1. Fectorau

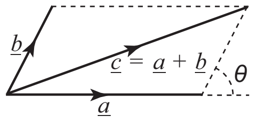
Mae grym, cyflymder a chyflymiad yn fesuriadau â maint a chyfeiriad, ac felly'n **fectorau**. Defnyddir teip trwm, $\boldsymbol{a}$, neu danlinelliad $\underline{a}$, ar gyfer fector. Caiff ei lunio ar ffurf **segment, llinell wedi'i chyfeirio**, fel y dangosir. Mae hyd y llinell yn cynrychioli maint y fector, tra bod ei gogwydd a'r saeth yn dangos ei gyfeiriad.

Dynodir maint y fector $\underline{a}$ gan $|\underline{a}|$ neu a. Mae **fector uned** â maint 1. Mae $-\underline{a}$ yr un maint ag $\underline{a}$ ond mae i'r cyfeiriad dirgroes.

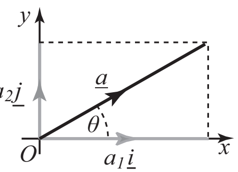
Adiad: Mae'r rheol paralelogram yn diffinio adiad dau fector. $\underline{c} = \underline{a} + \underline{b} = \underline{b} + \underline{a}$.

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2\,a\,b\,\cos\theta.$$

θ yw'r ongl rhwng $\underline{a}$ a $\underline{b}$, a $\underline{c}$ yw **cydeffaith** $\underline{a}$ a $\underline{b}$.



Cydrannau Petryal: Mae $\underline{i}$ a $\underline{j}$ yn dynodi fectorau uned yng nghyfeiriad positif yr echelinau x ac y, yn ôl eu trefn. Mewn dau ddimensiwn, gellir ysgrifennu'r fector $\underline{a}$ fel swm dwy gydran betryal fector: $\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j}$ neu $\underline{a} = (a_1, a_2)$. Rhoddir y cydrannau sgalar a_1 ac a_2 gan $a_1 = a\cos\theta$, $a_2 = a\sin\theta$, lle mae θ yn dynodi'r ongl mae $\underline{a}$ yn ei wneud â'r echelin bositif x. Gall unrhyw fector gael ei amnewid â'i gydrannau petryal, gan gychwyn o'r un pwynt.



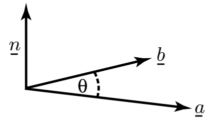
Mae defnyddio theorem Pythagoras yn rhoi $|\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Mae hyn yn ymestyn yn naturiol i dri dimensiwn, lle gellir ysgrifennu fector fel

$$\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k} \quad \text{ac} \quad |\underline{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2},$$

lle mae $\underline{k}$ yn fector uned yng nghyfeiriad positif yr echelin z.

Lluoswm Sgalar a Lluoswm Fector:
Os yw $\underline{a} = a_1\underline{i} + a_2\underline{j} + a_3\underline{k}$ a $\underline{b} = b_1\underline{i} + b_2\underline{j} + b_3\underline{k}$ yna mae

$$\underline{a}\cdot\underline{b} = |\underline{a}|\,|\underline{b}|\cos\theta,$$
$$\underline{a}\cdot\underline{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$
$$\underline{a}\times\underline{b} = |\underline{a}|\,|\underline{b}|\sin\theta\,\underline{n}.$$



θ yw'r ongl rhwng $\underline{a}$ a $\underline{b}$, ac mae $\underline{n}$ yn fector uned sy'n berpendicwlar i'r plân sy'n cynnwys $\underline{a}$ a $\underline{b}$ a gaiff ei ddiffinio gan y rheol llaw dde.

$$\underline{a}\times\underline{b} = \begin{vmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$
$$= (a_2b_3 - a_3b_2)\underline{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\underline{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\underline{k}$$

2. Deddfau Newton

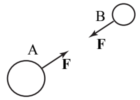
Deddf mudiant gyntaf Newton: Bydd gwrthrych yn aros yn ddisymud neu'n parhau â'i fudiant unffurf mewn llinell syth oni bai y gorfodir newid gan rymoedd a weithredir arno. Dilyna o hyn ar gyfer gwrthrych mewn cydbwysedd fod grym cydeffaith $\underline{R} = (R_x, R_y, R_z)$ yr holl rymoedd sy'n gweithredu arno yn sero. Felly mae

$$\underline{R} = \underline{0},\ R_x = 0,\ R_y = 0,\ R_z = 0,$$

lle mae R_x, R_y ac R_z yn dynodi symiau net cydrannau sgalar x, y a z y grymoedd, yn ôl eu trefn.

Ail ddeddf mudiant Newton: Os yw gwrthrych â màs m yn symud â chyflymder $\underline{v}$, ac felly â **momentwm** $m\underline{v}$, mae cyfradd newid y momentwm mewn cyfrannedd union â grym cydeffaith, $\underline{F}$, sydd arno: $\underline{F} = \dfrac{d}{dt}(m\underline{v})$. Ar gyfer gwrthrych â chyflymiad cyson $\underline{a}$ a màs *cyson* m, mae'r hafaliad uchod yn symleiddio i $\underline{F} = m\dfrac{d\underline{v}}{dt} = m\underline{a}$. Mae'r hafaliad fector hon yn gyfwerth â'r hafaliadau sgalar: $F_x = ma_x$, $F_y = ma_y$ ac $F_z = ma_z$, lle mae $\underline{F} = (F_x, F_y, F_z)$ ac $\underline{a} = (a_x, a_y, a_z)$.

Trydedd deddf mudiant Newton:
Am bob gweithred, mae yna adwaith hafal a dirgroes. Felly, mae grymoedd ar wrthrychau sy'n rhyngweithio yn dod mewn parau.



Pryd bynnag mae'r gwrthrych A yn gweithredu grym $\underline{F}$, maint F, ar wrthrych B, mae B yn gweithredu grym $-\underline{F}$ ar y gwrthrych A.

Deddf Disgyrchiant Newton: Yn y bydysawd, mae pob gwrthrych yn atynnu pob gwrthrych arall â grym sydd mewn cyfrannedd union â lluoswm y masau ac mewn cyfrannedd wrthdro â sgwâr y pellter rhyngddynt. Felly mae $F_g = G\dfrac{m_1m_2}{r^2}$, lle mae F_g yn dynodi maint y grym disgyrchiant ar y naill wrthrych neu'r llall, m_1 a m_2 yw eu masau a r yw'r pellter rhyngddynt. Gelwir G yn gysonyn disgyrchiant. Derbynnir mai ei werth yw $G = 6.673\times10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}s^{-2}}$.

3. Unedau

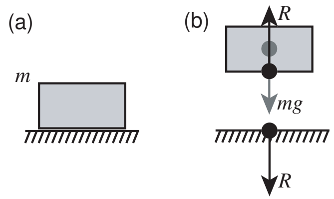
Mae'r system SI yn defnyddio'r unedau canlynol:

Mesur	Uned	Symbol
Màs	kilogram	kg
Hyd	metr	m
Amser	eiliad	s
Grym	newton	N ($1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}$)
Gwaith	joule	J ($1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{N\,m}$)
Pŵer	wat	W ($1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J\,s^{-1}}$)
Cyflymder	metr yr eiliad	$\mathrm{m\,s^{-1}}$
Cyflymiad	metr yr eiliad yr eiliad	$\mathrm{m\,s^{-2}}$
Egni	joule	J
Momentwm	newton eiliad	N s
Ergyd	newton eiliad	N s
Cyflymder onglaidd/ Amledd cylchdro	radian yr eiliad	rad $\mathrm{s^{-1}}$

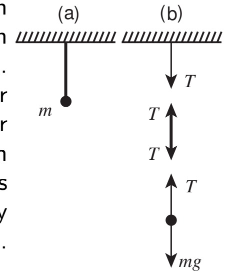
4. Grymoedd (1)

Pwysau: Diffinnir pwysau gwrthrych, â màs m, fel y grym $\underline{W}$, sy'n ei atynnu at y Ddaear. Rhoddir ei faint, W, gan y Ddeddf Disgyrchiant fel $W = mGM/R^2$, lle mae R a M yn dynodi radiws a màs y Ddaear yn ôl eu trefn. Rhoddir y pwysau hefyd gan Ail Ddeddf Newton. Os yw gwrthrych yn disgyn dan effaith disgyrchiant â chyflymiad cyson g 'yn agos i arwyneb y Ddaear', mae $\underline{W} = m\underline{g}$ ac felly mae $g = GM/R^2$; $g \approx 9.81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$.

Adwaith: Mae diagram (a) yn dangos bloc, â màs m, yn gorffwys ar arwyneb llorweddol. Mae'r bloc a'r arwyneb yn rhyngweithio, gan weithredu grymoedd adwaith normal, hafal a dirgroes, maint R ar ei gilydd. Mae diagram (b) yn *ddiagram gwrthrych wedi'i wahanu* ar gyfer y bloc. Mae'r bloc yn ddisymud, ac felly o 2il Ddeddf Newton, mae $R = mg$.

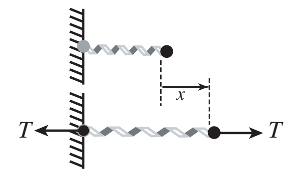


Tensiwn: (i) Llinynnau ysgafn, anestynadwy.
Yn niagram (a), mae màs m yn hongian mewn cydbwysedd ar ben llinyn anestynadwy sydd ynghlwm i'r nenfwd. Mae'r **tensiwn** yn unrhyw bwynt o'r llinyn yn hafal i'r grym a weithredir ar y pwynt hwnnw. Dywedir fod y llinyn yn 'ysgafn' os yw ei bwysau'n ddibwys mewn cymhariaeth â'r pwysau mg, felly mae'r tensiwn, T, yn gyson gydol ei hyd.



Mae'r diagram gwrthrych wedi'i wahanu, (b), yn dangos y grymoedd sydd ar y màs a'r llinyn, yn ogystal â'r tensiwn ar y nenfwd. O 2il Ddeddf Newton, mae $T = mg$.

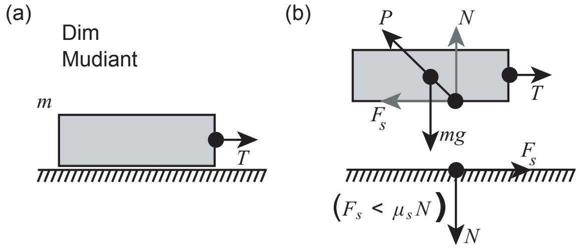
Tensiwn: (ii) Llinynnau elastig neu sbringiau (Deddf Hooke).
Dangosodd Hooke fod y tensiwn, T, mewn llinyn elastig, mewn cyfrannedd union â'r estyniad, x, ac mewn cyfrannedd wrthdro â hyd naturiol y llinyn, L, cyn belled nad yw'r estyniad yn rhy fawr:
$T = \lambda x/L$, λ yw modwlws elsastigedd Young, neu
$T = kx$ lle gelwir $k = \lambda/L$ yn 'gysonyn sbring' neu'n 'anhyblygedd sbring'.



www.mathcentre.ac.uk
ⓗmathcentre 2013

5. Grymoedd (2)

Ffrithiant: Gelwir y grym sy'n atal, neu'n ceisio atal, llithriad dau arwyneb yn **ffrithiant**. Pan fo arwyneb un gwrthrych yn llithro dros un arall, mae'r naill wrthrych yn rhoi grym ffrithiannol ar y llall, yn baralel i'r arwynebau. Mae'r grym ffrithiannol ar wrthrych yn ddirgroes i gyfeiriad ei fudiant. Gall grymoedd ffrithiannol weithredu pan nad oes mudiant cymharol, fel y dangosir.



Yn niagram (a), mae llinyn ynghlwm wrth floc â phwysau $\underline{W} = m\underline{g}$ ac mae tensiwn, $\underline{T}$, yn y llinyn fel bo'r bloc yn aros yn ddisymud. Diagram (b) yw'r diagram gwrthrych wedi'i wahanu cyfatebol. $\underline{P}$ yw'r grym a roddir ar y bloc gan yr arwyneb. $\underline{N}$ a $\underline{F}_s$ yw cydrannau $\underline{P}$ yn normal a'n baralel i'r arwyneb. Gelwir $\underline{F}_s$ yn rym ffrithiant statig. O 2il ddeddf Newton, mae

$$\underline{N} = -\underline{W} \quad \text{a} \quad \underline{F}_s = -\underline{T}$$

â'r ffurfiau sgalar cyfatebol yn

$$N = W \quad \text{a} \quad F_s = T.$$

Wrth gynyddu $\underline{T}$, cyrhaeddir gwerth terfannol, ac mae'r bloc yn dechrau symud. Felly, mae gwerth macsimwm pendant ar gyfer $\underline{F}_s$. Mae maint y gwerth macsimwm hwn yn dibynnu ar y grym normal $\underline{N}$, ac mae'r hafaliad

$$F_s(\text{macs}) = \mu_s N,$$

lle gelwir μ_s yn gyfernod ffrithiant statig, yn ddeddf empirig ddefnyddiol. Gall maint gwir rym ffrithiant statig gymeryd unrhyw werth rhwng 0 a F_s(macs). Felly mae

$$F_s \leq \mu_s N.$$

Yn syth ar ôl i'r llithro ddechrau, mae'r grym ffrithiant yn lleihau. Mae'r grym ffrithiant newydd hwn, $\underline{F}_k$, hefyd yn dibynnu ar y grym normal. Y ddeddf empirig a ddefnyddir yw

$$F_k = \mu_k N,$$

lle mae μ_k yn dynodi cyfernod ffrithiant llithro (neu ginetig). Mae gwerthoedd μ_s a μ_k yn dibynnu ar natur y ddau arwyneb sydd mewn cysylltiad.

6. Cinemateg: Mudiant Unionlin

Mae **gronyn** yn wrthrych y gellid ei fodelu fel màs pwynt mewn cyd-destun penodol. Er enghaifft, gall y planedau a'r Haul gael eu hystyried fel gronynnau pan yn ystyried mudiant planedau o gwmpas yr Haul.

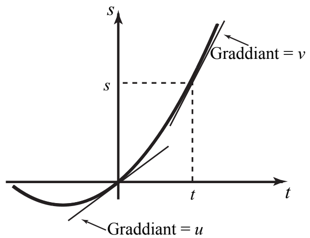
Cinemateg yw'r astudiaeth o fudiant gronynnau a gwrthrychau anhyblyg gan beidio rhoi unrhyw ystyriaeth i'r grymoedd sy'n angenrheidiol i achosi'r mudiant hwnnw. Mae mudiant unionlin yn ymwneud â mudiant un gronyn ar hyd llinell syth.

Cyflymiad cyson: Yr hafaliadau mudiant yw

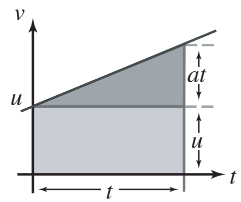
$$\begin{aligned} v &= u + at, \\ s &= \frac{1}{2}(u+v)t \quad \text{neu} \quad s = ut + \frac{1}{2}at^2, \\ v^2 &= u^2 + 2as. \end{aligned}$$

Yn yr uchod, mae a yn dynodi'r cyflymiad (cyson), t yr amser, v y cyflymder ar amser t, u y cyflymder pan fo $t = 0$, s y dadleoliad ar amser t, ac mae $s = 0$ pan fo $t = 0$. Mae'r hafaliadau yma i gyd yn deillio o $\dfrac{dv}{dt} = a$ a $\dfrac{ds}{dt} = v$.

Y gromlin hon yw'r **graff dadleoliad-amser** ar gyfer mudiant â chyflymiad cyson. Mae graddiant y tangiad ar amser t yn hafal i'r cyflymder ar amser t.



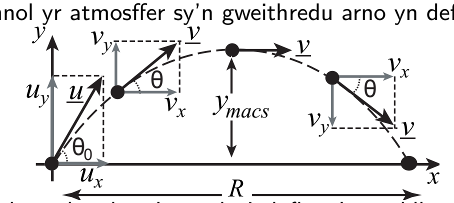
Mae'r diagram hwn yn dangos **graff cyflymder-amser** ar gyfer mudiant unionlin â chyflymiad cyson. Mae'r arwynebedd o dan graff cyflymder-amser yn hafal i'r dadleoliad. Mae graddiant y llinell yn cynrhychioli'r cyflymiad.



Cyflymiad anghyson: Yma mae'r cyflymiad, a, yn ffwythiant o amser, t. Fel ar gyfer cyflymiad cyson, mae'r hafaliadau mudiant yn deillio o integru $\dfrac{dv}{dt} = a(t)$ a $\dfrac{ds}{dt} = v$.

7. Mudiant mewn Plân: Teflynnau

Gelwir gwrthrych sydd â chyflymder cychwynol ac sydd yn dilyn llwybr sy'n cael ei reoli gan rym disgyrchiant a gwrthiant ffrithiannol yr atmosffer sy'n gweithredu arno yn deflyn.



Ystyriwch wrthrych sy'n cael ei daflu o'r tarddbwynt $(0, 0)$ â chyflymder cychwynnol $\underline{u} = (u_x, u_y)$ ar ongl gwyriad θ_0. Gadewch i (x, y) ddynodi ei gyfesurynnau a $\underline{v} = (v_x, v_y)$ ei gyflymder ar unrhyw amser t yn ddiweddarach. θ yw'r ongl mae $\underline{v}$ yn ei wneud â'r llorweddol, wedi'i mesur yn y cyfeiriad gwrth-glocwedd. Os anwybyddwn wrthiant aer, gellir disgrifio mudiant y teflyn fel cyfuniad o fudiant llorweddol sydd â chyflymder cyson a mudiant fertigol sydd â chyflymiad cyson. Mae hyn yn dilyn o Ail Ddeddf Newton, sydd yn y ffurf gydrannol, yn rhoi

$$\frac{dv_x}{dt} = 0, \text{ ac felly } v_x = u_x = u\cos\theta_0,$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -g, \text{ ac felly } v_y = u_y - gt = u\sin\theta_0 - gt.$$

Yna, rhoddir y buanedd v a'r ongl θ gan

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}, \qquad \tan\theta = \frac{v_y}{v_x}.$$

Cyfesurynnau'r teflyn yw

$$x = u_x t = (u\cos\theta_0)t,$$

$$y = u_y t - \frac{1}{2}gt^2 = (u\sin\theta_0)t - \frac{1}{2}gt^2.$$

Mae'r ddwy hafaliad uchod yn rhoi hafaliad y taflwybr yn nhermau'r paramedr t. Trwy ddileu t, yr hafaliad yn nhermau x ac y yw

$$y = (\tan\theta_0)x - \frac{g}{2u^2\cos^2\theta_0}x^2.$$

Hafaliad parabola yw hon. Ar y pwynt uchaf, mae'r cyflymder fertigol, v_y, yn sero, ac felly'r amser a gymerir i gyraedd y pwynt hwn yw $\dfrac{u\sin\theta_0}{g}$. Rhoddir uchder y pwynt hwn gan $y_{\text{macs}} = \dfrac{u^2\sin^2\theta_0}{2g}$. Yr amrediad llorweddol, R, yw'r pellter llorweddol o'r pwynt cychwynnol i'r pwynt lle mae'r teflyn yn dychwelyd i'w uchder cychwynnol, ac felly lle mae $y = 0$. Felly $R = \dfrac{u^2\sin 2\theta_0}{g}$. Mae'r amrediad mwyaf yn digwydd pan fo $\sin 2\theta_0 = 1$, h.y. pan fo $\theta_0 = \dfrac{\pi}{4}$. Yna yr amrediad mwyaf yw $R_{\text{macs}} = \dfrac{u^2}{g}$.

8. Mudiant gronyn (1)

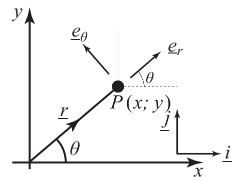
Os oes gan y gronyn, P, sy'n symud, y cyfesurynnau Cartesaidd (x, y), ei fector safle yw $\underline{r} = x\underline{i} + y\underline{j}$, lle mae x ac y yn ffwythiannau o amser, t. Gan fod $\underline{i}$ a $\underline{j}$ yn fectorau cyson, dilyna trwy ddifferu mai'r fectorau cyflymder a chyflymiad yw $\underline{v} = \dot{\underline{r}} = \dot{x}\underline{i} + \dot{y}\underline{j}$ ac $\underline{a} = \ddot{\underline{r}} = \ddot{x}\underline{i} + \ddot{y}\underline{j}$. Mae'r dot · yn dynodi deilliad yn ôl t. Mewn cyfesurynnau pegynlinol (r, θ), mae $x = r\cos\theta$ ac $y = r\sin\theta$. Diffinnir y fectorau uned rheiddiol a thangiadol fel $\underline{e}_r$ ac $\underline{e}_\theta$. Felly, mae

$$\underline{e}_r = \cos\theta\underline{i} + \sin\theta\underline{j}, \qquad \underline{e}_\theta = -\sin\theta\underline{i} + \cos\theta\underline{j},$$
$$\dot{\underline{e}}_r = -\sin\theta\,\dot{\theta}\underline{i} + \cos\theta\,\dot{\theta},\underline{j} = \dot{\theta}\,\underline{e}_\theta,$$
$$\dot{\underline{e}}_\theta = -\cos\theta\,\dot{\theta}\underline{i} - \sin\theta\,\dot{\theta}\underline{j} = -\dot{\theta}\,\underline{e}_r.$$

Mae'n dilyn fod

$$\underline{r} = r\underline{e}_r,$$
$$\dot{\underline{r}} = \dot{r}\underline{e}_r + r\dot{\theta}\underline{e}_\theta,$$
$$\ddot{\underline{r}} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\underline{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\underline{e}_\theta,$$

$\dot{\theta}$ yw'r **cyflymder onglaidd**, ω.

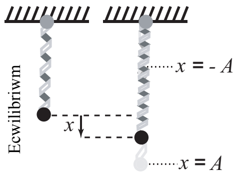


Mudiant Harmonig Syml: Gelwir mudiant gwrthrych sydd dan ddylanwad grym adferol sydd mewn cyfrannedd union â dadleoliad yn **Fudiant Harmonig Syml**. Ar gyfer mudiant màs pwynt, m, mewn un dimensiwn, e.e. osgiliadur màs-sbring, y grym yw $-kx$, k yw'r cysonyn sbring a x yw'r dadleoliad o gydbwysedd. Hafaliad y mudiant harmonig syml yw

$$-kx = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

neu $$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

lle mae $\omega^2 = k/m$.



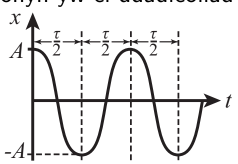
Datrysiad yr hafaliad yw

$$x(t) = C\cos\omega t + D\sin\omega t = A\cos(\omega t + \epsilon)$$

ar gyfer cysonion mympwyol C a D, ac yna

$$v(t) = -\omega A\sin(\omega t + \epsilon).$$

Mae'n dilyn fod $v^2 = \omega^2(A^2 - x^2)$. Yma, t yw'r amser, A yw'r osgled, sef gwerth mwyaf $|x|$, v yw'r cyflymder, ac ϵ yw'r ongl gwedd cychwynnol. Y cyfnod, τ, yw'r amser a gymerir i gwblhau osgiliad llawn. Yr amledd, f, yw nifer yr osgiliadau a wneir ymhob uned amser. ω yw'r amledd onglaidd a roddir gan $\omega = 2\pi/\tau = 2\pi f = \sqrt{k/m}$. Mae'r graff yn dangos $x(t)$ pan fo $\epsilon = 0$. Safle cychwynnol y gronyn yw ei ddadleoliad positif macsimwm. Mae'r buanedd yn facsimwm pan fo $x = 0$, h.y. yng nghanol yr osgiliad. Mae maint y cyflymiad yn facsimwm pan fo $|x| = A$.



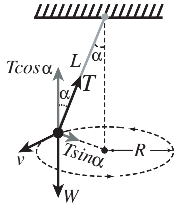
9. Mudiant gronyn (2)

Mudiant cylchol: Mewn mudiant cylchol, mae r yn gyson, felly mae $\dot{r} = \ddot{r} = 0$. Y fectorau cyflymder a chyflymiad yw

$$\dot{\underline{r}} = r\dot{\theta}\underline{e}_\theta, \qquad \ddot{\underline{r}} = -r\dot{\theta}^2\underline{e}_r + r\ddot{\theta}\underline{e}_\theta.$$

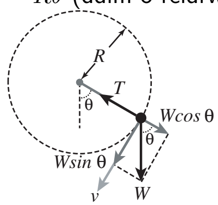
Pan fo'r mudiant cylchol yn unffurf, mae'r buanedd, $r\dot{\theta}$, yn gyson, v dyweder, felly mae $\ddot{\theta} = 0$. Yna mae $\dot{\underline{r}} = v\underline{e}_\theta$ ac $\ddot{\underline{r}} = -\left(v^2/r\right)\underline{e}_r$. Os yw gronyn â màs m yn symud yn unffurf mewn cylch â radiws r, gyda chyflymder v, mae ganddo gyflymiad rheiddiol maint v^2/r wedi'i gyfeirio i mewn ar hyd y radiws.

Y pendil conigol: Mae gronyn â màs m yn cylchdroi mewn cylch llorweddol â buanedd cyson v ar ben llinyn hyd L. Mae'r llinyn yn gwneud ongl α â'r fertigol. Radiws y cylch yw $R = L\sin\alpha$. Felly mae $v = (L\sin\alpha)\omega$, lle mae $\omega = \dot{\theta}$ yn dynodi buanedd onglaidd y mudiant yn y cylch llorweddol.



Y grymoedd sy'n gweithredu ar y gwrthrych yw ei bwysau, maint W, a'r tensiwn yn y llinyn, sydd â chydrannau llorweddol a fertigol o feintiau $T\sin\alpha$ a $T\cos\alpha$ yn ôl eu trefn. Nid oes gan y gwrthrych gyflymiad fertigol ond mae ganddo gyflymiad rheiddiol maint v^2/R. Mae 2il ddeddf Newton yn rhoi $T\cos\alpha - W = 0$ a $T\sin\alpha = mv^2/R$ yn fertigol a'n rheiddiol. Yna mae $\tan\alpha = v^2/Rg$ a $\cos\alpha = (g/L)/\omega^2$. Mae mudiant dim ond os yw $\cos\alpha < 1$, hynny yw $\omega^2 > g/L$. Os yw $\omega^2 < g/L$ yna mae $\alpha = 0$.

Mudiant mewn cylch fertigol: Ystyriwch wrthrych bach â màs m ynghlwm wrth linyn o hyd R yn chwyrlïo mewn cylch fertigol o gwmpas O. Mae'r llinyn yn gwneud ongl θ, wedi'i mesur yn wrth-glocwedd, gyda'r echelin fertigol i lawr. Mae'r mudiant yn gylchol ond ddim yn unffurf. Y grymoedd sydd ar y gwrthrych yw ei bwysau, $\underline{W} = m\underline{g}$, a'r tensiwn $\underline{T}$ yn y llinyn. Mae gan y cyflymiad rheiddiol faint v^2/R, lle mae $v = R\dot{\theta}$ (ddim o reidrwydd yn gyson).

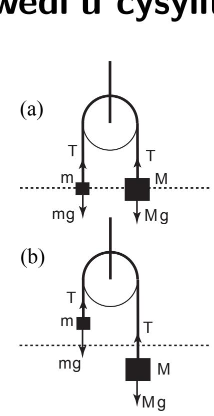


Mae 2il ddeddf Newton yn y cyfeiriad rheiddiol yn nodi mai maint y tensiwn yn y llinyn yw $T = m\left(v^2/R + g\cos\theta\right)$. Mae 2il ddeddf Newton yn y cyfeiriad tangiadol yn rhoi $-mg\sin\theta = mR\ddot{\theta}$.

Trwy ysgrifennu $\dot{\theta}$ fel ω, $\dfrac{d^2\theta}{dt^2} = \dfrac{d\omega}{dt} = \omega\dfrac{d\omega}{d\theta}$, ceir $-mg\sin\theta = mR\omega\dfrac{d\omega}{d\theta}$, sydd trwy integru yn rhoi'r hafaliad egni $\dfrac{1}{2}mV^2 = \dfrac{1}{2}mv^2 + mgR(1 - \cos\theta)$, V yw'r buanedd pan fo $\theta = 0$. Y buanedd critigol, lle mae'r llinyn yn llacio $(T = 0)$ ar y pwynt uchaf (lle $\theta = \pi$) os yw'n symud yn arafach, yw $v_c = \sqrt{Rg}$.

10. Mudiant gronynnau wedi'u cysylltu

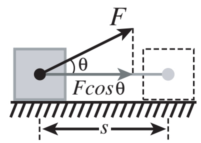
Mae dau fàs m ac M, gyda $M \geq m$, wedi'u cysylltu â llinyn ysgafn, anestynadwy sy'n pasio dros bwli. Mae'r pwli'n llyfn ac mae'r tensiwn, T, yn y llinyn yr un fath ar ei hyd. Gan fod y llinyn yn anestynadwy, mae cyflymiad y ddau fàs yr un maint, a. Pan yn symud, bydd gan y ddau fàs yr un buanedd a byddant yn teithio'r un pellteroedd. Rhyddheir y system o ddisymudedd yn y safle a ddangosir yn (a). Pan mewn mudiant, (b), mae 2il ddeddf Newton yn rhoi: $T - mg = ma$ a $Mg - T = Ma$. Felly mae



$$a = \left(\frac{M - m}{M + m}\right)g, \qquad T = \frac{2Mmg}{M + m}.$$

11. Gwaith, Egni a Phŵer

Gwaith a wneir gan rym cyson: Mae'r ffigwr isod yn dangos gwrthrych sy'n symud yn y cyfeiriad llorweddol. Gweithredir grym cyson, $\underline{F}$, ar ongl θ i gyfeiriad y mudiant arno. Y **gwaith**, W, a wneir gan y grym, pan fo'i bwynt gweithredu yn dadleoli $\underline{s}$, yw $W = \underline{F} \cdot \underline{s} = (F\cos\theta)s$. Mae gwaith yn fesur sgalar. Os yw'r cydran grym i'r un cyfeiriad/cyfeiriad dirgroes â'r dadleoliad, mae'r gwaith a wneir yn bositif/negatif yn ôl eu trefn. Ni wneir gwaith os yw'r grym ar ongl sgwâr i'r dadleoliad.



Egni: Pan mae grym yn gwneud gwaith ar wrthrych, gall y gwrthrych ennill neu golli egni.

Egni Cinetig: Mae egni cinetig oherwydd mudiant gwrthrych. Pan fo gwrthrych â màs m yn symud â buanedd v, diffinnir ei egni cinetig fel Egni Cinetig $= \frac{1}{2}mv^2$. Mae'r newid mewn egni cinetig gwrthrych anhyblyg yn hafal i'r gwaith a wneir gan rymoedd allanol ar y gwrthrych.

Egni Potensial: Mae egni potensial oherwydd lleoliad gwrthrych.

Egni Potensial Disgyrchiant yw lluoswm pwysau'r gwrthrych, mg, ac uchder ei graidd disgyrchiant, h, uwchben y lefel gyfernod. Felly mae Egni Potensial (disgyrchiant) $= mgh$.

Cadwraeth Cyfanswm Egni Mecanyddol: Pan mai'r unig rym sydd ar wrthrych yw grym disgyrchiant, mae cyfanswm yr egni mecanyddol, sef swm egni cinetig ac egni potensial y gwrthrych, yn gyson.

Pŵer a Chyflymder: Gelwir y gyfradd gwneud gwaith yn **bŵer**. Os gweithredir grym cyson $\underline{F}$ ar wrthrych sy'n symud â buanedd v yng nghyfeiriad y grym, y pŵer yw $P = Fv$.

www.**math**centre.ac.uk
ⓗ**math**centre 2013

12. Ergyd a Momentwm

Momentwm llinol, p, gwrthrych â màs m a chyflymder $\underline{v}$, yw'r mesur fector a ddiffinnir fel $\underline{p} = m\underline{v}$.

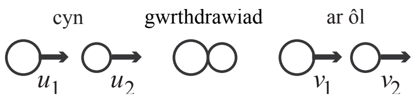
Ergyd: Os oes grym cyson, $\underline{F}$, yn gweithredu ar wrthrych am amser, t, yna diffinnir ergyd y grym fel Ergyd $= \underline{F}\,t$. Mae ergyd yn fector gyda'r un uned â momentwm.

Y berthynas rhwng momentwm ac ergyd: Os gweithredir grym ar wrthrych am amser t, mae ergyd y grym yn hafal i'r gwahaniaeth rhwng y momentwm terfynol a'r momentwm cychwynnol. Ar gyfer grym cyson, mae

$$\underline{F}t = m\underline{v} - m\underline{u}.$$

Egwyddor cadwraeth momentwm llinol: Pan nad oes grym cydeffaith allanol yn gweithredu ar system o ronynnau sy'n rhyngweithio (gwrthdaro), mae cyfanswm momentwm y system yn aros yn gyson.

Gwrthdrawiad dau wrthrych: Mae **gwrthdrawiad elastig** yn un lle mae cyfanswm yr egni cinetig yn cael ei gadw'r un peth. Mae **gwrthdrawiad anelastig** yn un lle mae cyfanswm yr egni cinetig yn lleihau. Ystyriwch y gwrthdrawiad rhwng dau sffêr sy'n symud yn yr un llinell:



Gadewch i

m_1, m_2 = masau'r ddau sffêr,
u_1, u_2 = cyflymderau cyn gwrthdaro,
v_1, v_2 = cyflymderau ar ôl gwrthdaro,
$v_a = u_1 - u_2$ = buanedd y dynesiad,
$v_s = v_2 - v_1$ = buanedd y gwahaniad.

Mewn gwrthdrawiad, mae v_a a v_s â'r berthynas

$$v_s = e\,v_a \quad \text{neu} \quad v_2 - v_1 = e(u_1 - u_2),$$

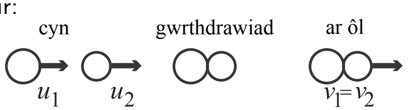
lle gelwir $0 \le e \le 1$ yn **gyfernod adfer**.

Mewn gwrthdrawiad elastig, mae $e = 1$ ac mae

$$m_1v_1 + m_2v_2 = m_1u_1 + m_2u_2,$$
$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2.$$

Pan fo'r sfferau â'r un màs ($m_1 = m_2$), mae $u_2 = v_1$ ac $u_1 = v_2$, sy'n golygu eu bod yn cyfnewid cyflymderau.

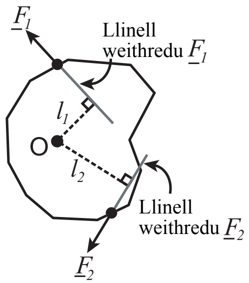
Mewn gwrthdrawiad 'anelastig perffaith', lle mae'r gwrthrychau'n cyfuno, mae $e = 0$. Felly mae $v_1 = v_2$, a does dim adlam, fel a ddangosir:



www.**math**centre.ac.uk

13. Gwrthrychau anhyblyg

Ystyriwch echelin sy'n berpendicwlar i blân y papur ac yn pasio trwy O. Gweithredir grymoedd $\underline{F}_1$ ac $\underline{F}_2$ ar wrthrych anhyblyg sy'n gorwedd yn y plân. Mae $\underline{F}_1$ a $\underline{F}_2$ yn cynhyrchu cylchdroad gwrth-glocwedd/clocwedd o gwmpas yr echelin, yn ôl eu trefn. Cymerir cylchdroad gwrth-glocwedd i fod yn bositif. Diffinnir **momentau** $\underline{F}_1$ a $\underline{F}_2$ o gwmpas yr echelin sy'n mynd trwy O gan



$$\Gamma_1 = +F_1\,l_1, \qquad \Gamma_2 = -F_2\,l_2,$$

lle mae l_1 ac l_2 yn dynodi pellteroedd perpendicwlar llinellau gweithredu $\underline{F}_1$ a $\underline{F}_2$ o O. Llinell weithredu grym yw'r linell yng nghyfeiriad y grym sy'n pasio trwy'r pwynt gweithredu. Mae dwy amod yn cael eu bodloni os yw gwrthrych anhyblyg mewn cydbwysedd:

Amod cyntaf: Pan fo gwrthrych mewn cydbwysedd, mae grym cydeffaith, $\underline{R} = (R_x, R_y, R_z)$, pob grym sy'n gweithredu arno, yn sero. (Mae'r amod hefyd yn wir ar gyfer gronynnau.) Felly mae

$$\underline{R} = \underline{0}, \qquad R_x = 0, \qquad R_y = 0, \qquad R_z = 0,$$

lle dynoda R_x, R_y a R_z symiau net cydrannau sgalar x, y a z y grymoedd, yn ôl eu trefn.

Ail amod: Pan fo gwrthrych mewn cydbwysedd, mae swm y momentau o gwmpas echelin fympwyol yn sero:

$$\Sigma\Gamma = 0$$

Craidd màs: Dyma'r pwynt mewn gwrthrych lle mae grym allanol yn cynhyrchu cyflymiad yn union fel pe bai yr holl fàs wedi ei grynhoi yno. Gadewch i $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$ ddynodi cyfesurynnau craidd màs system o ronynnau, pob un â màs m_1, m_2, ..., a chreiddiau màs wedi'u lleoli yn (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), ... Yna mae

$$\overline{x} = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}, \qquad \overline{y} = \frac{\Sigma m_i y_i}{\Sigma m_i}, \qquad \overline{z} = \frac{\Sigma m_i z_i}{\Sigma m_i},$$

ac felly

$$\Sigma m_i(x_i - \overline{x}) = \Sigma m_i(y_i - \overline{y}) = \Sigma m_i(z_i - \overline{z}) = 0.$$

Yna, mae swm momentau o gwmpas echelin sy'n mynd trwy'r craidd màs yn sero. Gall cymesuredd fod yn ddefnyddiol er mwyn darganfod y craidd màs. Mae craidd màs sffêr, disg gylchol neu blât petryal homogenaidd unffurf yn ei ganol.

Ysgrifennwyd gan Dr. Carol Robinson[1], Dr. Tony Croft[1], a'r Athro Mike Savage[2],
gyda sylwadau gan Dr. Marie Bassford[3].
Cynhyrchwyd y delweddau gan Paul Newman[1].
Cyfieithwyd gan Dr. Tudur Davies [4,5].

[1] Canolfan Addysg Mathemateg
[3] Canolfan Addysg Peirianneg
Prifysgol Loughborough
[2] Adran Ffiseg a Seryddiaeth, Prifysgol Leeds
[4] Athrofa Mathemateg, Ffiseg a Chyfrifiadureg, Prifysgol Aberystwyth
[5] Coleg Cymraeg Cenedlaethol

mathcentre

Am yr holl gefnogaeth rydych ei angen â'ch cwrs

Ffeithiau a Fformiwlâu Mecaneg

Prosiect aml-ddisgyblaethol sy'n cynnig adnoddau rhad ac am ddim i fyfyrwyr a staff er mwyn hwyluso dysgu ac addysgu mathemateg yn yr ysgol a'r brifysgol yw'r **mathcentre**.

www.**math**centre.ac.uk

Cynhyrchwyd y daflen hon ar y cyd rhwng yr Higher Education Academy Maths, Stats & OR Network a'r Coleg Cymraeg Cenedlaethol.

Am fwy o adnoddau, ewch i'r Porth www.porth.ac.uk neu www.colegcymraeg.ac.uk.