ε, somma di N variabili casuali a varianza finita, per $N \to \infty$ avrà distribuzione normale con valore aspettato e varianza:

$$\mu(\varepsilon) = \sum_{1}^{N}{}_i \mu(\varepsilon_i) = 0 \qquad\qquad \sigma_\varepsilon^2 = \sum_{1}^{N}{}_i \sigma^2(\varepsilon_i)$$

$$f(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_\varepsilon} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma_\varepsilon^2}}$$

Per il teorema della addizione di variabili normali, x_M sarà ancora una variabile normale con :

$$\mu_{x_M} = x^* + \mu_e = x^*$$

$$s^2_{x_M} = s^2_e$$

$$y = ax + b$$

$$\mu_y = a\mu_x + b$$

$$s_y^2 = a^2 s_x^2$$

$$f(x_M) = \frac{1}{\sqrt{2p}\; s_{x_M}} \cdot e^{-\frac{(x_M - x^*)^2}{2 s^2_{x_M}}}$$

Dimostreremo (*vedi prossime lezioni*) anche che:
se si eseguono N misure x_i della grandezza, cioè se si estrae un campione di dimensione N dalla popolazione (*infinita*) della variabile x_M (*che ha funzione di distribuzione normale*), la miglior stima di μ_{x_M} (*cioè del valore x* della grandezza fisica*) sarà dato da:

$$\bar{x} = \frac{?_{1}^{N}{}_{i}\; x_i}{N}$$

(***media aritmetica delle x_i***)

e che la miglior stima di $s^2_{x_M}$:

$$s^2 = \frac{1}{N-1} \overset{N}{\underset{1}{?}}{}_i \, (x_i - x\,)^2$$ *(scarto quadratico medio)*

La media $\bar{x}$, essendo combinazione di variabili casuali normali, avrà a sua volta distribuzione normale con :

$$\mu\,(\bar{x}) = x^*$$

$$s^{\,2}\,(\bar{x}) = \frac{s_x^2}{N}$$

Indicheremo il risultato di N misure ripetute (con stesso metodo nelle stesse condizioni) di una grandezza fisica con la notazione:

$$\boxed{x = \bar{x} \pm s_{\bar{x}} = \bar{x} \pm \frac{s_x}{\sqrt{N}}}$$

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \overset{N}{\underset{1}{?}}{}_i \; x_i$$

$$s_x = \sqrt{\frac{?\,(x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}$$

Con questa notazione si intende :

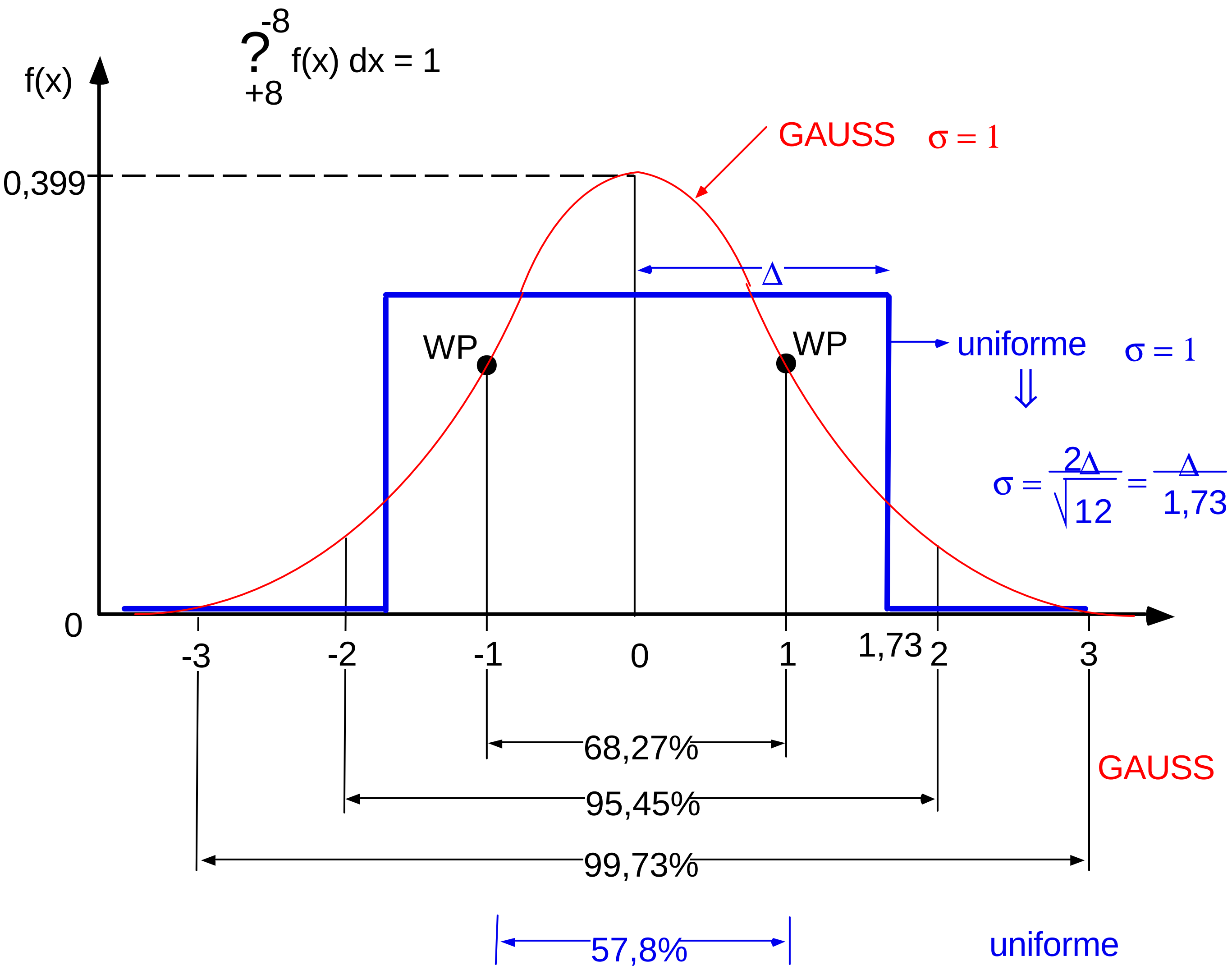
$$P(|\bar{x} - x^*| = s_{\bar{x}}) = 68\%$$

Cioè la probabilità che l'intervallo: $\bar{x} - s_{\bar{x}} = x^* = \bar{x} + s_{\bar{x}}$

contenga x^* è il 68%

Risultato di una singola misura x_i (*assumendo noto* s_x) :

$$\boxed{x = x_i \pm s_x}$$



?
-8
+8
f(x) dx = 1
f(x)
0,399
0
GAUSS σ = 1
Δ
WP
WP
uniforme
σ = 1
⇓
σ = 2Δ / √12 = Δ / 1,73
-3
-2
-1
0
1
1,73
2
3
68,27%
95,45%
99,73%
GAUSS
57,8%
uniforme

AS-93 bis

PROPAGAZIONE DEGLI ERRORI (STATISTICI)

Misura indiretta di una grandezza fisica:

$$y = f(x_1, \ldots x_n)$$

Dove x_i sono grandezze fisiche misurate direttamente ($x_i \pm s_i$); dato che le x_i sono variabili casuali, anche la y sarà variabile casuale.
Se sviluppiamo y in serie di Taylor in un intorno di ($\mu_1, \ldots \mu_n$) [*valori aspettati delle* x_i]:

$$y = y(\mu_1, \ldots \mu_n) + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)_{\mu_i} (x_i - \mu_i) + \ldots$$

Se trascuriamo i termini di ordine superiore (cioè assumiamo che le x_i siano in un intorno dei loro valori veri μ_i)

y è combinazione lineare di variabili casuali con distribuzione normale

(*quindi*)

y ha funzione di distribuzione normale con :

$$\mu_y = y(\mu_1, \ldots \mu_n)$$

(dato che (x_i - μ_i) ha valore aspettato = 0)

Per la varianza:

$$\sigma_y^2 = E[(y-\mu_y)^2] = E\left[\left\{\sum_{1}^{n}{}_{i}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)_{\mu_i}(x_i-\mu_i)\right\}^2\right] =$$

$$= E\left[\sum_{1}^{n}{}_{i}\sum_{1}^{n}{}_{j}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)_{\mu_i}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)_{\mu_j}\cdot(x_i-\mu_i)\cdot(x_j-\mu_j)\right]=$$

$$= \sum_{1}^{n}{}_{i}\sum{}_{j}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)_{\mu_i}\cdot\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)_{\mu_j}\cdot\underbrace{E\left[(x_i-\mu_i)\cdot(x_j-\mu_j)\right]}_{V_{ij}}=$$

$$V_{ij} = E\left[(x_i-\mu_i)\,(x_j-\mu_j)\right] = E\left[x_i\,x_j + \mu_i\,\mu_j - x_i\,\mu_j - x_j\,\mu_i\right] =$$

$(V_{ij} = V_{ji})$

$$= E\,[x_i\,x_j] + \cancel{\mu_i\,\mu_j} - \cancel{2}\,\mu_i\,\mu_j = E\,[x_i\,x_j] - \mu_i\,\mu_j$$

$$\sigma_y^2 = \sum{}_{i}\sum{}_{j}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\cdot V_{ij}$$

LEGGE DI PROPAGAZIONE ERRORI STATISTICI

$$\sigma_y^2 = \sum_{1}^{n}{}_{i}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2\sigma_{x_i}^2 + \sum{}_{i}\sum{}_{j}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)\left(\frac{\partial y}{\partial x_j}\right)\cdot V_{ij}$$

$i \neq j$

Se le x_i sono statisticamente indipendenti : (Vij = 0 $\quad i \neq j$)

$$\sigma_y^2 = \sum_{1}^{n}{}_{i}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2\sigma_{x_i}^2$$

LEGGE DI PROPAGAZIONE ERRORI STATISTICI

(x_i *scorrelate*)

Questa legge di propagazione degli errori è esatta solo se y è funzione lineare della x_i.

Nel caso in cui y sia un monomio : $y = ?_i x_i^{a_i}$

LEGGE DI PROPAGAZIONE ERRORI RELATIVI

x_i correlate:

$$\left(\frac{s_y}{y}\right)^2 = \overset{n}{\underset{1}{?}}{}_i\, a_i^2 \cdot \left(\frac{s_i}{x_i}\right)^2 + \underset{i \neq j}{?_i\, ?_j}\, a_i \cdot a_j \cdot r_{ij} \cdot \left(\frac{s_i}{x_i}\right) \cdot \left(\frac{s_j}{x_j}\right)$$

x_i scorrelate:

$$\left(\frac{s_y}{y}\right)^2 = \overset{n}{\underset{1}{?}}{}_i\, a_i^2 \cdot \left(\frac{s_i}{x_i}\right)^2$$

STIMA DEI PARAMETRI DELLE DISTRIBUZIONI

Se distribuzione di probabilità o funzione di distribuzione non note a priori :

↓

Numero infinito di prove per determinarla

Esperimento con N. finito di prove :

"campione" di dimensione n della popolazione

Analisi statistica dei dati (*risultato delle prove*) permette una stima delle proprietà (*delle grandezze caratteristiche*) della distribuzione e permette di valutare bontà della stima.

BONTA' : ***probabilità statistica che il valore vero del parametro cada in un certo intervallo intorno alla stima ottenuta (intervallo di confidenza)***

Stime con campioni di egual n hanno bontà equivalenti.

Stime con n maggiore hanno intervalli di confidenza più stretti.

CAMPIONAMENTO

Estrazione di n valori della variabile casuale ® campione di dimensione n

$$\left.\begin{matrix} x_1^{(1)} & \dots\dots\dots\dots & x_n^{(1)} \\ \vdots & & \\ x_1^{(m)} & \dots\dots\dots\dots & x_n^{(m)} \end{matrix}\right\} \quad m \quad \text{CAMPIONI}$$

Se considero :

$$\bar{x}^{(j)} = (x_1^{(j)} \dots x_n^{(j)})$$

$\bar{x}$ sarà ancora una variabile casuale con

$$f(\bar{x}) = f(x_1 \dots x_n)$$

Il campione sarà casuale se :

I x_i **indipendenti**

$$f(x_1 \dots x_n) = f(x_1) \dots f(x_n)$$

II x_i **tutte con la stessa formula di distribuzione:**

$$f(x_1) = \dots = f(x_n) = f(x)$$

Una generica funzione di un campione: "statistica"

Una "statistica" si usa per stimare i parametri di una funzione di distribuzione

↓

Estimatore $S(x_1 \ldots x_n)$

se a sono i parametri incogniti:

$\hat{a}$ *stima* a = S

S è una variabile casuale

Un estimatore gode delle seguenti proprietà:

1) **ASSENZA DI DISTORSIONE**

Per un campione finito, un estimatore è **non distorto** se:

$$E[S(x_1, \ldots x_n)] = E[\hat{a}] = a^* \quad \text{(per ogni n)}$$

Se la distorsione tende solo asintoticamente a 0 lo estimatore si dice **asintoticamente non distorto**.

2) **CONSISTENZA**

Al crescere delle dimensioni del campione l'estimatore converge al valore vero del parametro :

$$\text{per } n \to 8 \quad \Rightarrow \quad s^2_{\hat{a}} \to 0$$

3) **EFFICIENZA**

La stima ottenuta da un estimatore avrà una certa varianza; è più efficiente un estimatore con varianza minore. (*A parità di dimensioni n del campione*).

4) **INVARIANZA SOTTO TRASFORMAZIONE DEI PARAMETRI**

Se $\hat{a}$ è la stima del parametro a, allora la stima per una generica f(a), è proprio $f(\hat{a})$.

Estimatore del valore aspettato : media aritmetica

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots x_n)$$

PROPRIETA':

1 $$E[\bar{x}] = \frac{1}{n}\left\{E[x] + \ldots E[x_n]\right\} = \frac{1}{n} \cdot n\mu = \mu(x)$$

$\Downarrow$

non distorto

2 **Per le proprietà di funzioni lineari di variabili casuali:** $a = \frac{1}{n}$

$$s^2(\bar{x}) = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot s^2(x) = \frac{s^2(x)}{n}$$

è consistente $\quad s^2$ ® 0

n ® 8

3 **Si può dimostrare che la media aritmetica è la stima del valore aspettato che ha la minima varianza, cioè è la**

più efficiente

AS-100

Proprietà della media:

I   Somma degli scarti da $\bar{x}$ = 0

$$\overset{n}{\underset{1}{?}}{}_i\,(x_i - \bar{x}) = ?_i x_i - \bar{x}\cdot n = n \cdot \frac{?_i x_i}{n} - n\bar{x} = n\bar{x} - n\bar{x} = 0$$

II   Somma dei quadrati degli scarti da $\bar{x}$ minima

Infatti, scelto un generico x:

$$\overset{n}{\underset{1}{?}}{}_i\,(x_i - x)^2 = \overset{n}{\underset{1}{?}}{}_i\,\left((x_i - \bar{x}) + (\bar{x} - x)\right)^2 =$$

$$= \overset{n}{\underset{1}{?}}{}_i\left[(x_i - \bar{x})^2 + (\bar{x} - x)^2 + 2(x_i - \bar{x})\,(\bar{x} - x)\right] =$$

$$= \overset{n}{\underset{1}{?}}{}_i\,(x_i - \bar{x})^2 + n\cdot(\bar{x} - x)^2 + 2(\bar{x} - x)\,\underbrace{\cancel{?_i(x_i - \bar{x})}}_{= 0} =$$

$$= \overset{n}{\underset{1}{?}}{}_i\,(x_i - \bar{x})^2 + n(\bar{x} - x)^2 > ?_i(x_i - \bar{x})^2$$

Estimatore della varianza (*scarto quadratico medio*)

$$\boxed{s^2 = \frac{1}{n - 1}\; ?_i(x_i - \bar{x})^2}$$

Consideriamo inizialmente:

$$s'^2 = \frac{1}{n}\left\{(x_1 - \bar{x})^2 + \ldots (x_n - \bar{x})^2\right\}$$

$$E[s'^2] = \frac{1}{n}\, E\left[?_i\,(x_i - \bar{x})^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n}\, ?_i \left\{E\left[\left((x_i - \mu) - (\bar{x} - \mu)\right)^2\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{n}\, ?_i \left\{E\left[(x_i - \mu)^2\right] - \underbrace{E\left[(\bar{x} - \mu)^2\right]}_{\to\, s^2(\bar{x})}\right\} =$$

$$= \frac{1}{n}\left\{n\, s^2 - n\,\frac{1}{n}\, s^2\right\} =$$

$$= \frac{n-1}{n}\, s^2 = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot s^2$$

E' distorto (*solo "asintoticamente non distorto"*)

$$s^2 = \frac{1}{n-1}\; ?_i (x_i - \bar{x})^2$$

Sarà invece <u>non distorto</u>

LA LEGGE DEI GRANDI NUMERI
(*Applicata al caso della media aritmetica*)

Data una popolazione di varianza finita s^2, e dati 2 numeri positivi e' e e'', esisterà sempre un numero N tale che, per ogni campione della popolazione di dimensione M = N, si avrà:

$$P(|\bar{x} - \mu_x| = e') = e''$$

DISEGUAGLIANZA DI BIENAYME' - ČEBIČEV

Data una variabile casuale x con funzione di distribuzione $f(x)$ e varianza finita s^2:

$$P(|x - \mu| = l\,s) = \frac{1}{l^2}$$

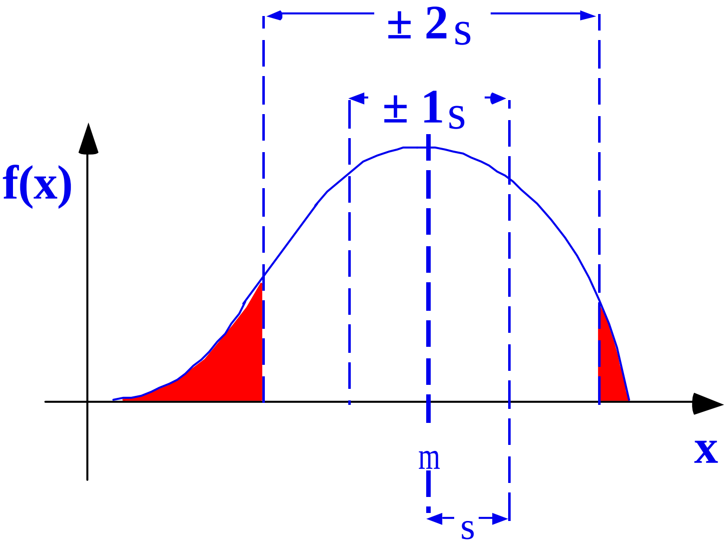
per l positivo qualunque.

Infatti:

$$P(|x - \mu| = l\,s) = \int_{C^*} f(x)\,dx$$

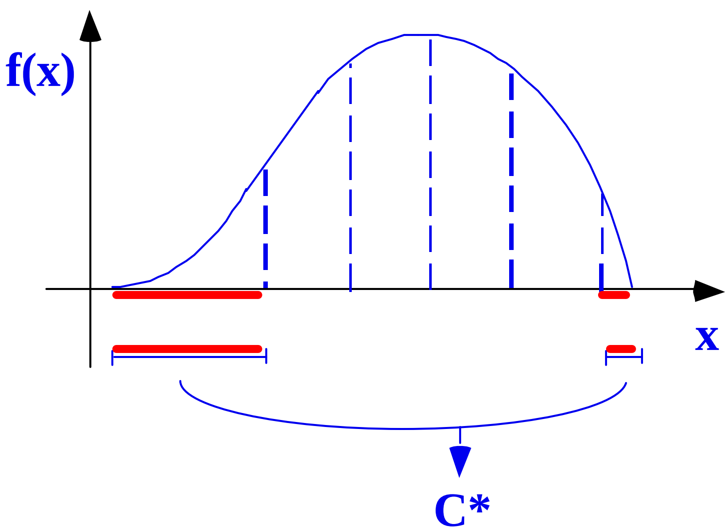
dove C* = dominio in cui $\dfrac{|x - \mu|}{l\,s} = 1.$

Graficamente:



l = 2

Voglio dimostrare che: $\blacksquare = \int_{C^*} f(x)\, dx = \frac{1}{l^2} = \frac{1}{4}$



In C* sarà anche vero :

$$\frac{(x-\mu)^2}{\lambda^2 \sigma^2} = 1$$

Quindi:

$$P(|x-\mu| = \lambda\sigma) = \int_{C^*} \frac{(x-\mu)^2}{\lambda^2\sigma^2} f(x)\,dx =$$

$$= \int_{C} \frac{(x-\mu)^2}{\lambda^2\sigma^2} f(x)\,dx$$

Dove C è tutto il campo di definizione di x.

$$P(|x-\mu| = \lambda\sigma) = \frac{1}{\lambda^2\sigma^2} \underbrace{E[(x-\mu)^2]}_{\text{varianza di } x \,=\, \sigma^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

c.v.d.

Ricordando che $\bar{x}$ ha varianza = $\frac{\sigma^2}{N}$, potremo riscrivere la diseguaglianza di B.Č. :

$$P(|\bar{x}-\mu| = \underbrace{\lambda\frac{\sigma}{\sqrt{N}}}_{e'}) = \underbrace{\frac{1}{\lambda^2}}_{e''}$$

$$e' = \frac{\lambda\sigma}{\sqrt{N}} \qquad\qquad e'' = \frac{1}{\lambda^2} = \frac{\sigma^2}{e'^2 N}$$

Fissato e' ed e'' (quindi l), si sceglie N tale che :

$$N = \frac{s^2}{e'^2 \cdot e''}$$

Per ogni M = N la diseguaglianza iniziale sarà soddisfatta. *

Es.: **Valore di N per cui la probabilità che la media $\bar{x}$ disti da μ più di 1 s = 20%.**

e'' = **0.2** e' = **1** · s

Infatti se e' = s**, ne segue che** $\frac{l}{\sqrt{N}} = 1$; $\frac{1}{l^2} = \frac{1}{N}$

$$N = \frac{\cancel{s^2}}{0.2 * \cancel{s^2}} = 5$$

In generale, fissato N, la P(|$\bar{x}$ - μ| > 1s) = $\frac{1}{N}$ **:**

N = 1	**P(|$\bar{x}$ - μ| > 1s) = 1**		**0.32**
2	**1/2**		**0.20**
5	**1/5**		**0.04**
10	**1/10**		**0.001**
100	**1/100**		

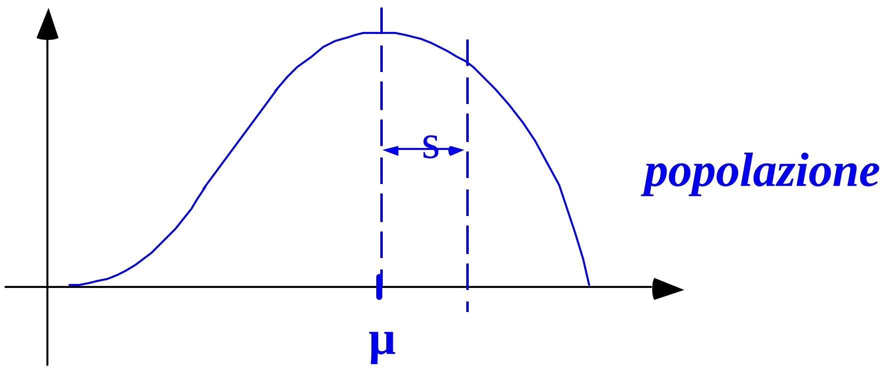
f(x) qualsiasi

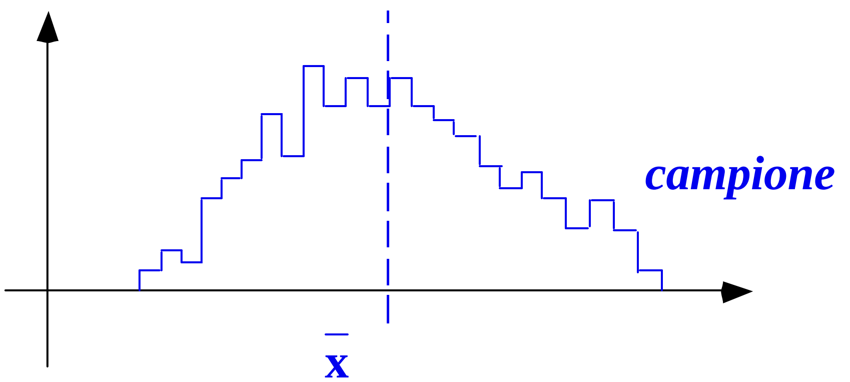
f(x) gaussiana

$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{N}}$

⊛ Significato dell'argomento :

Data una variabile casuale con distribuzione qualsiasi, fissato un livello di confidenza <u>richiesto</u> (cioè una probabilità), è possibile determinare la grandezza <u>minima</u> del campione (cioè il valore di N) per cui la media è (con probabilità assegnata) prossima al valore "vero" più di un <u>dato</u> valore (in unità di s)





TEOREMA DI BERNOULLI

Data distribuzione binomiale: $P_{N,p}(k)$ consideriamo la variabile casuale :

$$f = \frac{k}{N}$$

$$P_{N,p}(f) = P_{N,p}(k = Nf)$$

$$E[f] = \frac{1}{N} E[k] = \frac{Np}{N} = p$$

$$s^2[f] = \frac{1}{N^2} E[k^2] = \frac{Npq}{N^2} = \frac{pq}{N}$$

Dalla diseguaglianza di B.Č. :

$$P(|x - \mu| = l\,s) = \frac{1}{l^2}$$

$$l\,s = e \qquad l^2 = \frac{e^2}{s^2}$$

$$P(|x - \mu| = e) = \frac{s^2}{e^2}$$

$$P(|f - p| = e) = \frac{p \cdot q}{N e^2}$$

Per N ® 8 $\qquad P(|\frac{k}{N} - p| > e)$ $\qquad$ **tende a 0.**

frequenza

In altre parole, per N ® 8 la probabilità che la frequenza relativa differisca dalla probabilità per più di una quantità e assegnata, tende a 0.

Il teorema di Bernoulli è una giustificazione della definizione di probabilità in termini della frequenza relativa.

METODO DELLA MASSIMA VEROSIMIGLIANZA

Stima dei parametri di distribuzioni :

data una funzione di distribuzione di una variabile casuale, con forma funzionale nota, dipendente da un certo numero di parametri incogniti, si vuole stimare il valore dei parametri a partire da un campione limitato della popolazione.

$f(x, \underline{a})$ **$\underline{a}$: parametri incogniti $(a_1 \dots a_n)$**

$x_1, x_2, x_3, \dots x_N$: misure della variabile casuale ***(campione)***

Se f è la funzione di distribuzione di x, la probabilità di osservare l'insieme $x_1 \dots x_N$ di valori :

$$dP = f(x_1, \underline{a})\, dx \;\; f(x_2, \underline{a})\, dx \dots f(x_N, \underline{a})\, dx = \mathop{?}\limits_{1}^{N}{}_{i} \;\; f(x_i, \underline{a})\, dx$$

Se si definisce funzione di verosimiglianza :

$$\mathcal{L} = ?_{i}^{N} f(x_i , \underline{a})$$

IL PRINCIPIO DELLA MASSIMA VEROSIMIGLIANZA :

La miglior stima dei parametri $\underline{a}$ è quella che rende massima la funzione $\mathcal{L}$

$$\frac{?\mathcal{L}}{?a_i} = 0 \qquad \frac{?^2\mathcal{L}}{?a_i^2} < 0$$

Un estimatore di massima verosimiglianza gode delle seguenti proprietà:

1) ASSENZA DI DISTORSIONE.

E[Estimatore] = valore vero (per ogni N)

Gli estimatori di massima verosimiglianza sono solo asintoticamente non distorti.

2) CONSISTENZA.

$$(\hat{a} \rightarrow a^* \quad \text{per } N \rightarrow 8\,) \Longrightarrow S^2_{\hat{a}} \xrightarrow[N \rightarrow 8]{} 0$$

Gli estimatori di massima verosimiglianza sono consistenti

3) EFFICIENZA.

Gli estimatori di massima verosimiglianza sono quelli con efficienza migliore.

4) INVARIANZA SOTTO TRASFORMAZIONE DEI PARAMETRI.

Gli estimatori di massima verosimiglianza sono invarianti sotto trasformazione dei parametri.

In generale si preferisce usare, invece della $\mathcal{L}$, il suo logaritmo:

$$w = \ln \mathcal{L} = \sum_{i=1}^{N} \ln f(x_i, \underline{a})$$

e cercare quel valore di $\underline{a}$ che rende massimo w.

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \underline{a}} = 0; \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial^2 \underline{a}} < 0 \right)$$

Es. <u>Stima di μ e σ^2 per una distribuzione normale</u>

I Stima di μ. (dati: $x_1 \ldots x_N$)

$$\mathcal{L} = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \right)^N \prod_{i=1}^{N} e^{-\frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$w = \ln \mathcal{L} = -N \ln \sqrt{2\pi} - N \ln (\sigma^2)^{1/2} - \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \mu)^2}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{N} \frac{(x_i - \mu)}{\sigma^2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} x_i - N \cdot \mu = 0$$

$$\boxed{\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i}{N}}$$

Stima di massima verosimiglianza del parametro μ

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \mu^2} = -\frac{N}{\sigma^2} < 0$$

II Stima di σ^2.

$$\frac{\partial w}{\partial \sigma^2} = -\frac{N}{2}\,\frac{1}{\sigma^2} + \sum_{1}^{N}{}_i \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma^4} = 0$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{1}^{N}{}_i (x_i-\mu)^2}{N}$$

Ma μ da I, è : $\hat{\mu} = \dfrac{\sum_i x_i}{N} = \bar{x}$

$$\boxed{\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_i (x_i-\bar{x})^2}{N}}$$

Stima di massima verosimiglianza del parametro σ^2 è solo asintoticamente non distorta

$$\hat{\sigma}^2 = \sigma^2_{\substack{\text{non}\\ \text{dist.}}} \cdot \frac{N-1}{N} =$$

$$= \sigma^2_{\substack{\text{non}\\ \text{dist.}}} \cdot \left(1 - \frac{1}{N}\right)$$

Asintoticamente non distorto

Es. ~~Combinazione di misure con diversa precisione~~

(Media pesata di misure con diversa σ stesso μ)

$x_1\ x_2 \ldots x_N$

$\sigma_1\ \sigma_2 \ldots \sigma_N$

$$L = \prod_{1}^{N}{}_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_i}\, e^{-\frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma_i^2}}$$

$$w = -N \ln\sqrt{2\pi} - \sum_{1}^{N}{}_i \ln \sigma_i - \sum_{1}^{N}{}_i \frac{(x_i-\mu)^2}{2\sigma_i^2}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \mu} = \sum_{1}^{N}{}_i \frac{x_i-\mu}{\sigma_i^2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{x_i}{\sigma_i^2} = \mu \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}$$

$$\boxed{\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2} x_i}{\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\sigma_i^2}}}$$

Ponendo : $p_i = \dfrac{1}{\sigma_i^2}$ **MEDIA PESATA**

$$\boxed{\hat{\mu} = \frac{\sum_{i=1}^{N} p_i \, x_i}{\sum_{i=1}^{N} p_i}}$$

Varianza della stima di massima verosimiglianza

Si può dimostrare che per $N \to \infty$ la funzione di verosimiglianza $\mathcal{L}$ (che è la funzione di distribuzione per <u>a</u>) tende ad una distribuzione gaussiana:

$$\mathcal{L}(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_a} e^{-\frac{(a - a^*)^2}{2\sigma_a^2}}$$

Se consideriamo $w(a) = \ln \mathcal{L}(a)$ e la deriviamo 2 volte rispetto ad a:

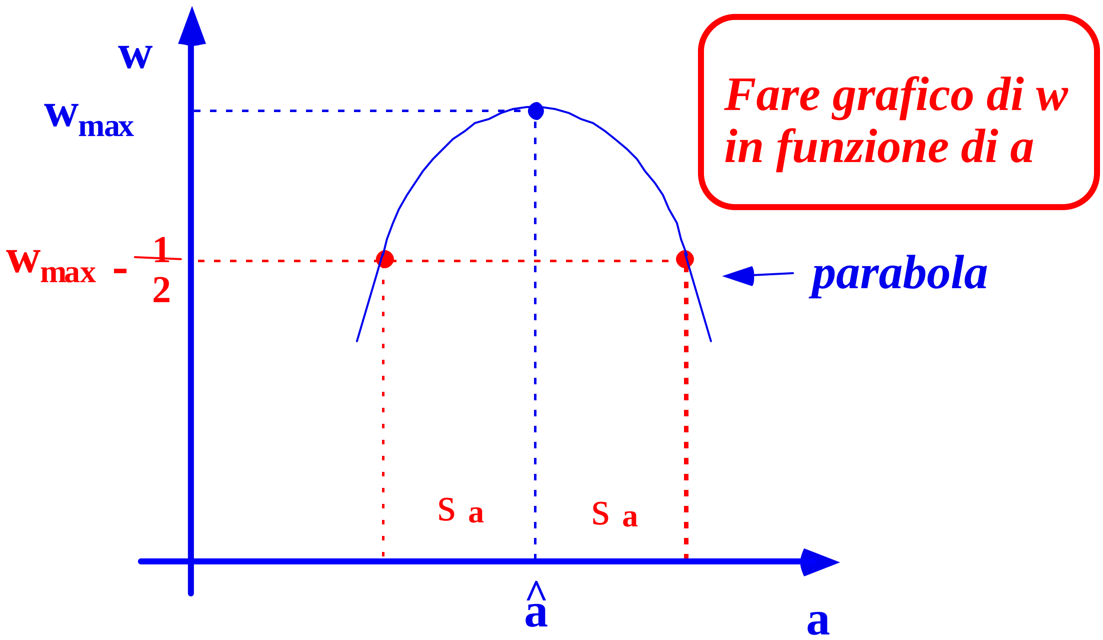
$$w(a) = -\frac{(a - a^*)^2}{2\sigma_a^2} + \text{cost}$$

$$\frac{?w}{?a} = -\frac{(a - a^*)}{s_a^2}$$

$$\frac{?^2w}{?a^2} = -\frac{1}{s_a^2}$$

$$\boxed{s_a^2 = -\frac{1}{\frac{?^2w}{?a^2}}}$$

Se non si ha espressione analitica di w:



$$w_{max} = -\frac{(\hat{a} - a^*)^2}{2s_a^2} + \text{const.} \simeq \text{const.}$$

se $\hat{a} \simeq a^*$

Se: $\hat{a} \sim a^*$ **:**

In corrispondenza ad: $(a - \hat{a}) = s_a$

$$w(a) = w_{max} - \frac{1}{2}$$

Quindi le due intersezioni con $w_{max} - \frac{1}{2}$ **:** $\pm s_a$

Es. *Varianza sulla media*

$$\mu = \left(\begin{array}{c}\text{stima di}\\ \mu\end{array}\right) = \sum_{1}^{n}{}_{i} \frac{x_i}{N} = \bar{x}$$

Errore sulla stima di μ :

$$s_{\hat{\mu}}^{2} = s_{\bar{x}}^{2} = -\frac{1}{\frac{\partial^2 w}{\partial \mu^2}} = \frac{\hat{s}^2}{N}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 w}{\partial \mu^2} = -\frac{N}{s^2}}$$

$$\boxed{s_{\hat{\mu}}^{2} = \frac{\hat{s}^2}{N}}$$

Es. *Varianza sulla varianza*

$$\hat{s}^{2}\left(\begin{array}{c}\text{stima di}\\ s^{2}\end{array}\right) = \frac{\sum_i (x_i - \bar{x})^2}{N}$$

$$\frac{\partial w}{\partial \sigma^2} = -\frac{N}{2}\,\frac{1}{\sigma^2} + \sum_i \frac{(x_i-\mu)^2}{2\,\sigma^4} \longrightarrow (\sigma^2)^2$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial (\sigma^2)^2} = +\frac{N}{2}\,\frac{1}{\sigma^4} - 2\,\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{2\cdot\sigma^6} =$$

$$= \frac{N}{2}\,\frac{1}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^6}\,N\,\underbrace{\frac{\sum_{i=1}^{N}(x_i-\mu)^2}{N}}_{\hat\sigma^2} =$$

$$= \frac{N}{2}\,\frac{1}{\sigma^4} - N\,\frac{1}{\sigma^4} = -\frac{N}{2}\,\frac{1}{\sigma^4}$$

$$\boxed{\sigma^2_{\hat\sigma^2} = \frac{2\,\hat\sigma^4}{N}} \longrightarrow \sigma^2_{\hat\sigma} = \left(\frac{d\sigma}{d\sigma^2}\right)^2 \sigma^2_{\hat\sigma^2} = \frac{1}{4\,\sigma^2}\,\frac{2\,\sigma^4}{N} = \frac{\sigma^2}{2N}$$

$$x = \sigma^2$$

$$\frac{\partial\sqrt{x}}{\partial x} = \frac{1}{2}\,\frac{1}{\sqrt{x}}$$

$$\boxed{\sigma^2_{\hat\sigma} = \frac{\hat\sigma^2}{2N}} \longrightarrow \sigma_{\hat\sigma} = \frac{\hat\sigma}{\sqrt{2N}}$$

Es. *Varianza sulla media pesata*

$$\hat\mu = \frac{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2}\,x_i}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2}}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \mu^2} = -\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2}$$

$$\boxed{\sigma^2_{\hat\mu} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{\sigma_i^2}}}$$

Es. *Stima di m in una distribuzione di Poisson*

Fatte N prove, sono stati osservati i valori: $n_1 \, . \, . \, . \, n_N$

$$\text{Ò} = ?_{1}^{N}{}_{i} \, \frac{e^{-m} \, m^{n_i}}{n_i \, !}$$

$$w = ?_{1}^{N}{}_{i} \, lg_e \, \frac{e^{-m} \, m^{n_i}}{n_i \, !} =$$

$$= - Nm + ?_{1}^{N}{}_{i} \; n_i \, lg_e \, m + ?_{1}^{N}{}_{i} \, lg_e \, \frac{1}{n_i \, !}$$

$$\frac{?w}{?m} = - N + ?_{1}^{N}{}_{i} \; n_i \, \frac{1}{m} = 0$$

$$\boxed{\hat{m} = ?_{1}^{N}{}_{i} \, \frac{n_i}{N}}$$

$$\frac{?^2 w}{?m^2} = - \frac{?_{1}^{N}{}_{i} \; n_i}{m^2}$$

$$s^2_{\hat{m}} = \frac{m^2}{?_{1}^{N}{}_{i} \; n_i} = \frac{\hat{m}^2}{N\hat{m}} = \frac{\hat{m}}{N}$$

Es. *Stima di p in una distribuzione binomiale*

Fatte n serie di N prove:

$k_1 , k_2 \dots k_n$ *n, casi favorevoli in ogni serie*

$$L = \prod_{i=1}^{n} \frac{N!}{k_i\,!\,(N - k_i)!} \cdot p^{k_i} \cdot (1 - p)^{N - k_i}$$

$$w = \sum_{1}^{n}{}_i\, k_i \lg_e p + \sum_{1}^{n}{}_i\, (N - k_i) \cdot \lg_e (1 - p) + \text{cost}$$

$$\frac{\partial w}{\partial p} = \frac{1}{p} \sum_{1}^{n}{}_i\, k_i - \frac{1}{1-p} \sum_{1}^{n}{}_i\, (N - k_i) = 0$$

$$(1 - p) \sum_{1}^{n}{}_i\, k_i = p \sum_{1}^{n}{}_i\, (N - k_i)$$

$$\sum_{1}^{n}{}_i\, k_i \cancel{- p \sum_{1}^{n}{}_i\, k_i} = Npn \cancel{- p \sum_{1}^{n}{}_i\, k_i}$$

$$p = \frac{1}{n} \frac{\sum_{1}^{n}{}_i\, k_i}{N} = \frac{\bar{k}}{N}$$

$$\boxed{\hat{p} = \frac{\bar{k}}{N}}$$

Es. ***Stima parametri retta***

$$y = ax + b$$

$y_1 \pm \sigma_1 \ldots y_n \pm \sigma_n$ (*y_i: funzione di distribuzione Gauss*)

$x_1 \ldots x_n$

$$\mathcal{L} = \prod_i \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_i}\, e^{-\frac{(y_i - y_i^*)^2}{2\sigma_i^2}}$$

$$y_i^* = a^* x_i + b^*$$

$$w = -\sum_i \frac{(y_i - y_i^*)^2}{2\sigma_i^2} + \text{cost}$$

$$\max(w) \longrightarrow \min\left(\sum_i \frac{(y_i - y_i^*)^2}{2\sigma_i^2}\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial a} = +\sum_i \dfrac{(y_i - ax_i - b)}{\sigma_i^2} \cdot x_i = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial w}{\partial b} = +\sum_i \dfrac{(y_i - ax_i - b)}{\sigma_i^2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a \sum_i \dfrac{x_i^2}{\sigma_i^2} + b \sum_i \dfrac{x_i}{\sigma_i^2} = \sum_i \dfrac{x_i y_i}{\sigma_i^2} \\[2ex] a \sum_i \dfrac{x_i}{\sigma_i^2} + b \sum_i \dfrac{1}{\sigma_i^2} = \sum_i \dfrac{y_i}{\sigma_i^2} \end{cases} \longrightarrow \hat{a} \text{ e } \hat{b}$$

Es. *Stima di τ per distribuzione:* $f(t,\tau) = \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$

$$\int_0^{\infty} f(t,\tau)\, dt = 1$$

Osservati i tempi:

$t_1 \dots t_N$ in N. prove

Voglio stima di massima verosimiglianza per τ.

$$\mathcal{L} = \prod_{i=1}^{N} \frac{1}{\tau} e^{-\frac{t_i}{\tau}}$$

$$w = -\sum_{i=1}^{N} \lg_e \tau + \sum_{i=1}^{N} \left(-\frac{t_i}{\tau}\right)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \tau} = -\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\tau} + \sum_{i=1}^{N} \frac{t_i}{\tau^2} = 0$$

$$\boxed{\hat{\tau} = \frac{\sum_{i=1}^{N} t_i}{N}}$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = +\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{\tau^2} - 2\sum_{i=1}^{N} \frac{t_i}{\tau^3} =$$

$$= \frac{N}{\tau^2} - \frac{2N}{\tau^3} \overbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{t_i}{N}}^{\hat{\tau}} = -\frac{N}{\hat{\tau}^2}$$

$$\boxed{s^2_{\hat{\tau}} = \frac{\hat{\tau}^2}{N}}$$

IL METODO DEI MINIMI QUADRATI

Date due grandezze x, y legate dalla relazione funzionale:

$$y = f(x, \underline{a})$$

$$\underline{a} : a_1, \ldots, a_n \qquad \text{n parametri}$$

Fatte N misure :

$$y_1 \pm \sigma_1 \ldots y_N \pm \sigma_N$$

$$x_1 \ldots x_N$$

[Errore su x trascurabile; $|f(x_i + \Delta_x) - f(x_i)| \ll \sigma_{y_i}$]

Voglio stimare i valori dei parametri $a_1, \ldots, a_n$.

Se le y_i hanno formula di distribuzione gaussiana, posso applicare il metodo della massima verosimiglianza.

$$\mathcal{L} = \prod_{1}^{N}{}_{i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_i} e^{-\frac{(y_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}$$

$$w = -\sum_{1}^{N}{}_{i} \frac{(y_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} + \text{cost}$$

$$w = -\sum_{1}^{N}{}_{i} \frac{(y_i - f(x_i, \underline{a}))^2}{2\,\sigma_i^2} + \text{cost}$$

$$\text{Max}\,(w) \longrightarrow \min\left\{ \sum_{1}^{N}{}_{i} \frac{(y_i - f(x_i, \underline{a}))^2}{\sigma_i^2} \right\}$$

Il principio dei minimi quadrati afferma che la miglior stima dei parametri <u>a</u> è quella che <u>minimizza</u> la somma:

$$X^2 = \sum_{1}^{N}{}_{i} \frac{(y_i - f(x_i, \underline{a}))^2}{\sigma_i^2} + \text{cost}$$

indipendente dalla formula di distribuzione delle y_i.

Notare che il metodo richiede la conoscenza a priori di tutte le σ_i; nel caso però in cui le σ_i siano tutte uguali il metodo è ancora applicabile anche non conoscendo σ. (*Altro parametro incognito*)

MINIMI QUADRATI NEL CASO LINEARE

Supponiamo che la dipendenza della y dai parametri sia lineare:

$$y = f(x, \underline{a}) = \overset{n}{\underset{1}{?}}{}_{k} \; a_k \cdot f_k(x)$$

$$y_1 \pm s_1 \ldots y_N \pm s_N$$

$$x_1 \quad \ldots \quad x_N$$

Assumiamo inoltre che la y_i siano fra loro statisticamente indipendenti

$$X^2 = \overset{N}{\underset{1}{?}}{}_{i} \; \frac{\left(y_i - \overset{n}{\underset{1}{?}}{}_{k} \; a_k \, f_k(x_i) \right)^2}{s_i^2}$$

$$\left\{ \frac{? X^2}{? a_j} = 0 \right. \qquad j = 1, \ldots, n$$

n equazioni lineari nelle n incognite a_k

$$\frac{? X^2}{? a_j} = 2 \cdot \overset{N}{\underset{1}{?}}{}_{i} \left(y_i - \overset{n}{\underset{1}{?}}{}_{k} \; a_k \, f_k(x_i) \right) \cdot \frac{f_j(x_i)}{s_i^2} = 0$$

$$\overset{N}{\underset{1}{?}}{}_{i} \; \overset{n}{\underset{1}{?}}{}_{k} \; a_k \cdot f_k(x_i) \, f_j(x_i) \Big/ s_i^2 = \overset{N}{\underset{1}{?}}{}_{i} \; f_j(x_i) \, \frac{y_i}{s_i^2}$$

$$?_{1}^{n}{}_{k}\ a_k\ ?_{1}^{N}{}_{i}\ f_k(x_i)\ f_j(x_i) \Big/ s_i^2 = ?_{1}^{N}{}_{i}\ f_j(x_i)\ \frac{y_i}{s_i^2}$$

n equazioni lineari al variare j = 1, n.

Sistema di n equazioni lineari nelle incognite a_k.

$$\longrightarrow k$$

$$\left\{\begin{array}{l} A_{11}\ a_1 + A_{12}\cdot a_2 \ldots\ldots + A_{1n}\ a_n = b_1 \\ A_{12}\ a_1 + A_{22}\cdot a_2 \ldots\ldots + A_{2n}\ a_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ A_{1n}\ a_1 + A_{2n}\cdot a_2 \ldots\ldots + A_{nn}\ a_n = b_n \end{array}\right. \qquad \downarrow j$$

$$\begin{pmatrix} A_{11} \ldots\ldots A_{1n} \\ \vdots \\ A_{n1} \ldots\ldots A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$A_{jk} = ?_{1}^{N}{}_{i}\ f_k(x_i)\cdot f_j(x_i) \Big/ s_i^2 = A_{kj}$$

matrice simmetrica

$$b_j = ?_{1}^{N}{}_{i}\ y_i \cdot f_j(x_i) \Big/ s_i^2$$

$A \cdot \underline{a} = \underline{b}$ *sistema di equazioni lineari*

SOLUZIONE:

matrice inversa $\longrightarrow$ $A^{-1} \rightarrow (A^{-1}\,A = U)$

$$\underbrace{A^{-1}\cdot A}\cdot \underline{a} = A^{-1}\cdot \underline{b}$$

$$U\cdot \underline{a} = \underline{a}$$

$$\boxed{\underline{a} = A^{-1}\cdot \underline{b}}$$

$$A^{-1}_{kj} = (-1)^{k+j}\cdot \frac{|A_{kj}|}{|A|}$$

$|A|$ = determinante matrice A

$|A_{kj}|$ = minore kj della matrice A

$$\boxed{\hat{a}_k = \overset{n}{\underset{1}{?}}{}_j\, A^{-1}_{kj}\cdot b_j} = \overset{n}{\underset{1}{?}}{}_j\, A^{-1}_{kj}\cdot \overset{N}{\underset{1}{?}}{}_i\, y_i f_j(x_i)\Big/ s_i^2$$

Stima a_k con minimi quadrati

A^{-1} : matrice delle covarianze

Infatti si può dimostrare che :

$$E\left\{(a_k - a_k^*)\cdot(a_j - a_j^*)\right\} = \mathrm{cov}\,(a_k, a_j) = A^{-1}_{kj}$$

$$\boxed{s_k^2 = A^{-1}_{kk}}$$

Nota la matrice delle covarianze, è possibile calcolare la varianza su una qualsiasi funzione delle a_k. In particolare:

$$\hat{y} = \overset{n}{\underset{1}{?}}{}_{k}\ \hat{a}_k\, f_k(x)$$

($\hat{y}$: valore stimato della y dalla stima $\hat{a}_k$)

$$s^2_{\hat{y}} = \overset{n}{\underset{1}{?}}{}_{k,j}\ \frac{?\hat{y}}{?\hat{a}_k} \cdot \frac{?\hat{y}}{?\hat{a}_j} \cdot \mathrm{cov}\,(a_k, a_j) =$$

$$= \overset{n}{\underset{1}{?}}{}_{k,j}\ f_k(x) \cdot f_j(x) \cdot A^{-1}_{kj}$$

Per verificare se il risultato delle stime degli a_k con i minimi quadrati è compatibile con i dati:

(Nel caso di errori gaussiani sulla y_i)

$$C^2_{N-n} = \overset{n}{\underset{1}{?}}{}_{i}\ \frac{(y_i - \hat{y}(x_i))^2}{s_i^2}$$

Distribuzione normale
$\hat{y}$, s_i

N-n gradi di libertà:

N variabili casuali y_i - n parametri estratti dai dati

ES.

$$y = ax$$

$$X^2 = \frac{\sum_{1}^{N}{}_i \, (y_i - ax_i)^2}{\sigma_i^2}$$

$$\frac{\partial X^2}{\partial a} = -2 \sum_{1}^{N}{}_i \frac{(y_i - ax_i)^2}{\sigma_i^2} \; x_i = 0$$

$$\sum_{1}^{N}{}_i \frac{x_i - y_i}{\sigma_i^2} = a \sum_{1}^{N}{}_i \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}$$

$$a = \frac{\sum_{1}^{N}{}_i \frac{x_i \cdot y_i}{\sigma_i^2}}{\sum_{1}^{N}{}_i \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}}$$

Essendo a una combinazione lineare di variabili casuali y_i con varianza nota (trascuro varianza su x_i), la sua varianza:

$$\sigma_a^2 = \sum_{1}^{N}{}_i \left(\frac{\partial a}{\partial y_i}\right)^2 \cdot \sigma_i^2 = \frac{\sum_{1}^{N}{}_i \frac{x_i^2}{\sigma_i^2} \quad \sigma_i^2}{\left(\sum_{1}^{N}{}_i \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}\right)^2} =$$

$$= \frac{1}{\sum_{1}^{N}{}_i \frac{x_i^2}{\sigma_i^2}}$$

ES. $y = a_1 + a_2 x$

$$y = \overset{n}{\underset{1}{?}}{}_k \; a_k \cdot f_k(x)$$

In questo caso:

$$n = 2 \qquad f_1(x) = 1 \qquad f_2(x) = x$$

$$y_1 \pm s_1 \; \ldots . \; y_N \pm s_N$$

$$x_1 \; \ldots . \; x_N$$

A :

$$A_{11} = \overset{N}{\underset{1}{?}}{}_i \, f_1(x_i) \cdot f_1(x_i) \Big/ s_i^2 = \overset{N}{\underset{1}{?}}{}_i \frac{1}{s_i^2} = s$$

$$A_{12} = \overset{N}{\underset{1}{?}}{}_i \, f_1(x_i) \cdot f_2(x_i) \Big/ s_i^2 = \overset{N}{\underset{1}{?}}{}_i \frac{x_i}{s_i^2} = s_x$$

$$A_{22} = \overset{N}{\underset{1}{?}}{}_i \, f_2(x_i) \cdot f_2(x_i) \Big/ s_i^2 = \overset{N}{\underset{1}{?}}{}_i \frac{x_i^2}{s_i^2} = s_{xx}$$

$$A = \begin{pmatrix} s & s_x \\ s_x & s_{xx} \end{pmatrix}$$

$$\left| A \right| = \det A = s \cdot s_{xx} - s_x^2 =$$

$$= \overset{N}{\underset{1}{?}}{}_i \frac{1}{s_i^2} \cdot \overset{N}{\underset{1}{?}}{}_i \frac{x_i^2}{s_i^2} - \left(\overset{N}{\underset{1}{?}}{}_i \frac{x_i}{s_i^2} \right)^2$$

b:

$$b_1 = \overset{N}{\underset{1}{?}}{}_i\, y_i \cdot f_1(x_i) \Big/ s_i^{\,2} = \overset{N}{\underset{1}{?}}{}_i\, \frac{y_i}{s_i^{\,2}} = s_y$$

$$b_2 = \overset{N}{\underset{1}{?}}{}_i\, y_i \cdot f_2(x_i) \Big/ s_i^{\,2} = \overset{N}{\underset{1}{?}}{}_i\, \frac{y_i\, x_i}{s_i^{\,2}} = s_{xy}$$

A^{-1}: (*Matrice covarianze*)

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} s_{xx} & -\,s_x \\ -\,s_x & s \end{pmatrix}$$

$\boxed{\textbf{SOLUZIONE}}$**:**

$$\left(|A| = D \right)$$

$$\underline{a} = A^{-1} \cdot \underline{b}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{-1}_{11} & A^{-1}_{12} \\ A^{-1}_{21} & A^{-1}_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{D} \begin{pmatrix} s_{xx} & -s_x \\ -s_x & s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s_y \\ s_{xy} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{a_1 = \frac{1}{D}\left(S_{xx} \cdot S_y - S_x \cdot S_{xy}\right) =}$$

$$= \frac{1}{D}\left\{ \mathop{?}\limits_{1}^{N}{}_i \frac{x_i^2}{s_i^2} \cdot \mathop{?}\limits_{1}^{N}{}_i \frac{y_i}{s_i^2} - \mathop{?}\limits_{1}^{N}{}_i \frac{x_i}{s_i^2} \cdot \mathop{?}\limits_{1}^{N}{}_i \frac{x_i\, y_i}{s_i^2} \right\}$$

$$\boxed{a_2 = \frac{1}{D}\left(- S_x \cdot S_y + S \cdot S_{xy}\right) =}$$

$$= \frac{1}{D}\left\{ - \mathop{?}\limits_{1}^{N}{}_i \frac{x_i}{s_i^2} \cdot \mathop{?}\limits_{1}^{N}{}_i \frac{y_i}{s_i^2} + \mathop{?}\limits_{1}^{N}{}_i \frac{1}{s_i^2} \cdot \mathop{?}\limits_{1}^{N}{}_i \frac{x_i\, y_i}{s_i^2} \right\}$$

$$\boxed{s_{a_1}^2 = A_{11}^{-1} = \frac{1}{D} \cdot S_{xx}} = \frac{1}{D} \mathop{?}\limits_{1}^{N}{}_i \frac{x_i^2}{s_i^2}$$

$$\boxed{s_{a_2}^2 = A_{22}^{-1} = \frac{1}{D} \cdot S} = \frac{1}{D} \cdot \mathop{?}\limits_{1}^{N}{}_i \frac{1}{s_i^2}$$

$$\boxed{\mathrm{cov} = (a_1 a_2) = - \frac{1}{D} \cdot S_x} = - \frac{1}{D} \cdot \mathop{?}\limits_{1}^{N}{}_i \frac{x_i}{s_i^2}$$

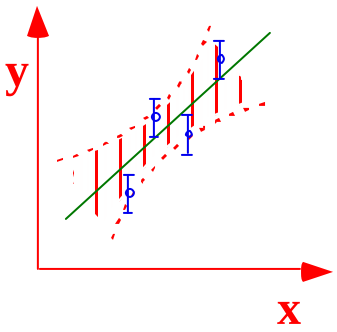
$$D = S \cdot S_{xx} - S_x^{\,2}$$

ES. Calcolo banda errore intorno a soluzione

$$s_{\hat{y}}^{2} = ?_{1}^{n}{}_{j}\; ?_{1}^{n}{}_{k} \left(\frac{?y}{?a_j}\right)\cdot\left(\frac{?y}{?a_k}\right)\cdot \mathrm{cov}\,(a_j, a_k) =$$

$$= ?_{1}^{n}{}_{j}\; ?_{1}^{n}{}_{k}\; f_j(x)\cdot f_k(x)\cdot \mathrm{cov}\,(a_j, a_k) =$$

$$= f_1(x)\cdot f_1(x)\cdot \mathrm{cov}\,(a_1, a_1) + f_2(x)\cdot f_2(x)\cdot \mathrm{cov}\,(a_2, a_2) +$$



$$+\ 2f_1(x)\cdot f_2(x)\cdot \mathrm{cov}\,(a_1, a_2) =$$

$$= s_{a_1}^{2} + x^2\, s_{a_2}^{2} + 2x\,\mathrm{cov}(a_1, a_2) =$$

$$= \frac{1}{D}\left(S_{xx} + x^2\cdot S - 2x\ S_x\right)$$

$$= \frac{1}{D}\left(?_{1}^{N}{}_{i}\,\frac{x_i^2}{s_i^2} + x^2\cdot ?_{1}^{N}{}_{i}\,\frac{1}{s_i^2} - 2x\, ?_{1}^{N}{}_{i}\,\frac{x_i}{s_i^2}\right)$$

Notare: $s_{\hat{y}}^{2}$ è funzione della x

Minimo di $s_{\hat{y}}^{2}$: $\left(\frac{?s_{\hat{y}}^{2}}{?x} = 0\right)$

$$2x_{min}\cdot S = 2\cdot S_x$$

$$x_{min} = \frac{S_x}{S}$$

Se s^2 uguali: $x_{min} = \cancel{s^2}\,\frac{?_i\, x_i/\cancel{s^2}}{N} = \bar{x}$

Per vedere che A^{-1} è la matrice delle covarianze:

$\hat{a}_k$: funzione delle y_i ($i = 1, N$) con varianza s_i^2 .
(*indipendenti*)

Dalla legge di propagazione degli errori:

$$\mathrm{cov}\,(\hat{a}_k, \hat{a}_j) = \overset{N}{\underset{1}{?}}{}_k \; \frac{?a_k}{?y_i} \cdot \frac{?a_j}{?y_i} \cdot s_i^2$$

Dato che y_i <u>indipendenti</u>

$$\mathrm{cov}\,(a_1, a_1) = \overset{N}{\underset{1}{?}}{}_i \left(\frac{?a_1}{?y_i}\right)^2 \cdot s_i^2$$

$$a_1 = A_{11}^{-1} \cdot b_1 + A_{12}^{-1} b_2$$

$$\frac{?a_1}{?y_i} = A_{11}^{-1} \cdot \frac{1}{s_i^2} + A_{12}^{-1} \cdot \frac{x_i}{s_i^2}$$

$$a_2 = A_{21}^{-1} \cdot b_1 + A_{22}^{-1} \cdot b_2$$

$$\frac{?a_2}{?y_i} = A_{21}^{-1} \cdot \frac{1}{s_i^2} + A_{22}^{-1} \cdot \frac{x_i}{s_i^2}$$

$$b_1 = \overset{N}{\underset{1}{?}}{}_i \; \frac{y_i}{s_i^2}$$

$$b_2 = \overset{N}{\underset{1}{?}}{}_i \; \frac{x_i \; y_i}{s_i^2}$$

Abbiamo dimostrato che:

$$y = y(\bar{x})$$

$$s_y^2 = \text{var}\,(y) \simeq\ ?_i\ ?_j\ \frac{?y}{?x_i}\,\frac{?y}{?x_j}\ V_{ij}(\underline{x})$$

se y è un vettore: $\underline{y}(\underline{x}) = y_1(\bar{x}), y_2(\bar{x}) \ldots$

Si può dimostrare che:

$$\text{cov}(y_l\,,\, y_m) = V_{l,m} \simeq\ ?_i\ ?_j\ \frac{?y_l}{?x_i}\,\frac{?y_m}{?x_j}\ V_{ij}(\underline{x})$$

$$\text{cov}\,(a_1, a_1) = \sum_{1}^{N}{}_i \left(\frac{?a_1}{?y_i}\right)^2 s_i^2 = \sum_{1}^{N}{}_i \frac{1}{s_i^2} \left(A^{-1}_{11} + A^{-1}_{12}\, x_i\right)^2 =$$

$$= \sum_{1}^{N}{}_i \frac{1}{s_i^2} \left\{(A^{-1}_{11})^2 + (A^{-1}_{12})^2 \cdot x_i^2 + 2A^{-1}_{11}A^{-1}_{12}\, x_i \right\} =$$

$$= (A^{-1}_{11})^2 \cdot s + (A^{-1}_{12})^2\, s_{xx} + 2A^{-1}_{11}\, A^{-1}_{12}\, s_x =$$

$$= (A^{-1}_{11})^2 \cdot A^{-1}_{22} \cdot D + (A^{-1}_{12})^2\, A^{-1}_{11} \cdot D +$$

← *vedi pagina precedente*

$$+\, 2A^{-1}_{11}\, A^{-1}_{12} \cdot (-A^{-1}_{12}) \cdot D =$$

$$= D\{A^{-1}_{11} \cdot [A^{-1}_{11} \cdot A^{-1}_{22} + \cancel{(A^{-1}_{12})^2} - \cancel{2}(A^{-1}_{12})^2]\} =$$

$$= D\{A^{-1}_{11}\, \underbrace{[A^{-1}_{11} \,.\, A^{-1}_{22} - (A^{-1}_{12})^2}_{\text{DET}\,(A^{-1}) = \frac{1}{D}}\} = A^{-1}_{11}$$

Analogamente:

$$\text{cov}\,(a_2, a_2) = A^{-1}_{22}$$

$$\text{cov}\,(a_1, a_2) = A^{-1}_{12}$$

Dipendenza degli errori su a_1 e a_2 dal N. misure

Assumiamo tutti i σ_i uguali

$$D = S_{xx} \cdot S - (S_x)^2 = \sum_{1}^{N}{}_i \frac{x_i^2}{\sigma^2} \cdot \frac{N}{\sigma^2} - \left(\sum_{1}^{N}{}_i \frac{x_i}{\sigma^2} \right)^2$$

$$= \frac{N^2}{\sigma^4} \sum_{1}^{N}{}_i \frac{x_i^2}{N} - \frac{N^2}{\sigma^4} \left(\sum_{1}^{N}{}_i \frac{x_i}{N} \right)^2 =$$

$$= \frac{N^2}{\sigma^4} \cdot (\overline{x^2} - \overline{x}^2)$$

$$\sigma_{a_2}^2 = \frac{1}{D} \sum_{1}^{N}{}_i \frac{1}{\sigma^2} = \frac{\sigma^{\cancel{4}\,2}}{\cancel{N^2}\,(\overline{x^2} - \overline{x}^2)} \cdot \frac{\cancel{N}}{\cancel{\sigma^2}} = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sigma^2}{(\overline{x^2} - \overline{x}^2)}$$

$$\sigma_{a_1}^2 = \frac{1}{D} \sum_{1}^{N}{}_i \frac{x_i^2}{\sigma^2} = \frac{\sigma^4}{N^2 (\overline{x^2} - \overline{x}^2)} \cdot \frac{N}{\sigma^2} \cdot \overline{x^2} = \frac{1}{N} \cdot \frac{\sigma^2\, \overline{x^2}}{(\overline{x^2} - \overline{x}^2)}$$

Gli errori sulla stima dei parametri diminuiscono all'aumentare del N. dei punti misurati (a parità di intervallo in x) come $\frac{1}{\sqrt{N}}$.

Se: tutte $\sigma_i = \sigma$

Cambio sistema di riferimento:

$$x_o = \frac{\Sigma_i x_i}{N} \qquad y_o = \frac{\Sigma_i y_i}{N}$$

$$\begin{cases} x_i' = x_i - x_o \\ y_i' = y_i - y_o \end{cases} \qquad \textbf{(ATT: b' } \neq \textbf{ b)} \longrightarrow \Sigma_i x_i' = 0$$

$$S = \frac{N}{\sigma^2} \qquad S_x = 0 \qquad S_{xx} = \frac{1}{\sigma^2} \Sigma_i x_i'^2 \qquad S_{xy} = \frac{1}{\sigma^2} \Sigma_i x_i' y_i$$

$$S_y = \frac{1}{\sigma^2} \Sigma y_i$$

$$D = S \cdot S_{xx}$$

$$a = \frac{1}{\cancel{S} \cdot S_{xx}} \cdot \cancel{S} \cdot S_{xy} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{\Sigma_i x_i' y_i}{\Sigma_i x_i'^2}$$

$$b = \frac{1}{S \cdot \cancel{S_{xx}}} \cdot \cancel{S_{xx}} \cdot S_y = \frac{S_y}{S} = \frac{\Sigma_i y_i}{N}$$

$$\sigma_a^2 = \frac{1}{\cancel{S} \cdot S_{xx}} \cancel{S} = \frac{1}{S_{xx}} \qquad \sigma_b^2 = \frac{1}{S \cdot S_{xx}} S_{xx} = \frac{1}{S} = \frac{\sigma^2}{N}$$

$$\mathrm{cov}\,(a, b) = -\frac{1}{S \cdot S_{xx}} \cdot S_x = 0$$

TEST DI IPOTESI

Confronto di dati sperimentali con predizioni di un modello (o più modelli) e accettazione del modello (o scelta fra più modelli).

DATI SPERIMENTALI (*estrazione di un campione*)

↓

STIMA DEI PARAMETRI DEL MODELLO

↓

TEST DEL MODELLO / SCELTA FRA MODELLI

1. **Date due ipotesi H_0 e H_1 stabilire quale delle due sia statisticamente più accettabile sulla base dei dati.**

2. **Data una ipotesi H_0 stabilire se è accettabile o no sulla base dei dati sperimentali.**

ESEMPIO:

Campione di monete buone + monete false

buone : peso x_1

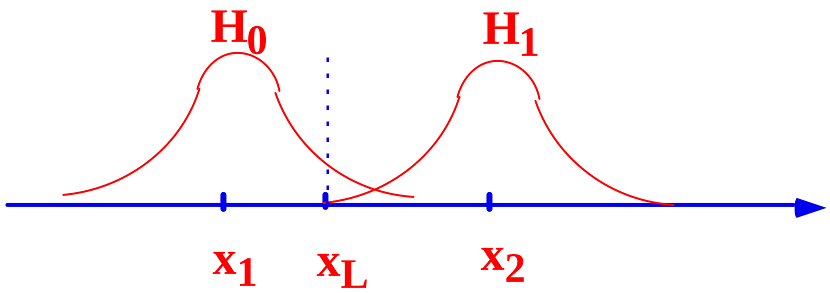
false: peso x_2

Bilancia con errore gauss. (s)

Una moneta
x

H_0 : appartenente a N (x_1, s)

H_1 : appartenente a N (x_2, s)



Si fissa a priori un valore x_L

H_0	**vera se $x = x_L$**	**$-8 , x_L$**
H_1	**vera se $x > x_L$**	**$x_L , 8$**

Fissato x_L :

$$a = \int_{x_L}^{8} \frac{1}{\sqrt{2p}\; s} \, e^{-\frac{(x - x_2)^2}{2 s^2}} \, dx$$

Probabilità di rigettare H_0, anche se vera

$$b = \int_{-8}^{x_L} \frac{1}{\sqrt{2p}\; s} \, e^{-\frac{(x - x_2)^2}{2 s^2}} \, dx$$

Probabilità di accettare H_1, anche se falsa

a : significatività del test (100 · a = livello di significatività in %).
(confidence level)

1 - b : potenza del test (probabilità di rigettare ipotesi sbagliata).

ES. H_0 : grandezza fisica ha distribuzione gaussiana $N(\mu_o, \sigma_o)$

Si accetta l'ipotesi H_0 se $x_1 < x < x_2$

$$|x_1| = |x_2| = n\,\sigma_o$$

$$\alpha = -1 \int_{\mu_o - n\sigma_o}^{\mu_o + n\sigma_o} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_o}\, e^{-\frac{(x-\mu_o)^2}{2\sigma_o^2}}\, dx$$

In questo caso β non può essere definito

Più in generale, dato un certo test di ipotesi, si definisce:

Statistica di controllo: grandezza, funzione dei dati sperimentali, sulla base della quale si effettua la selezione di ipotesi.

Ipotesi accettate se: α = stat. controllo = β
La regione di accettanza (α, β) dovrà avere la massima potenza di reiezione una volta fissata la significatività del test.

DISTRIBUZIONE DEL χ^2 E TEST DEL χ^2

Date n variabili gaussiane indipendenti $x_i(\mu_i, \sigma_i)$, la variabile:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}$$

E' ancora una variabile casuale con:

$$f_n(\chi^2) = \frac{1}{2^{n/2}\,\Gamma(\frac{n}{2})}\, e^{-\chi^2/2} \cdot (\chi^2)^{\frac{n}{2}-1}$$

Funzione Γ: $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$

$$\begin{cases} n = 1 & \Gamma(\frac{1}{2}) = \pi \\ n = 2 & \Gamma(1) = 1 \end{cases}$$

n pari $\Gamma(\frac{n}{2}) = (\frac{n}{2} - 1)!$

n dispari $\Gamma(\frac{n}{2}) = (\frac{n}{2} - 1)(\frac{n}{2} - 2) \ldots \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \pi$

n (N. di gradi di libertà) $\equiv$ N. di variabili <u>indipendenti</u>

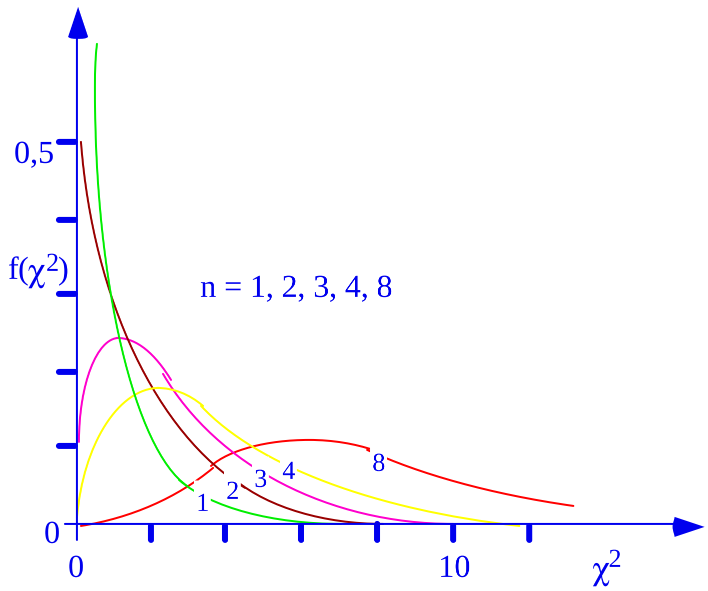
$$\mu(\chi^2) = n$$

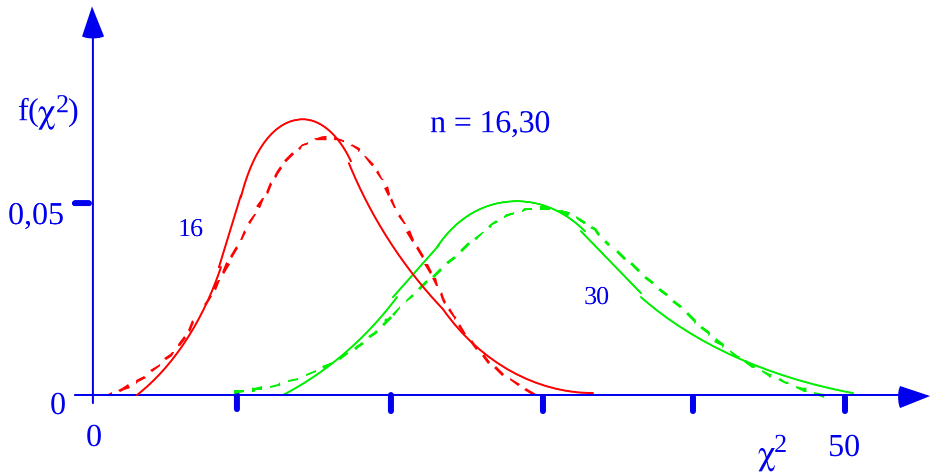
$$\sigma^2(\chi^2) = 2n$$

Per n = 1 f_1 **diverge per** $\chi^2 \rightarrow 0$

Per n = 2 f_2 **0.5 per** $\chi^2 = 0$

n grande tende alla gaussiana con stesso μ, σ.

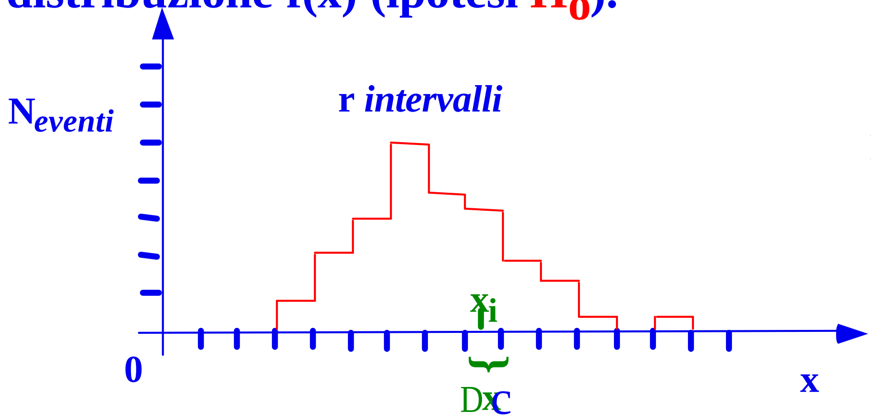




AS-142

TEST DI IPOTESI (statistica di controllo χ^2)

Supponiamo di aver estratto un campione di dimensione **N** dalla popolazione di una variabile casuale (continua) (cioè aver fatto **N** misure di una grandezza fisica) e di voler verificare se questa variabile segue una certa funzione di distribuzione f(x) (ipotesi H_o).



N_{eventi}: N volte che si è osservato il valore $x_i \pm \Delta x/2$

Generico intervallo i:

$p_i = f(x_i)\Delta x$

n_i : N di eventi in i

$$\sum_1^r n_i = N$$

n_i avrà distribuzione binomiale con:

$$\mu_i = N \cdot p_i$$

$$\sigma_i^2 = N \cdot p_i \cdot (1 - p_i)$$

Dato che per $N \to \infty$ la binomiale tende a gaussiana, potremo dire che la variabile:

$$\chi^2 = \frac{\sum_{1}^{r}{}_i\ (n_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2} = \frac{\sum_{1}^{r}{}_i\ (n_i - N\,p_i)^2}{N\,p_i \cdot (1 - p_i)}$$

r : N. di intervalli considerati

ha come funzione di distribuzione $\sim f_{r-1}(\chi^2)$

Segue la funzione di distribuzione del χ^2 con r - 1 gradi di libertà

(r -1 dato che: $\sum_{i=1}^{r} n_i = N$; uno degli n_i non è indipendente).

La variabile casuale:

$$\chi^2$$

sarà la *"statistica di controllo"*

$\mu_i = Np_i$ sarà il valore aspettato per l'iesimo intervallo.

(p_i : probabilità, per la variabile casuale x_i, di trovarsi nell'intervallo i, calcolata sulla base dell'ipotesi teorica f(x))

Detto μ_i il N. di eventi aspettati nell'intervallo i, la varianza

σ_i^2 potrà essere ottenuta anche dalla distribuzione di Poisson;

$\sigma_i^2 = \mu_i$.

$$\chi^2 = \frac{\sum_{i=1}^{r} (n_i - \mu_i)^2}{\mu_i}$$

Si fissa a priori il livello di significatività del test, α.
Fissato α, dato che f. di distribuzione della statistica di controllo è nota, si ottiene χ^2_{LIM} .

$$\int_{\chi^2_{LIM}}^{\infty} f_{r-1}(\chi^2)\, d\chi^2 = \alpha$$

r-1: *n. di gradi di libertà*

Se $\chi^2_{MIS} = \chi^2_{LIM}$ $\quad H_o$ *accettata*

$\chi^2_{MIS} > \chi^2_{LIM}$ $\quad H_o$ *rigettata*

NOTA

Per $r = n_D >> 1$, $f(\chi^2) \rightarrow$ gaussiana.
Quindi la variabile y:

$$y = \frac{\chi^2 - n_D}{\sqrt{2n_D}}$$

sarà gaussiana con valore aspettato = 0 e varianza 1.

Migliore approssimazione (Fisher): $y = \sqrt{2\chi^2} - \sqrt{2n_D - 1}$

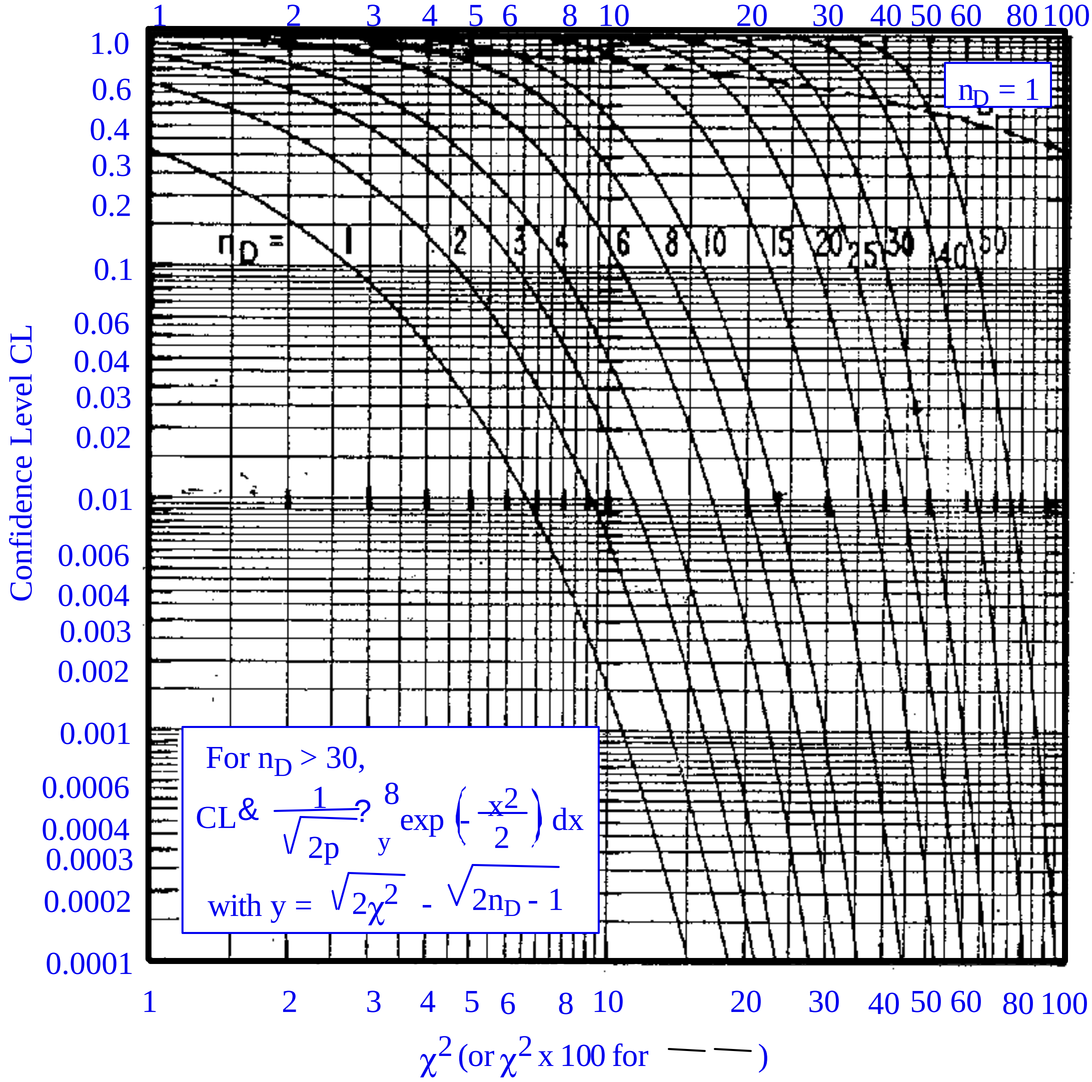
NOTARE:

1) **Test valido se variabile casuale n_i è gaussiana ($\rightarrow \mu_i \cong 10$).**

2) **Arbitrarietà del test: scelta Δx istogramma.**

3) **Dato che la statistica di controllo opera sui quadrati, non può evidenziare discrepanze sistematiche di segno.**

c2 confidence level vs. c2 for nD degrees of freedom



4) **Il test del c^2 potrà essere utilizzato per verificare fit con minimi quadrati:**

$$y = ax + b$$

$x_1 \quad y_1 \pm s_1$

$x_2 \quad y_2 \pm s_2$

$\cdot \quad \cdot\cdot\cdot\cdot\,\cdot$

$\cdot \quad \underbrace{\cdot\cdot\cdot\cdot\,\cdot}$

distribzione gaussiana

N_p punti misurati

$$c^2_{N_{p\,-\,2}} = \frac{S_i\,(y_i - \{ax_i + b\})^2}{s_i^2}$$

$ax_i + b = \mu_i$: ***se la mia ipotesi* (y = ax + b) *è corretta***

a, b: ***stima con il metodo dei minimi quadrati***

Il test di compatibilità di N istogrammi sperimentali della stessa variabile casuale (*grandezza fisica*) di cui si ignora funzione di distribuzione

$$c^2 = \sum_{1j}^{N} \sum_{1i}^{r} \frac{(n_{ij} - \hat{p}_i N_j)^2}{\hat{p}_i N_j}$$

r: ***N. di intervalli***

n_{ij}: ***N. eventi, intervallo* i *istogramma* j**

n_j: ***N. totale eventi, istogramma* j**

$$\hat{p}_i = \frac{\sum_{j=1}^{N} n_{ij}}{\sum_{j=1}^{N} N_j}$$ *(definzione frequenzistica di probabilità)*

N. di gradi di libertà: (N - 1) (r - 1)

infatti

N. di variabili indipendenti = (N · r - N)

N. di parametri stimati = (r - 1)

Nel caso di egual numero di eventi negli istogrammi

(*2 istogrammi*)

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(n_{i1} - n_{i2})^2}{n_{i1} + n_{i2}}$$ **(*banale*)**

ES. *Errore sull'errore quadratico medio*

$$s^2 = \frac{S_i^{N}\ (x_i - \bar{x})^2}{N - 1}$$

La variabile casuale:

$$\frac{S_i\ (x_i - \bar{x})^2}{s^2} \longrightarrow c^2 \quad (N - 1)$$

(N - 1 in quanto la $\boxed{\bar{x}}$ introduce una correlazione fra le x_i).

$$u = c^2\,(N - 1) = \frac{N - 1}{s^2} \cdot s^2 \longrightarrow s^2 = \frac{s^2}{N - 1} \cdot c^2\,(N - 1)$$

$$E[u]\ \mu\ (u) = N - 1 \qquad\qquad s^2 = f(\,c^2\,(N - 1))$$

$$E[(u - \mu)^2] = s^2\,(u) = 2(N - 1) \qquad\qquad s^2_{s^2} = \left(\frac{?f}{?\,c^2}\right)^2 \cdot\ s^2_{c^2}$$

$$\left(\frac{?f}{?\,c^2}\right) \longrightarrow \left(\frac{s^2}{N - 1}\right)^2$$

$$s^2_{s^2} = \frac{s^4}{(N - 1)^2} \cdot \underbrace{s^2_{\mu}}_{2 \cdot (N - 1)} = \frac{2 \cdot s^4}{(N - 1)} = \frac{2 \cdot s^4}{N - 1}$$

$$s^2_{s} = \left(\frac{ds}{ds^2}\right)^2 s^2_{s^2} = \frac{1}{4\,s^2}\ \frac{2\ s^4}{N - 1} = \frac{s^2}{2(N - 1)}$$

$$\frac{ds}{ds^2} \longrightarrow\ = \frac{1}{2s}$$

$$s_s = \frac{s}{\sqrt{2\,(N - 1)}}$$

(errore sull'errore quadratico medio)

Per l'errore sulla media:

$$s_{\bar{x}} = \frac{s}{\sqrt{N}}$$

L'errore sull'errore sulla media $\left(= \frac{s}{\sqrt{N}} \right)$**:**

$$s_{s_{\bar{x}}} = \frac{s}{\sqrt{2\,(N - 1)}}$$