

Cwrs Gloywi Calcwlws

f.3 Chwefror 2003

Cynnwys

Rhagair	2
Gwaith rhagarweiniol	2
Sut i ddefnyddio'r llyfryn hwn	2
Nodiadau atgoffa	3
Tablau deilliadau ac integrynnau	4
1. Deilliadau ffwythiannau sylfaenol	5
2. Llinoledd mewn differu	7
3. Deilliadau uwch	9
4. Rheol lluoswm ar gyfer differu	10
5. Rheol cyfran ar gyfer differu	11
6. Rheol cadwyn ar gyfer differu	13
7. Differu ffwythiannau wedi'i ddiffinio'n ymhlyg	15
8. Differu ffwythiannau wedi'i ddiffinio'n barametrig	16
9. Amrywiol ymarferion differu	17
10. Integrynnau ffwythiannau sylfaenol	20
11. Llinoledd mewn integru	21
12. Gwerthuso integrynnau pendant	23
13. Integru fesul rhan	24
14. Integru trwy amnewidiad	26
15. Integru gan ddefnyddio ffracsiynau rhannol	29
16. Integru trwy ddefnyddio unfathiannau trigonometrig	33
17. Amrywiol ymarferion integru	35
Atebion	39
Diolchiadau	46

Rhagair

Cynlluniwyd y defnydd yn y cwrs gloywi hwn i'ch helpu i ymdopi'n well gyda'ch rhaglen fathemateg yn y brifysgol. Pan fydd eich rhaglen yn dechrau, fe gewch fod y gallu i ddifferu ac integru yn hyderus yn werthfawr dros ben. Yn ein barn ni, mae hyn mor bwysig fel ein bod yn gwneud y cwrs hwn ar gael i chwi naill ai cyn i chwi ddod i'r brifysgol neu yn ystod cyfnod cynnar eich rhaglen.

Gwaith rhagarweiniol

Fe'ch cynghorir i weithio trwy'r llyfryn sy'n mynd gyda hwn *Cwrs Gloywi Algebra* cyn cychwyn ar y cwrs gloywi calcwlws hwn.

Sut i ddefnyddio'r llyfryn hwn

Fe'ch cynghorir i weithio trwy bob adran yn y llyfryn hwn yn eu trefn. Hwyrach y bydd yn rhaid i chwi adolygu rhai pynciau trwy edrych ar werslyfr lefel AS neu A fydd yn cynnwys gwybodaeth am ddifferiad ac integriad.

Dylech drïo eich law ar ystod o gwestiynau o bob adran, a gwirio eich atebion gyda'r rhai yng nghefn y llyfryn. Po fwyaf o gwestiynau y ceisiwch eu hateb, mwyaf cyfarwydd fyddwch gyda'r pynciau hanfodol hyn. Yr ydym wedi gadael digon o le yn y llyfryn i chwi fedru gwneud unrhyw waith angenrheidiol ynddo. Felly, edrych ar hwn fel llyfr gwaith.

Os cewch yr atebion yn anghywir, dylech adolygu'r defnydd a thrïo eto nes eich bod yn cael y rhan fwyaf o'r cwestiynau yn gywir.

Os na fedrwch ddatrys eich anawsterau, peidiwch phoeni. Bydd gan eich prifysgol ddarpariaeth i'ch helpu gyda'ch problemau. Gall hyn fod ar ffurf darlithoedd adolygu arbennig, defnydd adolygu i chwi astudio eich hun, neu ganolfan gefnogi mathemateg lle medrwch alw heibio.

Nodiadau atgoffa

Defnyddiwch y dudalen hon i nodi pynciau a chwestiynau oedd yn anodd i chwi. Ceisiwch help gyda'r rhain gan eich tiwtor neu gan wasanaethau cefnogi eraill y brifysgol cyn gynted ag y bo modd.

Tablau

Darperir y tablau canlynol o ddeilliadau ac integrynnau cyffredin at ddibenion adolygu. Bydd yn fanteisiol iawn i chwi wybod y deilliadau a'r integrynnau hyn am fod eu hangen mor aml mewn cyrsiau mathemateg.

Tabl deilliadau

$f(x)$	$f'(x)$
x^n	nx^{n-1}
$\ln kx$	$\frac{1}{x}$
e^{kx}	ke^{kx}
a^x	$a^x \ln a$
$\sin kx$	$k \cos kx$
$\cos kx$	$-k \sin kx$
$\tan kx$	$k \sec^2 kx$

Tabl integrynnau

$f(x)$	$\int f(x) \, dx$
$x^n \quad (n \neq -1)$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
$x^{-1} = \frac{1}{x}$	$\ln x + c$
$e^{kx} \quad (k \neq 0)$	$\frac{e^{kx}}{k} + c$
$\sin kx \quad (k \neq 0)$	$-\frac{\cos kx}{k} + c$
$\cos kx \quad (k \neq 0)$	$\frac{\sin kx}{k} + c$
$\sec^2 kx \quad (k \neq 0)$	$\frac{\tan kx}{k} + c$

1. Deilliadau ffwythiannau sylfaenol

Ceisiwch ddarganfod yr holl ddeilliadau yn yr adran hon heb gyfeirio at dabl deilliadau. Mae deilliadau'r ffwythiannau hyn yn digwydd mor aml fel y dylech gadw'r rheolau priodol ar eich cof. Os ydych wir mewn trafferthion, edrychwch ar y tabl ar dudalen 4.

1. Differwch bob un o'r canlynol parthed x .

- (a) x (b) x^6 (c) 6 (d) $\sqrt{x}$ (e) x^{-1} (f) $x^{1/7}$
(g) $\frac{1}{x^3}$ (h) x^{79} (i) $x^{1.3}$ (j) $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ (k) $x^{-5/3}$ (l) $\frac{1}{x^{0.71}}$

2. Differwch bob un o'r canlynol parthed θ .

- (a) $\cos \theta$ (b) $\cos 4\theta$ (c) $\sin \theta$ (d) $\sin \frac{2\theta}{3}$ (e) $\tan \theta$ (f) $\tan \pi\theta$
(g) $\sin(-8\theta)$ (h) $\tan \frac{\theta}{4}$ (i) $\cos 3\pi\theta$ (j) $\cos\left(-\frac{5\theta}{2}\right)$ (k) $\sin 0.7\theta$

3. Canfyddwch y deilliadau a ganlyn.

(a) $\frac{d}{dx}(e^x)$ (b) $\frac{d}{dy}(e^{2y})$ (c) $\frac{d}{dt}(e^{-7t})$ (d) $\frac{d}{dx}(e^{-x/3})$
(e) $\frac{d}{dz}(e^{2z/\pi})$ (f) $\frac{d}{dx}(e^{-1.4x})$ (g) $\frac{d}{dx}(3^x)$

4. Canfyddwch y deilliadau a ganlyn.

(a) $\frac{d}{dx}(\ln x)$ (b) $\frac{d}{dz}(\ln 5z)$ (c) $\frac{d}{dx}\left(\ln \frac{2x}{3}\right)$

2. Llinoledd mewn differu

Mae'r **rheolau llinoledd** yn ein galluogi i ddifferu symiau a gwahaniaethau ffwythiannau, a lluosirifau cyson ffwythiannau. Yn benodol

$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) \pm \frac{d}{dx}(g(x)), \quad \frac{d}{dx}(kf(x)) = k \frac{d}{dx}(f(x)).$$

1. Differwch bob un o'r canlynol parthed x .

- (a) $3x + 2$ (b) $2x - x^2$ (c) $-\cos x - \sin x$ (d) $3x^{-3} + 4 \sin 4x$
(e) $2e^x + e^{-2x}$ (f) $\frac{1}{x} - 4 - 3 \ln x$ (g) $4x^5 - 3 \tan 8x - 2e^{5x}$

2. Canfyddwch y deilliadau canlynol.

- (a) $\frac{d}{dt} \left(5t^{1/5} + \frac{t^8}{8} \right)$ (b) $\frac{d}{d\theta} \left(2 \cos \frac{\theta}{4} - 3e^{-\theta/4} \right)$ (c) $\frac{d}{dx} \left(\frac{3e^{3x/5}}{5} \right)$
(d) $\frac{d}{dx} \left(\frac{2}{9} \tan \frac{3x}{2} - \frac{3}{4} \cos 8x \right)$ (e) $\frac{d}{dz} \left(\frac{1}{4} z^{4/3} - \frac{1}{3} e^{-4z/3} \right)$

Yn Nghwestiynau 3-5 fydd arnoch ddim angen y rheol lluoswm, y rheol cyfran na'r rheol cadwyn i ddifferu'r un o'r rhain os gwnewch yr algebra i ddechrau!

3. Ehangwch y pwerau neu'r israddau a thrwy hynny ganfod y deilliadau canlynol.

$$(a) \frac{d}{dy} \left(\sqrt{2y} \right) \quad (b) \frac{d}{dx} \left((2x)^3 - \frac{1}{(2x)^3} \right) \quad (c) \frac{d}{dy} \left(\left(\frac{1}{2} e^y \right)^4 \right) \quad (d) \frac{d}{dt} \left(\sqrt[3]{5e^{-2t}} \right)$$

4. Symleiddiwch neu ehangu pob un o'r mynegiadau a ganlyn, ac yna differu parthed x .

$$(a) \frac{x - x^2}{x^3} \quad (b) x(\sqrt{x} - x^2) \quad (c) \left(2x - \frac{2}{x} \right) \left(\frac{3}{x^2} + x \right)$$

$$(d) (e^{2x} - 1)(3 - e^{3x}) \quad (e) \frac{1 - e^{-2x}}{e^{-4x}}$$

5. Defnyddiwch ddeddfau logarithmau i ganfod y deilliadau canlynol

$$(a) \frac{d}{dx} \left(\ln x^{9/2} \right) \quad (b) \frac{d}{dx} \left(\ln \left(\frac{1}{\sqrt{6x}} \right) \right) \quad (c) \frac{d}{dt} \left(\ln \left(\frac{t^3}{e^{3t}} \right) \right) \quad (d) \frac{d}{dt} \left(\ln \left(te^{-2t} \right)^{1/3} \right)$$

3. Deilliadau uwch

1. Canfyddwch yr ail ddeilliadau a ganlyn.

- (a) $\frac{d^2}{dx^2}(x^5)$ (b) $\frac{d^2}{dx^2}(\cos 3x)$ (c) $\frac{d^2}{dz^2}(e^{2z} - e^{-2z})$
- (d) $\frac{d^2}{dy^2}(8 - 13y)$ (e) $\frac{d^2}{dx^2}\left(\frac{1}{x} - 3x - 3x^3\right)$ (f) $\frac{d^2}{dt^2}(\ln 2t - \sqrt{6t})$
- (g) $\frac{d^2}{dx^2}\left(x^{3/2} - \frac{1}{x^{3/2}}\right)$ (h) $\frac{d^2}{dx^2}(e^x + e^{-x} + \sin x + \cos x)$ (i) $\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{2}\sin 2t - \frac{1}{4}\ln 4t\right)$

4. Rheol lluoswm ar gyfer differu

Y rheol ar gyfer differu lluoswm dau ffwythiant $f(x)$ a $g(x)$ yw

$$\frac{d}{dx}(f(x)g(x)) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x).$$

1. Differwch bob un o'r canlynol parthed x .

- (a) $x \sin x$ (b) $x^3 \cos 2x$ (c) $x^{-1/3} e^{-3x}$
(d) $\sqrt{x} \ln 4x$ (e) $(x^2 - x) \sin 6x$ (f) $\frac{1}{x} \left(\tan \frac{x}{3} - \cos \frac{x}{3} \right)$

2. Canfyddwch y deilliadau canlynol.

- (a) $\frac{d}{d\theta}(\sin \theta \cos \theta)$ (b) $\frac{d}{dt}(\sin 2t \tan 5t)$ (c) $\frac{d}{dz}(\sin z \ln 4z)$ (d) $\frac{d}{dx} \left(e^{-x/2} \cos \frac{x}{2} \right)$
(e) $\frac{d}{dx}(e^{6x} \ln 6x)$ (f) $\frac{d}{d\theta}(\cos \theta \cos 3\theta)$ (g) $\frac{d}{dt}(\ln t \ln 2t)$

5. Rheol cyfran ar gyfer differu

Y rheol ar gyfer differu cyfran dau ffwythiant $f(x)$ a $g(x)$ yw

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}.$$

1. Differwch bob un o'r canlynol parthed x .

(a) $\frac{x}{1-x^2}$ (b) $\frac{x^4}{1-x}$ (c) $\frac{2-x}{1+2x}$ (d) $\frac{3x^2-2x^3}{2x^3+3}$ (e) $\frac{1+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-x}$

2. Canfyddwch y deilliadau canlynol.

(a) $\frac{d}{dx} \left(\frac{\sin x}{x} \right)$ (b) $\frac{d}{dx} \left(\frac{\ln x}{x^{4/3}} \right)$ (c) $\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\theta^2}{\tan 2\theta} \right)$ (d) $\frac{d}{dz} \left(\frac{e^z}{\sqrt{z}} \right)$ (e) $\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{\ln 2x} \right)$

3. Canfyddwch y deilliadau canlynol.

(a) $\frac{d}{dt} \left(\frac{\sin 2t}{\sin 5t} \right)$ (b) $\frac{d}{dx} \left(\frac{e^{-2x}}{\tan x} \right)$ (c) $\frac{d}{dx} \left(\frac{\ln x}{\cos 3x} \right)$ (d) $\frac{d}{dx} \left(\frac{\ln 3x}{\ln 4x} \right)$

6. Rheol cadwyn ar gyfer differu

Defnyddir y rheol cadwyn i ddifferu “ffwythiant o ffwythiant”:

$$\frac{d}{dx} (f(g(x))) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

1. Differwch bob un o'r canlynol parthed x .

- (a) $(4 + 3x)^2$ (b) $(1 - x^4)^3$ (c) $\frac{1}{(1 - 2x)^2}$ (d) $\sqrt{1 + x^2}$
(e) $\left(x - \frac{1}{x}\right)^{-1/3}$ (f) $(2x^2 - 3x + 5)^{5/2}$ (g) $\sqrt{x - 2\sqrt{x}}$ (h) $\frac{1}{\sqrt{4x^2 - x^4}}$

2. Canfyddwch y deilliadau canlynol. (Cofiwch y nodiant ar gyfer pwerau ffwythiannau trigonometrig: fod “ $\sin^2 x$ ” yn golygu $(\sin x)^2$, etc.)

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \frac{d}{d\theta}(\sin^2 \theta) & \text{(b)} \frac{d}{d\theta}(\sin \theta^2) & \text{(c)} \frac{d}{d\theta}(\sin(\sin \theta)) & \text{(d)} \frac{d}{dx}(\tan(3 - 4x)) \\ \text{(e)} \frac{d}{dz}(\cos^5 5z) & \text{(f)} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\cos^3 x}\right) & \text{(g)} \frac{d}{dt}(\sin(2 - t - 3t^2)) & \end{array}$$

3. Canfyddwch y deilliadau canlynol. (Defnyddir y nodiant “ $\exp x$ ” yn hytrach na “ e^x ” lle mae’n fwy eglur.)

$$\begin{array}{llll} \text{(a)} \frac{d}{dy}(\exp(-y^2)) & \text{(b)} \frac{d}{dx}(\exp(\cos 3x)) & \text{(c)} \frac{d}{dx}(\cos(e^{3x})) & \text{(d)} \frac{d}{dx}(\ln(\sin 4x)) \\ \text{(e)} \frac{d}{dx}(\sin(\ln 4x)) & \text{(f)} \frac{d}{dx}(\ln(e^x - e^{-x})) & \text{(g)} \frac{d}{dt}(\sqrt{e^{3t} - 3 \cos 3t}) & \end{array}$$

7. Differu ffwythiannau wedi'i ddiffinio'n ymhlyg

1. Canfyddwch $\frac{dy}{dx}$ yn nhermau y pan berthnasir x ac y gan yr hafaliadau a ganlyn. Bydd arnoch angen y fformiwla $\frac{dy}{dx} = 1/\frac{dx}{dy}$.

(a) $x = y - y^3$ (b) $x = y^2 + \frac{1}{y}$ (c) $x = e^y + e^{2y}$ (d) $x = \ln(y - e^{-y})$

2. Canfyddwch $\frac{dy}{dx}$ yn nhermau x a/neu y pan berthnasir x ac y gan yr hafaliadau canlynol.

(a) $\cos 2x = \tan y$ (b) $x + y^2 = y - x^2$ (c) $y - \sin y = \cos x$
(d) $e^x - x = e^{2y} + 2y$ (e) $x + e^y = \ln x + \ln y$ (f) $y = (x - y)^3$

8. Differu ffwythiannau wedi'i ddiffinio'n barametrig

Os yw x ac y ill dau yn ffwythiannau o'r paramedr t , yna

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \div \frac{dx}{dt}$$

1. Canfyddwch $\frac{dy}{dx}$ yn nhermau t pan berthnasir x ac y gan y parau canlynol o hafaliadau paramedrig.

(a) $x = \sin t, \quad y = \cos t$

(b) $x = t - \frac{1}{t}, \quad y = 1 - t^2$

(c) $x = e^{2t} + t, \quad y = e^t + t^2$

(d) $x = \ln t + t, \quad y = t - \ln t$

2. Canfyddwch $\frac{dx}{dy}$ yn nhermau t pan berthnasir x ac y gan y parau canlynol o hafaliadau paramedrig.

(a) $x = 3t + t^3, \quad y = 2t^2 + t^4$

(b) $x = \cos 2t, \quad y = \tan 2t$

9. Amrywiol arferion differu

1. Canfyddwch y deilliadau a ganlyn, mae pob un yn galw am ddefnyddio un o'r technegau yr ymdriniwyd â hwy yn yr adrannau blaenorol. Chi sy'n gorfod penderfynu pa dechneg sydd ei angen ar gyfer pob deilliad!

(a) $\frac{d}{dx}(x^3 \tan 4x)$ (b) $\frac{d}{dt}(\tan^3 4t)$ (c) $\frac{d}{dx}(\exp(3 \tan 4x))$ (d) $\frac{d}{d\theta} \left(\frac{3\theta}{\tan 4\theta} \right)$
(e) $\frac{d}{dx}(\exp(x - e^x))$ (f) $\frac{d}{dy} \left(\frac{y^4 + y^{-4}}{y + y^{-1}} \right)$ (g) $\frac{d}{dx}(2^x x^2)$ (h) $\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\ln x - x} \right)$
(i) $\frac{d}{dx}(5^{-3x})$ (j) $\frac{d}{dt}(\ln(\ln t))$ (k) $\frac{d}{dz} \left(\ln \left(\frac{1-z}{1+z} \right)^2 \right)$

2. Canfyddwch y deilliadau a ganlyn, sydd angen y rheolau lluoswm a chyfran.

(a) $\frac{d}{dx} \left(\frac{x \cos x}{1 - \cos x} \right)$ (b) $\frac{d}{dz} \left(\frac{e^z}{z \ln z} \right)$ (c) $\frac{d}{d\theta} \left(\frac{\sin 3\theta \cos 2\theta}{\tan 4\theta} \right)$

3. Canfyddwch y deilliadau a ganlyn, sydd angen y rheol cadwyn yn ogystal â naill ai'r rheol lluoswm neu'r rheol cyfran.

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad \frac{d}{dt}(e^{-t} \ln(e^t + 1)) & \text{(b)} \quad \frac{d}{d\theta}(\sin^2 3\theta \cos^4 3\theta) & \text{(c)} \quad \frac{d}{dx} \left(\left(\frac{1-x^2}{1+x^2} \right)^{3/2} \right) \\
 \text{(d)} \quad \frac{d}{d\theta}(\exp(\theta \cos \theta)) & \text{(e)} \quad \frac{d}{dx} ((x \ln x)^3) & \text{(f)} \quad \frac{d}{dx} \left(\exp \left(\frac{1-x}{1+x} \right) \right) \\
 \text{(g)} \quad \frac{d}{dy} \left(\frac{1}{y^2 \sqrt{y^2 - 1}} \right)
 \end{array}$$

4. Canfyddwch y deilliadau a ganlyn, sydd yn gofyn am ddefnyddio'r rheol cadwyn fwy nac unwaith.

$$\begin{array}{lll}
 \text{(a)} \quad \frac{d}{dx}(\sqrt{1 - \cos^3 x}) & \text{(b)} \quad \frac{d}{dx} \left(\exp \left((x - x^2)^{1/4} \right) \right) & \text{(c)} \quad \frac{d}{d\theta} \left(\ln \left(\tan \frac{1}{\theta} \right) \right)
 \end{array}$$

5. Canfyddwch yr ail ddeilliadau a ganlyn.

(a) $\frac{d^2}{dx^2}(\sqrt{1+x^2})$ (b) $\frac{d^2}{dz^2}(\exp(z^2))$ (c) $\frac{d^2}{d\theta^2}(\sin^3 \theta)$ (d) $\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{1}{(1-x^4)^4} \right)$

6. Gan gofio $\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ a $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$, canfyddwch y deilliadau a ganlyn.

(a) $\frac{d}{dx}(\operatorname{cosec} 2x)$ (b) $\frac{d}{d\theta}(\sec^2 \theta)$ (c) $\frac{d}{dz}(\sqrt{1+\cot z})$
 (d) $\frac{d}{d\theta}(\operatorname{cosec}^2 \theta \cot^3 \theta)$ (e) $\frac{d}{dx}(\ln(\sec x + \tan x))$ (f) $\frac{d}{d\theta}(\tan(\sec \theta))$

10. Integrynnau ffwythiannau sylfaenol

Ceisiwch ddod o hyd i'r holl integrynnau yn yr adran hon heb gyfeirio at dabl integrynnau. Mae integrynnau ffwythiannau yn digwydd mor aml fel y dylech gadw'r rheolau priodol ar eich cof. Os byddwch wir mewn trafferthion, edrychwch ar y Tablau ar dudalen 4.

1. Integrwch bob un o'r canlynol parthed x .

- (a) x^4 (b) x^7 (c) $x^{1/2}$ (d) $x^{1/3}$ (e) $\sqrt{x}$ (f) $x^{-1/2}$ (g) $\sqrt[4]{x}$
(h) $\frac{1}{x^3}$ (i) $x^{0.2}$ (j) $\frac{1}{x^{0.3}}$ (k) $\frac{1}{\sqrt{x}}$ (l) $\frac{1}{\sqrt{x^3}}$ (m) x^{-2} (n) $x^{4/3}$

2. Integrwch bob un o'r canlynol parthed x .

- (a) $\cos 5x$ (b) $\sin 2x$ (c) $\sin \frac{1}{2}x$ (d) $\cos \frac{x}{2}$ (e) $\frac{1}{x}$ (f) e^{2x}
(g) e^{-2x} (h) $e^{x/3}$ (i) $e^{0.5x}$ (j) $\frac{1}{e^x}$ (k) $\frac{1}{e^{2x}}$ (l) $\cos(-7x)$

11. Llinoledd mewn integru

Mae'r **rheolau llinoledd** yn ein galluogi i integru symiau (a gwahaniaethau) ffwythiannau, a lluosrifau cyson ffwythiannau. Yn benodol

$$\int (f(x) \pm g(x))dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx, \quad \int k f(x)dx = k \int f(x)dx$$

1. Integrwch bob un o'r canlynol parthed x .

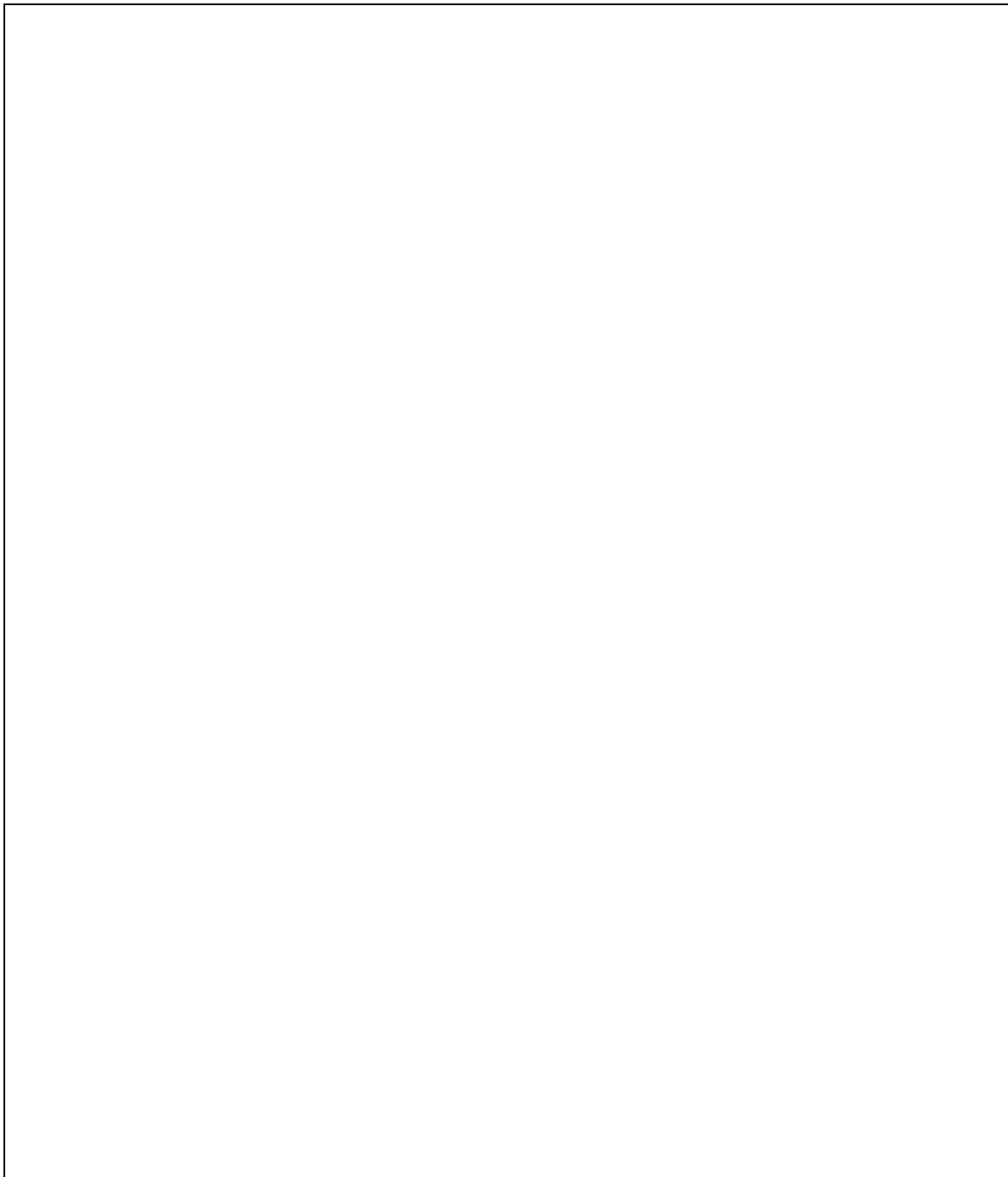
- (a) $7x^4$ (b) $-4x^7$ (c) $x^{1/2} + x^{1/3}$ (d) $17x^{1/3}$ (e) $\sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$ (f) $x^2 + \frac{1}{x}$
(g) $x^3 + \frac{1}{x^2}$ (h) $\frac{1}{7x^3}$ (i) 11 (j) $\frac{11}{x^{0.3}}$ (k) $2x - \frac{2}{x}$ (l) $7x - 11$

2. Integrwch bob un o'r canlynol parthed x .

- (a) $3x + \cos 4x$ (b) $4 + \sin 3x$ (c) $\frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2}$ (d) $4e^x + \cos \frac{x}{2}$
(e) $e^{-2x} + e^{2x}$ (f) $3 \sin 2x + 2 \sin 3x$ (g) $\frac{1}{kx}$, k constant (h) $-1 - \frac{4}{x}$
(i) $1 + x + x^2$ (j) $\frac{1}{3x} - 7$ (k) $\frac{1}{2} \cos \frac{1}{2}x$ (l) $\frac{1}{2}x^2 - 3x^{-1/2}$

3. Symleiddiwch bob un o'r mynegiannau canlynol yn gyntaf ac yna'u hintegru parthed x .

(a) $6x(x+1)$	(b) $(x+1)(x-2)$	(c) $\frac{x^3+2x^2}{\sqrt{x}}$	(d) $(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-3)$
(e) $e^{2x}(e^x - e^{-x})$	(f) $\frac{e^{3x} - e^{2x}}{e^x}$	(g) $\frac{x+4}{x}$	(h) $\frac{x^2+3x+2}{x+2}$



12. Gwerthuso integrynnau pendant

1. Gwerthuswch bob un o'r integrynnau pendant canlynol.

- (a) $\int_0^1 7x^4 dx$ (b) $\int_{-2}^3 -4t^7 dt$ (c) $\int_1^2 (x^{1/2} + x^{1/3}) dx$ (d) $\int_{-2}^{-1} 17t^{1/3} dt$
(e) $\int_1^3 (2s + 8s^3) ds$ (f) $\int_1^5 \frac{1}{x^2} dx$ (g) $\int_0^3 (t^2 + 2t) dt$ (h) $\int_0^{\pi/4} \cos 2x dx$
(i) $\int_0^{1/2} e^{3x} dx$ (j) $\int_2^4 \frac{1}{\sqrt{e^x}} dx$ (k) $\int_0^{\pi/4} (2\lambda + \sin \lambda) d\lambda$ (l) $\int_0^1 (e^x + e^{-x}) dx$

2. Ar gyfer y ffwythiant $f(x) = x^2 + 3x - 2$ gwiriwch fod

$$\int_0^2 f(x) dx + \int_2^3 f(x) dx = \int_0^3 f(x) dx$$

3. Ar gyfer y ffwythiant $f(x) = 4x^2 - 7x$ gwiriwch fod $\int_{-1}^1 f(x) dx = -\int_1^{-1} f(x) dx$.

13. Integru fesul rhan

Mae integru fesul rhan yn dechneg y mae modd ei defnyddio yn aml i integru lluosymiau ffwythiannau. Os yw u a v ill dau yn ffwythiannau o x yna

$$\int u \frac{dv}{dx} dx = uv - \int v \frac{du}{dx} dx$$

Wrth drin integrynnau pendant, y fformiwla berthnasol yw

$$\int_a^b u \frac{dv}{dx} dx = [uv]_a^b - \int_a^b v \frac{du}{dx} dx$$

1. Integrwch bob un o'r canlynol parthed x .

- (a) xe^x (b) $5x \cos x$ (c) $x \sin x$ (d) $x \cos 2x$ (e) $x \ln x$ (f) $2x \sin \frac{x}{2}$

2. Gwerthuswch yr integrynnau pendant canlynol.

- (a) $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$ (b) $\int_1^2 4xe^x dx$ (c) $\int_{-1}^1 5te^{-2t} dt$ (d) $\int_1^3 x \ln x dx$

3. Yn yr ymarferion canlynol hwyrach y bydd yn rhaid defnyddio'r fformiwla integru fesul rhan fwy nac unwaith. Integrwch bob un o'r canlynol parthed x .

- (a) $x^2 e^x$ (b) $5x^2 \cos x$ (c) $x(\ln x)^2$ (d) $x^3 e^{-x}$ (e) $x^2 \sin \frac{x}{2}$

4. Gwerthuswch yr integrynnau pendant canlynol.

(a) $\int_0^{\pi/2} x^2 \cos x \, dx$ (b) $\int_0^1 7x^2 e^x \, dx$ (c) $\int_{-1}^1 t^2 e^{-2t} \, dt$

5. Gan ysgrifennu $\ln x$ fel $1 \times \ln x$ canfyddwch $\int \ln x \, dx$.

6. Boed i I gynrychioli'r integryn $\int \frac{\ln t}{t} \, dt$. Gan ddefnyddio integru fesul rhan dangoswch fod

$$I = (\ln t)^2 - I \quad (\text{plws cysonyn integriad})$$

Felly dewch i'r casgliad fod $I = \frac{1}{2}(\ln t)^2 + c$.

7. Boed i I gynrychioli'r integryn $\int e^t \sin t \, dt$. Gan ddefnyddio integru fesul than ddwywaith dangoswch fod

$$I = e^t \sin t - e^t \cos t - I \quad (\text{plws cysonyn integriad})$$

Felly dewch i'r casgliad fod $\int e^t \sin t \, dt = \frac{e^t(\sin t - \cos t)}{2} + c$

14. Integru trwy amnewidiad

1. Canfyddwch yr holl integrynnau isod gan ddefnyddio'r amnewidiad a roddwyd.

(a) $\int \cos(x-3)dx, \quad u = x-3$ (b) $\int \sin(2x+4)dx, \quad u = 2x+4$

(c) $\int \cos(\omega t + \phi)dt, \quad u = \omega t + \phi$ (d) $\int e^{9x-7}dx, \quad u = 9x-7$

(e) $\int x(3x^2+8)^3dx, \quad u = 3x^2+8$ (f) $\int x\sqrt{4x-3}dx, \quad u = 4x-3$

(g) $\int \frac{1}{(x-2)^4}dx, \quad u = x-2$ (h) $\int \frac{1}{(3-t)^5}dt, \quad u = 3-t$

(i) $\int x e^{-x^2}dx, \quad u = -x^2$ (j) $\int \sin x \cos^3 x dx, \quad u = \cos x$

(k) $\int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}dt, \quad u = 1+t^2$ (l) $\int \frac{x}{2x+1}dx, \quad u = 2x+1$



2. Canfyddwch yr holl integrynnau isod gan ddefnyddio'r amnewidiad a roddwyd.

(a) $\int \frac{x}{\sqrt{x-3}} dx, \quad z = \sqrt{x-3}$ (b) $\int (x-5)^4(x+3)^2 dx, \quad u = x-5$

3. Gwerthuswch yr integrynnau isod gan ddefnyddio'r amnewidiad a roddwyd.

(a) $\int_0^{\pi/4} \cos(x-\pi) dx, \quad z = x-\pi$ (b) $\int_8^9 (x-8)^5(x+1)^2 dx, \quad u = x-8$
(c) $\int_2^3 t\sqrt{t-2} dt, \quad$ trwy adael i $u = t-2$, a hefyd trwy adael i $u = \sqrt{t-2}$
(d) $\int_1^2 t(t^2+5)^3 dt, \quad u = t^2+5$ (e) $\int_0^{\pi/4} \tan x \sec^2 x dx, \quad u = \tan x$
(f) $\int_{\pi^2/4}^{\pi^2} \frac{\sin \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx, \quad u = \sqrt{x}$ (g) $\int_1^2 \frac{e^{\sqrt{t}}}{\sqrt{t}} dt, \quad u = \sqrt{t}$

4. Trwy gyfrwng yr amnewidiad $u = 4x^2 - 7x + 2$ dangoswch fod

$$\int \frac{8x - 7}{4x^2 - 7x + 2} dx = \ln |4x^2 - 7x + 2| + c$$

5. Mae canlyniad yr ymarferiad blaenorol yn achos arbennig o reol fwy cyffredinol y dylech ddod yn gyfarwydd â hi: pan gymer yr integrand y ffurf

$$\frac{\text{deilliad yr enwadur}}{\text{enwadur}}$$

yr integryn yw logarithm yr enwadur. Defnyddiwch y rheol hon i ganfod yr integrynau canlynol, gan wirio pob esiampl trwy wneud amnewidiad priodol.

(a) $\int \frac{1}{x+1} dx$ (b) $\int \frac{1}{x-3} dx$ (c) $\int \frac{3}{3x+4} dx$ (d) $\int \frac{2}{2x+1} dx$

6. Defnyddiwch dechneg Cwestiwn 5 ynghyd â rheol llinoledd i ganfod yr integrynau canlynol. Er enghraifft, i ganfod $\int \frac{x}{x^2-7} dx$ yr ydym yn nodi fod modd gwneud y rhifiadur yn hafal i ddeilliad yr enwadur fel a ganlyn:

$$\int \frac{x}{x^2-7} dx = \frac{1}{2} \int \frac{2x}{x^2-7} dx = \frac{1}{2} \ln |x^2-7| + c.$$

(a) $\int \frac{x}{x^2+1} dx$ (b) $\int \frac{\sin 3\theta}{1+\cos 3\theta} d\theta$ (c) $\int \frac{3e^{2x}}{1+e^{2x}} dx$

15. Integru gan ddefnyddio ffracsiynau rhannol

1. Trwy fynegi'r integrand fel swm ei ffracsiynau rhannol, canfyddwch yr integrynau canlynol.

(a) $\int \frac{2x+1}{x^2+x} dx$

(b) $\int \frac{3x+1}{x^2+x} dx$

(c) $\int \frac{5x+6}{x^2+3x+2} dx$

(d) $\int \frac{x+1}{(1-x)(x-2)} dx$

(e) $\int \frac{9x+25}{x^2+10x+9} dx$

(f) $\int \frac{5x-11}{x^2+10x+9} dx$

(g) $\int \frac{4x}{4-x^2} dx$

(h) $\int \frac{15x+51}{x^2+7x+10} dx$

(i) $\int \frac{ds}{s^2-1}$

2. Trwy fynegi'r integrand fel swm ei ffracsiynau rhannol, canfyddwch yr integrynau pendant.

(a) $\int_1^2 \frac{2-8x}{x^2+2x} dx$

(b) $\int_0^2 \frac{5x+7}{(x+1)(x+2)} dx$

(c) $\int_{-1}^0 \frac{7x-11}{x^2-3x+2} dx$

3. Trwy fynegi'r integrand fel swm ei ffracsiynau rhannol, canfyddwch yr integrynau canlynol.

(a) $\int \frac{x}{x^2 - 2x + 1} dx$

(b) $\int \frac{4x + 6}{(x + 1)^2} dx$

(c) $\int \frac{7x - 23}{x^2 - 6x + 9} dx$

4. Trwy fynegi'r integrand fel swm ei ffracsiynau rhannol, canfyddwch yr integrynau pendant.

(a) $\int_0^1 \frac{x + 8}{x^2 + 6x + 9} dx$

(b) $\int_{-1}^1 \frac{2x + 19}{x^2 + 18x + 81} dx$

(c) $\int_0^2 -\frac{8x}{x^2 + 2x + 1} dx$

5. Canfyddwch $\int \frac{2x^2 + 6x + 5}{(x + 2)(x + 1)^2} dx$.

6. Canfyddwch $\int \frac{5x^2 + x - 34}{(x - 2)(x - 3)(x + 4)} dx$.

7. Canfyddwch $\int \frac{x^2 - 11x - 4}{(2x + 1)(x + 1)(3 - x)} dx$.

8. Yn yr enghraifft hwn, nodwch fod gradd y rhifiadur yn fwy na gradd yr enwadur.

Canfyddwch $\int \frac{x^3}{(x+1)(x+2)} dx$.

9. Dangoswch y gellir ysgrifennu $\frac{2x^3+1}{(x+1)(x+2)^2}$ yn ffurf

$$2 - \frac{1}{x+1} + \frac{15}{(x+2)^2} - \frac{9}{x+2}$$

Felly canfyddwch $\int \frac{2x^3+1}{(x+1)(x+2)^2} dx$.

10. Canfyddwch $\int \frac{4x^3+10x+4}{2x^2+x} dx$ trwy fynegi'r integrand mewn ffracsiynau rhan-nol.

16. Integru trwy ddefnyddio unfathiannau trigonometrig

Gellir defnyddio unfathiannau trigonometrig yn aml i ysgrifennu integrand mewn ffurf arall y gellir wedyn ei integru. Mae'r tabl isod yn rhoi rhai unfathiannau sydd yn arbennig o ddefnyddiol ar gyfer integriad.

Tabl unfathiannau trigonometrig

$$\begin{aligned}\sin A \sin B &= \frac{1}{2} (\cos(A - B) - \cos(A + B)) \\ \cos A \cos B &= \frac{1}{2} (\cos(A - B) + \cos(A + B)) \\ \sin A \cos B &= \frac{1}{2} (\sin(A + B) + \sin(A - B)) \\ \sin A \cos A &= \frac{1}{2} \sin 2A \\ \cos^2 A &= \frac{1}{2} (1 + \cos 2A) \\ \sin^2 A &= \frac{1}{2} (1 - \cos 2A) \\ \sin^2 A + \cos^2 A &= 1 \\ \tan^2 A &= \sec^2 A - 1\end{aligned}$$

1. I baratoi ar gyfer yr hyn sy'n dilyn canfyddwch bob un o'r integrynnau canlynol.

(a) $\int \sin 3x \, dx$ (b) $\int \cos 8x \, dx$ (c) $\int \sin 7t \, dt$ (d) $\int \cos 6x \, dx$

2. Defnyddiwch yr unfathiant $\sin^2 A = \frac{1}{2}(1 - \cos 2A)$ i ganfod $\int \sin^2 x \, dx$.

3. Defnyddiwch yr unfathiant $\sin A \cos A = \frac{1}{2} \sin 2A$ i ganfod $\int \sin t \cos t \, dt$.

4. Canfyddwch (a) $\int 2 \sin 7t \cos 3t \, dt$ (b) $\int 8 \cos 9x \cos 4x \, dx$ (c) $\int \sin t \sin 7t \, dt$

5. Canfyddwch $\int \tan^2 t \, dt$.

(Cliw: defnyddiwch un o'r unfathiannau a nodwch mai deilliad $\tan t$ yw $\sec^2 t$).

6. Canfyddwch $\int \cos^4 t \, dt$. (Cliw: Sgwariwch unfathiant ar gyfer $\cos^2 A$).

7. (a) Defnyddiwch yr amnewidiad $u = \cos x$ i ddangos fod

$$\int \sin x \cos^n x \, dx = -\frac{1}{n+1} \cos^{n+1} x + c$$

(b) Yn y cwestiwn hwn, mae gofyn i chwi ganfod yr integryn $\int \sin^5 t \, dt$. Dechreuwch trwy ysgrifennu'r integrand fel $\sin^4 t \sin t$. Cymerwch yr unfathiant $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ a sgwariwch ef i gynhyrchu unfathiant ar gyfer $\sin^4 t$. Yn olaf, defnyddiwch y canlyniad yn rhan (a) i ganfod yr integryn y gofynnir amdano, $\int \sin^5 t \, dt$.

17. Amrywiol ymarferion integru

I ganfod yr integrynnau yn yr adran hon, bydd gofyn i chwi ddewis techneg briodol o unrhyw rai o'r technegau blaenorol.

1. Canfyddwch $\int (9x - 2)^5 dx$.

2. Canfyddwch $\int \frac{1}{\sqrt{t} + 1} dt$.

3. Canfyddwch $\int t^4 \ln t dt$.

4. Canfyddwch $\int (5\sqrt{t} - 3t^3 + 2) dt$.

5. Canfyddwch $\int (\cos 3t + 3 \sin t) dt$.

6. Trwy gymryd logarithmau i fôn e dangoswch y gellir ysgrifennu a^x fel $e^{x \ln a}$. Felly canfyddwch $\int a^x dx$ lle mae a yn gysonyn.

7. Canfyddwch $\int x e^{3x+1} dx$.

8. Canfyddwch $\int \frac{2x}{(x+2)(x-2)} dx$.

9. Canfyddwch $\int \tan \theta \sec^2 \theta \, d\theta$.

10. Canfyddwch $\int_0^{\pi/2} \sin^3 x \, dx$.

11. Gan ddefnyddio'r amnewidiad $x = \sin \theta$ canfyddwch $\int \sqrt{1-x^2} \, dx$.

12. Canfyddwch $\int e^x \sin 2x \, dx$.

13. Canfyddwch $\int \frac{x-9}{x(x-1)(x+3)} dx$.

14. Canfyddwch $\int \frac{x^3 + 2x^2 - 10x - 9}{(x-3)(x+3)} dx$.

15. Boed i I_n gynrychioli'r integryn $\int x^n e^{2x} dx$. Gan ddefnyddio integriad trwy rannau dangoswch fod $I_n = \frac{x^n e^{2x}}{2} - \frac{n}{2} I_{n-1}$. **Fformiwla lleihaol** yw'r enw am ganlyniad fel hwn. Defnyddiwch ef dro ar ôl tro i ganfod I_4 , sef $\int x^4 e^{2x} dx$.

16. Canfyddwch $\int_0^1 \frac{1}{(4-t^2)^{3/2}} dt$, trwy adael $t = 2 \sin \theta$.

Atebion

Adran 1. Deilliadau ffwythiannau sylfaenol

1. (a) 1 (b) $6x^5$ (c) 0 (d) $\frac{1}{2\sqrt{x}}$
 (e) $-x^{-2}$ (f) $\frac{1}{7}x^{-6/7}$ (g) $-\frac{3}{x^4}$ (h) $79x^{78}$
 (i) $1.3x^{0.3}$ (j) $-\frac{1}{3}x^{-4/3}$ (k) $-\frac{5}{3}x^{-8/3}$ (l) $-\frac{0.71}{x^{1.71}}$
2. (a) $-\sin \theta$ (b) $-4 \sin 4\theta$ (c) $\cos \theta$ (d) $\frac{2}{3} \cos \frac{2\theta}{3}$
 (e) $\sec^2 \theta$ (f) $\pi \sec^2 \pi \theta$ (g) $-8 \cos(-8\theta) = -8 \cos 8\theta$
 (h) $\frac{1}{4} \sec^2 \frac{\theta}{4}$ (i) $-3\pi \sin 3\pi \theta$ (j) $\frac{5}{2} \sin\left(-\frac{5\theta}{2}\right) = -\frac{5}{2} \sin \frac{5\theta}{2}$
 (k) $0.7 \cos 0.7\theta$
3. (a) e^x (b) $2e^{2y}$ (c) $-7e^{-7t}$ (d) $-\frac{1}{3}e^{-x/3}$ (e) $\frac{2}{\pi}e^{2z/\pi}$ (f) $-1.4e^{-1.4x}$ (g) $3^x \ln 3$
4. (a) $\frac{1}{x}$ (b) $\frac{1}{z}$ (c) $\frac{1}{x}$

Adran 2. Llinoledd mewn differu

1. a) 3 b) $2 - 2x$ c) $\sin x - \cos x$ d) $-9x^{-4} + 16 \cos 4x$
 e) $2e^x - 2e^{-2x}$ f) $-\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x}$ g) $20x^4 - 24 \sec^2 8x - 10e^{5x}$
2. (a) $t^{-4/5} + t^7$ (b) $-\frac{1}{2} \sin \frac{\theta}{4} + \frac{3}{4}e^{-\theta/4}$ (c) $\frac{9e^{3x/5}}{25}$ (d) $\frac{1}{3} \sec^2 \frac{3x}{2} + 6 \sin 8x$
 (e) $\frac{1}{3}z^{1/3} + \frac{4}{9}e^{-4z/3}$
3. (a) $\frac{1}{\sqrt{2y}}$ (b) $24x^2 + \frac{3}{8x^4}$ (c) $\frac{1}{4}e^{4y}$ (d) $-\frac{2}{3}\sqrt[3]{5e^{-2t}}$
4. (a) $-\frac{2}{x^3} + \frac{1}{x^2}$ (b) $\frac{3}{2}\sqrt{x} - 3x^2$ (c) $-\frac{6}{x^2} + \frac{18}{x^4} + 4x$ (d) $6e^{2x} - 5e^{5x} + 3e^{3x}$
 (e) $4e^{4x} - 2e^{2x}$
5. (a) $\frac{9}{2x}$ (b) $-\frac{1}{2x}$ (c) $\frac{3}{t} - 3$ (d) $\frac{1}{3t} - \frac{2}{3}$

Adran 3. Deilliadau uwch

1. (a) $20x^3$ (b) $-9 \cos 3x$ (c) $4e^{2z} - 4e^{-2z}$ (d) 0
 (e) $\frac{2}{x^3} - 18x$ (f) $-\frac{1}{t^2} + \frac{\sqrt{6}}{4}t^{-3/2}$ (g) $\frac{3}{4}x^{-1/2} - \frac{15}{4}x^{-7/2}$ (h) $e^x + e^{-x} - \sin x - \cos x$
 (i) $-2 \sin 2t + \frac{1}{4t^2}$

Adran 4. Rheol lluoswm ar gyfer differu

- $\sin x + x \cos x$
 - $3x^2 \cos 2x - 2x^3 \sin 2x$
 - $-\frac{1}{3}x^{-4/3}e^{-3x} - 3x^{-1/3}e^{-3x}$
 - $\frac{1}{2\sqrt{x}} \ln 4x + \frac{1}{\sqrt{x}}$
 - $(2x - 1) \sin 6x + 6(x^2 - x) \cos 6x$
 - $-\frac{1}{x^2} \left(\tan \frac{x}{3} - \cos \frac{x}{3} \right) + \frac{1}{3x} \left(\sec^2 \frac{x}{3} + \sin \frac{x}{3} \right)$
- $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta$
 - $2 \cos 2t \tan 5t + 5 \sin 2t \sec^2 5t$
 - $\cos z \ln 4z + \frac{\sin z}{z}$
 - $-\frac{1}{2}e^{-x/2} \left(\cos \frac{x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right)$
 - $6e^{6x} \ln 6x + \frac{e^{6x}}{x}$
 - $-\sin \theta \cos 3\theta - 3 \cos \theta \sin 3\theta$
 - $\frac{1}{t}(\ln 2t + \ln t)$

Adran 5. Rheol cyfran ar gyfer differu

- $\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$
 - $\frac{4x^3-3x^4}{(1-x)^2}$
 - $-\frac{5}{(1+2x)^2}$
 - $\frac{18x-18x^2-6x^4}{(2x^3+3)^2}$
 - $\left(\frac{1}{2}\sqrt{x} + 1 - \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) / (\sqrt{x} - x)^2$
- $\frac{x \cos x - \sin x}{x^2}$
 - $(1 - \frac{4}{3} \ln x)x^{-7/3}$
 - $\frac{2\theta \tan 2\theta - 2\theta^2 \sec^2 2\theta}{\tan^2 2\theta}$
 - $\frac{e^z}{z}(\sqrt{z} - \frac{1}{2\sqrt{z}})$
 - $\frac{2x \ln 2x - x}{(\ln 2x)^2}$
- $\frac{2 \cos 2t \sin 5t - 5 \cos 5t \sin 2t}{\sin^2 5t}$
 - $\frac{-2e^{-2x} \tan x - e^{-2x} \sec^2 x}{\tan^2 x}$
 - $\frac{(\cos 3x)/x + 3 \ln x \sin 3x}{\cos^2 3x}$
 - $\frac{\ln(4/3)}{x(\ln 4x)^2}$

Adran 6. Rheol cadwyn ar gyfer differu

- $6(4 + 3x)$
 - $-12x^3(1 - x^4)^2$
 - $\frac{4}{(1-2x)^3}$
 - $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$
 - $-\frac{1}{3} \left(1 + \frac{1}{x^2} \right) \left(x - \frac{1}{x} \right)^{-4/3}$
 - $\frac{5}{2}(4x - 3)(2x^2 - 3x + 5)^{3/2}$
 - $\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \frac{1}{2\sqrt{x-2\sqrt{x}}}$
 - $-\frac{4x-2x^3}{(4x^2-x^4)^{3/2}}$
- $2 \sin \theta \cos \theta$
 - $2\theta \cos \theta^2$
 - $\cos \theta \cos(\sin \theta)$
 - $-4 \sec^2(3 - 4x)$
 - $-25 \cos^4 5z \sin 5z$
 - $\frac{3 \sin x}{\cos^4 x}$
 - $(-1 - 6t) \cos(2 - t - 3t^2)$
- $-2y \exp(-y^2)$
 - $-3 \sin 3x \exp(\cos 3x)$
 - $-3e^{3x} \sin(e^{3x})$
 - $\frac{4 \cos 4x}{\sin 4x} = 4 \cot 4x$
 - $\frac{1}{x} \cos(\ln 4x)$
 - $\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$
 - $\frac{3e^{3t} + 9 \sin 3t}{2\sqrt{e^{3t} - 3 \cos 3t}}$

Adran 7. Differu ffwythiannau wedi'i ddiffinio'n ymhlyg

- $\frac{1}{1-3y^2}$
 - $\frac{y^2}{2y^3-1}$
 - $\frac{1}{e^y+2e^{2y}}$
 - $\frac{y-e^{-y}}{1+e^{-y}}$
- $\frac{-2\sin 2x}{\sec^2 y}$
 - $\frac{-2x-1}{2y-1}$
 - $\frac{-\sin x}{1-\cos y}$
 - $\frac{e^x-1}{2e^{2y}+2}$
 - $\left(\frac{1}{x}-1\right) / \left(e^y-\frac{1}{y}\right)$
 - $\frac{3(x-y)^2}{1+3(x-y)^2}$

Adran 8. Differu ffwythiannau wedi'i ddiffinio'n baramedrig

- $-\tan t$
 - $\frac{-2t^3}{t^2+1}$
 - $\frac{e^t+2t}{2e^{2t}+1}$
 - $\frac{t-1}{1+t}$
- $\frac{3}{4t}$
 - $-\frac{\sin 2t}{\sec^2 2t}$

Adran 9. Amrywiol ymarferion differu

- $3x^2 \tan 4x + 4x^3 \sec^2 4x$
 - $12 \tan^2 4t \sec^2 4t$
 - $12 \exp(3 \tan 4x) \sec^2 4x$
 - $\frac{3 \tan 4\theta - 12\theta \sec^2 4\theta}{\tan^2 4\theta}$
 - $(1 - e^x) \exp(x - e^x)$
 - $\frac{3y^4 + 5y^2 - 5y^{-4} - 3y^{-6}}{(y + y^{-1})^2}$
 - $(2^x \ln 2)x^2 + 2^{x+1}x$
 - $\frac{x-1}{x(\ln x-x)^2}$
 - $(-3 \ln 5)5^{-3x}$
 - $\frac{1}{t \ln t}$
 - $\frac{-4}{1-z^2}$
- $\frac{\cos x - \cos^2 x - x \sin x}{(1 - \cos x)^2}$
 - $\frac{e^z(z \ln z - \ln z - 1)}{(z \ln z)^2}$
 - $\frac{(3 \cos 3\theta \cos 2\theta - 2 \sin 3\theta \sin 2\theta) \tan 4\theta - 4 \sec^2 4\theta \sin 3\theta \cos 2\theta}{\tan^2 4\theta}$
- $-e^{-t} \ln(e^t + 1) + \frac{1}{e^t + 1}$
 - $6 \sin 3\theta \cos^5 3\theta - 12 \sin^3 3\theta \cos^3 3\theta$
 - $\frac{-6x(1-x^2)^{1/2}}{(1+x^2)^{5/2}}$
 - $(\cos \theta - \theta \sin \theta) \exp(\theta \cos \theta)$
 - $3(x \ln x)^2(1 + \ln x)$
 - $\frac{-2}{(1+x)^2} \exp\left(\frac{1-x}{1+x}\right)$
 - $\frac{2-3y^2}{y^3(y^2-1)^{3/2}}$
- $\frac{3 \cos^2 x \sin x}{2\sqrt{1-\cos^3 x}}$
 - $\frac{1}{4}(x-x^2)^{-3/4}(1-2x) \exp\left((x-x^2)^{1/4}\right)$
 - $-\frac{\sec^2(1/\theta)}{\theta^2 \tan(1/\theta)}$
- $\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$
 - $(2+4z^2) \exp(z^2)$
 - $6 \sin \theta \cos^2 \theta - 3 \sin^3 \theta$
 - $\frac{320x^6}{(1-x^4)^6} + \frac{48x^2}{(1-x^4)^5}$
- $-2 \cot 2x \operatorname{cosec} 2x$
 - $2 \sec^2 \theta \tan \theta$
 - $-\frac{\operatorname{cosec}^2 z}{2\sqrt{1+\cot z}}$
 - $-2 \operatorname{cosec}^2 \theta \cot^4 \theta - 3 \operatorname{cosec}^4 \theta \cot^2 \theta$
 - $\sec x$
 - $\sec^2(\sec \theta) \sec \theta \tan \theta$

Adran 10. Integrynnau ffwythiannau sylfaenol

- (a) $\frac{x^5}{5} + c$, (b) $\frac{x^8}{8} + c$, (c) $\frac{2x^{3/2}}{3} + c$ (d) $\frac{3x^{4/3}}{4} + c$, (e) fel (c),
 (f) $2x^{1/2} + c$, (g) $\frac{4x^{5/4}}{5} + c$, (h) $-\frac{1}{2x^2} + c$, (i) $\frac{x^{1.2}}{1.2} + c$, (j) $\frac{x^{0.7}}{0.7} + c$
 (k) fel (f) (l) $-2x^{-1/2} + c$ (m) $-\frac{1}{x} + c$ (n) $\frac{3x^{7/3}}{7} + c$
- (a) $\frac{1}{5} \sin 5x + c$, (b) $-\frac{1}{2} \cos 2x + c$ (c) $-2 \cos \frac{1}{2}x + c$ (d) $2 \sin \frac{x}{2} + c$
 (e) $\ln |x| + c$ (f) $\frac{1}{2}e^{2x} + c$ (g) $-\frac{1}{2}e^{-2x} + c$ (h) $3e^{x/3} + c$
 (i) $2e^{0.5x} + c$ (j) $-e^{-x} + c$ (k) fel (g) (l) $-\frac{1}{7} \sin(-7x) + c = \frac{1}{7} \sin 7x + c$

Adran 11. Llinoledd mewn integru

- (a) $\frac{7x^5}{5} + c$, (b) $-\frac{x^8}{2} + c$, (c) $\frac{2x^{3/2}}{3} + \frac{3x^{4/3}}{4} + c$ (d) $\frac{51x^{4/3}}{4} + c$,
 (e) $\frac{2x^{3/2}}{3} - 2x^{1/2} + c$ (f) $\frac{x^3}{3} + \ln |x| + c$ (g) $\frac{x^4}{4} - \frac{1}{x} + c$ (h) $-\frac{1}{14x^2} + c$
 (i) $11x + c$ (j) $\frac{11x^{0.7}}{0.7} + c$ (k) $x^2 - 2 \ln |x| + c$ (l) $\frac{7x^2}{2} - 11x + c$
- (a) $\frac{3x^2}{2} + \frac{1}{4} \sin 4x + c$ (b) $4x - \frac{1}{3} \cos 3x + c$ (c) $\frac{x^2}{4} - 2 \cos \frac{x}{2} + c$
 (d) $4e^x + 2 \sin \frac{x}{2} + c$ (e) $-\frac{e^{-2x}}{2} + \frac{e^{2x}}{2} + c$ (f) $-\frac{3 \cos 2x}{2} - \frac{2 \cos 3x}{3} + c$
 (g) $\frac{1}{k} \ln |x| + c$ (h) $-x - 4 \ln |x| + c$ (i) $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + c$
 (j) $\frac{1}{3} \ln |x| - 7x + c$ (k) $\sin \frac{1}{2}x + c$ (l) $\frac{x^3}{6} - 6x^{1/2} + c$
- (a) $2x^3 + 3x^2 + c$ (b) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} - 2x + c$ (c) $\frac{2x^{7/2}}{7} + \frac{4x^{5/2}}{5} + c$
 (d) $\frac{x^2}{2} - \frac{2x^{3/2}}{3} - 6x + c$ (e) $\frac{e^{3x}}{3} - e^x + c$ (f) $\frac{e^{2x}}{2} - e^x + c$
 (g) $x + 4 \ln |x| + c$ (h) $\frac{x^2}{2} + x + c$

Adran 12. Gwerthuso integrynnau pendant

- (a) $\frac{7}{5}$ (b) $-\frac{6305}{2}$ (c) $\frac{2}{3}\sqrt{8} + \frac{3}{4}\sqrt[3]{16} - \frac{17}{12}$ (d) $\frac{51}{4}(1 - \sqrt[3]{16})$ (e) 168
 (f) $\frac{4}{5}$ (g) 18 (h) $\frac{1}{2}$ (i) $\frac{1}{3}(e^{3/2} - 1)$ (j) $2(e^{-1} - e^{-2})$
 (k) $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{\sqrt{2}} + 1$ (l) $e^1 - e^{-1}$
- $\int_0^3 f(x) dx = \frac{33}{2}$, $\int_0^2 f(x) dx = \frac{14}{3}$, $\int_2^3 f(x) dx = \frac{71}{6}$. Yna $\frac{14}{3} + \frac{71}{6} = \frac{33}{2}$.
- $\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{8}{3}$, $\int_1^{-1} f(x) dx = -\frac{8}{3}$.

Adran 13. Integru fesul rhan

1. (a) $xe^x - e^x + c$ (b) $5 \cos x + 5x \sin x + c$ (c) $\sin x - x \cos x + c$
 (d) $\frac{1}{4} \cos 2x + \frac{1}{2}x \sin 2x + c$ (e) $\frac{1}{2}x^2 \ln x - \frac{1}{4}x^2 + c$ (f) $8 \sin \frac{x}{2} - 4x \cos \frac{x}{2} + c$
2. (a) $\frac{\pi}{2} - 1$ (b) $4e^2$
 (c) $-\frac{15}{4}e^{-2} - \frac{5}{4}e^2$ (d) $\frac{9}{2} \ln 3 - 2$
3. (a) $e^x(x^2 - 2x + 2) + c$ (b) $5x^2 \sin x - 10 \sin x + 10x \cos x + c$
 (c) $\frac{1}{2}x^2(\ln x)^2 - \frac{1}{2}x^2 \ln x + \frac{1}{4}x^2 + c$ (d) $-e^{-x}(x^3 + 3x^2 + 6x + 6) + c$
 (e) $-2x^2 \cos(\frac{1}{2}x) + 16 \cos(\frac{1}{2}x) + 8x \sin(\frac{1}{2}x) + c$
4. (a) $\frac{\pi^2}{4} - 2$ (b) $7e - 14$ (c) $-\frac{5}{4}e^{-2} + \frac{1}{4}e^2$
5. $x \ln x - x + c.$

Adran 14. Integru trwy amnewidiad

1. (a) $\sin(x - 3) + c$ (b) $-\frac{1}{2} \cos(2x + 4) + c$ (c) $\frac{1}{\omega} \sin(\omega t + \phi) + c$
 (d) $\frac{1}{9}e^{9x-7} + c$ (e) $\frac{1}{24}(3x^2 + 8)^4 + c$ (f) $\frac{(4x-3)^{5/2}}{40} + \frac{(4x-3)^{3/2}}{8} + c$
 (g) $-\frac{1}{3(x-2)^3} + c$ (h) $\frac{1}{4(3-t)^4} + c$ (i) $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + c$
 (j) $-\frac{\cos^4 x}{4} + c$ (k) $(1 + t^2)^{1/2} + c$ (l) $\frac{2x+1}{4} - \frac{1}{4} \ln |2x + 1| + c$
2. (a) $\frac{2(x-3)^{3/2}}{3} + 6\sqrt{x-3} + c$
 (b) $\frac{(x-5)^7}{7} + \frac{8(x-5)^6}{3} + \frac{64(x-5)^5}{5} + c$
 y gellir ei ehangu i $\frac{1}{7}x^7 - \frac{7}{3}x^6 + \frac{39}{5}x^5 + 55x^4 - \frac{1025}{3}x^3 - 375x^2 + 5625x + c$
3. (a) $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ (b) $\frac{907}{56}$
 (c) $\frac{26}{15}$ (d) $\frac{5265}{8}$
 (e) $\frac{1}{2}$ (f) 2
 (g) $2(e^{\sqrt{2}} - e^1)$
5. (a) $\ln |x + 1| + c$ (b) $\ln |x - 3| + c$ (c) $\ln |3x + 4| + c$ (d) $\ln |2x + 1| + c.$
6. (a) $\frac{1}{2} \ln |x^2 + 1| + c$ (b) $-\frac{1}{3} \ln |1 + \cos 3\theta| + c$ (c) $\frac{3}{2} \ln |1 + e^{2x}| + c$

Adran 15. Integru gan ddefnyddio ffracsiynau rhannol

1. (a) $\ln|x| + \ln|x+1| + c$ (b) $2\ln|x+1| + \ln|x| + c$
(c) $4\ln|x+2| + \ln|x+1| + c$ (d) $2\ln|x-1| - 3\ln|x-2| + c$
(e) $7\ln|x+9| + 2\ln|x+1| + c$ (f) $7\ln|x+9| - 2\ln|x+1| + c$
(g) $-2\ln|x+2| - 2\ln|x-2| + c$ (h) $8\ln|x+5| + 7\ln|x+2| + c$
(i) $\frac{1}{2}\ln|s-1| - \frac{1}{2}\ln|s+1| + c$
2. (a) $9\ln 3 - 17\ln 2$ (b) $2\ln 3 + 3\ln 2$
(c) $-3\ln 3 - \ln 2$
3. (a) $\ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + c$ (b) $4\ln|x+1| - \frac{2}{x+1} + c$
(c) $7\ln|x-3| + \frac{2}{x-3} + c$
4. (a) $-\ln 3 + 2\ln 2 + \frac{5}{12}$ (b) $2\ln 5 - 4\ln 2 + \frac{1}{40}$
(c) $\frac{16}{3} - 8\ln 3$
5. $\ln|x+2| + \ln|x+1| - \frac{1}{x+1} + c.$
6. $\ln|x+4| + 2\ln|x-3| + 2\ln|x-2| + c.$
7. $\ln|x-3| + \frac{1}{2}\ln|2x+1| - 2\ln|x+1| + c.$
8. $\frac{1}{2}x^2 - 3x - \ln|x+1| + 8\ln|x+2| + c.$
9. $2x - \ln|x+1| - \frac{15}{x+2} - 9\ln|x+2| + c.$
10. $x^2 - x + 4\ln|x| + \frac{3}{2}\ln|2x+1| + c$

Adran 16. Integru gan ddefnyddio unfathiannau trigonometrig

1. (a) $-\frac{1}{3}\cos 3x + c$ (b) $\frac{1}{8}\sin 8x + c$ (c) $-\frac{1}{7}\cos 7t + c$ (d) $\frac{\sin 6x}{6} + c$
2. $\frac{x}{2} - \frac{\sin 2x}{4} + c.$
3. $-\frac{1}{4}\cos 2t + c.$
4. (a) $-\frac{1}{10}\cos 10t - \frac{1}{4}\cos 4t + c$ (b) $\frac{4}{5}\sin 5x + \frac{4}{13}\sin 13x + c$
(c) $\frac{1}{12}\sin 6t - \frac{1}{16}\sin 8t + c$
5. $\tan t - t + c.$
6. $\frac{3}{8}t + \frac{1}{4}\sin 2t + \frac{1}{32}\sin 4t + c.$
7. $-\cos t + \frac{2}{3}\cos^3 t - \frac{1}{5}\cos^5 t + c.$

Adran 17. Amrywiol ymarferion integru

1. $\frac{(9x-2)^6}{54} + c.$
2. $2\sqrt{t} - 2 \ln |\sqrt{t} + 1| + c.$ (Cliw: Boed i $u = \sqrt{t} + 1.$)
3. $\frac{1}{5}t^5 \ln |t| - \frac{1}{25}t^5 + c.$
4. $\frac{10}{3}t^{3/2} - \frac{3t^4}{4} + 2t + c.$
5. $\frac{1}{3} \sin 3t - 3 \cos t + c.$
6. $\frac{1}{\ln a} e^{x \ln a} + c = \frac{a^x}{\ln a} + c.$
7. $e^{3x+1} \left(\frac{x}{3} - \frac{1}{9} \right) + c$
8. $\ln |x+2| + \ln |x-2| + c.$
9. $\frac{1}{2} \tan^2 \theta + c.$
10. $2/3.$
11. $\frac{1}{2} \arcsin x + \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + c.$
12. $\frac{1}{5}e^x(\sin 2x - 2 \cos 2x) + c$
13. $3 \ln |x| - 2 \ln |x-1| - \ln |x+3| + c.$
14. $\frac{1}{2}x^2 + 2x - 2 \ln |x+3| + \ln |x-3| + c.$
15. $\frac{1}{4}e^{2x}[2x^4 - 4x^3 + 6x^2 - 6x + 3] + c.$
16. $\frac{\sqrt{3}}{12}.$

Diolchiadau

Cyfieithiad o **A Calculus Refresher** yw **Cwrs Gloywi Calcwlws**.

Paratowyd y ddefnyddiau yn **A Calculus Refresher** gan y Dr Tony Croft a'r Dr Anthony Kay, o Adran Gwyddorau Mathemategol Prifysgol Loughborough.

Carai'r awduron ddiolch i'r Dr Joe Kyle a Jonathan De Souza am eu cywiriadau a'u hawgrymiadau defnyddiol.

Gwahoddir denfyddwyr i anfon unrhyw awgrymiadau ar gyfer gwelliannau at info@mathstore.ac.uk.

Cyfieithwyd y gyfrol gan yr Uned Gyfieithu, Prifysgol Cymru, Bangor. Golygwyd y cyfieithiad gan Dr Iestyn Pierce, Ysgol Gwybodeg, Prifysgol Cymru, Bangor.

Cyhoeddwyd yr argraffiad hwn o **Cwrs Gloywi Calcwlws** gan LTSN Maths, Stats & OR Network ym *Chwefror 2003*.

Mae modd cael cynnwys y llyfr hwn mewn fformat electronig fel gall adrannau addasu ac argraffu copïau eu hunain.

Manylion pellach gan:

LTSN Maths, Stats & OR Network

The University of Birmingham

Edgbaston

Birmingham B15 2TT

Ffôn: 0121 414 7095

e-bost info@mathstore.ac.uk

<http://ltsn.mathstore.ac.uk>