PREFACE

Avec cette nouvelle brochure consacrée à « Proportionnalité et Géométrie », le groupe Didactique de l'IREM d'Aquitaine poursuit le travail remarquable entrepris depuis de nombreuses années pour accompagner l'évolution, continue depuis plusieurs décennies, de l'enseignement des mathématiques.

Cette brochure propose en particulier des outils pour la mise en œuvre des nouveaux programmes en vigueur à partir de la rentrée 2016. Elle enrichit les ressources d'accompagnement sur la proportionnalité - mises en ligne sur le site Eduscol - notamment par la réflexion didactique et pédagogique suscitée par les témoignages des professeurs sur l'expérimentation des situations en classe.

Je tiens à remercier ces professeurs d'avoir proposé la rédaction de cette préface à l'IA IPR que j'étais dans l'académie de Bordeaux de 2004 à 2015. J'ai connu la plupart d'entre eux comme enseignants dans leurs établissements, souvent en secteur défavorisé (REP, REP+), comme tuteurs de professeurs stagiaires ou d'enseignants en difficulté et comme formateurs dans le cadre du Plan Académique de Formation. Je les ai connus également comme acteurs dans les projets de leurs établissements et en particulier dans les dispositifs d'aide aux élèves en difficulté. Plusieurs d'entre eux sont aujourd'hui professeurs à l'ESPE. Je rends hommage à leur engagement pour l'Ecole que je sais fondé sur de solides convictions.

Le groupe est accompagné par Annie Berté, retraitée et didacticienne auteure de nombreux ouvrages sur l'enseignement des mathématiques.

Dans la continuité des brochures précédentes, ce document présente des situations expérimentées en classe, souvent dans des classes de secteurs différents reflétant au mieux la diversité du public scolaire, et permettant ainsi une perception plus large du vécu et des réactions des élèves dans l'exécution des tâches demandées.

Ceci conduit d'emblée le lecteur, au-delà de l'analyse et de l'exposé du contenu mathématique, dans les processus d'apprentissage et l'activité mathématique de l'élève. Les obstacles pour les élèves et les stratégies qu'ils peuvent mettre en œuvre pour les dépasser sont identifiés.

Ce document propose des outils pour la mise en œuvre des nouveaux programmes et s'inscrit dans les cinq domaines du socle. Les situations présentées incitent en effet, selon le scénario pédagogique choisi par l'enseignant, à mobiliser et à développer les six compétences majeures de l'activité mathématique en s'appuyant sur des questions, des problèmes, des thèmes internes aux mathématiques ou liés à la vie quotidienne ou à d'autres disciplines (SVT, Géographie…). Dans chaque situation sont indiquées les compétences dont la mobilisation est privilégiée par la construction didactique et le scénario pédagogique choisis.

Enfin, n'oublions pas les prolongements ou ouvertures culturels proposés aux enseignants à la fin de plusieurs situations. Outre le plaisir pour le lecteur, ils peuvent permettre une exploitation dans le cadre d'un EPI, comme par exemple la situation « Format A4 » dans « Culture et création artistiques ».

Je suis persuadé que cette brochure sera une ressource précieuse pour ses lecteurs. Je les invite vivement à en rencontrer les concepteurs et à débattre avec eux par exemple lors des formations qu'ils assurent dans le cadre du Plan Académique de Formation.

Gabriel BORGER — IA IPR honoraire de mathématiques

SOMMAIRE

INTRODUCTION

La proportionnalité est un concept qui s'acquiert tout au long de la scolarité depuis le cours moyen jusqu'au lycée. Les années de collège sont une période cruciale car les élèves doivent renforcer et compléter les acquisitions de l'école élémentaire en harmonisant leurs pratiques (règle de trois, coefficient de proportionnalité) et construire le sens plus approfondi du concept en allant jusqu'à la quatrième proportionnelle, le théorème de Thalès et la fonction linéaire. En 6ème et 5ème, les tableaux de valeurs et le coefficient de proportionnalité sont revus : la proportionnalité est un outil pour résoudre des problèmes. En 4ème, la représentation graphique est introduite. La fonction linéaire sera identifiée et étudiée comme objet mathématique en tant que tel, en 3ème.

Notre première intention était de traiter le thème de la proportionnalité dans son ensemble, mais il y avait tant à dire, que ce travail nous a paru trop vaste. Nous nous sommes limités à la proportionnalité en géométrie.

I. Pourquoi ce choix du cadre géométrique ?

Dans ce cadre nous avons pu compléter deux points de nos brochures précédentes :

- En 5ème, une situation sur l'agrandissement d'un puzzle a été utilisée dans la brochure sur l'algèbre pour illustrer la multiplication de deux rationnels[1]. Nous utilisons une situation analogue pour travailler sur la proportionnalité.

- En 4ème, nous enrichissons l'introduction du théorème de Thalès tel qu'il est traité dans notre brochure de géométrie[2]. Nous allons jusqu'à l'alignement des points dans un graphique, amené par plusieurs agrandissements d'une photo rectangulaire. Les fonctions linéaires et affines en 3ème et seconde sont développées dans notre brochure sur les fonctions[3].

II. Des problèmes plus originaux

Trop souvent la proportionnalité est abordée uniquement à travers des problèmes très stéréotypés du type : « Le prix de 5 kg de poires est 12 €, quel est le prix de 7 kg ? ». Les élèves savent par contrat ce qu'il faut faire pour résoudre ce type de problèmes. En revanche, les situations dans le domaine de la géométrie permettent d'aborder des problèmes de proportionnalité où les élèves ne reconnaissent pas d'emblée le modèle, ce qui fait émerger leurs fausses conceptions au travers de leurs erreurs.

[1] Entrées dans l'algèbre en 6ème et 5ème – IREM d'Aquitaine – 2007, pages 68 à 71.

[2] Géométrie au cycle central 5ème et 4ème – IREM d'Aquitaine – 2000, pages 129-133.

[3] Les fonctions du collège jusqu'en seconde - IREM d'Aquitaine – 2011-2012.

L'enseignant peut alors repérer les élèves qui ne sont pas capables de mobiliser certaines procédures et proposer des remédiations.

III. Proportionnalité et géométrie, un thème privilégié : agrandissement-réduction

3. La notion d'agrandissement-réduction

Ce n'est pas véritablement une notion mathématique. Elle a été créée pour éviter de parler d'homothétie ou de similitude. Homothétie qui revient dans les programmes de 2016 qui nous invitent à faire le lien entre agrandissement-réduction d'une figure, théorème de Thalès, homothétie et proportionnalité.

Cette notion d'agrandissement-réduction n'est pas toujours définie de façon très rigoureuse dans les manuels de collège. Certaines rédactions qui y sont utilisées peuvent laisser penser qu'il suffit de multiplier les côtés d'une figure par un même nombre pour en obtenir un agrandissement.

Mais il faut faire attention : en effet, pour agrandir un carré ou un rectangle, il suffit de multiplier la mesure des deux côtés par une constante, tout en conservant la nature des figures, alors que pour un losange par exemple, cela ne suffit pas. Pour un triangle, soit on multiplie la longueur d'un seul côté et on conserve deux angles, soit on multiplie la longueur de deux côtés et on conserve l'angle compris entre les deux, soit on multiplie la longueur des trois côtés par le même facteur.

De façon générale, pour agrandir ou réduire une figure, il faut choisir les éléments qui suffisent pour la reproduire à une isométrie près (longueurs ou angles), puis multiplier les longueurs ainsi sélectionnées par un facteur constant et conserver les angles choisis.

4. Cas de l'agrandissement du rectangle et d'une photo rectangulaire

Le chapitre d'arithmétique sur les propriétés des « proportions » (mot utilisé autrefois pour désigner l'égalité de deux rapports) a disparu des programmes et deux de ces propriétés, souvent utiles, ne sont plus institutionnalisées, même si elles subsistent plus ou moins implicitement. Il est intéressant de les rencontrer dans un cadre autre que le cadre arithmétique.

Soient deux rectangles de dimensions x_1, y_1 pour l'un et x_2, y_2 pour l'autre :

- si les dimensions sont proportionnelles, les deux égalités $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2}$ et $\frac{y_1}{y_2} = \frac{x_1}{x_2}$ sont vraies simultanément ;

- quand il s'agit d'un rectangle de papier, relativement proche du rectangle abstrait, les élèves peuvent penser à agrandir le rectangle en ajoutant, une bande sur deux de ses côtés, ce qui revient à ajouter un même nombre aux dimensions. Intuitivement, pour les élèves, quand on agrandit, on ajoute quelque chose (quand on agrandit sa maison, on ajoute une pièce !), quand on réduit, on enlève quelque chose. C'est donc un point important à ne pas passer sous silence. Notre situation peut aussi faire comprendre aux élèves que les quantités ajoutées ou retranchées doivent être proportionnelles aux dimensions. Ce qui se traduit par les égalités suivantes : $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$. Encore une propriété des proportions, intéressante car reliée au taux d'accroissement pour la fonction linéaire et au théorème de Thalès.

Contrairement au rectangle de papier, la photo aide les élèves à comprendre que tout objet situé à l'intérieur s'agrandit dans les mêmes proportions. Dans cette transformation (homothétie ou similitude), tous les points intérieurs au rectangle sont transformés, il ne s'agit pas d'imaginer seulement l'ajout d'une bande sur les bords. Les élèves nous parlent spontanément de l'agrandissement d'un rectangle sur l'écran de l'ordinateur « en tirant par un coin ». Ainsi nos différents supports « concrets » (rectangles de papier ou photo) contribuent chacun à construire le sens de la notion d'agrandissement-réduction.

5. Thalès et proportionnalité

Le lien n'était pas toujours fait entre le théorème de Thalès et la proportionnalité, certains manuels se contentant de faire constater l'égalité des rapports sans en expliquer l'origine. Ce sera désormais possible à partir de la notion de triangles semblables. La relation entre la notion d'agrandissement-réduction d'un triangle et le théorème de Thalès se fera plus facilement. C'est ce que propose le parcours qui débute par la situation de l'agrandissement d'une photo.

IV. Deux pistes pour motiver l'apprentissage

Pour donner du sens à notre enseignement et motiver l'étude des mathématiques à l'école, ne faudrait-il pas axer les contenus sur l'utilité des mathématiques dans notre environnement et notre société, le lien entre les mathématiques et les autres disciplines et plus largement, le lien entre les mathématiques et la réalité ? Cette question occupe les pédagogues depuis Jean-Jacques Rousseau écrivant le traité de l'*Émile* (1762), plus tard Ovide Decroly (1871-1932) et Célestin Freinet (1896-1966) innovant pour des cursus entiers, et plus près de nous Emma Castelnuovo (1913-2014)[4]. L'institution

[4] Emma Castelnuovo enseignait les mathématiques dans une Scuola Media (enfants de 11 à 14 ans) à Rome. Un prix portant son nom a été créé par l'ICMI (International Commission for Mathematical Instruction).

Éducation Nationale n'a pas repris en l'état les travaux de ces pédagogues, mais des encouragements sont prodigués depuis longtemps et de plus en plus souvent, pour inciter les professeurs de mathématiques, en collège comme en lycée, à consacrer du temps à des travaux interdisciplinaires. C'est ainsi que des professeurs volontaires ont pu, dans les années 1980, réaliser au collège des «PAE» (Projets d'Action Éducative), puis des « thèmes transversaux », remplacés eux-mêmes plus tard par des « Parcours diversifiés » en 5ème devenus des « Travaux croisés » en 4ème , le tout transformé en IDD (Itinéraire De Découverte), sans parler plus près de nous des TPE en lycée, supprimés en terminale, maintenus en 1ère. Les instructions officielles au collège recommandent de travailler à partir de thèmes interdisciplinaires, dans le but de motiver les élèves les plus faibles, qui auraient du mal à s'intéresser aux mathématiques enseignées de manière trop abstraite. Et il faut bien reconnaître que les mathématiques jouent un rôle important dans la vie courante, mais passent pourtant trop souvent inaperçues. Cela conduit nos élèves et de nombreux adultes à se demander à quoi servent les mathématiques, qui apparaissent comme un savoir purement scolaire et donc inutile. De récents travaux en didactique des mathématiques s'intéressent à ces questions pour motiver les apprentissages.

Cependant nous pensons que partir de questions à propos de la réalité physique ou sociale n'est pas suffisant pour rendre efficace l'enseignement des mathématiques. C'est pour cela que nous croisons cette piste avec une autre, qui consiste à instaurer dans la classe une activité mathématique réelle des élèves. Là encore ce n'est pas une ambition nouvelle. On trouve dans les « Instructions générales » du 1er octobre 1946 ceci : « Que la méthode « active » doive être mise en pratique dans toutes les classes de mathématiques, c'est là une règle de conduite dont la valeur n'est plus contestée. L'enregistrement passif d'un certain nombre de notions et de faits ne saurait constituer un enseignement de formation intellectuelle ». Les changements de programmes successifs, de grande ampleur à partir des années 70, ont mis plutôt l'accent sur un changement de contenu et non sur les méthodes. Le mot « activité » a réapparu en 1985. Sa définition en a été donnée à nouveau dans les programmes de collège en 1995 puis en 2005 : « À travers la résolution de problèmes [...] les élèves peuvent prendre conscience de ce qu'est une véritable activité mathématique : identifier et formuler un problème, conjecturer un résultat, [...] bâtir une argumentation, contrôler les résultats obtenus en évaluant leur pertinence, [...] communiquer une recherche, mettre en forme une solution ». De ce fait, depuis plusieurs années, les manuels fournissent aux enseignants des propositions d'« activités », le plus souvent pour introduire des notions nouvelles, « activités » dont l'analyse didactique montre qu'elles laissent peu de place à l'activité mathématique à la charge des élèves. Sans ressources pédagogiques adaptées, les enseignants ont des difficultés à développer l'activité mathématique des élèves hors des moments de résolution d'exercices ou de problèmes d'application du cours.

V. Quel ancrage dans le socle commun de connaissances, de compétences et de culture ?

Les six compétences du programme de mathématiques, qui pour nous sont essentielles, sont mobilisées, voire travaillées régulièrement. Dans chaque situation, les compétences en jeu seront indiquées.

Il restera à préciser les notions du programme travaillées dans chaque situation, ce qui sera indiqué dans une courte fiche précédant chaque article de la brochure.

La façon dont nous proposons de travailler dans cette brochure conduit tout naturellement les élèves à résoudre des problèmes. Les situations d'enseignement sont suffisamment riches et spécialement construites pour amener les élèves à se charger en classe d'un ou de plusieurs problèmes qui s'enchaînent.

La compétence « Chercher » du programme de mathématiques est constamment sollicitée dans toutes ses composantes, lors des activités proposées.

Pour les travaux de groupe et les phases de recherche, les élèves échangent pour élaborer une stratégie de réponse, pour se mettre d'accord sur une solution commune, dans le respect des arguments des autres.

Lors de la mise en commun, les élèves débattent entre eux pour défendre leur point de vue auprès de leurs camarades, exposer leur stratégie et la justifier. Ils osent exprimer leurs solutions même erronées, ce que nos choix didactiques rendent possible.

La compétence « Communiquer » est donc travaillée à tous les moments de l'activité des élèves, de la phase de recherche du problème à la mise en commun.

L'organisation de notre enseignement instaure des débats de preuve à partir de conjectures émises par les élèves, conjectures qu'ils auront les moyens intellectuels de défendre du fait de la progression suivie. La compétence « Raisonner » est donc sollicitée et l'apprentissage de la preuve puis de la démonstration est mené progressivement dès le cycle 3.

Cet apprentissage de l'argumentation contribue à la formation du citoyen. Elle ne nous semble pas des moindres : ce n'est pas celui qui parle le plus fort qui a raison, ce n'est pas nécessairement la majorité qui a raison… Ce point est un des objectifs du domaine 3 du socle commun : la formation de la personne et du citoyen.

De nombreuses disciplines permettent de construire ce rapport au monde et à la société, et les mathématiques permettent de commencer très tôt.

La compétence « Représenter » est également développée en plusieurs occasions. La situation de « L'agrandissement d'une photo », par exemple, conduit les élèves à changer de cadre, numérique, algébrique, géométrique, pour résoudre le problème, sans que ce soit le professeur qui l'impose.

D'autres situations dans la brochure, « Les bandes de papier » ou « Le périmètre du cercle » vont aussi amener les élèves à utiliser des schémas, des croquis pour expliquer leur raisonnement. Dans la situation sur « L'agrandissement d'un pavé », ils auront à construire des patrons…

La compétence « Modéliser » est sollicitée dans plusieurs situations de cette brochure. La modélisation est une composante indissociable de la résolution de problèmes, issus de la vie courante notamment. C'est une étape difficile, trop souvent passée sous silence et laissée à la charge des élèves seuls ou bien déjà préparée par le professeur, donc passant inaperçue pour les élèves. Nous travaillons cette compétence de façon explicite, en signalant les difficultés que cela pose et en les discutant avec les élèves.

Cependant, évoquer le monde réel dans des problèmes « concrets » - qui ne le sont peut-être pas pour des jeunes qui ne les ont pas vécus - exige des précautions. La modélisation nécessaire pour comprendre le rôle des mathématiques dans ce genre de problème « concret » est parfois un obstacle, qui se rajoute à la difficulté mathématique que l'on veut aborder. Pour cette raison, nous utilisons souvent un matériel qui est présent dans la classe et que les élèves peuvent manipuler (photos, rectangles ou triangles de papier…), avec lequel la modélisation est très simple.

Dans cette brochure, la modélisation est abordée essentiellement dans deux situations, avec des objectifs différents :

- la mesure des feuilles de magnolia où le modèle linéaire rend compte de la réalité de façon approchée,

- la séquence sur le format A4 où on voit la différence entre des rectangles de papier et des rectangles abstraits, ainsi qu'entre un alignement physique et un alignement au sens mathématique.

Dans la séquence traitant de l'agrandissement d'un rectangle, poser le problème avec une photo rectangulaire « réelle » plutôt qu'avec un rectangle abstrait joue un rôle important dans la façon dont les élèves abordent la question, comme nous allons l'expliquer dans le paragraphe suivant.

N'oublions pas l'apport des TICE qui interviennent dans la plupart des situations. Selon les cas, les élèves utiliseront le tableur, Geogebra pour le tracé de graphiques, les calculatrices pour faciliter les calculs…

Cependant, nous veillons à ce que l'usage des logiciels soit pertinent pour susciter l'activité mathématique des élèves, apporter un plus pour la modélisation du problème, la recherche de conjectures, le calcul…

L'usage de l'informatique ne remplace pas la manipulation concrète de matériel apporté en classe, ou évoqué (découpage, schémas…). L'expérimentation qu'elle soit virtuelle ou réelle reste un élément important pour la dévolution d'un problème aux élèves.

Il est évident que les domaines 1, 2 et 4 du socle commun sont ainsi régulièrement travaillés quand on favorise la démarche d'investigation des élèves, comme le propose cette brochure.

VI. Situations proposées dans la brochure

Les séquences que nous proposons dans cette brochure ont été testées de nombreuses fois dans des classes différentes : nous imaginons une situation - c'est-à-dire un problème, le matériel et l'organisation de la classe - nous la testons, puis nous améliorons le dispositif à partir de nos observations. Nous avons écrit ce que nous pensons indispensable à l'enseignant pour le déroulement en classe et nous donnons des exemples de production d'élèves.

Il s'agit des situations suivantes :

1- « Les bandes de papier » dès la 6ème, pour revoir les propriétés étudiées en CM2, jusqu'en milieu de cycle 4 pour travailler le coefficient de proportionnalité ou introduire la notion de fonction linéaire.

2- « Le périmètre du cercle » en $6^{\text{ème}}$.

3- « L'agrandissement des pièces d'un puzzle » de la fin du cycle 3 (CM-$6^{\text{ème}}$) jusqu'en $5^{\text{ème}}$.

4- « L'agrandissement d'une photo », point de départ d'un parcours qui permet d'introduire le théorème de Thalès et la représentation graphique d'une situation de proportionnalité, en cycle 4, de la $5^{\text{ème}}$ à la $3^{\text{ème}}$.

5- « Les trois triangles rectangles » en $3^{\text{ème}}$, pour reprendre le théorème de Thalès.

6- « L'agrandissement d'un pavé » en $3^{\text{ème}}$.

7- « Le format A4 » qui peut s'utiliser en $3^{\text{ème}}$ ou encore mieux en 2^{de}. Cette situation est directement reliée à l'agrandissement de la photo et conduit à une fonction linéaire avec un coefficient non-rationnel.

8- « Croissance des êtres vivants, proportionnellement ou non. » qui peut s'utiliser de la $6^{ème}$ jusqu'au lycée.

9- « Statistiques et géométrie » qui permet en $3^{ème}$ de contribuer à la formation du citoyen.

On peut distinguer dans cette liste deux types de situations :

- celles où la proportionnalité est le but de l'apprentissage ou du réinvestissement comme « Les bandes de papier » en $6^{ème}$. Ce sont les plus fréquentes.

- d'autres où l'objectif principal visé n'est pas la proportionnalité, mais où ce modèle intervient comme outil pour résoudre le problème. C'est notamment le cas dans « Le périmètre du cercle ».

« L'agrandissement d'une photo » n'est pas constituée d'une seule situation au sens de la théorie des situations didactiques, mais elle est composée de séquences formées d'un enchaînement de situations constituant une AER (Activité d'Étude et de Recherche). L'ensemble des AER constitue un PER (Parcours d'Étude et de Recherche) qui couvre une partie du programme de géométrie du cycle 4.

Ce parcours a été conçu dans le cadre de la recherche PERMES (Parcours d'Étude et de Recherche en Mathématique pour l'Enseignement Secondaire) soutenue par l'IFé (Institut Français de l'Education, ex-INRP) et l'ADIREM qui regroupe sur le plan national les différents directeurs des IREM.

LES BANDES DE PAPIER

Problème posé

Sachant que 4 bandes grises ont la même longueur que 6 bandes blanches, il faut trouver :

- combien de bandes blanches ont la même longueur que 8 bandes grises ? Même question pour 2 bandes grises, puis 10 bandes grises, puis 6 bandes grises, puis 30 bandes grises, puis 100 bandes grises,
- combien de bandes grises ont la même longueur que 30 bandes blanches ? 120 bandes blanches ?

Les élèves ont à leur disposition un dessin des bandes grises et blanches alignées les unes en dessous des autres.

Niveau : de la 6ème à la 4ème

Objectifs

En 6ème et 5ème

- Faire émerger le modèle implicite additif, inapproprié en situation de proportionnalité et le mettre en échec grâce à un matériel facile à manipuler.
- Faire reconnaître la présence de la proportionnalité, sans prononcer nécessairement le mot, mais faire activer le bon modèle et son fonctionnement, avec les différentes procédures.
- Apprendre aux élèves à chercher et utiliser un coefficient de proportionnalité décimal.
- Provoquer la venue du mot « proportionnalité » dans la classe pour le bilan final.
- Faire manipuler la proportionnalité dans les deux sens (la fonction et sa réciproque).

En 4ème

- Faire reconnaître plus ou moins implicitement une fonction et utiliser en acte ses propriétés.
- Faire expliciter la fonction linéaire sous-jacente au moment du bilan, pour un premier contact avec la notion de fonction linéaire.

Notions utilisées

- Proportionnalité avec les différentes procédures.
- Le coefficient de proportionnalité (non indispensable) est 1,5. Pour l'utiliser il faut savoir multiplier ce nombre par des entiers.

Matériel

La fiche élève fournie dans la brochure.
Ciseaux et colle pour les élèves s'ils découpent les bandes.
Éventuellement des bandes déjà découpées à disposition des élèves sur demande.
Éventuellement des bandes mobiles sur écran d'ordinateur pour le professeur.

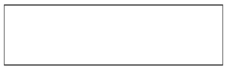
Temps de mise en œuvre en classe : 1h

Les bandes de papier

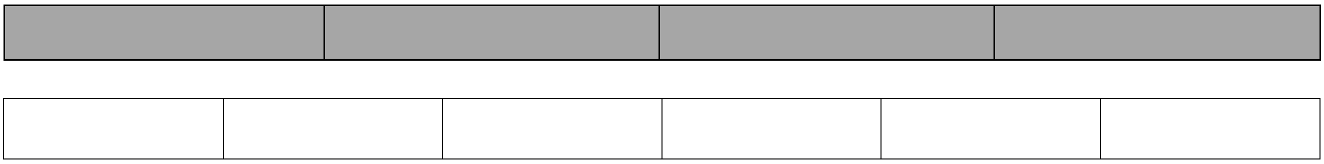
I. L'énoncé distribué aux élèves

Les élèves reçoivent individuellement une liste de huit questions et gèrent seuls le découpage des bandes (en annexe au document distribué aux élèves) s'ils pensent en avoir besoin pour trouver la réponse ou simplement pour la vérifier empiriquement.

Voici une bande grise : 

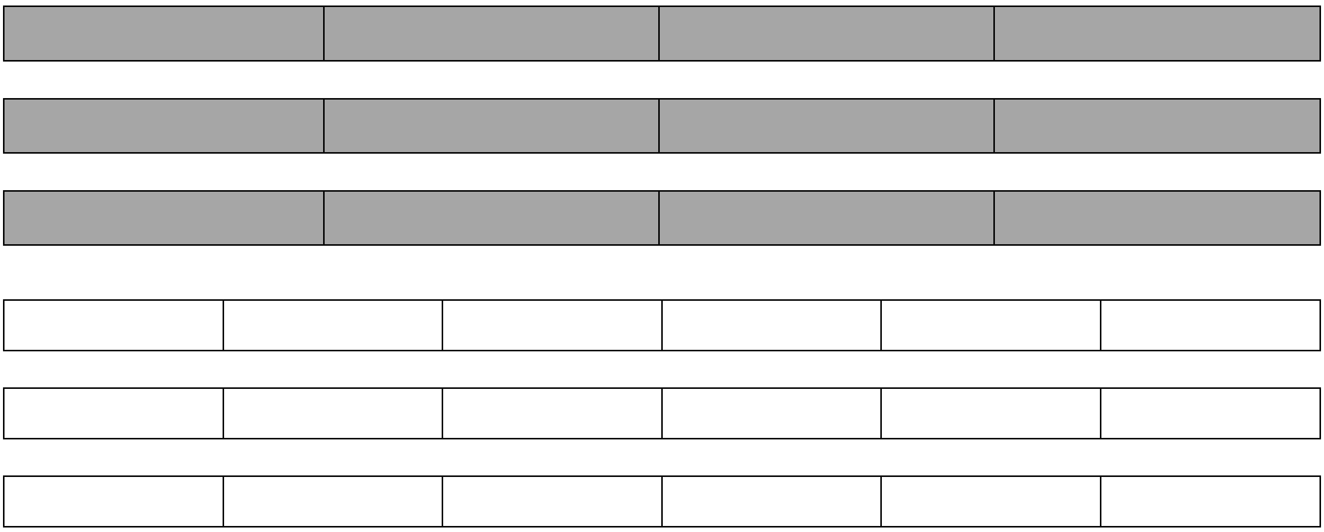
Voici une bande blanche : 

4 bandes grises ont la même longueur que 6 bandes blanches.



a. Combien de bandes blanches ont la même longueur que 8 bandes grises ?
b. Combien de bandes blanches ont la même longueur que 2 bandes grises ?
c. Combien de bandes blanches ont la même longueur que 10 bandes grises ?
d. Combien de bandes blanches ont la même longueur que 6 bandes grises ?
e. Combien de bandes blanches ont la même longueur que 30 bandes grises ?
f. Combien de bandes blanches ont la même longueur que 25 bandes grises ?
g. Combien de bandes grises ont la même longueur que 30 bandes blanches ?
h. Combien de bandes grises ont la même longueur que 120 bandes blanches ?

ANNEXE :



II. Niveau de classe auquel ce problème peut être posé

Nous nous sommes inspirés d'une situation figurant dans le livre Ermel - Cours moyen 1 (Edition Hatier 1990). Le professeur annonçait que 10 bandes bleues ont la même longueur que 4 bandes rouges. Pour faire comprendre cette phrase, un matériel collectif (bandes de papier) était manipulé par le professeur au tableau. Une seule question était posée individuellement aux élèves dans une première phase : ils devaient prévoir le nombre de rouges pour égaler la longueur de 25 bandes bleues, puis se grouper par deux pour discuter de leur solution. La vérification était effectuée au tableau avec les bandes lors de la mise en commun.

Nous avons modifié cette situation pour le collège, et elle est ainsi utilisable aussi bien en 6ème qu'en 5ème, voire en 4ème.

Une partie des productions que nous donnons sont celles d'élèves de 4ème, du Collège Canterane de Castelnau de Médoc, ce qui prouve bien que ce problème n'est pas trop facile, même à ce niveau ! Ceci est dû à l'organisation et aux variables didactiques choisies.

D'autres sont des productions de 6ème du collège Lapierre à Lormont.

III. Objectifs

<u>En 6ème et 5ème</u>

- Faire émerger le modèle implicite additif, inapproprié en situation de proportionnalité et le mettre en échec grâce à un matériel facile à manipuler.
- Faire reconnaître la présence de la proportionnalité, sans prononcer nécessairement le mot, mais faire activer le bon modèle et son fonctionnement, avec les différentes procédures.
- Apprendre aux élèves à chercher et utiliser un coefficient de proportionnalité décimal.
- Provoquer la venue du mot « proportionnalité » dans la classe pour le bilan final.
- Faire manipuler la proportionnalité dans les deux sens (la fonction et sa réciproque).

<u>En 4ème</u>

- Faire reconnaître plus ou moins implicitement une fonction et utiliser en acte ses propriétés.
- Faire expliciter la fonction linéaire sous-jacente au moment du bilan, pour un premier contact avec la notion de fonction linéaire.

Cet exercice est donné en classe, les élèves cherchent pendant 20 à 30 minutes.

Pour corriger, le professeur utilise les productions des élèves et instaure une discussion entre eux pour faire émerger des techniques permettant de répondre aux questions ainsi que différentes façons de présenter la proportionnalité.

Les élèves mobilisent la compétence « Modéliser » car ils doivent conjecturer le modèle de la proportionnalité et mettre en œuvre ce modèle avec leurs connaissances, pour résoudre le problème. Pour répondre, ils doivent expliquer leur raisonnement, et lors de la mise en commun, comprendre les explications des autres et argumenter dans l'échange. Cela relève de la compétence « Communiquer ».

IV. Choix des variables

Les questions amènent les difficultés progressivement.
Les deux premières questions jouent sur le double puis la moitié. Pour les deux questions suivantes, une manipulation permet de répondre ou de vérifier car les nombres sont encore petits. La manipulation est facultative pour ceux qui n'en ont pas besoin.

Dans les questions suivantes, le nombre de bandes augmente de sorte qu'il est de plus en plus difficile, voire impossible, de manipuler. La modélisation devient alors indispensable.

a) Les élèves seront conduits à appliquer une ou les deux propriétés de la linéarité de la fonction f sous-jacente : $f(k\,x) = k\,f(x)$ et $f(x + y) = f(x) + f(y)$

Il n'est pas nécessaire de trouver l'image de 1.

c) Si certains élèves veulent recourir au coefficient de proportionnalité, il a été choisi décimal, mais sa valeur est simple (1,5) et permet la procédure suivante : multiplier un nombre a de bandes par 1,5 revient à calculer $a + \frac{1}{2}\,a$.

d) Les deux dernières questions sont plus difficiles car elles concernent la fonction réciproque. En d'autres termes, les élèves ont adopté une méthode pour trouver un nombre de bandes blanches et ils doivent maintenant trouver un nombre de bandes grises. Ils peuvent être déstabilisés même si l'application des propriétés de la fonction linéaire conduit au résultat sans se soucier de la dite fonction. Dans un premier temps, la dernière question portait sur 150 blanches, ce qui permettait à certains élèves de se référer à leur résultat précédent : 100 grises donnent 150 blanches. D'autres refaisaient le calcul. C'est ce qui apparaît dans certaines copies. Nous conseillons de poser la question plutôt pour 120 blanches.

e) La difficulté progressive des questions va permettre à certains élèves d'évoluer au cours de la séance : au début, ils peuvent se contenter d'observer les bandes dessinées ou collées, puis ils seront conduits à un saut conceptuel. C'est le cas notamment en 6ème comme le montre la production d'Harad, qui entre difficilement dans l'usage de la multiplication (voir dernière page).

V. Organisation de la séance

Les élèves reçoivent une liste de huit questions. Le professeur dit aux élèves qu'ils ont plusieurs questions mais ce n'est pas grave s'ils ne répondent pas à toutes. Il leur dit de travailler individuellement chacun à son rythme. Ils peuvent utiliser toutes les méthodes qu'ils connaissent.

Ils ont à leur disposition en annexe des bandes de papier dessinées qu'ils peuvent découper. Ils gèrent seuls le découpage des bandes s'ils pensent en avoir besoin pour trouver la réponse ou simplement pour la vérifier.

Certains élèves peuvent hésiter à découper les bandes (recul devant le temps nécessaire, le manque de ciseaux, la peur de mal découper, etc.). Le professeur, s'il voit des élèves bloqués, devra les y encourager, pour qu'ils puissent démarrer. La manipulation permet de s'approprier le problème.

Le professeur devrait-il préparer des bandes grises et blanches déjà découpées et plastifiées, qu'il donnerait à ceux qui les demandent pour vérifier ou à ceux qui n'arrivent pas à démarrer ?

Pour faciliter la dévolution du problème, le professeur devrait-il commencer en disposant 4 bandes grises et 6 blanches découpées et retenues côte à côte au tableau par des aimants, et expliquer l'entrée dans la première question en s'appuyant sur la réalité des bandes ? Ce matériel physique pourrait être remplacé par des bandes virtuelles que le professeur déplacerait sur un écran d'ordinateur.

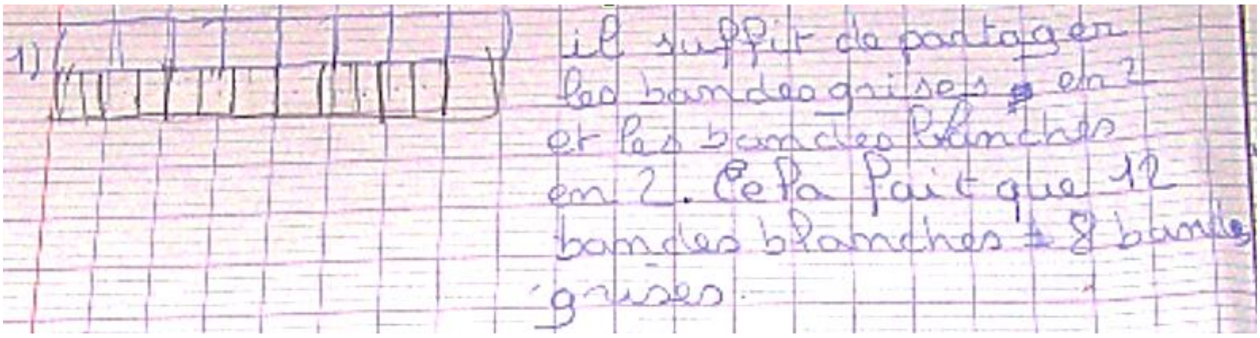
Nous avons choisi de n'utiliser ni l'un ni l'autre, car cela peut conduire des élèves à se servir des bandes découpées, alors qu'ils n'en ont pas besoin, ni pour trouver le résultat, ni pour vérifier leur réponse quand ils en sont intellectuellement certains. Pour d'autres, ce sera indispensable et le professeur peut les y conduire individuellement en passant dans les rangs.

Avant la mise en commun, il peut y avoir une phase de discussion sur les procédures à deux. Cela amène les élèves à verbaliser leurs procédures pour les expliquer à leur voisin et peut faciliter la mise en commun.

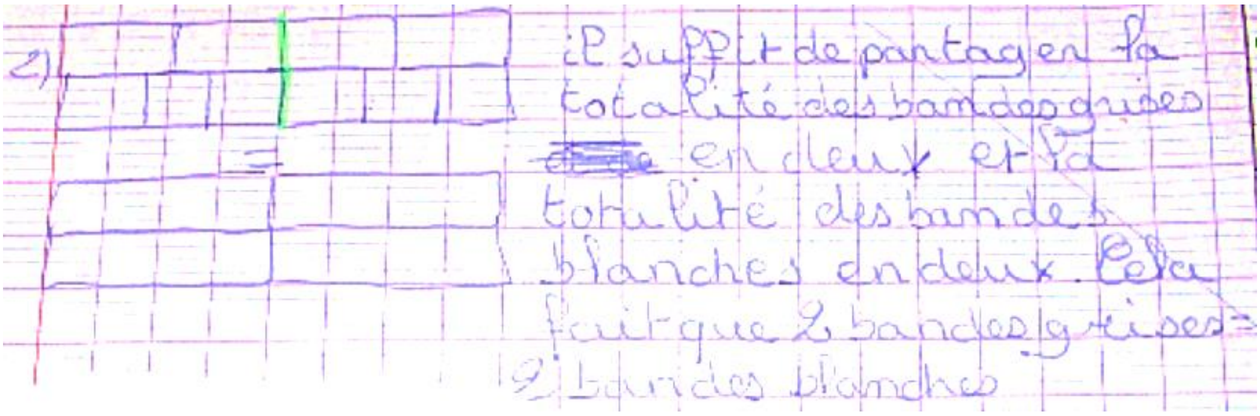
VI. Analyse de travaux d'élèves

Voici des travaux d'élèves de 4ème qui montrent ces difficultés pour la dévolution du problème.

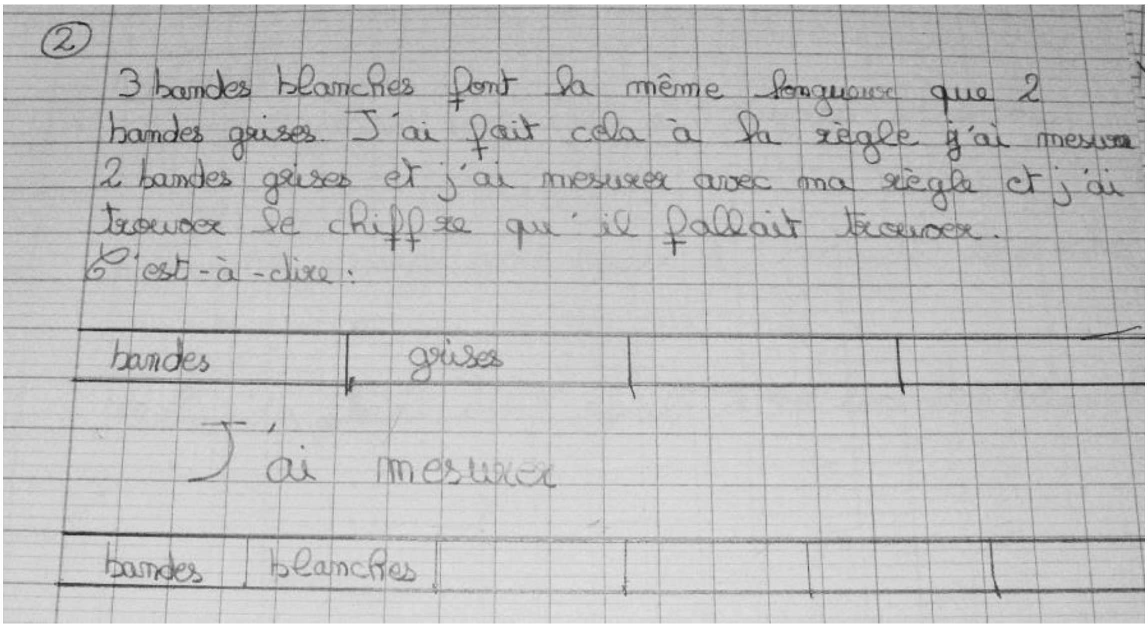
a) Camille n'a pas compris que la longueur des bandes ne peut être modifiée. La première question portant sur 8 bandes grises, alors qu'il y en a 4 sur la ligne, elle partage sur son dessin les bandes grises en deux parties égales pour en avoir 8. Mais comme elle conserve le rapport des longueurs entre grises et blanches en partageant les blanches également en deux parties égales, elle trouve le bon résultat (12).



b) Elle dessine sans découper, change la longueur de la bande et se perd dans le dessin en accolant les bandes de sorte qu'elle arrive à dire que 2 bandes grises ont la même longueur que 2 blanches.



c) D'autres élèves, du fait de la présence du mot « longueur », parlent de « mesurer les bandes ». La mesure exacte de 4 bandes grises accolées ou de 6 bandes blanches accolées est 16,2 cm ce qui est bien difficile à trouver avec la règle graduée. Ce serait un détour possible pour répondre aux questions mais ce n'est pas le but de ces élèves. Alix a mesuré uniquement pour reproduire les bandes sur son cahier.



Le professeur repérera vite de tels élèves pour préciser la consigne et les possibilités d'utilisation du matériel fourni (découpage, collage).

VII. Utilisation des travaux d'élèves pour la mise en commun

Le professeur **sélectionne quelques travaux d'élèves de sa classe** qui lui ont paru caractéristiques des différentes démarches pour les projeter au tableau et faire discuter tous les élèves lors de la mise en commun. La discussion doit être conduite selon une progression comme ci-dessous.

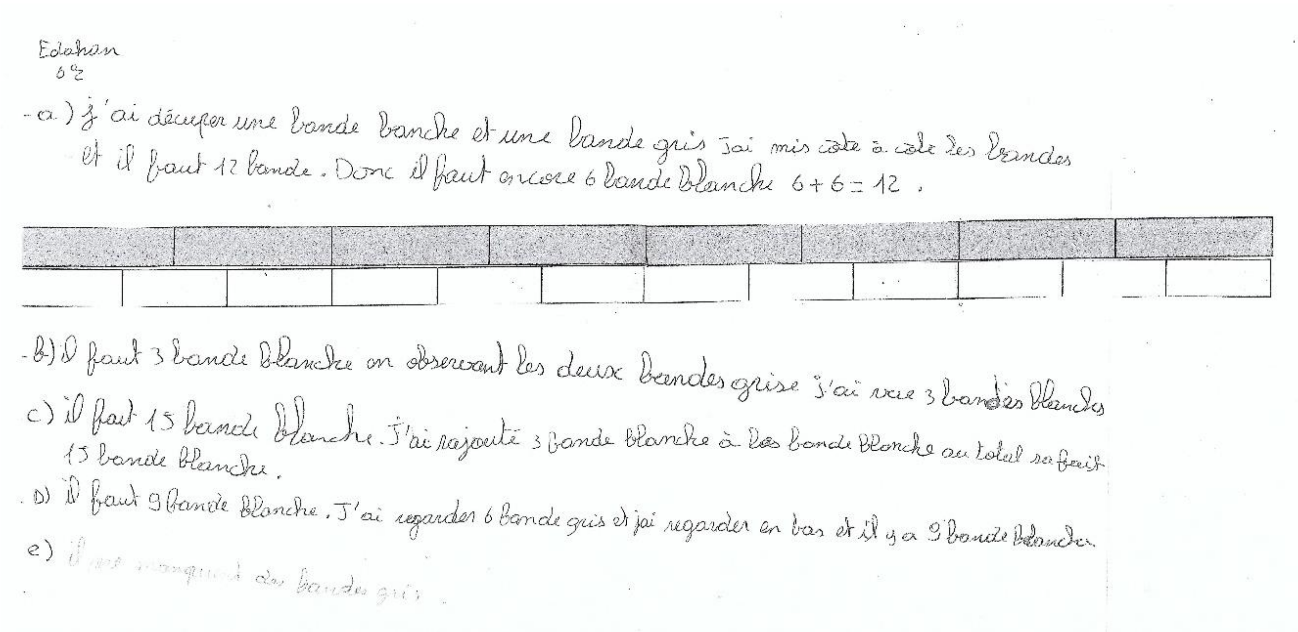
1. Rester au niveau de la manipulation, pas de modélisation nette après découpage

Des élèves découpent les bandes pour répondre aux questions mais ne modélisent pas assez leur manipulation par une correspondance numérique entre les deux collections de bandes. Il leur est impossible de répondre dès que le nombre de bandes est important. Le professeur exploite un exemple pour montrer où est le blocage et la nécessité de trouver une autre méthode.

En 6ème :

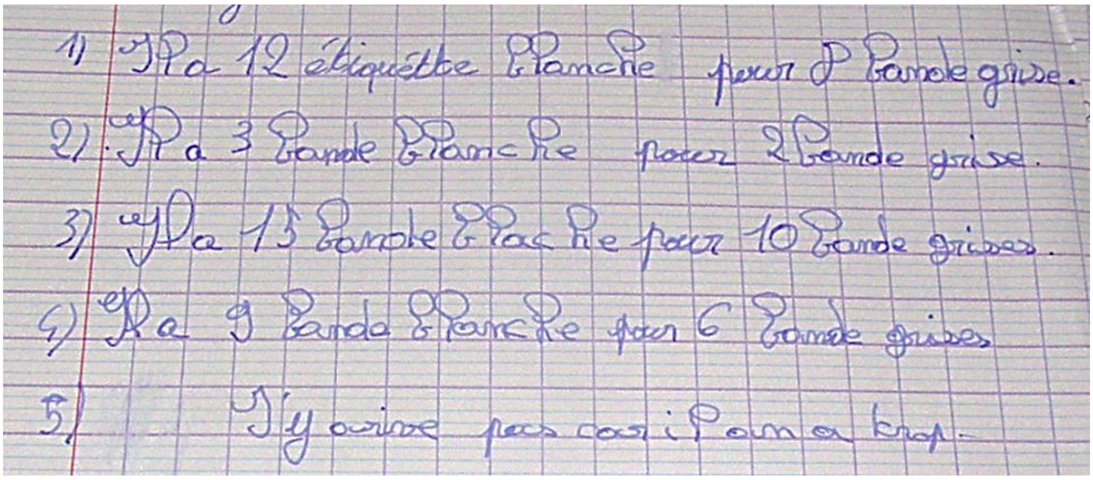
Edahan fournit son collage pour 8 grises et amorce la modélisation en comptant 6 + 6 bandes blanches, mais faute de passer à la multiplication (8 = 4 × 2), elle ne poursuit pas non plus par la division par 2 : elle dit qu'elle observe le résultat pour 2 grises. Elle abandonne ensuite le collage trop long et imagine visuellement sans se tromper la correspondance pour 10 grises en rajoutant 2 grises imaginaires aux 8 déjà collées. Pour 6 grises, elle revient à l'observation de son collage.

Edahan ne franchit pas le cap des 30 grises. Elle dit qu'elle ne peut continuer car il lui manque des bandes.


Edahan
6e

- a) J'ai décuper une bande banche et une bande gris Jai mis cote à cote les brandes et il faut 12 bande. Donc il faut encore 6 bande blanche 6 + 6 = 12.
- B) il faut 3 bande blanche on observant les deux bandes grise j'ai vue 3 bandes blanches
c) il faut 15 bande blanche. J'ai rajouté 3 bande blanche à les bande blanche au total sa fait 15 bande blanche.
- D) il faut 9 bande blanche. J'ai regarder 6 bande gris et jai regarder en bas et il y a 9 bande blanche.
e) il me manquait des bandes gris.

En 4ème : La même chose se reproduit.


1) Il a 12 étiquette blanche pour 8 bande grise.
2) Il a 3 bande blanche pour 2 bande grise.
3) Il a 15 bande blache pour 10 bande grises.
4) Il a 9 bande blanche pour 6 bande grises
5) J'y arrive pas car il on a trop.

2. <u>Modèle additif</u>

C'est ici que la discussion de la classe démarre vraiment

En 6ème : le professeur peut montrer le travail de Sinan qui utilise la propriété multiplicative, mais bute sur l'obstacle additif.

A. Si 4 bandes grises fait 6 bandes blanches, alors 8 bandes grises fait 12 bandes blanches.

b. Il faut faire 4 − 2 = 2 et 6 − 3 = 3, car 2 est la moitié de 4 bandes grises et 3 est la moitié de 6 bandes blanches.

c. Il faut 14 bandes blanches pour avoir la même longueur que 10 bandes grises, car 8 bandes grises fait 12 bandes blanches alors il faut rajoute 2 bandes grises à 8 ça fait 8 + 2 = 10 et il faut rajouté 2 bandes blanches a 12 ça fait 12 + 2 = 14.

d. Il faut 6 bandes blanches parce 2 bandes grises entière fait 3 bandes blanches.

e. Il faut faire 3 × 14 = 42. Il faut 42 bandes blanches, car pour 10 bandes grises il faut 14 bandes blanches alors j'ai fait 3 × 14 = et j'ai trouver 42.

f. Il faut faire 6 + 14 = 82 bandes blanches donc on rajoute 18 bandes blanches pour faire 100 bandes grises 82 + 18 = 100 bandes grises.

g. Il faut 20 bandes grises pour faire 30 bandes blanches.

Il utilise le double et la moitié avec succès pour les deux premières questions.

Pour 10 bandes grises, il fait 10 = 8 + 2. Il calcule 12 + 2 = 14 et répond 14 blanches.

Pour la mise en défaut du résultat, le professeur peut exploiter la phrase d'Edahan qui a imaginé

10 = 8 + 2 grises et a trouvé 12 + 3 = 15 blanches.

En 4ème : le professeur peut montrer le travail de Maël qui associe 4 à 6 en ajoutant 2, puis ajoute 2 systématiquement ensuite. Ce procédé apparait fréquemment en sixième.

B.G	8	2	10	6	30	100
B.B	10	4	12	8	32	102

+2

B.B	30	150
B.G	28	148

−2

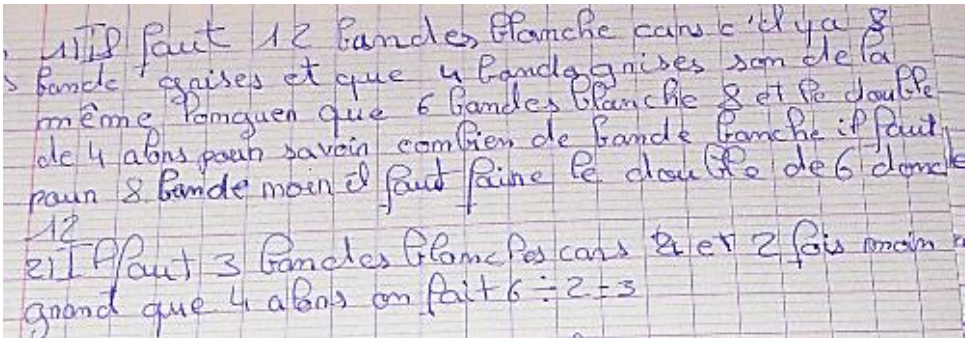
De plus, pour la classe de 4ème, on peut faire l'hypothèse que, sans connaître le mot, Maël a senti implicitement l'existence d'une fonction sous-jacente (présentation d'un tableau de valeurs) qui, à 4 associe 6 : la fonction qui ajoute la constante 2. Lors de la mise en commun, le professeur de 4ème pourra dire que Maël a identifié une fonction qui associe au nombre de bandes grises le nombre de bandes blanches. Il s'agit de : $f : x \mapsto x + 2$.

Maël, en outre, passe à la réciproque avec la fonction qui retranche 2. Ce modèle est invalidé lors de la mise en commun par la manipulation (bandes réelles ou virtuelles), puis par la représentation intellectuelle.

3. Modèles successifs, linéaire et additif

Voici des exemples en 4ème.

a. Florian utilise une des propriétés de la fonction linéaire, $f(kx) = k\,f(x)$, pour les deux premières questions (le double et la moitié).


1) Il faut 12 bandes blanche car c'il y a 8 bande grises et que 4 bandgrises son de la même longuen que 6 bandes blanche 8 et le double de 4 alors pour savoir combien de bande blanche il faut pour 8 bande moin il faut faire le double de 6 donc 12

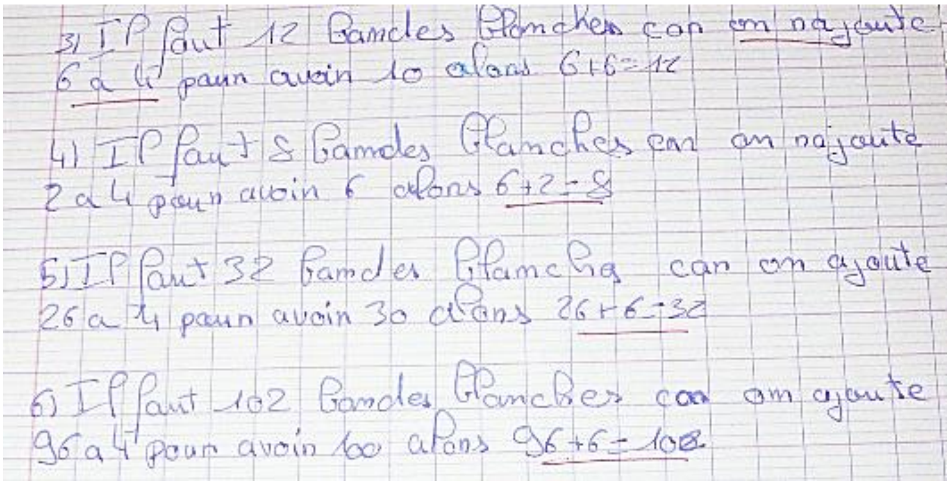
2) Il faut 3 bandes blanches cars 2 et 2 fois moin grand que 4 alors on fait 6 ÷ 2 = 3

Ensuite, il applique invariablement aux quatre questions suivantes un modèle additif :

$f(4 + x) = f(4) + x$ mais avec x variable, car il repart pour chaque question de l'hypothèse de départ qui donne l'image de 4 bandes grises.

Il décompose $10 = 4 + 6$, $6 = 4 + 2$, $30 = 4 + 26$ et $100 = 4 + 96$.

Il avait trouvé à la première question que 8 grises ont même longueur que 12 blanches et à la troisième question, il trouve que 10 grises ont aussi même longueur que 12 blanches (6 + 6).



Il n'aperçoit pas la contradiction.

Aucune fonction ne peut transparaître et Florian utilise des phrases pour donner ses résultats.

b. Pour les deux premières questions (double et moitié), Enzo utilise le bon modèle comme Florian, $f(kx) = k\,f(x)$. Ses résultats sont exacts.

Pour les deux questions suivantes, il utilise implicitement le modèle additif avec la même fonction.

$f : x \mapsto x + 2$ car il prend $x = 8$ et $10 = 8 + 2$ puis $x = 4$ et $6 = 4 + 2$. Ses résultats sont erronés.

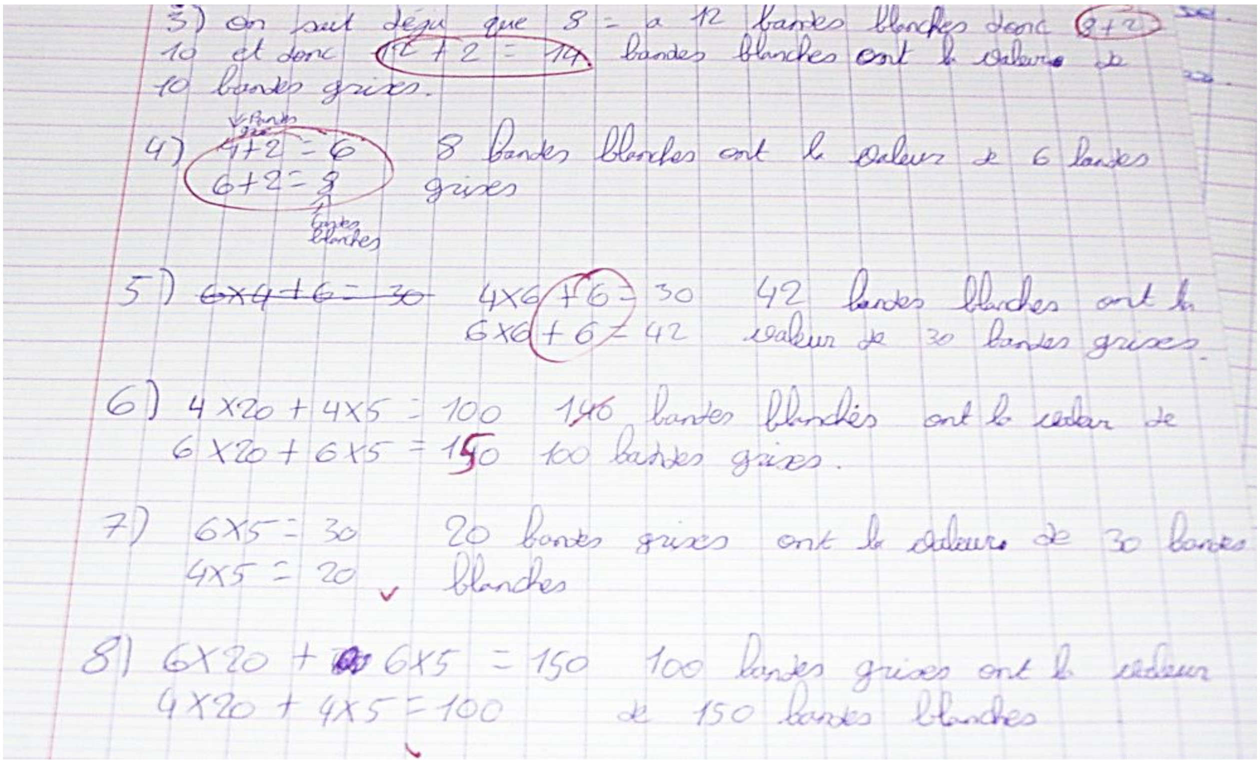
Pour la question suivante (30 grises), il tente une combinaison avec 4 grises.

$30 = 4 \times 6 + 6$ ce qui lui donne pour les blanches $6 \times 6 + 6 = 42$, en appliquant implicitement le modèle : $f(kx + k') = k\,f(x) + k'$. Son résultat est erroné.

Pour les trois questions suivantes plus difficiles, curieusement Enzo utilise un modèle correct en décomposant les nombres donnés 100, 30 et 150 (erreur d'énoncé) et en appliquant la linéarité à sa combinaison, c'est-à-dire implicitement ainsi : $f(kx + k'x) = k\,f(x) + k'\,f(x)$.

$100 = 4 \times 20 + 4 \times 5$ pour les grises, $30 = 6 \times 5$ et $150 = 6 \times 20 + 6 \times 5$ pour les blanches ;

d'où $6 \times 20 + 6 \times 5$ pour les blanches et 4×5 et $4 \times 20 + 4 \times 5$ pour les grises. Ses résultats sont exacts y compris pour la réciproque.



3) On sait déjà que 8 = à 12 bandes blanches donc 8+2 = 10 et donc 12+2 = 14 bandes blanches ont la valeur de 10 bandes grises.

4) 4+2 = 6 bandes grises
6+2 = 8 bandes blanches
8 bandes blanches ont la valeur de 6 bandes grises

5) ~~6×4+6=30~~ 4×6+6=30
6×6+6=42
42 bandes blanches ont la valeur de 30 bandes grises.

6) 4×20+4×5=100
6×20+6×5=150
140 bandes blanches ont la valeur de 100 bandes grises.

7) 6×5=30
4×5=20
20 bandes grises ont la valeur de 30 bandes blanches

8) 6×20+6×5=150
4×20+4×5=100
100 bandes grises ont la valeur de 150 bandes blanches

4. Modèle linéaire

a. Une ou deux des propriétés sont utilisées : $f(x + x') = f(x) + f(x')$ et $f(kx) = kf(x)$.

En 6ème : les réponses sont données par des phrases. L'idée d'une correspondance fonctionnelle n'apparaît pas.

Par exemple Tristan, s'exprime clairement.

A) Les bande grises sont le double qu'au départ alors les bandes blanches seront multiplées par 2 donc il y aura 12 bandes blanches.

B) Les bandes grises sont la moitié qu'au départ alors les bandes blanches seront divisées par 2 donc il y aura 3 bandes blanches.

C) 8 bandes grises + 2 bandes grises = 10 bandes grises, alors on additionne les bandes blanches donc 8b grises est égale à 12 bandes blanches et 2 bandes grises est égale à 3 bandes grises et 12 + 3 est égale à 15 bandes blanches pour 10 bandes grises

D) 4 bandes grises + 2 bandes grises = 6 bandes grises, alors on additionne les bandes blanches donc 4 bandes grises est égale à 6 bandes blanches et 2 bandes grises est égale à 3 bandes blanches donc 6+3 est égale à 9 bandes blanches pour 6 bandes grises.

E) 30 est le triple de 10 bandes ~~blanches~~ grises et 10 bandes grises est égale à 15 bandes blanches donc ~~30 = 3×10 et 15 =~~ 3 × 15 = 45 bandes blanches pour 30 bandes grises.

F) 100 est 10 fois plus que 10 alors je rajoute un zéro donc 150 bandes blanches pour 100 bandes grises.

G) 30 est le double de 15 bandes blanches pour 10 bandes grises donc 30 bandes blanches pour 20 bandes grises, on multiplie par 2.

H) Pour 100 bandes grises il faut 150 bandes blanches donc pour 150 bandes blanches il faut 100 bandes grises.

Les élèves utilisent $f(x + x') = f(x) + f(x')$ avec des nombres x et x' positifs. Parfois, certains élèves utilisent $f(x - x') = f(x) - f(x')$.

C'est le cas dans la copie de Morgan qui, au lieu de calculer $f(6)$ par $f(4 + 2)$, calcule $f(6)$ par $f(8 - 2)$.

Remarquons la solution de Morgan concernant la réciproque : 15 blanches correspondent à 10 grises. Il faut enlever 5 bandes. Quand on a deux fois plus de blanches (ou 10 fois plus), le nombre de bandes à enlever est 2 × 5 (ou 10 × 5)

d'où les solutions 30 × 10 = 20 et 150 – 50 = 100.

a) On a besoin de 12 bandes blanches pour 8 bandes grise

Explication : On multiplie par 2 le nombre de bandes blanche
(6x2=12).

b) On a besoin de 3 bandes blanches pour de bande grise.

Explication. En divise par 2 les bandes blanche et grise
On fais 6÷2=3.

c) On a besoin de 15 bandes blanches pour 10 bandes grise.

Explication : On aditionne 3+12 bandes blanches

D) On a besoin de neuf bandes blanche pour 6 bandes grise..

Explication : On soustraie 12-3 sa fait 9 bandes blanches.

E) On a besoin de 45 bandes blanches pour 30 bandes gris

Explication : On multiplie 3x15 sa fait 45 bandes blanches.

F) On a besoin 150 bandes blanches pour 100 bandes grise

Explication : On fait 45x3 bandes blanches + 15 bandes blanch

G) On a besoin de 2a bande grise pour 30 bandes blanch

Explication : On fait 30-10=20 bandes grise

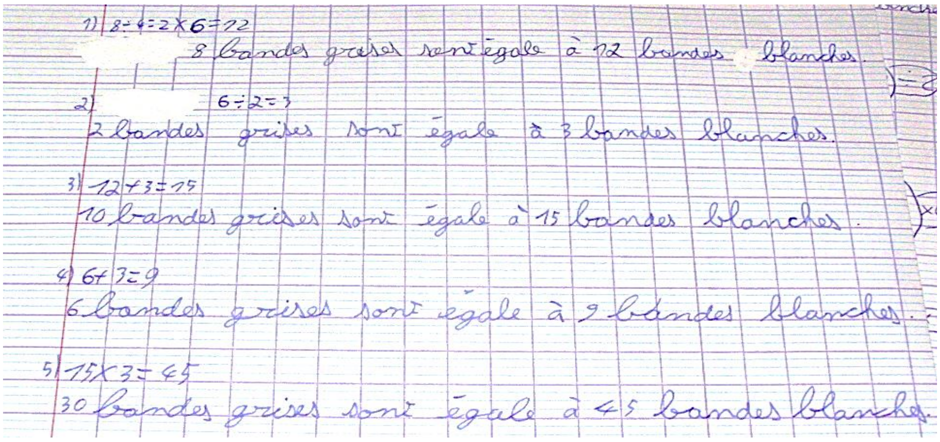
H) On a 100 bandes grises pour 150 bandes blanches.

Explication : On fait 150-50=100 bandes grises

En 4ème, on retrouve l'utilisation des propriétés mais l'idée de fonction transparaît.

Vincent utilise aussi des phrases mais un opérateur se glisse à côté de chaque phrase.

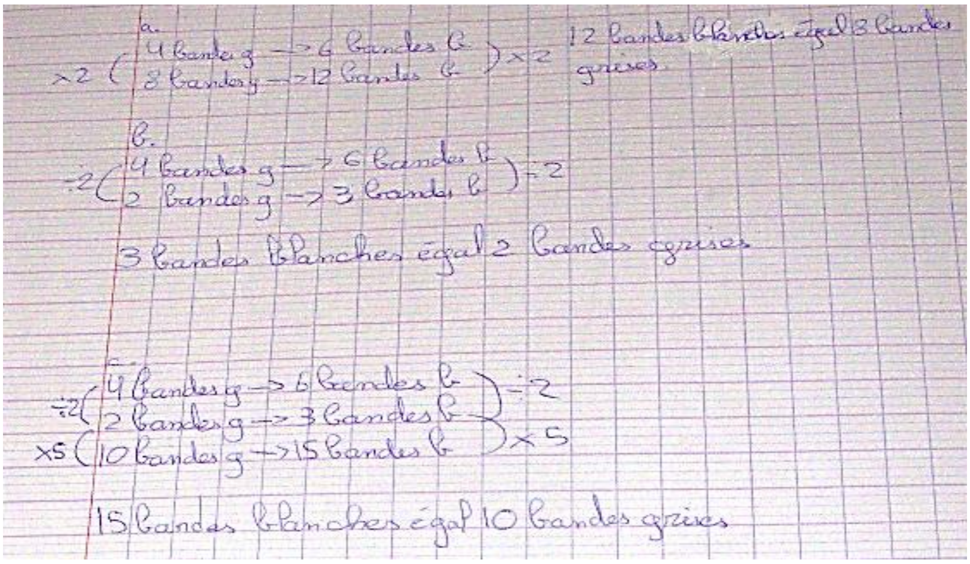
On note un mauvais usage du signe de l'égalité : 8 ÷ 4 = 2 × 6 = 12.


1) 8÷4=2×6=12
8 bandes grises sont égale à 12 bandes blanches.
2) 6÷2=3
2 bandes grises sont égale à 3 bandes blanches.
3) 12+3=15
10 bandes grises sont égale à 15 bandes blanches.
4) 6+3=9
6 bandes grises sont égale à 9 bandes blanches.
5) 15×3=45
30 bandes grises sont égale à 45 bandes blanches.

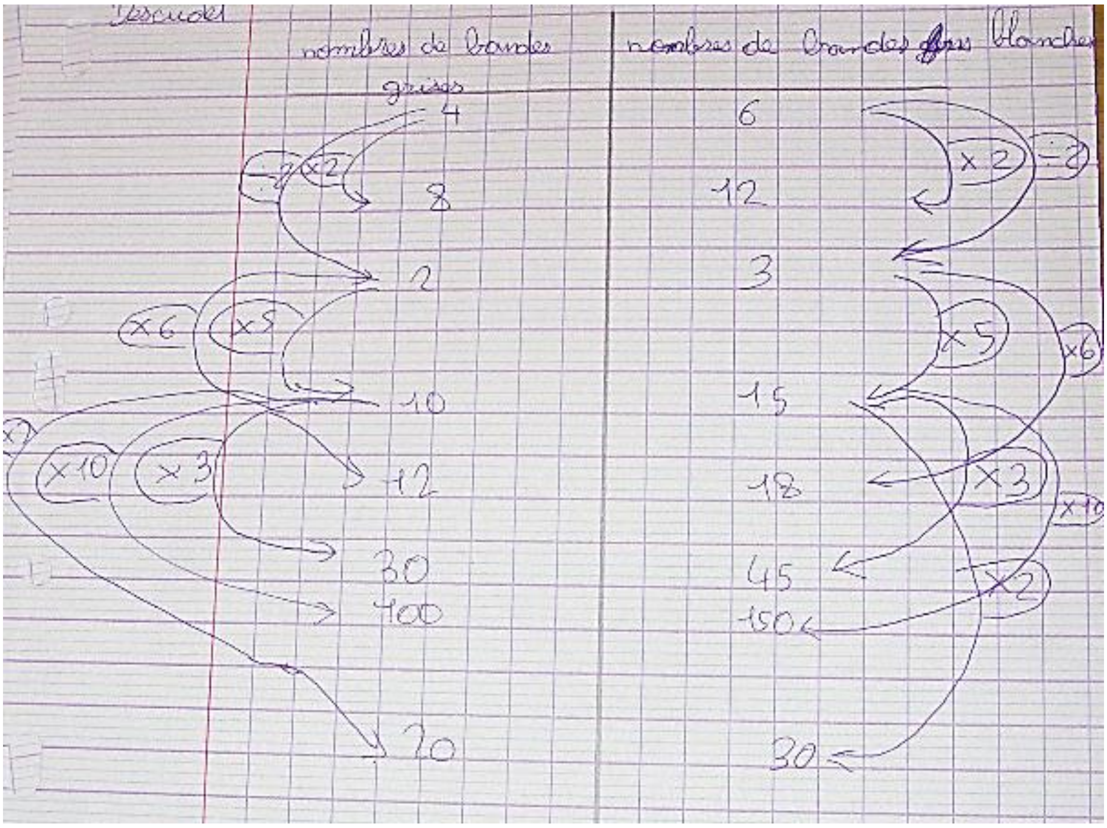
Laura, Robin et Enola trouvent tous les résultats en utilisant une seule propriété de la fonction linéaire : $f(kx) = k f(x)$. Quand c'est nécessaire, ils l'utilisent plusieurs fois de suite pour chercher une image.

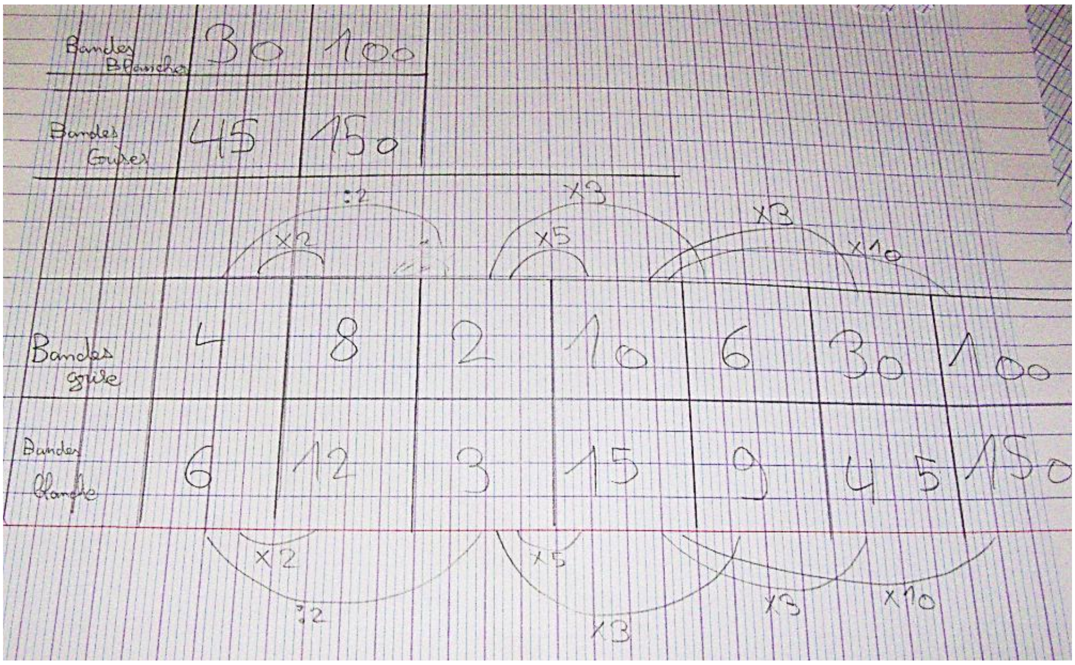
Mais ils ne présentent pas les résultats de la même manière.

Laura présente comme on peut le faire avec les fonctions en 3ème : une flèche donne la correspondance entre le nombre de grises et le nombre de blanches.


a.
×2 (4 bandes g → 6 bandes b) ×2
8 bandes g → 12 bandes b
12 bandes blanches égal 8 bandes grises.
b.
÷2 (4 bandes g → 6 bandes b) ÷2
2 bandes g → 3 bandes b
3 bandes blanches égal 2 bandes grises
÷2 (4 bandes g → 6 bandes b) ÷2
2 bandes g → 3 bandes b
×5 (10 bandes g → 15 bandes b) ×5
15 bandes blanches égal 10 bandes grises

Robin fait un tableau vertical mettant en vis-à-vis sur deux colonnes les nombres de grises et de blanches. Aucun lien n'est matérialisé entre les deux colonnes.





Enola présente de même sur deux lignes, sans lien matérialisé entre les deux lignes.

Le coefficient de proportionnalité n'apparaît dans aucun des trois cas.

b. Vers le coefficient de proportionnalité puis vers la fonction linéaire

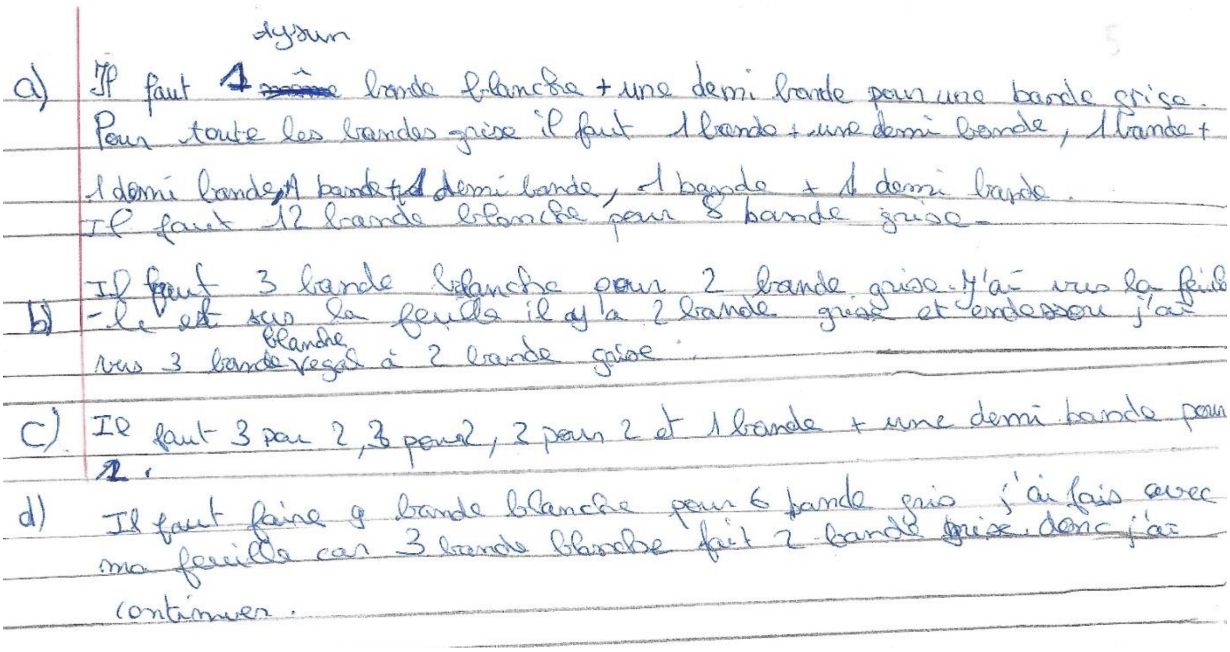
En 6ème

- Lire le dessin fourni pour une tentative de passage à l'unité

Dès la première question, Aysun écrit : il faut 1 bande blanche + une demi-bande pour une bande grise. Pour 8 grises, elle écrit une addition très longue :

1 bande blanche + une demi-bande + 1 bande blanche + une demi-bande … et trouve le résultat exact :

12 blanches.


Aysun

a) Il faut 1 ~~même~~ bande blanche + une demi bande pour une bande grise. Pour toute les bandes grise il faut 1 bande + une demi bande, 1 bande + 1 demi bande, 1 bande + 1 demi bande, 1 bande + 1 demi bande.
Il faut 12 bande blanche pour 8 bande grise.

b) Il faut 3 bande blanche pour 2 bande grise. J'ai vus la feuille et sur la feuille il y a 2 bande grise et endessou j'ai vus 3 bande blanche vegal à 2 bande grise.

c) Il faut 3 par 2, 3 pour 2, 3 pour 2 et 1 bande + une demi bande pour 1.

d) Il faut faire 9 bande blanche pour 6 bande gris j'ai fais avec ma feuille car 3 bande blanche fait 2 bande grise donc j'ai continuer.

- Utiliser le coefficient de proportionnalité de la fonction et de la réciproque

Renas trouve la réponse aux deux premières questions en utilisant le double et la moitié. Puis il jongle avec $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{2}$ mais sans expliciter qu'il prend $a + \frac{1}{2}a$ donc $\frac{3}{2}a$. Il parle de tiers… Mais ne fait pas d'erreur. Il explique qu'il passe de 6 blanches à 4 grises à en enlevant $\frac{1}{3}$ de 6 à 6 (il dit exactement « à 6 il y a $\frac{1}{3}$ de plus qu'à 4 »), de sorte qu'il est sur la réciproque avec le coefficient $\frac{2}{3}$. Mais en même temps, il a compris qu'il passera de 4 à 6 en divisant 4 en 2 et en ajoutant cette moitié.

Donc pour 10 grises, il trouve le résultat exact de 15 blanches en disant qu'il ajoute le tiers. En fait, il pense : 5, moitié de 10 et j'ajoute 5 + 5 + 5 de sorte que 5 est le tiers du résultat que je cherche.

Avec cette méthode, il trouve juste pour 9 grises et aussi pour 30 grises. Pour ce dernier calcul, il explicite mieux en écrivant 30 ÷ 2 = 15 et 30 + 15 = 45.

Pour 100 grises, il abandonne sa méthode et utilise la propriété multiplicative. Il multiplie par 10 le résultat trouvé pour 10 grises.

Pour la réciproque (30 blanches), il utilise son coefficient $\frac{2}{3}$ sous la forme $1 - \frac{1}{3}$.

Il écrit $30 - \frac{1}{3} = 20$, lire $30 - \frac{1}{3} \times 30 = 20$.

A la fin, de peur que le professeur ne comprenne pas son raisonnement, il ajoute :

« Dans 6 ia $\frac{3}{3}$ et sur 4 ia $\frac{2}{3}$, ia $\frac{1}{3}$ de plus ».

Renas

5ème

A) Ils aura 12 bande blanche car 8 et le double de 4 donc on multiplie par 2 les bande blanche

B) 3 car 2 et la moitier de 4 alore on divise par 2 les bande blanche.

C) Ils y aura 15 bande blanche car a 6 il ya $\frac{1}{3}$ de plus que 4 donc ont rajoute le tierre

D) 9 bande blanches car ont rajoute le tierre comme a la C

E) 45 bande blanche car 30÷2=15 ont fait 30+15=45 parceque comme a la C ont c'est que 6 a $\frac{1}{3}$ de plus que 4

F) Il y a 150 on n'a qua prendre la reponse de la C et ont multiplie par 10 car 10 et 10 foix plus petit que 100

G) Il y a 20 bande grisse car $30 - \frac{1}{3} = 20$ et $6 - \frac{1}{3} = 4$

H) On se sere de la reponse du F et il y a deja la reponse ses 100.

→ Dans 6 ia $\frac{3}{3}$ et sure 4 ia $\frac{2}{3}$ ia $\frac{1}{3}$ de plus.

En 4ème

Certains peuvent identifier la forme de la fonction en trouvant qu'il faut multiplier le nombre de bandes grises par 1,5 qui est le coefficient de proportionnalité.

Nathan, après avoir utilisé le double et la moitié, cherche l'image de l'unité dès la question 3 (pour l'image de 10) et il donne bien 10 × 1,5 = 15.

Mais il n'utilise pas ce procédé pour les questions suivantes 4, 5 et 7 où il joue sans se tromper avec les propriétés de la fonction linéaire.

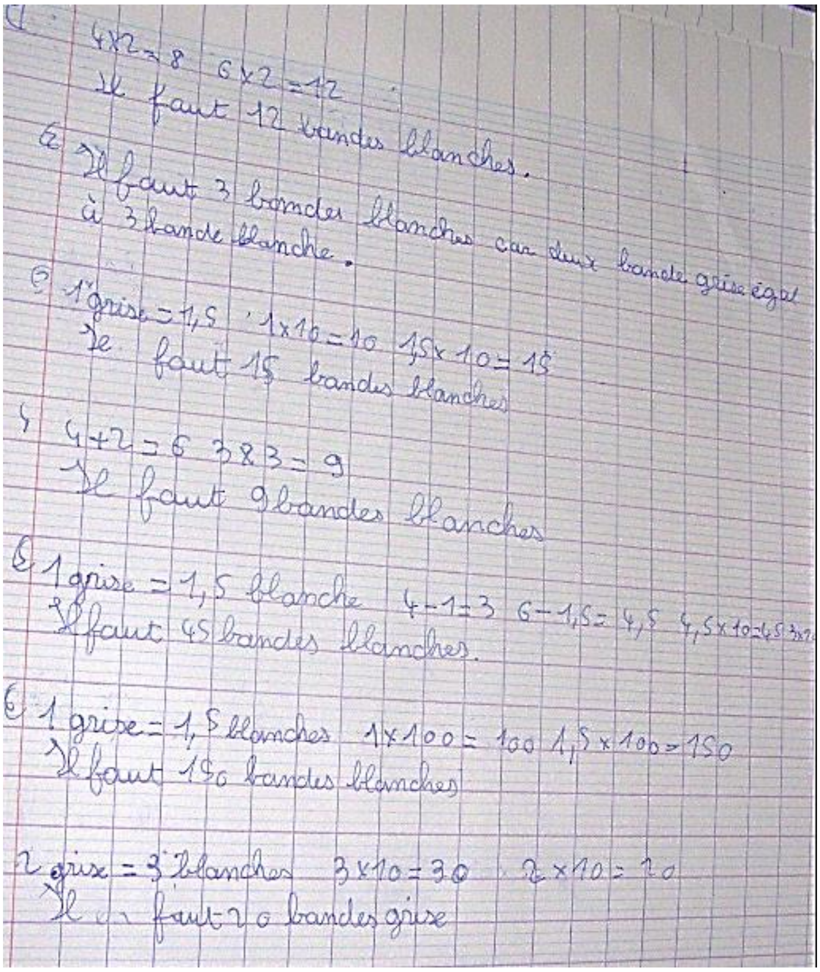
Il l'utilise à nouveau pour la question 6, pour 100 grises, avec succès 100 × 1,5 = 150 soit 150 blanches.

Pour la réciproque, il n'utilise pas le coefficient $\frac{1}{1,5} = \frac{2}{3}$ de façon très nette.

Néanmoins, il écrit : 2 grises = 3 blanches pour trouver 3 × 10 blanches donc 2 × 10 = 20 grises.

Puis il écrit, 1 grise = 1,5 blanche pour trouver 1,5 × 100 blanches donc 1 × 100 = 100 grises.

Le professeur pourra exploiter son travail dans le bilan en introduisant la fonction f telle que $f(x) = 1,5x$.



1 4×2 = 8 6×2 = 12
Il faut 12 bandes blanches.
2 Il faut 3 bandes blanches car deux bande grise égal à 3 bande blanche.
3 1 grise = 1,5 1×10 = 10 1,5×10 = 15
Il faut 15 bandes blanches
4 4+2 = 6 3×3 = 9
Il faut 9 bandes blanches
5 1 grise = 1,5 blanche 4−1 = 3 6−1,5 = 4,5 4,5×10 = 45
Il faut 45 bandes blanches.
6 1 grise = 1,5 blanches 1×100 = 100 1,5×100 = 150
Il faut 150 bandes blanches
2 grise = 3 blanches 3×10 = 30 2×10 = 20
Il faut 20 bandes grise

PERIMETRE DU CERCLE ET AIRE DU DISQUE

Problème posé

Mesurer des longueurs de cercles.
A partir de mesures effectuées par les élèves sur des cercles tracés ou des objets réels pour (re-)découvrir la formule du périmètre et ensuite celle de l'aire du disque.

Niveau : 6ème

Objectifs possibles

- Conjecturer que le périmètre du cercle est proportionnel au diamètre.
- Approcher le coefficient de proportionnalité π.
- Trouver et utiliser la formule permettant de calculer ce périmètre.
- Aborder l'histoire du nombre π.
- Trouver l'aire du disque en utilisant le périmètre.

Notions utilisées

- Proportionnalité avec différentes procédures.

Matériel

- Ciseaux, compas et colle pour les élèves.
- Carton, ficelle, vidéoprojecteur et tableur pour le professeur.
- Éventuellement pied à coulisse et mètre-papier pour le professeur.

Temps de mise en œuvre en classe : 2 h

Périmètre du cercle et aire du disque

I. Objectifs

- Conjecturer que le périmètre du cercle est proportionnel au diamètre
- Approcher le coefficient de proportionnalité (nombre π)
- Trouver et utiliser la formule permettant de calculer le périmètre d'un cercle

La compétence « Chercher » est particulièrement sollicitée dans cette situation. Les élèves vont devoir s'engager dans une démarche scientifique, observer, manipuler, expérimenter (sur une feuille de papier, avec des objets, à l'aide de logiciels), émettre des hypothèses, émettre une conjecture. Il s'agit principalement d'une situation de recherche comme elle pourrait avoir lieu en sciences expérimentales, et du réinvestissement de savoirs acquis sur la proportionnalité.

Les élèves ont peut-être déjà vu la formule en CM2 mais la manipulation intéresse toute la classe.

II. Matériel

Chaque élève a besoin de carton, d'un compas, d'une paire de ciseaux, de ficelle ou de ruban de papier, d'une grande règle graduée, d'un tube de colle.

Le professeur met éventuellement à disposition quelques mètres en papier, des pieds à coulisse et des bouchons ou des couvercles circulaires...

III. Déroulement de la séance

1. Étape 1 : problématisation à l'oral

Le professeur trace un petit cercle au tableau et dit : « la longueur de la ligne qui forme ce cercle s'appelle le périmètre du cercle. Comment, sans faire de mesures, obtenir un cercle de périmètre plus grand ? Et de périmètre plus petit ? »

Conjecture : le diamètre détermine le périmètre.

Nous allons chercher un moyen de trouver le périmètre du cercle si on connaît son diamètre et inversement trouver le diamètre quand on connaît le périmètre.

2. Étape 2 : réalisation des disques

Consigne : « En binôme, vous allez tracer quatre cercles sur le carton de diamètres 6 cm, 8 cm, 10 cm, 13 cm et les découper. » Chaque élève trace et découpe deux disques.

Pour économiser du temps, ce travail peut être aussi demandé à la maison avant la leçon mais il faut être certain que les élèves n'oublieront pas leurs disques.

Le professeur peut aussi choisir de faire travailler les élèves sur du matériel réel (bouchons de bouteilles de lait, couvercles de pots de confiture, rouleaux de papier essuie-tout…) ou d'en prévoir pour la mise en commun et la vérification des résultats. Cette cinquième mesure peut aussi être confiée aux plus rapides. L'avantage de ce matériel est de donner des cercles parfaits, contrairement aux cartons découpés par les élèves. L'inconvénient, c'est qu'il faut mesurer le diamètre de ces cercles que l'on déterminera avec une certaine erreur. La recherche de ce diamètre est cependant un problème supplémentaire intéressant :

- soit les élèves cherchent par tâtonnement une corde de longueur maximale,
- soit les élèves tracent le cercle sur le papier et construisent la médiatrice d'une corde qui donne un diamètre.

Une autre variante serait de demander aux élèves de choisir quatre nombres entre 2 et 15 puis de les utiliser en diamètres des cercles à tracer : cela offre une plus grande diversité de diamètres mais rajoute aussi la difficulté de la construction du centre pour certains élèves.

Enfin, le professeur peut aussi décider de laisser les élèves choisir leur protocole lors d'un travail de recherche en groupe, en AP par exemple pour comparer les diverses méthodes obtenues.

3. Étape 3 : mesure des périmètres

Consigne : « Vous allez imaginer une ou plusieurs méthodes de mesure des périmètres en utilisant le matériel à votre disposition.

Attention : Vous devez organiser les résultats de manière à retrouver facilement sur votre brouillon la mesure du périmètre trouvée pour chaque cercle de diamètre donné. »

Méthodes possibles pour prendre les mesures :

- Les élèves peuvent imaginer d'entourer les disques avec une ficelle ou une bande de papier qu'ils mesureront ensuite. Pour cette manipulation, le professeur peut leur conseiller de coller les disques sur un papier avant de les mesurer (surtout avec la ficelle).
- Ils peuvent aussi penser à faire rouler le disque sur une ligne qu'ils mesureront ensuite entre le point de départ et le point d'arrivée (facile notamment pour bouchons ou couvercles). C'est possible à condition de repérer un point sur le cercle et les deux points sur la ligne et trouver un moyen pour le faire.
- …

Pour l'organisation, il est attendu qu'ils notent les résultats dans une sorte de tableau : chaque périmètre en face de chaque diamètre, sur deux colonnes ou deux lignes. Quand tous les élèves ont leur tableau, la classe procède à une mise en commun des résultats : le professeur vidéo-projette un tableur qu'il complète avec les données des élèves. Un débat s'instaure autour de ce tableau : proportionnalité ou pas ? Le calcul du rapport périmètre/diamètre peut être affiché au tableur et ouvre le débat sur les questions d'erreurs de mesure : comment interpréter les mesures vraiment différentes des autres ? Doit-on les refaire pour repérer une erreur ? Doit-on considérer comme en sciences qu'il s'agit d'imprécisions liées aux mesures ?

Remarque pour le professeur : la précision pourrait être améliorée, par exemple, en faisant rouler le cercle deux fois de suite sur la ligne et en divisant la longueur obtenue par 2 (notamment pour les cercles les plus petits) mais cela complexifie le problème en introduisant un nouveau coefficient.

Un logiciel de géométrie dynamique comme Geogebra pourrait aussi être utilisé pour simuler cette expérience. Le nombre de tests peut alors être augmenté, comme la précision des mesures obtenues. Mais cela introduit une difficulté de modélisation et peut ancrer chez certains élèves l'idée que l'ordinateur fournit une preuve, qu'il a toujours raison… débat délicat mais très utile avec des sixièmes qui souvent découvrent ces logiciels.

4. Étape 4 : conjecture de la proportionnalité

Le modèle de la proportionnalité ne s'impose pas toujours aux élèves comme une évidence.
Le professeur peut dire : « J'ai un cercle de diamètre 16 cm. Essayer de conjecturer combien mesure son périmètre sans réaliser ce cercle et sans rien mesurer. »
Discussion sur la méthode :

- doubler le périmètre de celui qui avait un diamètre de 8 cm,
- tripler le diamètre du cercle en ayant conjecturé 3 comme coefficient de proportionnalité,
- faire la somme du périmètre du cercle de diamètre 6 cm avec celui du cercle de diamètre 10 cm.

Le professeur dans un bilan fait remarquer que ces trois méthodes sont liées à la proportionnalité ce qui amène les élèves à calculer le quotient du périmètre par le diamètre avec leurs mesures. Le professeur peut pendant ce temps compléter son tableur avec une ligne donnant les rapports et en calculer la moyenne. On trouve des nombres entre 3,05 et 3,25. La moyenne des nombres trouvés est voisine de 3,14.

Remarque (pour le professeur)

Les mesures des diamètres et des périmètres sont des nombres accompagnés d'une unité de longueur le cm. Le coefficient de proportionnalité est un nombre abstrait car c'est le quotient de deux mesures avec la même unité.

5. Étape 5 : admettre la proportionnalité et écrire la formule

Les mesures effectuées (à la main comme avec l'ordinateur) nous permettent de conjecturer une relation de proportionnalité entre le diamètre d'un cercle et son périmètre ainsi qu'une valeur approchée du coefficient de proportionnalité. Cependant, nous n'avons pas fourni de preuve et nous ne pouvons pas le faire. On admet donc clairement qu'il existe un coefficient de proportionnalité, très connu, noté π (lettre p en grec, initiale du mot périmètre). On peut en donner une valeur approchée plus ou moins précise, ce n'est pas un nombre décimal.

Nous avons travaillé comme en sciences expérimentales et obtenu une valeur approchée du coefficient.

$$3{,}14 < \pi < 3{,}15 \quad \text{ou} \quad 3{,}1415 < \pi < 3{,}1416$$

La relation entre le périmètre P et le diamètre d est : $P = \pi \times d$.

Remarque : le professeur pourra poursuivre en traitant l'aire du disque. La situation suivante est détaillée dans la brochure à venir sur la géométrie au cycle 3.

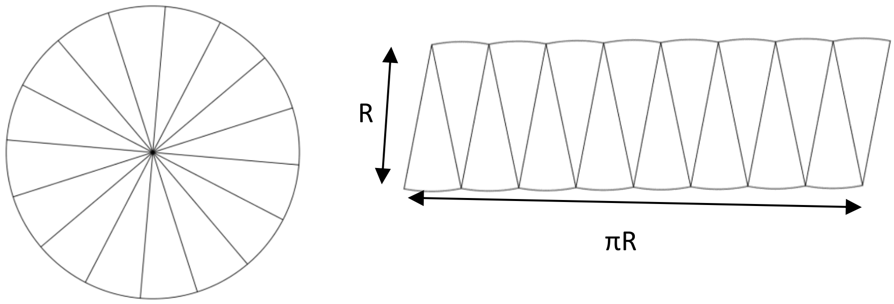
6. Etape 6 : Aire du disque

Connaissant maintenant une formule pour calculer le périmètre d'un disque, les élèves peuvent découvrir la formule de l'aire avec un découpage du disque en secteurs très petits.

Le professeur montre un disque sur papier blanc aux élèves et demande : « Comment déterminer l'aire de cette figure pour laquelle on ne connait pas la formule ? ».

Quelques élèves proposent d'utiliser un quadrillage, idée rejetée par la classe parce que la figure présentée est tracée sur papier blanc, de nombreux élèves, de découper et recoller les morceaux pour obtenir une figure connue.

L'idée du découpage en secteurs émerge et ils l'expérimentent.



Une nouvelle discussion s'engage sur la nature de la figure obtenue :

- la succession des arcs de cercle devient un segment par passage à la limite ;
- le « parallélogramme » devient un « rectangle » en déplaçant un demi-secteur.

Pour faciliter ces étapes, le professeur pourra montrer une animation avec un logiciel de géométrie dynamique.

Nous obtenons alors les dimensions du rectangle :

- sa largeur qui est le rayon R du disque,
- sa longueur qui est le demi-périmètre $\frac{\pi \times D}{2} = \pi \times \frac{D}{2} = \pi \times R$.

L'aire du rectangle permet d'aboutir à la formule qui donne l'aire du disque : $\pi \times R \times R$.

La formule sous la forme πR^2 nous semble prématurée en sixième.

7. Conseils pour le professeur :

- il faut partir d'un cercle de rayon assez grand (au moins 6 cm) pour faciliter le découpage et le collage des secteurs par les élèves,
- un découpage en 16 secteurs est recommandé,
- selon le niveau de la classe, les élèves peuvent tracer les secteurs à la maison eux-mêmes ou le professeur peut fournir le disque prêt à découper.

8. Remarques sur nos choix

- Ce choix de situation d'introduction de la formule de l'aire du disque permet de travailler la grandeur « aire » indépendamment de la mesure.
- Nous avons écrit le périmètre du cercle en utilisant le diamètre, c'est la formule à laquelle conduit la manipulation, π apparaissant comme coefficient de proportionnalité. Cependant, en

mathématique, ce qui définit un cercle est son centre et son rayon et non son diamètre. Le professeur pourra décider du moment opportun pour passer à la formule $2 \times \pi \times R$.

IV. Compléments sur le nombre π

C'est Archimède (né en 287 av. JC à Syracuse et mort en 212 av. JC), en 250 av. JC qui a réellement commencé à calculer des décimales du nombre π. Il est le premier à avoir utilisé un algorithme pour le calcul.

La méthode, qu'on appelle naturellement aujourd'hui la méthode d'Archimède, consiste à calculer le périmètre de polygones réguliers inscrits et circonscrits au cercle pour encadrer le périmètre du cercle et donc, en déduire un encadrement de π. Il obtint ainsi :

$$\boxed{3 + \frac{10}{71} < \pi < 3 + \frac{1}{7}}$$

Les différentes approximations de π dans l'histoire.

- En 2000 av. JC, les Babyloniens connaissaient π. Ils avaient comme valeur 3 + 7/60 + 30/3600 (ils comptaient en base 60) soit 3 + 1/8 = 3,125.
- Vers 1650 av. JC, les Egyptiens avaient comme valeur $(16/9)^2$ qui vaut environ 3,16.
- En Chine vers 1200 av. JC, avec pour valeur 3.
- Dans la Bible vers 550 av. JC, avec pour valeur 3.
- En Grèce, avec en particulier Archimède en 250 av. JC qui donne l'encadrement 223/71 < pi < 22/7 et Ptolémée en 150 qui utilise 3 +8/60 + 30/3600 = 3,1416666.
- En Chine au V^ème^ siècle, avec pour valeur 355/113.
- En Inde : 3 + 177/1250 = 3,1416 en 380 puis 3,16227 (racine carrée de 10) avec Brahmagupta en 640.
- Au Moyen-Orient avec Al Khwarizmi en 800 (Ouzbekistan) et Al Kashi en 1429 (Turkestan) qui calcule 14 décimales de π.
- En Europe : l'italien Fibonacci, en 1220, trouve la valeur 3,141818, aux Pays-Bas avec Van Ceulen (20 décimales en 1596 puis 34 décimales en 1609 !), en France avec Viète (9 décimales en 1593).

Une comptine pour se rappeler les premières décimales de π :

Que j'aime à faire apprendre un nombre utile aux sages

3 , 1 4 1 5 9 2 6 5 3 5

Immortel Archimède, artiste ingénieux

8 9 7 9

Toi de qui Syracuse aime encore la gloire

3 2 3 8 4 6 2 6

Soit ton nom conservé par de savants grimoires ! etc…..

4 3 3 8 3 2 7 9

On a besoin de π dans les formules :

circonférence d'un cercle de rayon *r* et de diamètre *d ;* aire d'un disque de rayon *r* ; aire d'une ellipse de demi-axes *a* et *b* ; volume d'une boule de rayon *r* ; aire d'une sphère de rayon *r* ; volume d'un cylindre de hauteur *h* et de rayon *r* ; aire d'un cylindre de hauteur *h* et de rayon *r* ; volume d'un cône de hauteur *h* et de rayon *r* ; aire d'un cône de hauteur *h* et de rayon *r*…

Le nombre π est au cœur des mathématiques et malgré plus de 4 000 ans de travail, les mathématiciens arrivent encore à lui trouver quelques mystères. Il s'immisce dans des domaines aussi variés que la géométrie, l'analyse, les statistiques, la physique, l'algèbre, les probabilités.

En géométrie car il fut longtemps considéré comme un rapport, celui du périmètre d'un cercle de rayon r par son diamètre en géométrie euclidienne.

En analyse car il est limite de certaines sommes infinies, produits infinis, fractions continues, racines emboîtées dont certaines facilitent son calcul.

En algèbre car après des recherches sur les nombres transcendants et irrationnels, on a pu "résoudre" par exemple le problème de la quadrature du cercle.

En probabilité même, il intervient parfois dans quelques lois continues ou dans des problèmes amusants (aiguille de Buffon).

AGRANDISSEMENT DES PIECES D'UN PUZZLE

Problème posé

Quatre pièces de puzzle sont fournies. Il s'agit de reconstituer un carré à partir de ces pièces. Puis chacune des pièces devra être agrandie pour que le côté qui mesure 4 cm sur le puzzle de départ mesure 6 cm sur le puzzle agrandi. En remettant les nouvelles pièces ensemble, on pourra reconstituer le puzzle de départ, mais plus grand.

Écrire les calculs ou procédures utilisées.

Niveau : De la 6$^{\text{ème}}$ à la 4$^{\text{ème}}$

Objectifs possibles

- Travailler la multiplication d'une fraction par un entier.
- Comprendre que pour agrandir une figure il faut multiplier toutes ses dimensions par un même nombre.
- Démarrer ou réinvestir la proportionnalité

Matériel

La planche permettant la fabrication des pièces est en annexe.

Matériel de géométrie, ciseaux, feuille de papier blanches ou à petits carreaux.

Temps de mise en œuvre en classe : 1h30 à 2h

Agrandissement des pièces d'un puzzle

I. Situation proposée

Cette situation est basée sur une de celles inventées par Guy Brousseau pour le Cours moyen de l'école élémentaire. Voici un extrait du texte de G. Brousseau [5]:

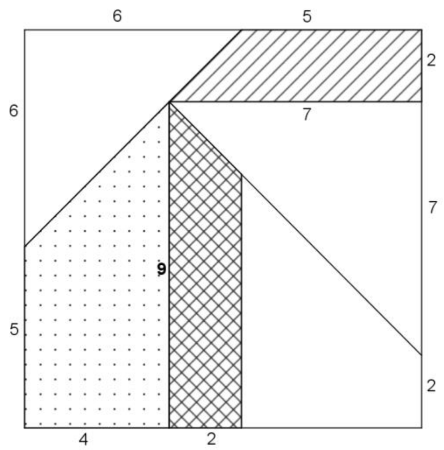


fig.1

« Consigne : voici des puzzles (exemple : fig.1). Vous allez en fabriquer de semblables plus grands que les modèles en respectant la règle suivante : le segment qui mesure 4 cm sur le modèle devra mesurer 7 cm sur votre reproduction. Je donne un puzzle par équipe de 5 ou 6, mais chaque élève fait au moins une pièce ou un groupe de 2 en fait 2. Lorsque vous aurez fini, vous devez pouvoir reconstituer les mêmes figures qu'avec le modèle.

Déroulement : après une brève concertation par équipe, les élèves se séparent. Le maître a affiché au tableau une représentation agrandie des puzzles complets.

Presque tous les enfants pensent qu'il faut ajouter 3 cm à toutes les dimensions : même si certains doutent de ce modèle, ils parviennent rarement à s'expliquer, et jamais à convaincre leurs partenaires à ce moment-là. Le résultat, évidemment, est que les morceaux ne se raccordent pas. Discussions, diagnostics, les leaders accusent leurs camarades d'avoir manqué de soin. Ce n'est pas le modèle, c'est la réalisation qui est mise en accusation ; vérifications, certains refont tous les morceaux. Il faut se rendre à l'évidence, ce n'est pas facile ! Le maître n'intervient que pour encourager et constater les

---

[5] *Théorisation des phénomènes d'enseignement des mathématiques*, Thèse de doctorat d'État, G. Brousseau, Université de Bordeaux 1986, pages 112-116. Description détaillée du déroulement dans les classes de Cours moyen de l'Ecole Jules Michelet de Talence dans : *Rationnels et décimaux dans la scolarité obligatoire*, Nadine et Guy Brousseau, IREM de Bordeaux, 1986, pages 137- 144..

faits, sans exigences particulières. Certains enfants produisent par retouches successives, un puzzle qui reproduit grossièrement la forme du modèle. D'autres se tirent d'affaire en découpant un grand carré : les raccordements sont impeccables. Le maître, invité ainsi que les autres groupes d'élèves, à constater le succès, suggère dans ce cas aux compétiteurs de former avec le modèle une figure (fig.2) qui ne peut être reproduite avec l'image (fig.3). »

fig 2

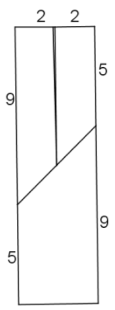
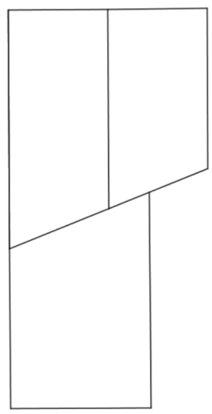
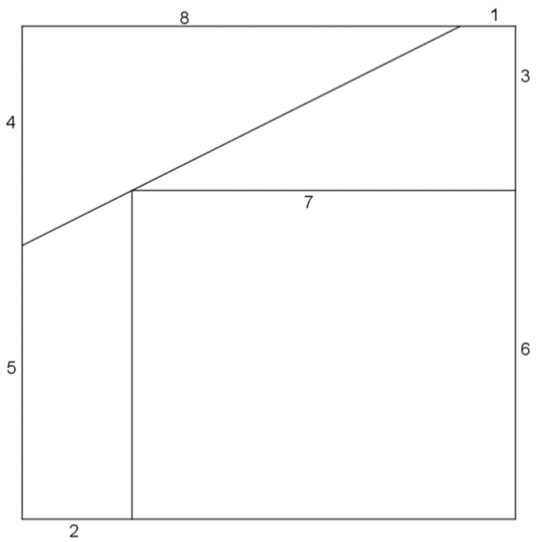


fig 3



II. Un autre puzzle et des variables didactiques différentes



1. Conséquences du choix de 4 morceaux

- Dans le puzzle de G. Brousseau, la forme carrée n'est pas conservée après leurs deux procédures erronées qui consistent à ajouter 3 cm à chaque mesure des côtés verticaux ou horizontaux (car 4 + 3 = 7) ou à les multiplier par 2 et enlever 1 (car $4 \times 2 - 1 = 7$). La mesure du côté du carré n'est plus la même car la modification porte sur deux dimensions (6 et 5 sur deux côtés) puis sur trois dimensions (4, 2 et 5 ou 2, 2, et 7 sur les autres côtés). Avec le puzzle que nous utilisons, l'invalidation de la procédure erronée (ajouter 2 cm) saute moins aux yeux car les élèves obtiennent un carré de 13 cm de côté du fait du même nombre de morceaux sur chaque bord. Néanmoins, quand ils reforment le carré il y a un trou au milieu. En 5ème, les élèves sont plus grands et découpent un peu mieux leurs pièces que ceux du cours moyen. Ainsi, chez ceux qui ont appliqué une procédure erronée, même avec le puzzle proposé, on peut voir que les morceaux sont nettement disjoints.
- En contrepartie nous pouvons faire des groupes de 4 ou 3 élèves, voire de 2 élèves, au lieu de groupes de 6 ou 5, plus bruyants et plus longs à organiser s'il faut déplacer les tables et éventuellement les remettre en place à la fin pour le professeur qui suit. Au collège, très souvent les élèves changent de classe après chaque cours, limité à une heure, sauf exception. Faire agrandir 6 pièces par 2 élèves seulement prendrait trop de temps.

2. Conséquence du passage de 4 à 6 et non de 4 à 7

Nous perdons la procédure erronée : multiplier par 2 et retrancher 1, mais nous obtenons plusieurs procédures exactes. Par exemple, ajouter la moitié, multiplier par $\frac{3}{2} = 1{,}5$, diviser par 2 et multiplier par 3 ou multiplier par 3 et diviser par 2, et plus rarement, multiplier par 2 et enlever la moitié. Il est intéressant de montrer l'équivalence de ces procédures.

Par exemple, $\frac{a}{2} \times 3 = a \times \frac{3}{2}$ ou $a + \frac{a}{2} = a\,(1+ \frac{1}{2})$ et de même, pour $2a - \frac{a}{2}$, en utilisant, selon les niveaux, la distributivité, les additions de fractions et la fraction d'une quantité. Ces procédures arrivent plus facilement que : ajouter les $\frac{3}{4}$ ou multiplier par $\frac{7}{4} = 1{,}75$.

Nous réservons le passage de 4 à 7 cm à la 4ème dans la situation d'agrandissement de la photo qui nous permet d'arriver à la représentation graphique. Le passage de 4 à 6, bien que plus facile, suffit en 5ème à faire apparaître l'obstacle que nous souhaitons que les élèves franchissent. Demander d'agrandir le puzzle en passant de 4 cm à 5 cm amènerait une difficulté comparable à celle du passage de 4 cm à

7 cm, mais « le trou » obtenu en ajoutant seulement 1 cm aux dimensions est assez petit, de sorte qu'en retaillant un peu, les élèves peuvent mieux « tricher ».

En collège, nous suivons rarement les mêmes élèves d'une année à l'autre, donc nous pouvons reprendre le passage de 4 à 7 non seulement en 4ème mais aussi en 3ème pour agrandir cette fois un solide.
Cette situation de l'agrandissement d'un puzzle est qualifiée justement de « fondamentale » dans la théorie didactique des situations d'enseignement. [6]

III. Place dans la progression et objectif

Cette situation peut être utilisée à partir de la 6ème. Ses objectifs sont :

- faire travailler la multiplication d'un nombre par une fraction simple (ici $\frac{3}{2} = 1{,}5$) ;
- convaincre les élèves que pour agrandir une figure, il faut multiplier toutes les dimensions par un même nombre. Si on ajoute, il faut le faire proportionnellement à la dimension. On le reverra en 4ème (situation de la photo) pour préparer en 3ème la proportionnalité des accroissements conservant l'alignement dans le cadre graphique.
- démarrer en 5ème sur la proportionnalité ou la réinvestir (au choix de l'enseignant).

Dans cette situation, les compétences mises en jeu sont nombreuses, les élèves doivent « chercher » puisqu'ils manipulent, émettent des hypothèses quant à la stratégie utilisée pour agrandir le puzzle. Ils travaillent en groupe, doivent se mettre d'accord sur une stratégie et on verra que la remise en cause du procédé utilisé pour l'agrandissement passe parfois par un conflit entre les élèves du groupe. Les compétences « raisonner » et « communiquer » sont donc mobilisées dans cette situation.

---

[6] C'est un schéma de situation capable d'engendrer par le jeu des variables didactiques qui la déterminent, l'ensemble des situations correspondant à un savoir déterminé. Une telle situation, lorsqu'on peut l'identifier, offre des possibilités d'enseignement mais surtout une représentation du savoir par les problèmes où il intervient permettant de restituer le sens du savoir à enseigner. (Guy Brousseau, *glossaire de quelques concepts de la théorie des situations didactiques en mathématiques* (1998))

Enfin, les élèves doivent « modéliser ». Ils sont amenés à conjecturer quel modèle va leur permettre d'agrandir le puzzle : modèle additif, qu'ils doivent invalider, ou modèle proportionnel. Ce faisant, ils enrichissent leur connaissance du modèle proportionnel.

Nous avons choisi de proposer cette situation en 5ème car, dans cette classe, nous la prolongeons par une suite d'agrandissements et réductions d'une seule pièce (un trapèze) pour une première approche de la multiplication de deux fractions.

Le professeur retrouvera le puzzle avec un agrandissement qui passe de 4 à 5 cm dans notre brochure : « *Entrées dans l'algèbre en 6ème et 5ème* », qui traite du calcul littéral mais aussi de la structure des ensembles de nombres (opérations dans les rationnels et les décimaux relatifs). Il est conseillé de traiter auparavant en 5ème le passage de 4 à 6 avec ce puzzle, puis, arrivé à la multiplication des fractions, sauter les pages 68 et 69 de notre brochure d'algèbre qui reprennent la situation du puzzle et, comme il est indiqué pages 68 à 72, demander, pour la même pièce (un trapèze), une réduction, puis une suite d'agrandissements et de réductions.

IV. Préparation du matériel avant la séance

Le professeur trouvera en annexe une planche de plusieurs carrés dessinés sur papier, qu'il pourra coller sur du carton ou du papier à dessin.

Il doit découper lui-même chaque pièce après avoir collé les carrés sur du carton, puis mettre chaque puzzle en morceaux dans des enveloppes. Une enveloppe sera donnée à chaque groupe.

Il est important d'avoir découpé les pièces avant la séance et de ne pas donner le carré entier aux élèves même si on leur demande de le découper ensuite eux-mêmes. Ils doivent chercher à reconstituer le puzzle initial en constatant que les pièces sont jointives, pour comprendre que ceci doit se conserver avec les pièces agrandies. En outre, le carré en main peut leur donner l'idée de commencer par agrandir le carré entier et tracer les divisions intérieures ensuite, rendant parfois difficile la mise en défaut de leurs stratégies erronées.

Les dimensions des pièces du puzzle sont données en cm. Celles qui sont absentes sur les côtés peuvent être retrouvées par les élèves à partir des données, sachant que c'est un carré. La dimension 4 cm dans le triangle sera indiquée car elle figure dans la consigne.

Les élèves doivent disposer de feuilles de papier pour tracer leur agrandissement et le découper. Des feuilles quadrillées facilitent le dessin des angles droits. Des feuilles à petits carreaux de 0,5 cm facilitent le tracé car le demi-centimètre intervient dans l'agrandissement de certaines mesures et on gagne ainsi en temps et en précision. Les élèves doivent aussi disposer d'un papier blanc pour faire leurs calculs et pour coller leurs pièces agrandies en essayant de reconstituer le carré. Le professeur doit pouvoir relever ce travail pour un bilan des procédures au cours suivant.

V. Déroulement de la séance

Elle dure environ 1 heure, suivie de 30 minutes pour la mise en commun qui peut venir lors de la séance suivante (étapes 4 et 5). Le tracé et le découpage prennent du temps, or il est important que, avant la fin du cours, l'étape 3 au moins soit arrivée à son terme, jusqu'à la première validation, pour que les élèves sachent avant de quitter la salle s'ils ont réussi ou non. Le professeur décide selon l'horaire si la mise en commun des procédures exactes de l'étape 4 peut se dérouler aussi.

1. Étape 1 : formation des groupes d'élèves et reconstitution du puzzle initial non agrandi

Les groupes sont formés par 4, 3 ou 2 élèves et chaque groupe reçoit une enveloppe avec les 4 pièces découpées du puzzle original. Chacun des groupes reconstitue ce puzzle, ce qui n'est pas évident pour tous. Très vite le professeur peut les aider en affichant le dessin au tableau pour éviter une perte de temps. Il peut poser des questions à la classe sur la nature des figures (notamment les deux trapèzes rectangles) car cela permettra de savoir les désigner pour en parler ensuite. Le mot trapèze est souvent oublié ou n'a jamais été appris. Il n'est pas inutile de le rappeler.

Puis chaque élève choisit sa (ou ses) pièce (s) qu'il devra agrandir.

Dans les classes où il y a des élèves faibles, le professeur peut constituer les groupes de façon hétérogène, et attribuer les pièces les plus faciles (le rectangle ou le triangle rectangle) à ceux qu'il sait les plus faibles. S'ils sont 4, chacun doit faire une seule pièce, s'ils sont 3, l'un peut prendre 2 pièces dont l'une plus facile, s'ils sont 2, chacun fait 2 pièces, une facile et une plus difficile. Ceci n'est pas impératif, le professeur peut aussi laisser les groupes se constituer librement et/ou dire à chaque élève de choisir ses pièces à sa convenance, mais il est préférable que tous finissent leur travail à peu près ensemble.

2. Étape 2 : consigne et action

1- Agrandir votre pièce du puzzle pour que le côté qui mesure 4 cm sur le puzzle de départ mesure 6 cm sur le puzzle agrandi.

2- Avant de commencer ce travail, vous pouvez réfléchir d'abord seuls puis discuter dans le groupe sur la méthode à utiliser car quand vous aurez fini, vous remettrez vos pièces agrandies ensemble pour reconstituer le puzzle de départ, mais plus grand.

3- Indiquer les calculs effectués ou décrire votre procédure.

Quand le professeur demande si tout le monde a compris, des questions peuvent surgir.

- Quelles sont les mesures des côtés si elles ne sont pas marquées ? Une réflexion en commun permet de trouver par exemple une dimension non indiquée sur un des côtés parallèles aux bords du carré. Les élèves trouveront les autres. Pour les obliques, s'ils croient en avoir besoin, il faudra mesurer.

- Qu'est-ce qu'agrandir ? C'est rendre plus grand mais il y a plusieurs façons d'agrandir quelque chose. Ici, il faut le faire de sorte qu'on puisse recoller les morceaux du puzzle côte à côte sans trou.

Avant de commencer, les élèves réfléchissent assez naturellement avec leurs coéquipiers surtout s'ils sont en groupe de 2 ou s'ils ont l'habitude de travailler en groupe. S'ils ne le font pas, il est possible qu'ils adoptent, dans le même groupe, des stratégies différentes, soit en ajoutant 2 cm, soit en conservant la proportionnalité. Ils s'en rendront compte à l'étape suivante.

Le professeur passe dans les rangs et observe les stratégies des élèves pour organiser la future mise en commun.

3. Étape 3 : réflexion des élèves, première validation et nouvelle réflexion

L'idée de rajouter 2 cm à chaque côté des pièces est souvent émise. Cette idée est naturelle car le mot « agrandir » a un sens imprécis. On parle d'agrandir une photo mais aussi d'agrandir une maison : le procédé n'est pas du tout le même puisque dans le second cas, on ajoute un bâtiment contigu sans tout démolir pour appliquer la proportionnalité.

Remarque

Nombreux sont les élèves qui ajoutent un même nombre à toutes les longueurs pour agrandir une figure. Il est important qu'ils aient fait au moins une fois cette erreur pour en prendre bien conscience et ne plus la reproduire.

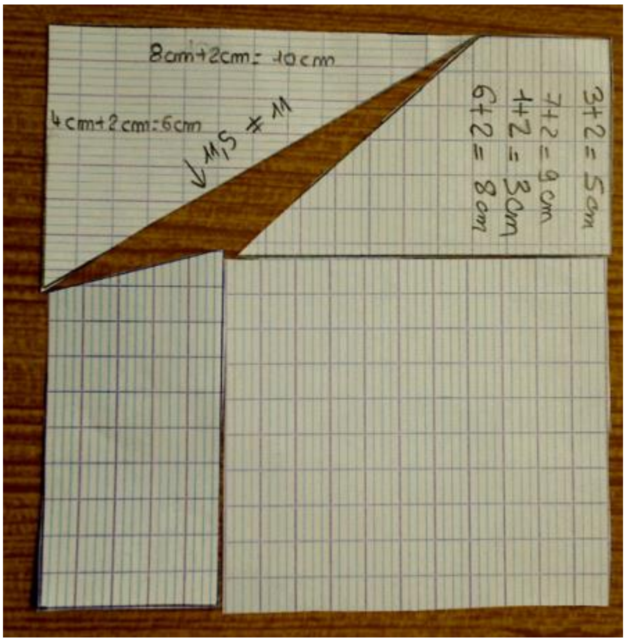


fig 5

Quand les groupes se reforment pour essayer de reconstituer un carré avec les pièces agrandies, certains sont surpris du résultat : les pièces agrandies ne se juxtaposent pas correctement du fait de la non conservation des angles. Le professeur demande à tous de coller les pièces pour mieux voir s'ils ont bien un carré plein à quelques millimètres près.

Si l'agrandissement n'est pas réussi, la remise en cause de la procédure prend du temps car les élèves pensent d'abord qu'ils ont commis des erreurs dans leurs mesures ou leurs découpages. Il arrive que le professeur doive régler des conflits entre élèves qui accusent le plus « faible » en mathématiques du groupe d'avoir mal découpé ou mal mesuré. Souvent ils ne remettent en cause leur calcul qu'après avoir essayé deux fois la même stratégie. Certains disent qu'ils sont gênés de diviser par 2 des entiers impairs. Croient-ils que les mesures doivent rester entières comme dans le puzzle de départ ?

Certains élèves faibles se rendent bien compte que ce procédé ne convient pas mais ils sont bloqués car ils ne comprennent pas pourquoi. Le professeur peut donner le « coup de pouce » suivant : si 4 devient 6, que devient 8 ? Mais parfois ce n'est pas suffisant pour des élèves faibles qui ont par exemple le triangle rectangle à agrandir. Ils ne voient pas pourquoi 8 ne devient pas 10. Le professeur peut tracer deux segments de 4 cm consécutifs et alignés pour obtenir un segment de 8 cm. On imagine que chaque segment de 4 cm s'agrandit à 6 cm. Que devient le segment de 8 cm ?

Certains ont pensé qu'en ajoutant la même mesure aux dimensions horizontales et verticales de chaque pièce, l'ajout se fait alors automatiquement sur les obliques. Inquiets, ils vérifient et sont surpris. Par exemple, dans le triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 4 cm et 8 cm, l'hypoténuse mesure $4\sqrt{5}$ soit environ 8,94 cm. Ils trouvent 9 cm en mesurant. Ils calculent que sur la figure agrandie, cette hypoténuse doit mesurer 9 + 2 = 11 cm.

Or, sur leur triangle agrandi, elle mesure $2\sqrt{9+25} = 2\sqrt{34}$ soit environ 11,66 cm. Ils mesurent 11,5 cm et concluent qu'il y a une erreur. C'est ce que l'élève a remarqué dans son travail photographié ci-dessus. Certains après avoir mesuré les trois côtés (4, 8 et 9), ajoutent 2 cm à tous ces côtés et s'aperçoivent en dessinant un tel triangle agrandi qu'il n'est plus rectangle. Pourquoi ? Ces deux interrogations peuvent arriver avant même la reconstitution du puzzle, au moment où ils travaillent individuellement sur le triangle rectangle.

La superposition des pièces d'origine posées sur les pièces agrandies est un moyen de vérification auquel pensent les élèves. Certains y pensent avant même la reconstitution du puzzle et d'autres y pensent après avoir constaté l'échec.

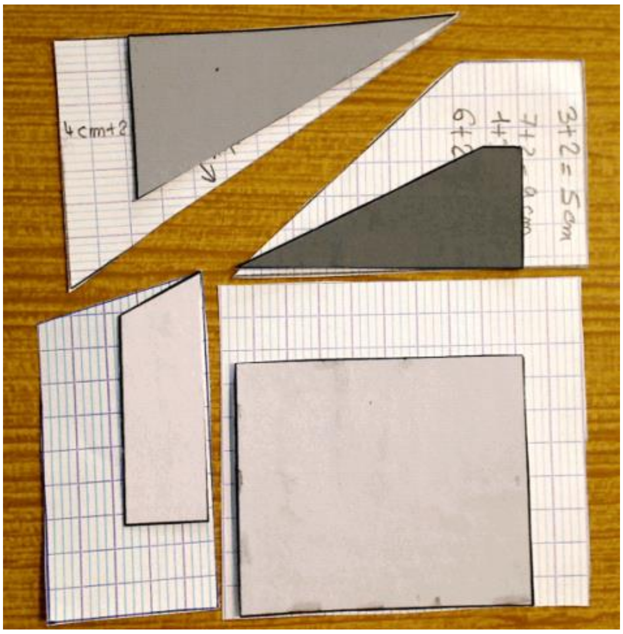


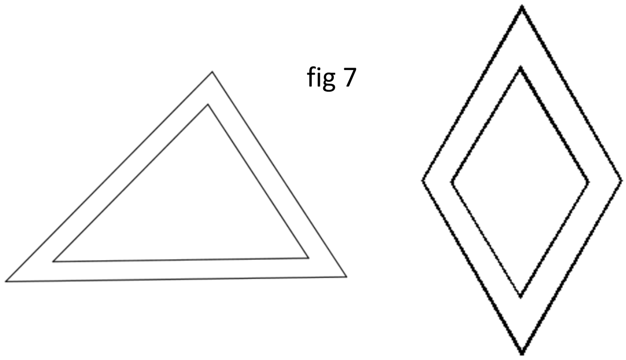
fig 6

Ils devraient vérifier l'alignement des points homologues avec le centre d'homothétie qu'ils ont choisi de façon implicite. Or ils n'y pensent pas car ils n'ont pas étudié l'homothétie, ils n'en ont que l'intuition. Ils ne pensent pas non plus à la conservation de tous les angles, mais seulement à la conservation des angles droits, de sorte que pour beaucoup, la superposition des pièces ne les aide pas à conclure sur la validité de leur procédure.

Imaginant cette superposition, un élève peut penser à rajouter une bande de largeur constante (1 cm) autour de chaque pièce.

Cette stratégie pour agrandir est valable pour les triangles quelconques ou les losanges (fig 7), de façon générale pour les figures dont les bissectrices sont concourantes comme les polygones réguliers. On obtient une figure homothétique, le centre d'homothétie étant le point de concours des bissectrices.

fig 7



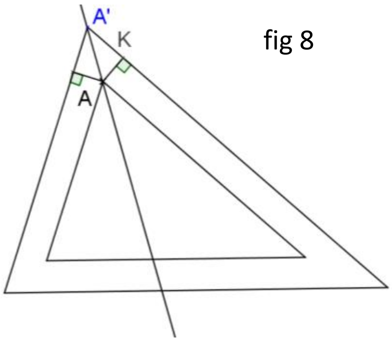
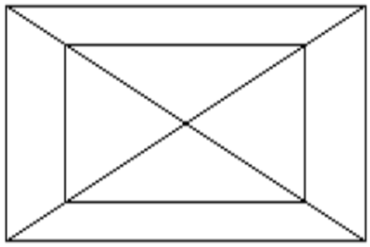


fig 8

Par exemple, dans le triangle (fig 8), si la bande est de largeur constante, AH = AK, donc le point A est sur la bissectrice de l'angle de sommet A' dans le triangle agrandi. Il est de même pour B et C d'où l'homothétie.

fig 9



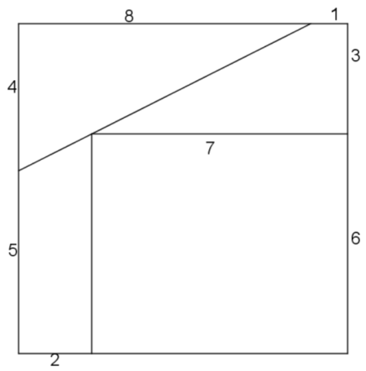
Ce n'est pas le cas pour toutes les pièces du puzzle, par exemple pour le rectangle (fig 9). Mais les élèves n'ont pas conscience de cela.

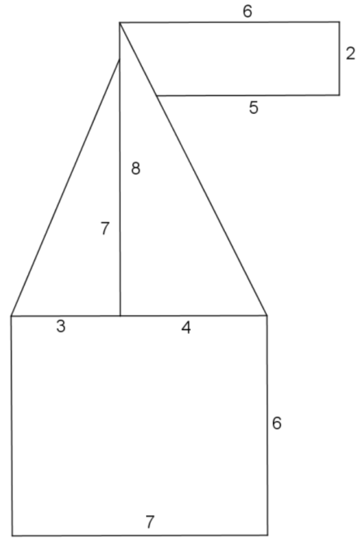
Les figures pour lesquelles cela est possible jouent pour eux un rôle de modèle implicite d'action.

La superposition des pièces agrandies et des pièces d'origine est un moyen de vérification souvent utilisé par les élèves : l'important est alors que les diagonales soient les mêmes. Sinon cette superposition ne sert à rien. Si certains élèves utilisent cette méthode, ils n'obtiennent plus un carré car une bande de largeur 1 cm bordant les côtés obliques produit une augmentation supérieure à 1 cm sur les bords du triangle et des trapèzes. La mesure du côté bas du carré où n'aboutit aucune oblique augmente de 4 cm alors que celle du haut, où aboutissent deux obliques augmente davantage.

Certains veulent, par tâtonnement, modifier leurs pièces déjà découpées en les retaillant ou en commençant par tracer un carré de côté 11 cm (9 + 2) ou 13 cm (9 + 2 + 2) et en dessinant ensuite les 4 morceaux à l'intérieur. Pour invalider ces méthodes, le professeur peut proposer de constituer un autre puzzle (château avec oriflamme (fig 10)) avec le puzzle initial (effet Tangram). Il faut le retrouver avec les pièces agrandies.

fig 10





Il peut être intéressant de comprendre pourquoi le drapeau doit s'attacher avec un angle droit en démontrant que les angles sont complémentaires dans le puzzle d'origine ((fig 11 et 12) égalité des angles alternes 1 et 2 ou 3 et 4 et angles complémentaires 2 et 4 ou 1 et 3). Ceci a peu de chance d'être conservé avec des pièces retaillées.

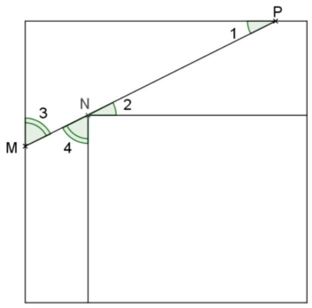
Quand les élèves dessinent d'abord un carré et utilisent scrupuleusement la même stratégie pour les bords (ajouter 2 cm sur tous les côtés horizontaux et verticaux), ils tracent un carré de 13 cm de côté et le même trou intérieur réapparaît.

Mais s'ils partagent le carré de départ en conservant l'alignement des trois points le long de l'hypoténuse du triangle rectangle, invalider le résultat peut être plus difficile, d'autant plus que le « bon » carré doit mesurer 13,5 cm ce qui est assez voisin du carré de 13 cm dont ils risquent de partir. Une fois le carré dessiné, ils doivent donner aux pièces des dimensions un peu au hasard. Les morceaux sont jointifs mais les mesures ne sont plus proportionnelles. Les angles en jeu seront différents tout en restant complémentaires.

Le puzzle du château teste aussi les longueurs à deux endroits. D'abord avec 3 + 4 = 7 qui est la longueur du rectangle dans le puzzle d'origine, et aussi au niveau du donjon (8 > 7). Les erreurs de longueur, imprévisibles car dépendant du tracé choisi, peuvent être assez petites. Parfois on perd la différence entre le grand côté du trapèze et le grand côté du triangle rectangle qui doit être plus long pour porter le drapeau. Cette différence peut même être inversée et le drapeau doit alors se coller au trapèze et non au triangle en retournant les pièces !

Le professeur donne le dessin du château au tableau pour aller vite mais malgré tout, certains élèves n’auront peut-être pas le temps d’assembler le château avec les pièces d’origine puis d’essayer de le refaire avec l’agrandissement. Pour accélérer, et si le professeur ne veut invalider que des pièces retaillées, il peut se borner à tester les angles droits avec seulement les deux pièces du drapeau ou faire le puzzle ci-dessous avec trois pièces

fig 11



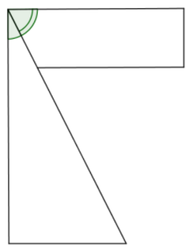
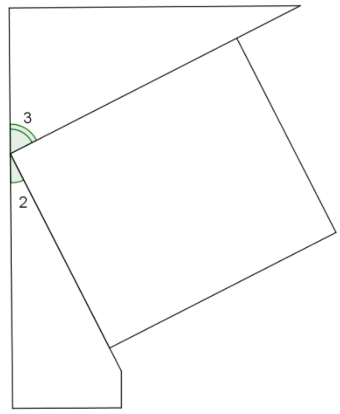


fig 12



L’horaire limité obligera sans doute à interrompre la réflexion des élèves et leurs tentatives de correction. En effet, il n’est pas indispensable de laisser les élèves aller jusqu’au bout des corrections qu’ils pourraient imaginer en ajoutant une bande de largeur constante, en retaillant ou en dessinant un carré avec des pièces jointives mais sans conserver les proportions. S’ils insistent, on peut leur suggérer de le faire à la maison pour constater que cela ne convient pas en assemblant le château.

En 5ème, il y a toujours des groupes qui obtiennent le bon agrandissement surtout avec la consigne : passer de 4 à 6. Les élèves qui n’ont pas réussi savent donc que la réussite est possible sans retailler ni dessiner le carré d’abord. Ils cherchent donc plutôt dans cette voie pour corriger leur travail.

Un autre intérêt du puzzle du château est d’occuper si nécessaire, ceux qui ont fini leur agrandissement avec succès et assez vite, pendant que leurs camarades poursuivent leur réflexion. Il n’est pas sans intérêt de leur demander les démonstrations sur les angles (angle droit et alignement). Les élèves ayant terminé avant les autres peuvent reproduire sur leur cahier soit le puzzle carré d’origine, soit « le château » (dont le professeur leur fournit la forme à ce moment-là) puis écrire toutes les dimensions des pièces du puzzle de départ et du puzzle agrandi.

A la fin de cette étape, le professeur demande à chaque groupe de ranger les pièces du puzzle initial dans son enveloppe et il ramasse les productions pour les examiner avant la mise en commun. L’essentiel a déjà été vécu par les élèves. Ceux qui ont constaté leur échec ont compris qu’ils peuvent trouver une autre méthode en ayant réfléchi avec leur groupe, éventuellement après avoir aperçu la réussite de certains, même s'ils n'arrivent pas à réussir eux-mêmes avant la fin de la séance. La mise en commun des procédures exactes peut commencer.

4. Étape 4 : mise en commun des procédures exactes

Plusieurs procédures exactes sont utilisées par les élèves pour passer de 4 à 6 :

$4 \times 1{,}5$ ou $(4 \times 3) \div 2$ ou $(4 \div 2) \times 3$

$4 + 4 \div 2$ ou une très voisine : $4 + 4 \times 0{,}5$ ou encore $4 \times 2 - 4 \div 2$

a) A chaque dimension est ajoutée sa moitié : $4 + 4 \div 2 = 6$ ou $4 + 4 \times 0{,}5 = 6$

Dans ce cas, on n'ajoute pas la même longueur à chaque dimension. Mais cette stratégie fonctionne puisqu'elle revient à multiplier par $1 + \frac{1}{2}$ soit $\frac{6}{4}$ (4 devient 6), c'est-à-dire $\frac{3}{2}$ soit 1,5 qui est le coefficient d'agrandissement.

b) Toutes les dimensions sont multipliées par 1,5 car $4 \times 1{,}5 = 6$.

Certains trouvent le nombre 1,5 par tâtonnement et d'autres pensent à la proportionnalité.

Le triangle rectangle a des mesures qui s'y prêtent facilement.

Comme 4 devient 6 alors 8 (double de 4) devient 12 (double de 6), mais cette procédure simple ne fonctionne pas aussi facilement sur les autres pièces.

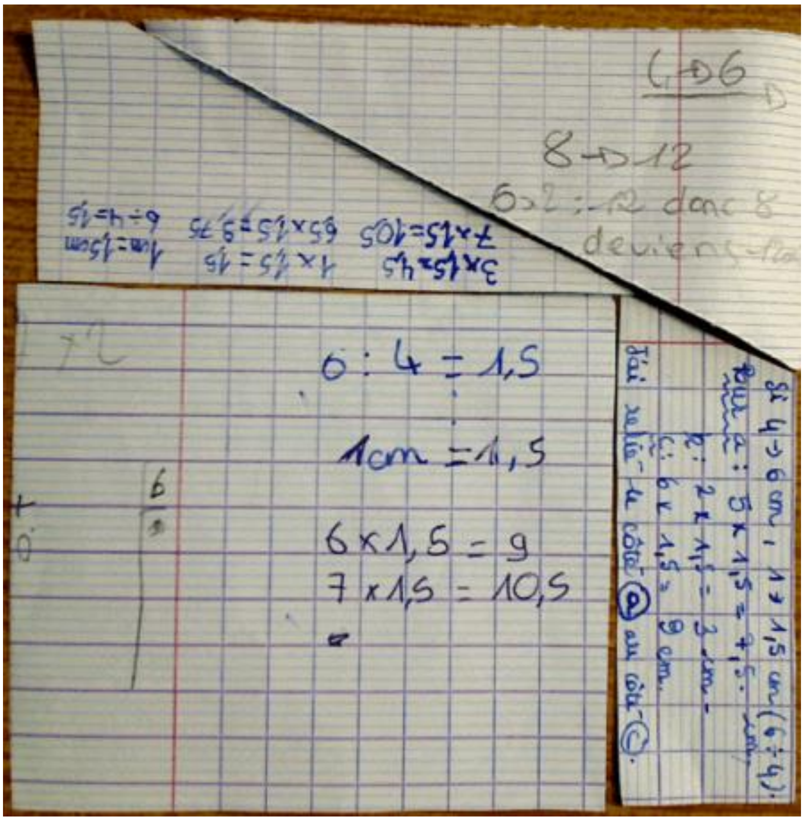
Pour les autres pièces, ils utilisent le coefficient de proportionnalité : quotient de 6 par 4.

Ils cherchent le nombre qui, multiplié par 4, donne 6, c'est à dire : $4 \times ? = 6$.

Ou ils complètent un tableau comme celui-ci :

4	6
5	?

Il est intéressant de remarquer qu'il suffit d'agir de la même façon sur les côtés horizontaux et verticaux des figures car elles sont déterminées par les mesures de ces côtés. La vérification peut se faire sur l'hypoténuse du triangle rectangle qui a attiré l'attention de certains. Sur le puzzle d'origine les élèves ont trouvé environ 9 cm et sur le puzzle correctement agrandi on vérifie que la mesure approchée est environ 13,5 cm = 9 cm × 1,5.



5. <u>Étape 5 : bilan en commun sur la proportionnalité</u>

Le professeur regroupe dans un tableau les différentes longueurs.

Il demande aux élèves de faire des remarques.

dimensions des pièces du puzzle d'origine	8	4	1	3	2	5	6	7	
dimensions des pièces du puzzle agrandi	12	6	1,5	4,5	3	7,5	9	10,5	x 1,5

On en profite pour faire les rappels sur la propriété de linéarité.

<u>Bilan :</u> pour agrandir une figure, on multiplie toutes les longueurs des côtés par un même nombre.

Propriétés:

dimensions des pièces du puzzle d'origine	8	4	1	3	2	5	6	7	
dimensions des pièces du puzzle agrandi	12	6	1,5	4,5	3	7,5	9	10,5	x 1,5

x2

x2

+

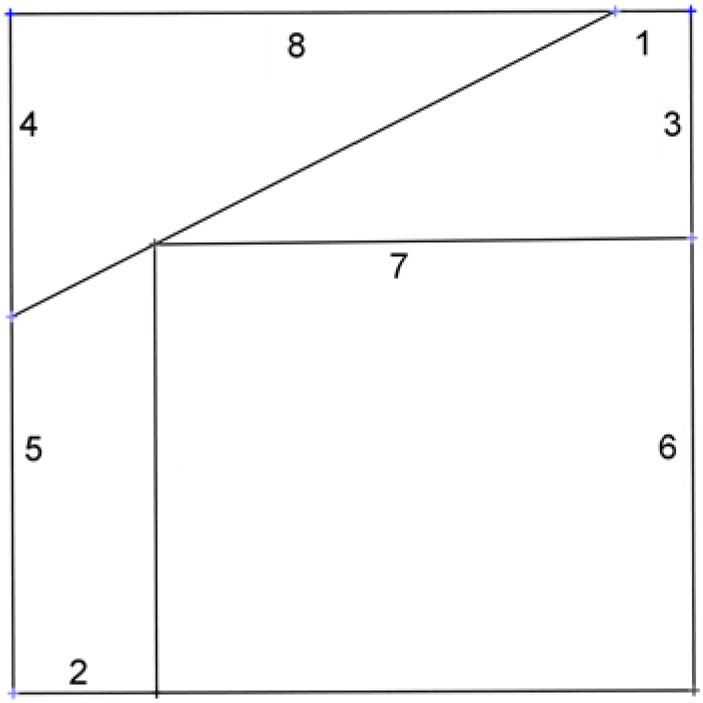
+

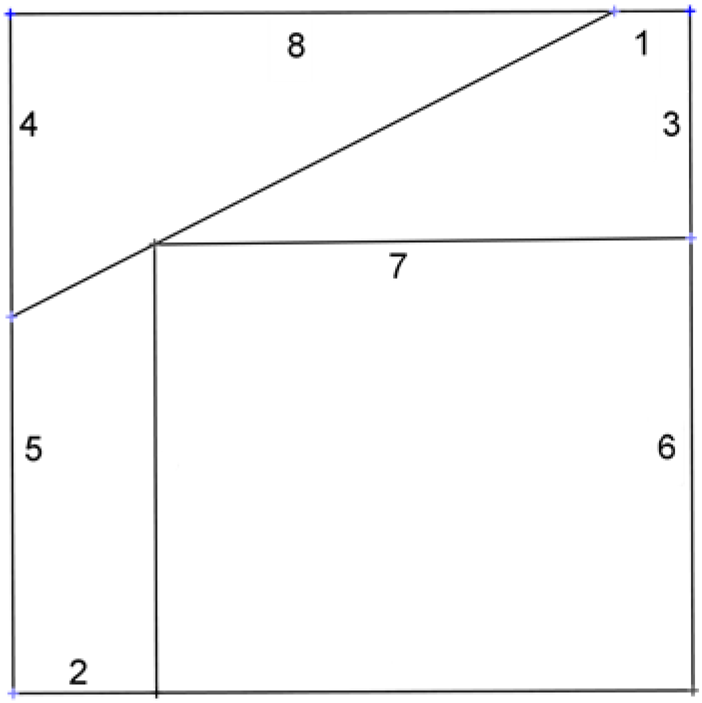
Si « 4 devient 6 », on multiplie les dimensions par $\frac{6}{4}$ = 1,5.

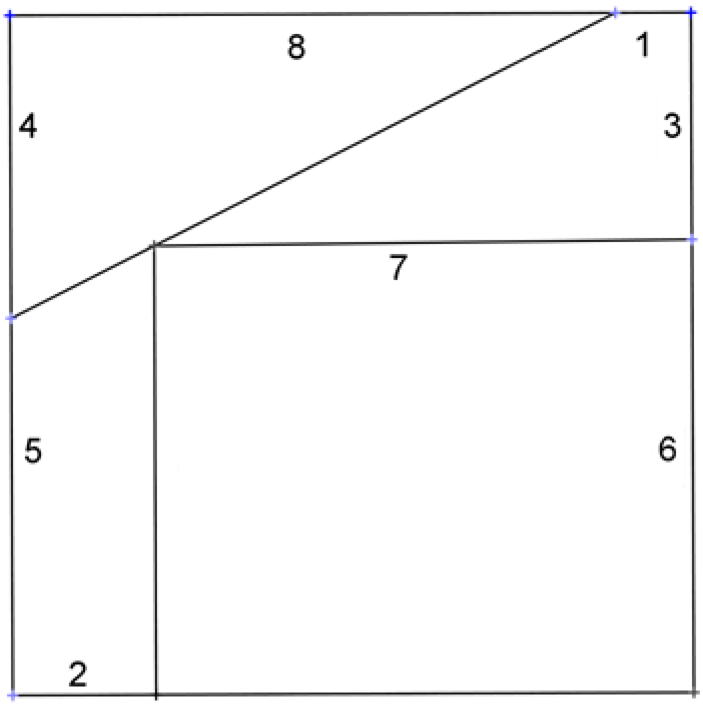
On dit que **les dimensions de la nouvelle figure sont proportionnelles aux dimensions de la figure d'origine.**

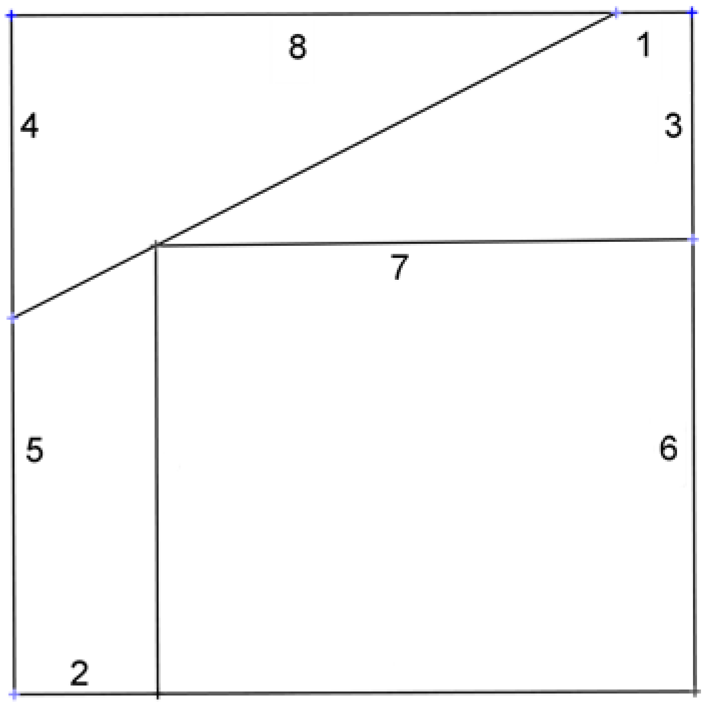
Le coefficient de proportionnalité est 1,5.

Annexe









AGRANDISSEMENT D'UNE PHOTO

I. Le parcours proposé

Nous proposons un enchaînement de situations pour traiter le thème agrandissement-réduction au collège, que nous appelons « parcours » en référence aux PER (Parcours d'Étude et de Recherche) théorisés par Yves Chevallard. Ce travail de l'IREM d'Aquitaine s'inscrit dans le cadre de la recherche PERMES (Parcours d'Etude et de Recherche en Mathématiques pour l'Enseignement Secondaire) en collaboration avec l'ADIREM et l'IFÉ (ex INRP).

Ce parcours, que nous proposons sur le cycle 4, permet d'abord de faire émerger la proportionnalité et la conservation des angles, de considérer les agrandissements-réductions de figures en général. Il se poursuit avec le cas particulier des triangles, les triangles semblables et la propriété de Thalès, « version agrandissement-réduction de triangles ». Dans un troisième temps, il permet d'initier la forme « classique » du théorème avec l'égalité des rapports puis la caractérisation graphique de la proportionnalité.

Les activités d'étude et de recherche (AER) qui constituent ce parcours utilisent un matériel concret simple, présent dans la classe, que les élèves peuvent manipuler (photos, triangles et rectangles à découper...). La modélisation, nécessaire pour faire apparaître et comprendre le rôle des mathématiques, est très simple.

Les élèves utiliseront ici les outils habituels de la proportionnalité : schéma fléché, tableau... avec utilisation des coefficients de proportionnalité, de la propriété de linéarité. La progression proposée amène les élèves à découvrir et mettre en place d'autres outils : égalité de rapports, graphique, formule. La proportionnalité redevient donc objet d'étude avec sa caractérisation graphique, étude qui se terminera pour le collège par la fonction linéaire.

Ce parcours s'inscrit donc parfaitement, en milieu de cycle 4, dans le travail à mener sur la proportionnalité et permet aussi de donner du sens à l'introduction des rapports trigonométriques. Il s'articule parfaitement avec une AER sur la tangente dont la structure peut s'inspirer de celle sur le cosinus que nous n'avons pas incluse dans cette brochure.[7]

---

[7] Vous pouvez trouver la situation sur l'introduction du cosinus en quatrième dans Petit x, n°65, 2004, en accord avec les anciens programmes.

Après avoir brièvement rappelé les attendus du programme officiel, nous présenterons, dans une première partie, un enchaînement de trois situations sur le thème de l'agrandissement d'une photo et de figures en général. Dans une deuxième partie, nous détaillerons trois situations amenant la propriété de Thalès, dans sa « version agrandissement-réduction de triangles ». Dans une troisième et dernière partie, nous reviendrons sur l'agrandissement d'une photo au travers d'une situation permettant d'introduire la caractérisation graphique de la proportionnalité. En guise de conclusion, nous proposerons la progression constituant le parcours annoncé, montrant l'imbrication de ces différentes situations entre elles et la cohérence du parcours.

II. Ce que dit le programme de cycle 4 (extraits)

1. Organisation et gestion de données, fonctions

Attendus de fin de cycle :

résoudre des problèmes de proportionnalité.

- Reconnaître une situation de proportionnalité ou de non-proportionnalité.
- Résoudre des problèmes de recherche de quatrième proportionnelle.
- Coefficient de proportionnalité.

Repères de progressivité :

en 3ème, les élèves sont en mesure de faire le lien entre proportionnalité, fonctions linéaires, théorème de Thalès et homothéties et peuvent choisir le mode de représentation le mieux adapté à la résolution d'un problème.

2. Grandeurs et mesures

Attendus de fin de cycle :

comprendre l'effet de quelques transformations sur des grandeurs géométriques.

- Comprendre l'effet d'un déplacement, d'un agrandissement ou d'une réduction sur les longueurs, les aires, les volumes ou les angles.

[Utiliser un rapport de réduction ou d'agrandissement (architecture, maquettes), l'échelle d'une carte.]

Repères de progressivité :

l'effet d'un déplacement, d'un agrandissement ou d'une réduction sur les grandeurs géométriques est travaillé en 3ème, en lien avec la proportionnalité, les fonctions linéaires et le théorème de Thalès.

3. Espace et géométrie

Attendu de fin de cycle :

Utiliser les notions de géométrie plane pour démontrer.

- Comprendre l'effet d'une translation, d'une symétrie (axiale et centrale), d'une rotation, d'une homothétie sur une figure.
- Résoudre des problèmes de géométrie plane, prouver un résultat général, valider ou réfuter une conjecture.

- Triangle : somme des angles, inégalité triangulaire, cas d'égalité des triangles, triangles semblables, hauteurs, rapports trigonométriques dans le triangle rectangle (sinus, cosinus, tangente).

- Théorème de Thalès.

[Faire le lien entre théorème de Thalès, homothétie et proportionnalité.]

Repères de progressivité :

[...] les homothéties sont amenées en 3ème, en lien avec les configurations de Thalès, la proportionnalité, les fonctions linéaires, les rapports d'agrandissement ou de réduction des grandeurs géométriques.

LA PHOTO

PREMIERE PARTIE : AGRANDISSEMENT D'UNE PHOTO (SITUATIONS 1 ET 2), AGRANDISSEMENT-REDUCTION DE FIGURES

I. Problème posé



Situation 1

Trois séries de photos sont proposées en vidéo-projection.

Il est simplement demandé aux élèves d'observer ces photos pour définir intuitivement la notion d'agrandissement-réduction.

Situation 2

« On considère une photo qui est un rectangle de 8 cm sur 4 cm : je veux l'agrandir de sorte que la largeur qui est 4 cm devienne 7 cm. Quelle est la longueur de la nouvelle photo ?

Indiquer les calculs faits et dessiner le rectangle représentant la photo agrandie. »

Agrandissement-réduction de figures

Le professeur demande aux élèves :

- d'agrandir un losange – donné sur une feuille blanche sans ses dimensions – avec une échelle donnée,

- de réduire un trapèze – donné sur une feuille blanche sans ses dimensions – à partir de la réduction d'un de ses côtés déjà construit.

Niveau

Milieu de cycle 4

Objectifs possibles

- Définir la notion d'agrandissement-réduction
- Calculer une $4^{ème}$ proportionnelle

Notions utilisées

- Proportionnalité toutes procédures

Matériel

- Trois séries de photos
- Matériel de géométrie

Temps de mise en œuvre en classe

- Situations 1 et 2 : 1 heure
- Agrandissement-réduction de figures : 1 heure 30

La photo

Première partie : agrandissement, réduction d'une photo (situations 1 et 2), agrandissement-réduction de figures

Remarque préliminaire

Les situations de cette première partie ont leur prolongement dans la situation de la troisième partie. Pour des raisons de lecture et de progression, nous avons préféré intercaler entre ces parties l'enchaînement des situations amenant à la propriété de Thalès.

Les objectifs visés par l'enchaînement des situations des première et troisième parties sont :

- d'une part, de reprendre l'apprentissage de la proportionnalité autrement qu'en termes de révision, en partant du cadre géométrique et en allant vers le cadre graphique (donc différemment des problèmes arithmétiques qui servent en général à exercer les élèves sur la proportionnalité depuis le cours moyen) ;
- d'autre part, de faire un premier pas vers la fonction linéaire et sa représentation graphique, en expliquant l'alignement des points et même la notion de pente d'une droite !

II. Agrandissement d'une photo, situation 1 : « partie intuitive »

1. La consigne

Trois séries de photos sont proposées en vidéo-projection aux élèves. Il leur est simplement demandé d'observer ces photos pour pouvoir ensuite faire des commentaires et des remarques oralement.

Première série :

Deuxième série :

Troisième série :

Dans la discussion en classe entière, les élèves utilisent les mots « aplati, étiré, trop mince, plus large, déformé, agrandi pareil en longueur et en largeur… ». Ceci permet de se mettre d'accord sur le fait que si une photo est correctement agrandie, tous les éléments de l'image sont agrandis « de la même façon », comme dans une maquette ou, à l'inverse, tous les éléments de l'objet sont réduits « de la même façon ».

Toutes les dimensions de la photo doivent être agrandies de la même façon, afin que les images ne soient pas déformées. Dans un premier temps, le professeur peut se contenter de cette formulation pour caractériser cette transformation : il s'agit d'une similitude, mais ce mot n'est pas introduit. Le programme parle d'agrandissement et de réduction. Le mot « agrandissement » est ambigu : si j'agrandis ma maison, je rajoute une pièce, je ne fais pas une homothétie ni une similitude... Le recours à la photo permet au professeur de se faire bien comprendre sur ce qu'il entend par « agrandissement-réduction ». Si le mot proportionnalité est prononcé dans la classe, le professeur peut le reprendre, sans plus de précision, sinon il ne le prononce pas.

Le seul objectif de cette première situation est donc de « fixer » intuitivement avec la classe, la notion d'agrandissement-réduction : la conservation de la « forme ». Il n'est pas question ici d'envisager la conservation des angles, cela viendra plus tard.

III. Agrandissement d'une photo, situation 2 : la proportionnalité

1. La consigne

On considère une photo qui est un rectangle de 8 cm sur 4 cm : je veux l'agrandir de sorte que la largeur qui est 4 cm devienne 7 cm.
Quelle est la longueur de la nouvelle photo ?
Indiquer les calculs faits et dessiner le rectangle représentant la photo agrandie.

Remarque : on peut présenter une « vraie » photo. Cela permet de visualiser les déformations obtenues par certaines procédures et peut ainsi aider à valider ou invalider les réponses des élèves.

Voici différentes réponses ou procédures d'élèves.

a. « J'ajoute 3 cm pour obtenir 7 cm donc j'ajoute 3 cm à 8 cm pour obtenir la nouvelle largeur et j'obtiens 11 cm. »
b. Certains proposent : « $2 \times 4 - 1 = 7$ donc $2 \times 8 - 1 = 15$. »
c. « 8 étant le double de 4, donc si la nouvelle largeur est 7 cm, on doit trouver, pour la nouvelle longueur, le double de 7 cm, soit 14 cm. »

d. $? = \frac{7}{4} \times 8 = 14$, le coefficient de proportionnalité est $\frac{7}{4}$.

4	8
7	?

Cette procédure utilise la proportionnalité entre les dimensions initiales et les dimensions agrandies de la photo.

ou $? = \frac{7 \times 8}{4}$ avec l'utilisation de l'égalité des produits en croix.

e.

4	8
7	?

$4 \times 2 = 8$ donc $7 \times 2 = 14$.

Dans ce cas, le coefficient de proportionnalité est 2. Il s'agit ici de la proportionnalité entre la largeur et la longueur de la photo.

f. Certains élèves ont besoin de passer par l'unité. Ils parlent parfois de règle de trois.

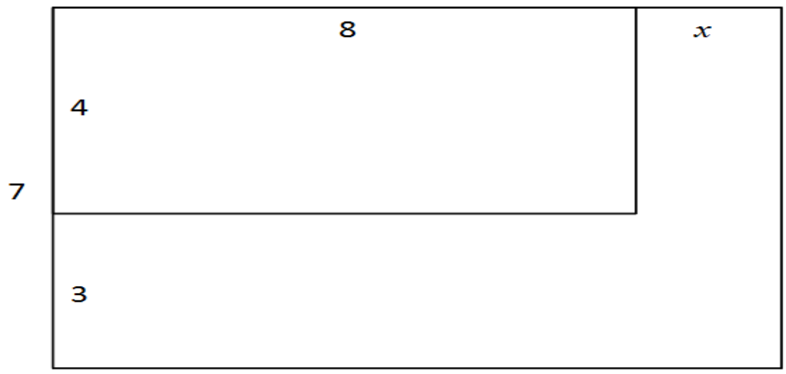
g. D'autres élèves proposent un schéma fléché.

$$4 \rightarrow 7$$

$$8 \rightarrow ?$$

h. Un élève a résolu l'équation suivante : $4 \times ? = 7$. Donc $? = 7 \div 4 = 1{,}75$ d'où $8 \times 1{,}75 = 14$.

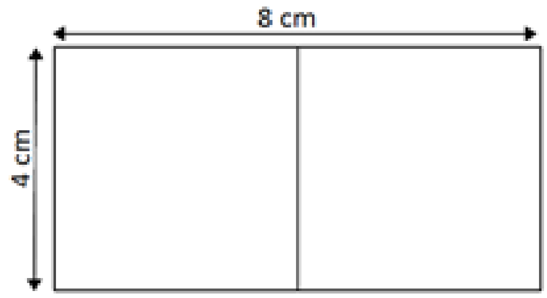
i. Certains élèves font le dessin ci-dessous mais ne parviennent pas à poursuivre.



Les élèves travaillent individuellement pendant une dizaine de minutes et le professeur n'intervient absolument pas pendant cette phase pour permettre à un maximum de procédures, justes ou fausses, d'émerger.

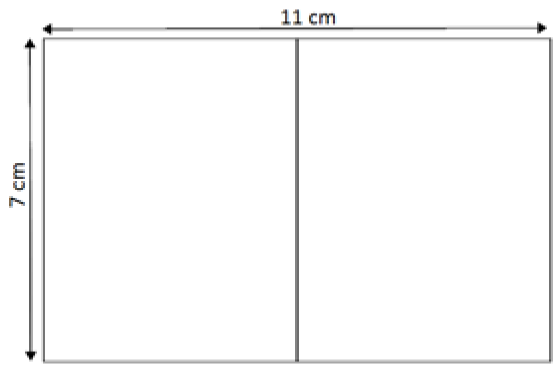
Sa première intervention sera de proposer aux élèves de « valider » ou non leur travail. En particulier, il s'agit de convaincre les élèves qui ont ajouté 3 cm à 8 cm que leur agrandissement ne convient pas, et les amener à remettre en cause leur procédure.

Pour cela, le professeur demande de tracer le rectangle initial et de constater qu'il est composé de deux carrés.

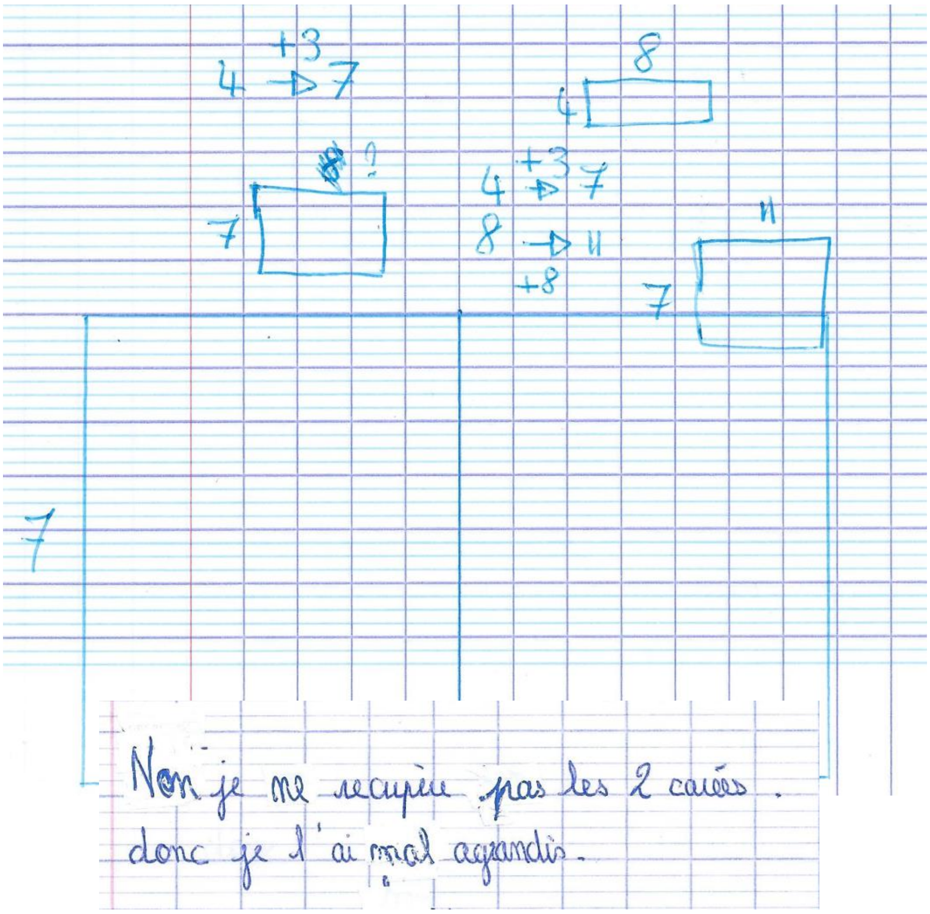


Les élèves peuvent maintenant vérifier si « dans » leur rectangle, ces deux carrés ont été agrandis correctement : c'est la conservation de la « forme » de la situation précédente.

C'est le cas évidemment pour ceux qui ont utilisé la proportionnalité mais pas pour les autres. Par exemple, les élèves qui ont ajouté 3 cm à 8 cm obtiennent la figure suivante :

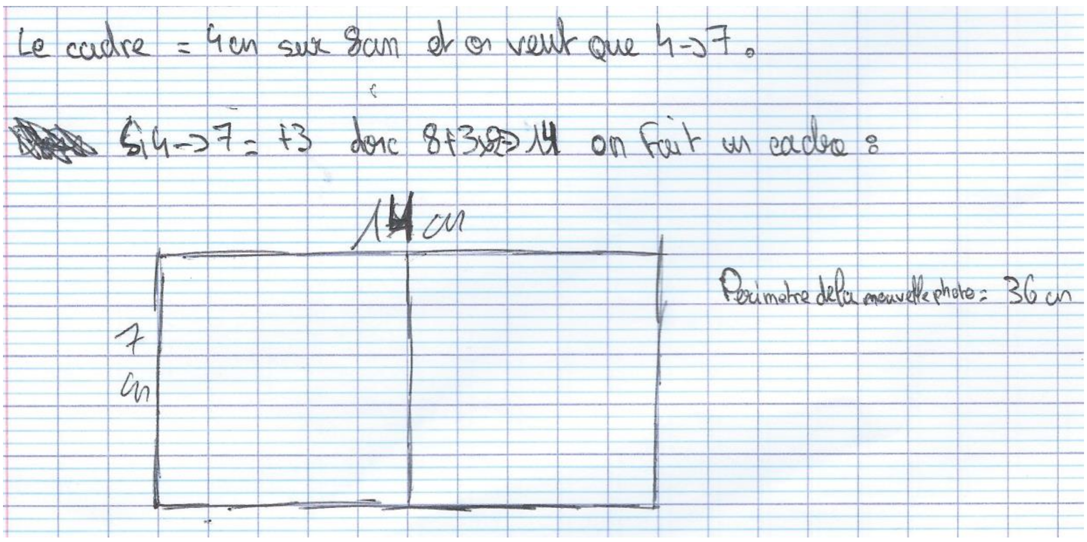


Ce moment de validation apparaît comme essentiel pour contrer le modèle additif comme le suggère le travail d'une élève ci-dessous.

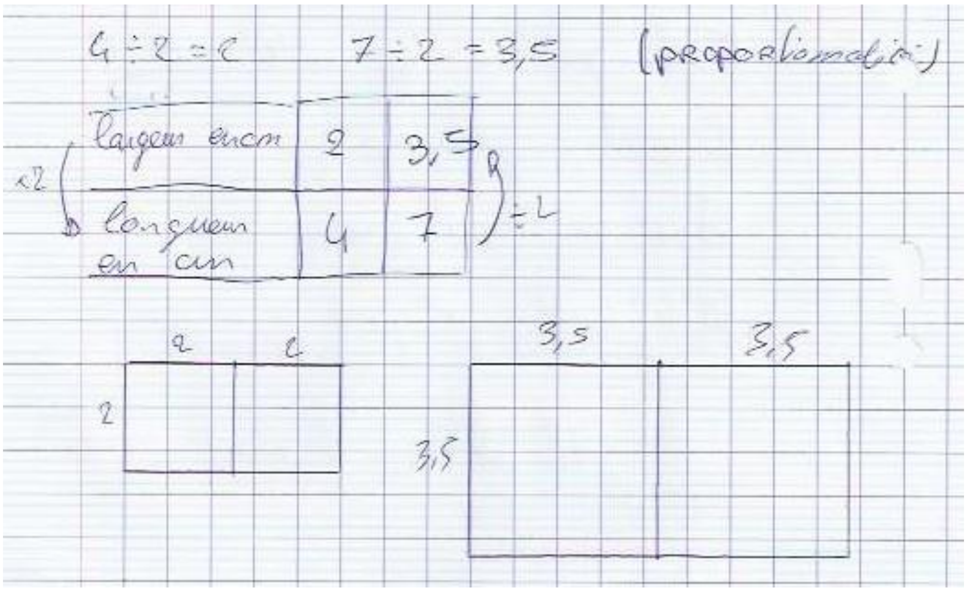


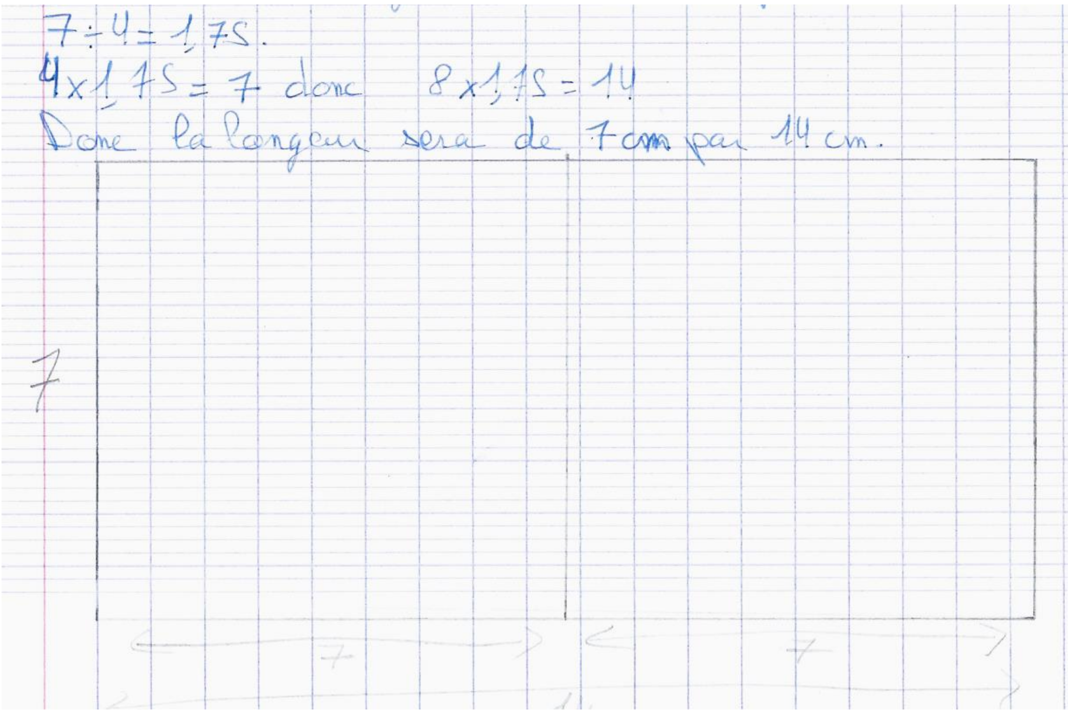
La conservation des deux carrés lui permet de réaliser que son modèle n'est pas le bon.

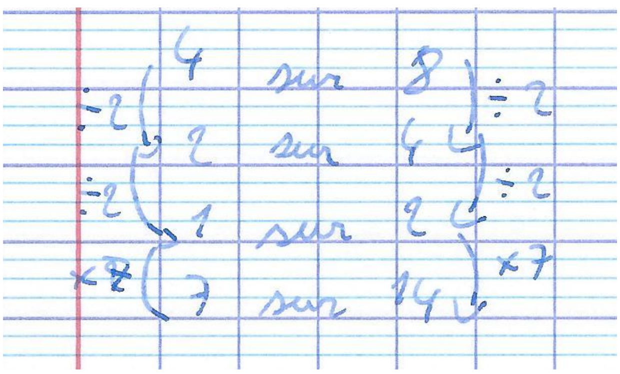
Certains élèves ont eux aussi cherché à ajouter un nombre à la longueur tout en utilisant la proportionnalité :

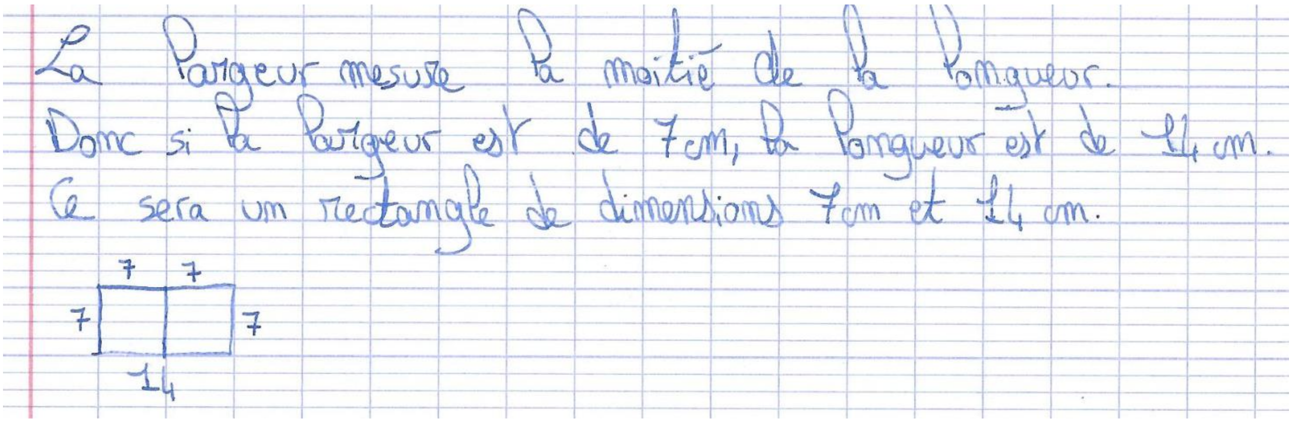


Voici quelques autres productions d'élèves illustrant différentes stratégies et leurs validations.

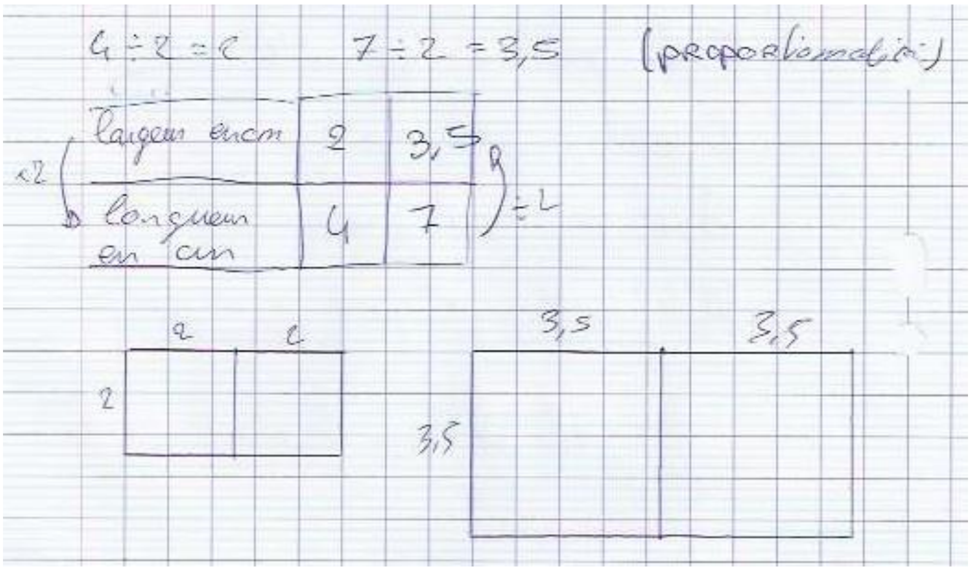







La largeur mesure la moitié de la longueur.
Donc si la largeur est de 7cm, la longueur est de 14 cm.
Ce sera un rectangle de dimensions 7cm et 14 cm.

Une mise en commun a lieu ensuite pour trier les différentes procédures.


4 ÷ 2 = 2   7 ÷ 2 = 3,5 (proportionnalité)

largeur en cm	2	3,5
longueur en cm	4	7

La proportionnalité ainsi mise en évidence, le professeur insiste sur les deux coefficients possibles, en reprenant par exemple les deux types de tableaux.

Largeur des photos	4	7
Longueur des photos	8	14

×2

Ce premier tableau (voir procédure d. dans la liste précédente) exprime la proportionnalité entre la largeur et la longueur des différentes photos : le coefficient est 2. La longueur mesure le double de la largeur quel que soit l'agrandissement choisi.

Dimensions de la 1ère photo	4	8
Dimensions de la 2ème photo agrandie	7	14

×1,75

Ce deuxième tableau (voir procédure c. dans la liste précédente) exprime que les dimensions de la photo agrandie sont proportionnelles aux dimensions de la photo de départ (coefficient de proportionnalité 1,75) quand on fait un seul agrandissement.

Le bilan de cette situation 2 pour les élèves est : pour agrandir une photo, toutes les longueurs doivent être multipliées par un même nombre et la « forme » doit être conservée (le rectangle « reste » un rectangle, le carré « reste » un carré).

La conservation des angles est ici implicite. Les élèves ne se posent pas la question car la forme rectangulaire est conservée. Cette problématique est soulevée dans les activités d'agrandissement et réduction d'un losange, d'un trapèze, décrites ci-dessous.

IV. Agrandissement d'une figure en général

Les situations 1 et 2 sur le thème de l'agrandissement d'une photo, traitées à la suite l'une de l'autre, permettent d'admettre de manière intuitive une première « propriété » - la conservation « de la forme » - et de remettre en cause le modèle additif au profit du modèle multiplicatif.

Il est alors essentiel de poursuivre un travail spécifique sur l'agrandissement ou la réduction de figures dont les objectifs sont :

- montrer que la proportionnalité des longueurs des côtés ne suffit pas en général,
- passer de la conservation « de la forme » à la conservation des mesures d'angles,
- mettre en évidence la proportionnalité de toutes les dimensions.

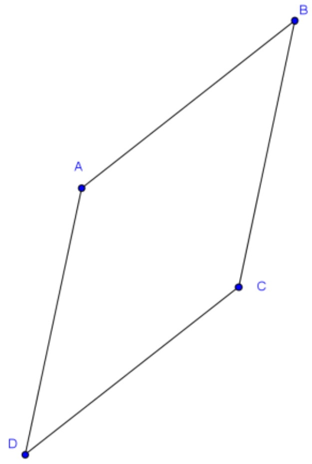
Cela peut être fait par exemple en demandant aux élèves d'agrandir un losange donné sur une feuille blanche sans ses dimensions avec une échelle donnée, de réduire un trapèze donné sur une feuille blanche sans ses dimensions à partir de la réduction d'un de ses côtés déjà construit.

Ces situations permettent aussi d'amener naturellement la suite du parcours puisque les élèves décomposent souvent les figures en triangles, en traçant des diagonales.

Quels que soient les choix du professeur, il est important qu'à ce stade, un bilan « agrandissement-réduction de figures » soit institutionnalisé avec les élèves.

1. <u>Activité 1 :</u>

Tracer un agrandissement de ce losange à l'échelle 1,8. Trouver un moyen de vérifier que c'est un « bon » agrandissement.



Ce losange, tracé sur papier blanc, est donné aux élèves, la place pour l'agrandissement est prévue. Les mesures de longueur et d'angles ne sont pas indiquées (côté = 5 cm, angles = 40° et 140°). Les diagonales ne sont pas tracées.

On attend que les élèves fassent les mesures qui leur sont utiles :

- un côté et une diagonale, mais il faut qu'ils pensent à en tracer une.
- un côté et un angle.
- plus de deux mesures.

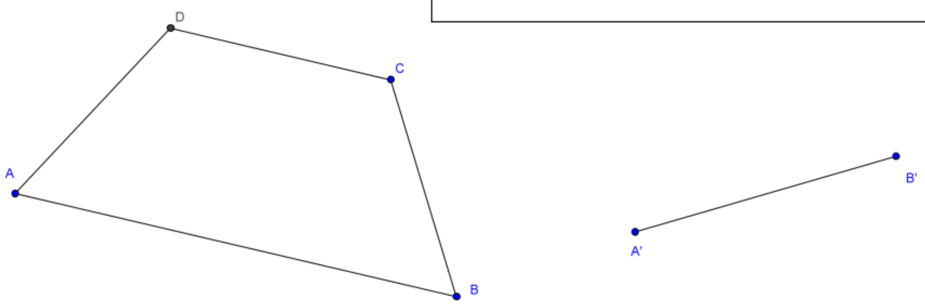
Une fois l'agrandissement tracé, pour la vérification, on attend que les élèves découpent ou décalquent les deux losanges pour pouvoir les empiler sur un angle.

Ils tracent d'autres éléments dans la figure et vérifient qu'ils sont bien agrandis.

Un des objectifs de cet exercice est de **mettre en évidence la conservation des angles** lors d'un agrandissement, propriété peu ou pas explicitée avec les rectangles de la situation 2.

2. <u>Activité 2 :</u>

Tracer une **réduction** de ce trapèze de façon à ce que le côté [AB] devienne le côté [A'B'].



On aborde ici la notion de réduction qui n'a pas été traitée jusqu'à maintenant, bien qu'on puisse l'évoquer oralement dans les situations précédentes.

Comme dans l'exercice précédent on ne donne pas les mesures aux élèves. On attend qu'ils les prennent en charge (AB = 10 cm, AD = DC = CB = 5 cm, A'B' = 6 cm, angles = 60° et 120°).

La conservation des angles ne pose pas de problème à ce niveau, bien que quelques élèves encore se trompent.

La difficulté réside dans le passage de 10 cm à 6 cm : multiplication par 0,6 ou, 5 étant la moitié de 10, [A'D'] mesurera 3 cm en réinvestissant ce qui a été vu dans la situation précédente. Cependant, lors de la mise en commun le coefficient de réduction sera mis en évidence, ainsi que le fait qu'il est inférieur à 1, avec le rappel de ce qui a été vu en 6ème : quand on multiplie par un nombre inférieur à 1, le résultat est plus petit que le nombre de départ.

Bilan : Dans l'agrandissement (ou la réduction) d'une figure à l'échelle *k*, les dimensions sont multipliées par *k* et les angles sont conservés. Pour un agrandissement : $k > 1$. Pour une réduction : $k < 1$.

Il est donc temps maintenant d'étudier le cas particulier des agrandissements et réductions de triangles pour aboutir à la propriété de Thalès dans sa version « agrandissement-réduction de triangles ».

C'est l'objet des trois situations exposées dans la deuxième partie. Les deux premières situations, qui amènent la configuration et la propriété comme agrandissement-réduction de triangles doivent s'enchaîner immédiatement, la troisième, qui initie la forme classique de la propriété avec l'égalité des rapports, peut être abordée avec un peu de recul.

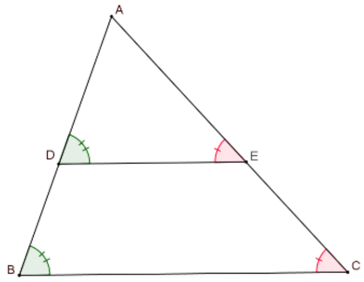
Pour terminer, au troisième trimestre, la proportionnalité redeviendra un objet d'étude avec la situation 3 sur le thème de l'agrandissement d'une photo, exposée dans la troisième partie, pour aboutir à sa caractérisation graphique.

La propriété de Thalès est utilisée dans cette situation pour apporter des éléments de preuve, ce qui explique sa place dans le parcours. Les élèves ont à ce stade une certaine expérience des « découpages et empilements » ce qui facilite l'obtention des procédures et conjectures attendues dans cette situation.

La photo

DEUXIEME PARTIE : LA PROPRIETE DE THALES

I. Problème posé



1. Situation 1 : vers la configuration

Étape 1

a) Tracer un triangle ayant un angle de 115° et un autre de 47°.
b) Que peut-on dire de tous les triangles de la classe ?

Étape 2

Tracer sur la feuille blanche que je vous distribue un triangle ayant un angle de 115° et un autre de 47°, le plus grand possible entrant dans la feuille.

Etape 3

Le professeur veut comparer les triangles qu'il a ramassés pour déterminer qui est le gagnant. Il demande aux élèves de trouver une méthode pour le faire tout en économisant le plus possible la manipulation de son rapporteur.

2. Situation 2 : Thalès comme agrandissement-réduction de triangles

Étape 1

Le professeur trace au tableau d'un triangle ABC ayant un côté [AB] de 60 cm et deux angles et de 115° et 47°.

Il demande aux élèves de trouver les longueurs des deux autres côtés du triangle qui est au tableau.

Étape 2

« On a deux triangles ABC et ADE tels que : les points A, B, D et A, C, E sont alignés et (BC) et (DE) sont parallèles.
AD = 9 cm, AB = 4 cm, AC = 6 cm et BC = 5 cm.

Calculer les longueurs des côtés [AE] et [DE]. »

Étape 3

On a deux triangles RSV et RTU tels que les points R, V, U et R, S, T sont alignés et les droites (SV) et (TU) sont parallèles. RU = 16 cm, RT = 10 cm et TU = 12 cm et RV = $\frac{1}{4}$ RU.

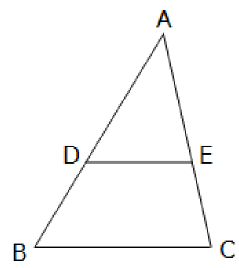
Calculer les longueurs des côtés [SV] et [RS].

3. Situation 3 : vers l'égalité des rapports

Étape 1

Tracer un triangle ABC avec : AB = 8 cm, BC = 10 cm, AC = 9 cm.

Sur [AB], placer le point M tel que AM = 6 cm. Tracer la parallèle à (BC) passant par M. Elle coupe [AC] en N.
Calculer les longueurs MN et AN.



Étape 2

Tracer un triangle DEF avec DE = 7 cm, EF = 9 cm et DF = 8 cm.

Sur le segment [DE], placer le point R tel que DR = 3 cm. Sur le segment [DF], placer le point S tel que DS = 3,5 cm. Les droites (RS) et (EF) sont-elles parallèles ? Le prouver.

Étape 3

On sait que les points A, D, B et A, E, C sont alignés, que les droites (DE) et (BC) sont parallèles. Quelles conjectures pouvez-vous faire ?

Écrire, sans mesurer, le coefficient d'agrandissement.

Niveau

- Milieu de cycle 4.

Objectifs possibles

- Faire apparaître « naturellement » la configuration de Thalès.
- Aborder la propriété de Thalès en exploitant les connaissances des élèves en termes d'agrandissement-réduction.
- Initier la forme classique de la propriété de Thalès avec l'égalité des rapports.

Notions utilisées

- Somme des angles d'un triangle.
- Caractérisation angulaire du parallélisme.
- Agrandissement-réduction de figures.

Matériel

- Ciseaux, matériel de géométrie.

Temps de mise en œuvre en classe : 2 heures pour chaque situation.

La photo

Deuxième partie : la propriété de Thalès

L'objectif de l’enchaînement de ces trois situations est de faire apparaître « naturellement » la configuration de Thalès, en partant de la notion de triangles semblables, d'aborder ensuite la propriété en exploitant les connaissances des élèves en termes d'agrandissement-réduction pour, enfin, initier sa forme classique avec l'égalité des rapports.

Prérequis :

- la somme des angles d'un triangle ;
- la propriété des angles alternes-internes ;
- les propriétés caractéristiques du parallélogramme.

I. La propriété de Thalès, situation 1 : vers la configuration

(Sur une idée de l'IREM de Marseille)

1. La consigne

Étape 1

a) Tracer un triangle ayant un angle de 115° et un autre de 47°.

La question b) est posée lorsque les élèves ont terminé de tracer leur triangle.

b) Que peut-on dire de tous les triangles de la classe ?

Certains ont du mal à utiliser le rapporteur surtout pour l’angle de 115°, il y a quelques erreurs de lecture des graduations. Ils tracent un angle de 65° au lieu de 115°, mais ils s’en aperçoivent rapidement car leur triangle ne ressemble pas à celui de leur voisin.

En réponse à la question b), les élèves sont vite persuadés que tous les triangles ont les trois mêmes angles ; le professeur les incite à le démontrer. Ils utilisent la somme des angles d’un triangle vue en cinquième. Ils remarquent qu’il y a des grands triangles et des petits, mais ils ne savent pas le traduire avec des propriétés mathématiques. Quelques-uns utilisent les termes d'échelle ou de proportionnalité sans préciser entre quelles grandeurs.

Le professeur peut alors donner la définition de triangles semblables : deux triangles qui ont les mêmes angles sont des triangles semblables.

La consigne (suite)

Attention ! Les étapes 2 et 3 ci-dessous demandent une gestion particulière de la classe.

Étape 2

Tracer sur la feuille blanche que je vous distribue un triangle ayant un angle de 115° et un autre de 47°, le plus grand possible entrant dans la feuille.

Les élèves entrent volontiers dans ce défi qu'ils pensent facile.

La solution experte consiste à calculer la mesure du troisième angle (18°) puis à placer le plus grand côté du triangle qui est celui opposé au plus grand angle. Le segment le plus grand que l'on peut tracer dans la feuille est la diagonale. Ce sera le grand côté du triangle. Ensuite, on trace les deux angles de 47° et 18°. Ce n'est pas celle qu'utilisent les élèves !

Ils ont du mal à faire rentrer leur triangle dans la feuille car ils commencent par l'angle de 47° et celui de 115° et le triangle sort de la feuille ! Certains gomment et recommencent, d'autres ont des stratégies pour ne pas tout effacer. Ils rapprochent leur côté en traçant des parallèles successives, jusqu'à ce que la figure rentre dans la feuille.

Le professeur leur demande de découper les triangles qu'ils ont tracés, de mettre leur nom dessus et il ramasse les triangles. Si un élève les ramasse, il a tendance à les "caler" sur l'angle obtus... Certains reconnaissent alors des parallèles et s'interrogent déjà ! Certains élèves abandonnent la compétition, persuadés que leur triangle est trop petit.

2. La consigne (suite)

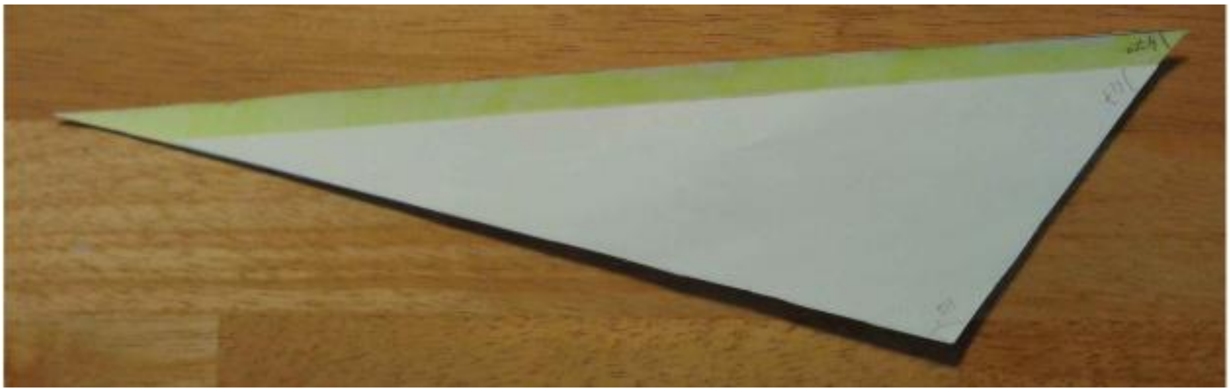
Etape 3 (à l'oral) :

Le professeur dit aux élèves qu'il veut comparer les triangles qu'il a ramassés pour déterminer qui est le gagnant. Il veut le faire en économisant le plus possible la manipulation de son rapporteur pour gagner du temps. Il leur demande donc de lui indiquer comment faire.

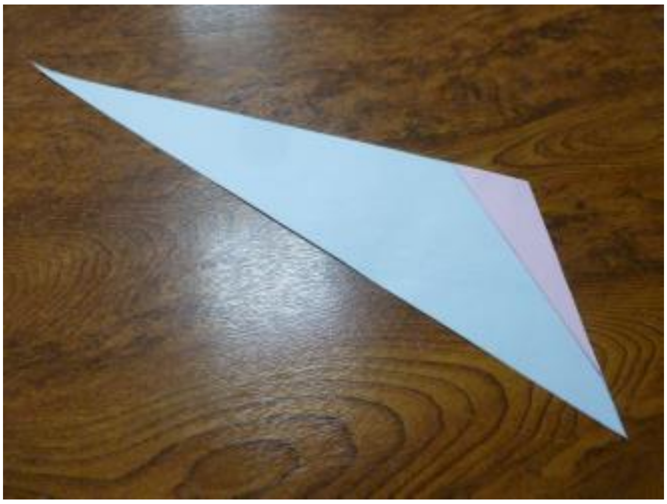
Les élèves proposent de vérifier soigneusement un des triangles avec le rapporteur puis de l'utiliser comme modèle T. Ils suggèrent ensuite de superposer les autres triangles avec celui-ci en commençant par l'un des angles.

Devant la classe, le professeur superpose le modèle T avec un triangle T1 ayant un de ses angles faux. Les élèves disent que ce n'est pas correct car les côtés devraient se superposer, si l'angle par lequel on a superposé est bon. Ce n'est pas le cas, donc ces deux angles ne sont pas les mêmes. Si les deux angles obtus ne coïncident pas, il est inutile de continuer avec ce triangle T1. Un de ses angles est faux donc on est sûr qu'il ne convient pas puisqu'il faut que les trois angles coïncident.

Le professeur vérifie un autre triangle T2. Si le premier angle essayé convient, les élèves proposent de superposer à nouveau les deux triangles en changeant d’angle pour vérifier les deux autres angles.
Le professeur le fait mais insiste en demandant s’il n’y a pas une méthode plus rapide car il doit vérifier de nombreux triangles…
Le professeur prend un autre triangle T3 qui a le bon angle au sommet mais un des autres angles faux, sur lequel il superpose le triangle modèle T. Des élèves disent alors que les troisièmes côtés des triangles T et T3 devraient être parallèles, sinon les deux angles restants ne sont pas bons.
Les élèves proposent enfin de superposer deux à deux les triangles afin de vérifier si les troisièmes côtés sont parallèles.

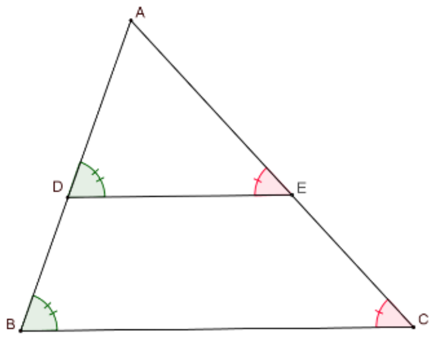


Le professeur peut prendre un triangle T4 juste et le superposer au modèle T en inversant la position des angles.

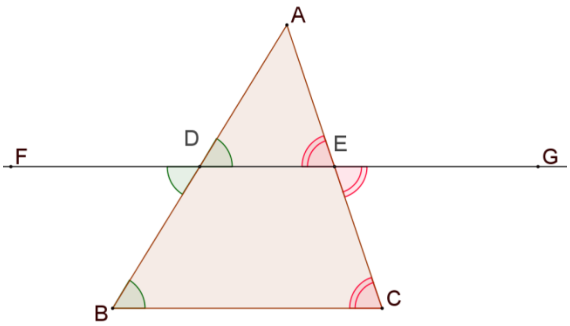


Les troisièmes côtés ne sont pas parallèles. Les élèves suggèrent de retourner le triangle afin que les angles qui devraient être égaux soient le long du même côté. Les troisièmes côtés sont alors parallèles donc on peut vérifier que le triangle T4 est juste.

Le professeur peut alors faire un schéma au tableau représentant deux triangles superposés et incite les élèves à justifier leur conjecture concernant le parallélisme.



Le professeur suggère de prolonger la droite (DE), on obtient la figure ci-dessous :



Les élèves utilisent la propriété des angles alternes-internes.

Si les droites (DE) et (BC) sont parallèles, alors les angles alternes-internes $\widehat{BCE}$ et $\widehat{GEC}$ sont égaux et les angles $\widehat{AED}$ et $\widehat{GEC}$ qui sont opposés par le sommet le sont également. Donc les angles $\widehat{AED}$ et $\widehat{BCE}$ sont égaux. De même avec les angles $\widehat{ADE}$ et $\widehat{DBC}$.
Réciproquement, si les angles sont égaux, les droites sont parallèles et donc si les droites ne sont pas parallèles, les angles ne sont pas égaux.
On peut alors déterminer le gagnant du défi !

Après la vérification par le professeur, des élèves veulent aussi vérifier si leur triangle n'a pas été éliminé injustement : les triangles leur sont rendus et ils superposent eux-mêmes leur triangle avec ceux des voisins. Certains qui les ont superposés dans le mauvais sens n'ont pas leurs côtés parallèles. Les autres leur rappellent qu'il faut retourner leur triangle car les angles à comparer doivent se trouver le long du même côté.
Avant de donner leur triangle au professeur, quelques-uns avaient déjà superposé leur triangle avec celui de leur voisin. Et s'ils avaient pensé alors que leur triangle n'était pas bon, ils avaient renoncé à participer au défi car ils n'avaient pas le temps de le refaire. Ceux-là sont d'autant plus motivés pour voir avec le voisin si leurs angles coïncident ou non et surtout celui des deux qui a le plus grand triangle.

Le bilan de cette situation est donc :

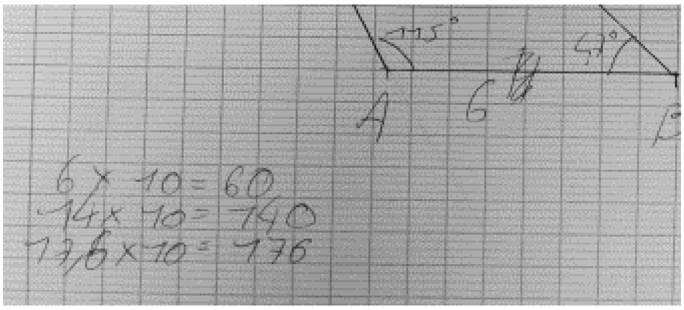
Quand on superpose deux triangles semblables ABC et ADE, les sommets A, B, D d'une part et A, C, E d'autre part, sont alignés et les côtés (BC) et (DE) sont parallèles. Et réciproquement, si les points A, B, D et A, C, E sont alignés et les côtés (BC) et (DE) parallèles, les deux triangles sont semblables.

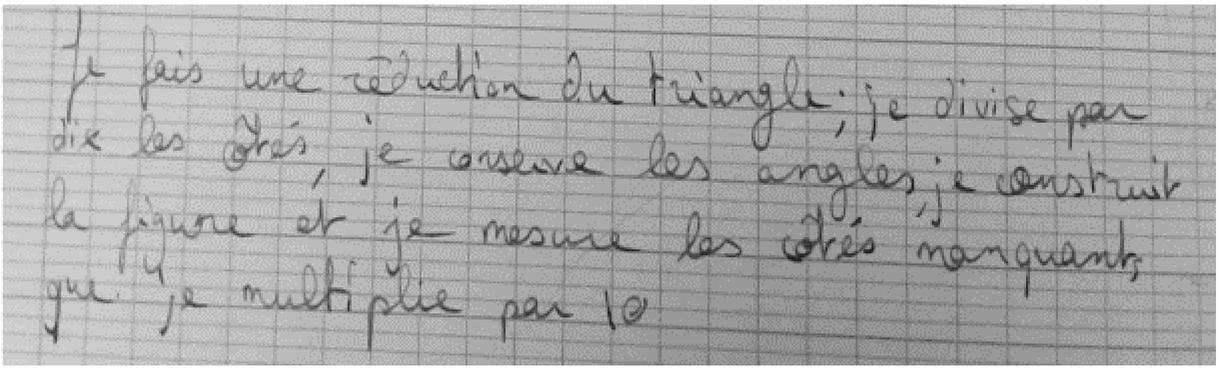
II. La propriété de Thalès, situation 2 : Agrandissement-réduction de triangles

1. La consigne

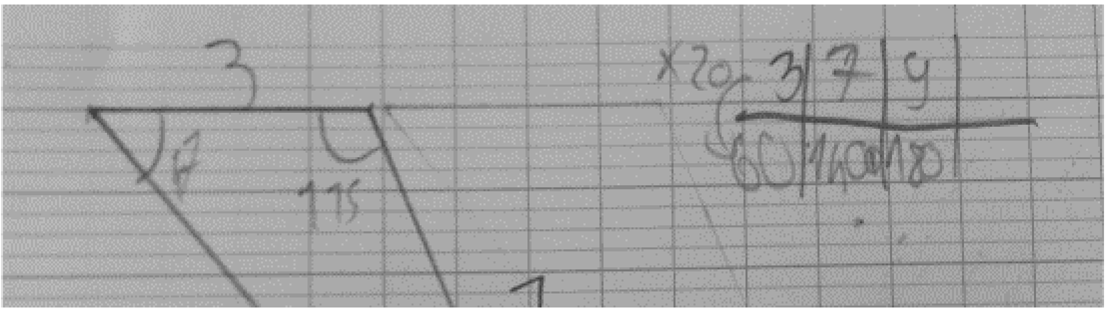
<u>Étape 1</u> Le professeur trace au tableau d'un triangle ABC ayant un côté [AB] de 60 cm et deux angles et de 115° et 47°. Il demande aux élèves de trouver les longueurs des deux autres côtés du triangle qui est au tableau.

Les élèves sont d'abord décontenancés et pensent que ce n'est pas possible. Assez vite cependant, certains disent que « le triangle du tableau est proportionnel » à ceux de leur cahier ou « à l'échelle ». Certains proposent de dessiner un triangle avec un côté de 6 cm ou de 10 cm pour multiplier les autres côtés qu'ils mesurent par 10 ou par 6.

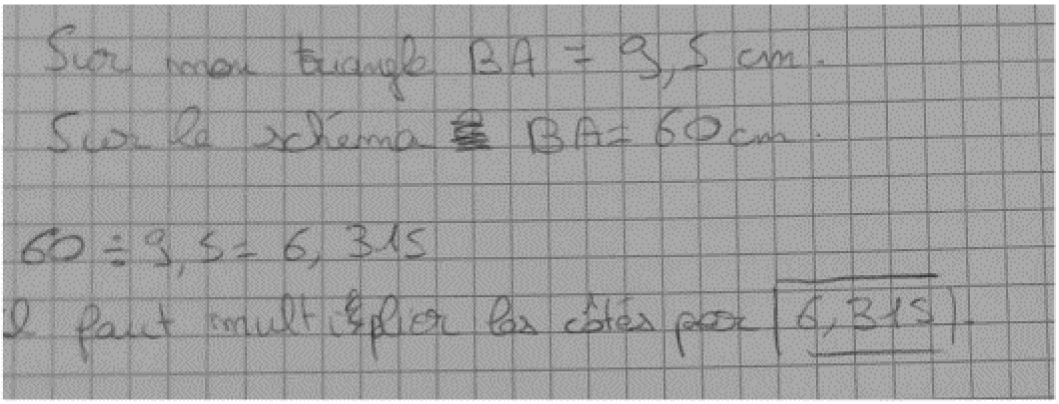




D'autres, qui ont des triangles avec des mesures pratiques, proposent de les utiliser. Par exemple, un côté de 3 cm permettra de multiplier par 20.



Quelques-uns utilisent le triangle déjà tracé malgré un coefficient peu pratique.


Sur mon triangle BA = 9,5 cm.
Sur le schéma BA = 60 cm.

60 ÷ 9,5 = 6,315
Il faut multiplier les côtés par 6,315.

Les élèves vérifient ensuite si les mesures qu'ils ont trouvées sont assez proches des longueurs des côtés du triangle du tableau.

Dans certaines classes, ils ne sont pas étonnés des erreurs de mesure. Dans d'autres classes, des interrogations sur les différences obtenues suscitent un vrai débat entre erreur de construction, imprécision des mesures et du matériel.

2. La consigne (suite)

Étape 2

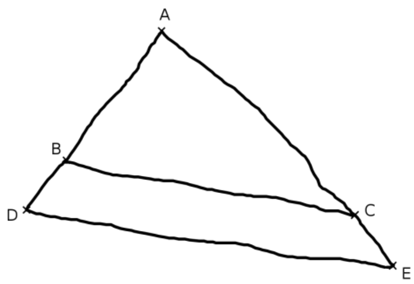
On a deux triangles ABC et ADE tels que :

les points A, B, D et A, C, E sont alignés et

(BC) et (DE) sont parallèles.

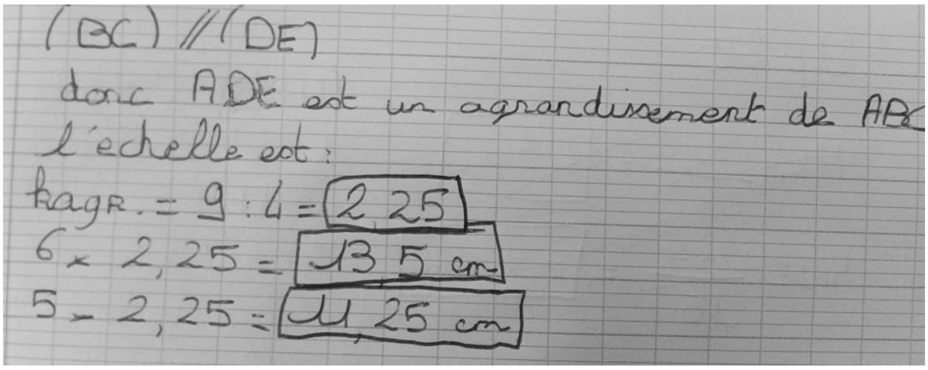
AD = 9 cm, AB = 4 cm, AC = 6 cm et BC = 5 cm.

Calculer les longueurs des côtés [AE] et [DE].



Les élèves continuent d'utiliser la conjecture émise à l'étape précédente puisque ces triangles ont les mêmes angles.

Certains utilisent le tableau de proportionnalité et les produits en croix pour trouver les deux longueurs demandées. D'autres calculent le coefficient d'agrandissement qui est ici décimal (2,25).


(BC) // (DE)
donc ADE est un agrandissement de ABC
l'échelle est :
kagR. = 9 : 4 = 2,25
6 × 2,25 = 13,5 cm
5 × 2,25 = 11,25 cm

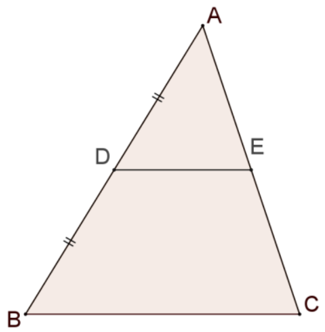
À ce stade, le professeur aide la classe à écrire la conjecture suivante :
des triangles semblables ont les longueurs de leurs côtés qui sont proportionnelles.

3. La consigne (suite)

<u>Étape 2 (suite) :</u> l'objectif est maintenant de faire justifier dans un cas particulier la proportionnalité des longueurs des côtés des deux triangles. Pour cela, nous allons démontrer que la conjecture ci-dessus est vraie lorsque le point D est au milieu de [AB].

Le professeur demande aux élèves de faire la figure, puis de citer les données et la conclusion.

Pour les données :



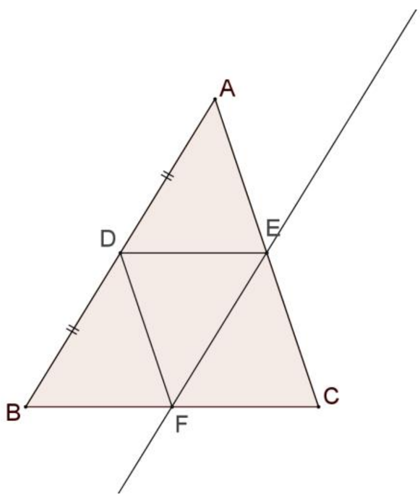
- on a deux triangles ABC et ADE tels que les points A, D, B et A, E, C sont alignés et les droites (DE) et (BC) sont parallèles ;
- D est le milieu de [AB].

Pour la conclusion :

- montrer que le triangle ADE a ses côtés proportionnels à ceux du triangle ABC.

4. Démonstration possible

Le professeur propose de tracer la droite parallèle à (AB) passant par E, qui coupe le côté [BC] en F, et de joindre D et F.



Il demande aux élèves de faire des conjectures.

Entre autres conjectures, les élèves voient trois parallélogrammes.
Le professeur leur demande s'ils peuvent démontrer que les quadrilatères cités sont bien des parallélogrammes.

• DEFB est un parallélogramme.
Il a deux paires de côtés opposés parallèles, (DE) // (BF) et (EF) // (BD).
On peut donc en déduire que DE = BF et BD = EF.

• DAEF est un parallélogramme.

Il a deux côtés opposés parallèles et de même longueur, (EF) // (AD) et EF = BD donc EF = AD.

On peut donc en déduire que DF = AE et (DF) // (AE).

• DECF est un parallélogramme.

Il a ses côtés opposés parallèles, (DF) // (AE) et (DE) // (FC).

Donc DF = AE = EC.

Le point E est donc le milieu de [AC] donc AE = $\frac{1}{2}$ AC.

On a aussi DE = FC donc DE = $\frac{1}{2}$ BC et d'après les données, AD = $\frac{1}{2}$ AB.

5. Conclusion

Le triangle ADE est une réduction du triangle ABC de coefficient $\frac{1}{2}$.

6. La consigne (suite)

Étape 3 : on peut montrer que la propriété est vraie aussi pour d'autres rapports de longueur.

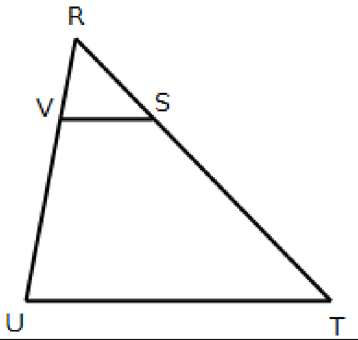
Cette partie peut faire l'objet d'un devoir maison.

On a deux triangles RSV et RTU tels que les points

R, V, U et R, S, T sont alignés et (SV) et (TU) sont parallèles.

RU = 16 cm, RT = 10 cm et TU = 12 cm et RV = $\frac{1}{4}$ RU.

Calculer les longueurs des côtés [SV] et [RS].



On se sert du cas précédent.

En fonction du niveau de la classe, d'autres cas particuliers peuvent être justifiés en remplaçant par exemple $\frac{1}{4}$ par $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{3}$ …

Pour ces autres rapports, on pourra donner d'abord l'exercice suivant à commencer en classe et à terminer à la maison.

On a un trapèze ABDC de bases [AB] et [CD].

E est le milieu de [AC].

Montrer que la droite parallèle à (AB) passant par E coupe [BD] en son milieu F.

Le professeur présente l'énoncé de l'exercice aux élèves, ils disent qu'il faut appliquer la propriété précédente mais il n'y a pas de triangle. Ils proposent de tracer une diagonale du trapèze.

Ils terminent seuls à la maison.

On peut appliquer la propriété vue précédemment (étape 2) dans le triangle ACD : E est le milieu de [AC] et (EG) // (CD) donc G est le milieu de [AD]. Puis on recommence dans le triangle ABD, G est le milieu de [AD] et (GF) // (AB) donc F est le milieu de [BD].

La propriété de Thalès peut alors être admise sous la forme :

Deux triangles ABC et ADE pour lesquels les points A, B, D et A, C, E sont alignés et les côtés (BC) et (DE) parallèles, ont les longueurs de leurs côtés qui sont proportionnelles.

Ce qui pourra être illustré par le tableau de proportionnalité :

Triangle ABC	AB	AC	BC
Triangle ADE	AD	AE	DE

III. La propriété de Thalès, situation 3 : vers l'égalité des rapports

Il est possible de s'arrêter à la situation précédente en classe de quatrième mais nous pensons qu'il faut déjà initier la forme classique du « futur » théorème de Thalès de la classe de troisième avec l'égalité des rapports, forme qui est loin d'être évidente pour les élèves et parfois dépourvue de sens pour eux.

Cette situation 3 a pour objectif d'inciter les élèves à écrire les rapports de mesures lors d'une progression de plus en plus abstraite.

L'étape 1 utilise un coefficient de réduction décimal et un coefficient d'agrandissement rationnel non décimal.

Dans l'étape 2, l'écriture et la comparaison de quotients est nécessaire, certains de ces quotients étant rationnels non décimaux.

Dans l'étape 3, les élèves sont incités à écrire des rapports avec des lettres et à traduire la proportionnalité par l'égalité de ces rapports.

1. La consigne

Étape 1

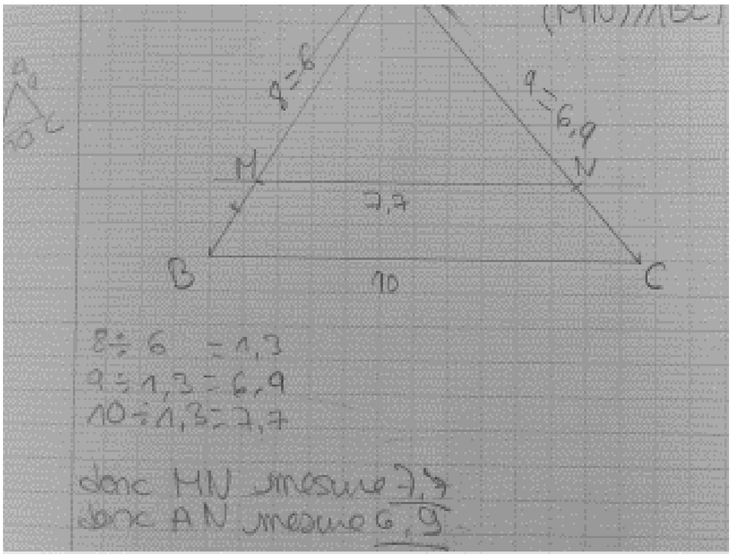
Tracer un triangle ABC avec : AB = 8 cm, BC = 10 cm, AC = 9 cm.

Sur le segment [AB], placer le point M tel que AM = 6 cm.

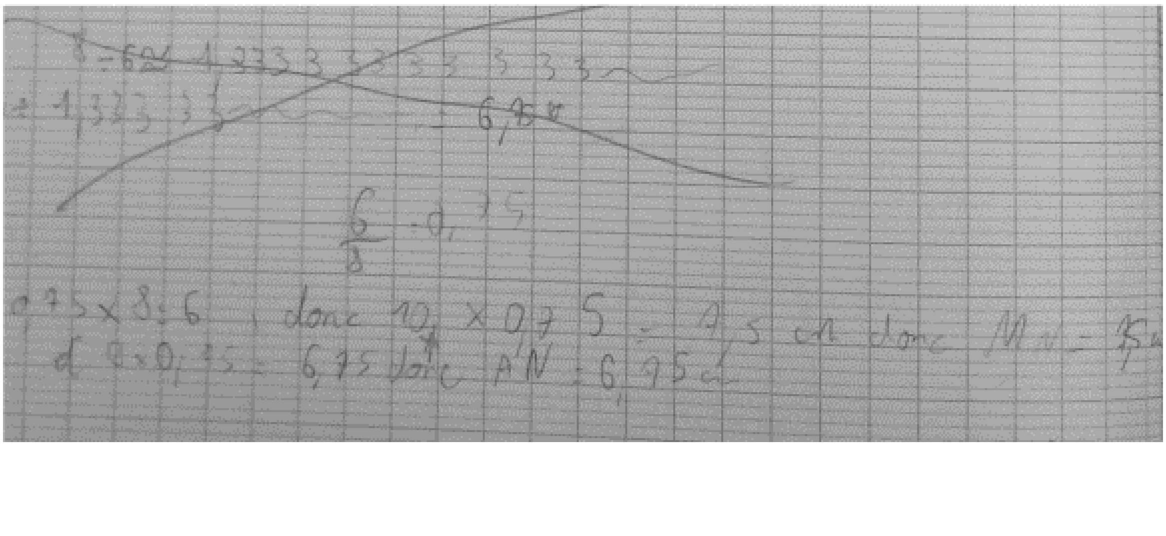
Tracer la parallèle à (BC) passant par M. Elle coupe [AC] en N.

Calculer les longueurs MN et AN.

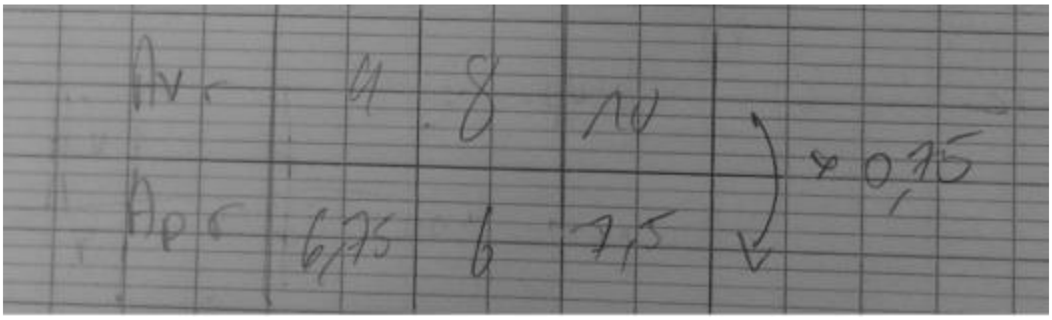
Faire tracer une figure en vraie grandeur peut permettre aux élèves de mesurer les longueurs.
Ceux qui ne font que des mesures ne trouvent pas tous les mêmes résultats à cause de l'imprécision des tracés : pour une longueur égale à 6,75 cm, il y a un doute.
Ceux qui font des calculs peuvent comparer leurs résultats avec les mesures.
À ce stade, forts de leur expérience de la propriété de Thalès, quasiment tous les élèves ont l'idée de la réduction, du coefficient qui est ici décimal (0,75) ou de l'agrandissement.
Certains font d'ailleurs des calculs en arrondissant le quotient $\frac{4}{3}$ et sont confortés par les résultats de leurs mesures. Des discussions s'engagent avec ceux qui ont choisi le coefficient de réduction (décimal).



Pour certains élèves, le coefficient d'agrandissement rationnel non décimal pose problème et ils préfèrent revenir au coefficient de réduction qui est décimal.



Quelques élèves préfèrent la proportionnalité dans un tableau qui leur évite d'utiliser le vocabulaire d'agrandissement et réduction.

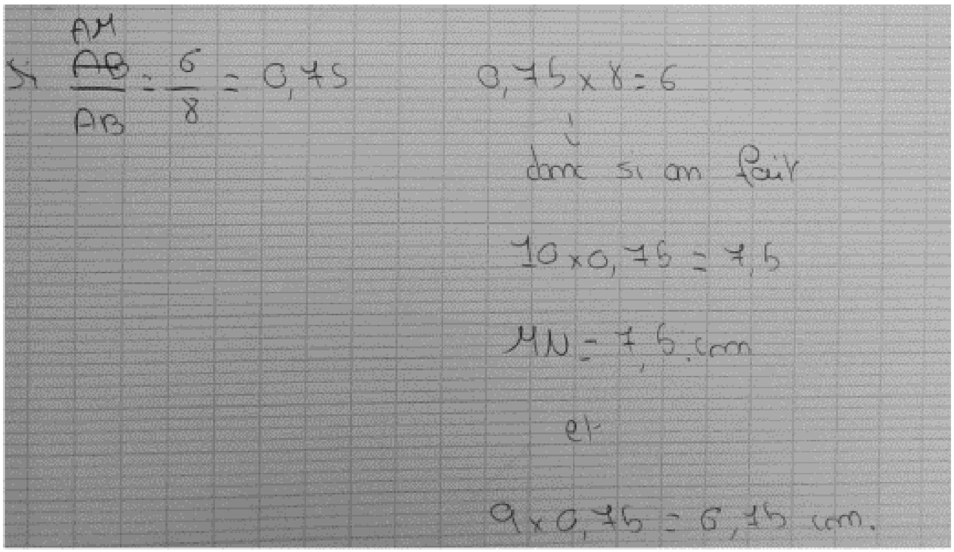


Après cette première étape, pour inciter les élèves à utiliser l'écriture fractionnaire d'un quotient, le professeur demande comment obtenir les longueurs du triangle AMN à partir de celles du triangle ABC.

Il s'agit d'un agrandissement à l'échelle $\frac{4}{3}$.

On ne passe pas encore à l'écriture avec les rapports des longueurs $\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AB}}$ mais certains élèves commencent déjà à écrire le coefficient de réduction avec des lettres. Les variables didactiques sont choisies pour que ce quotient soit rationnel non décimal.

Ceci pourra orienter les élèves vers l'écriture de « rapports » : ils sont incités à vérifier que ce coefficient, trouvé avec deux longueurs correspondantes, est égal à ceux obtenus avec d'autres longueurs correspondantes.



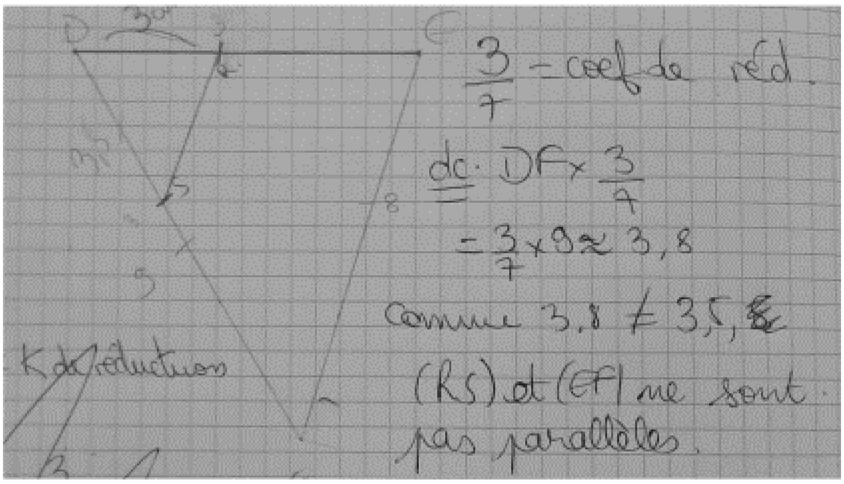
2. La consigne (suite)

Étape 2 Tracer un triangle DEF avec DE = 7 cm, EF = 9 cm et DF = 8 cm. Sur le segment [DE], placer le point R tel que DR = 3 cm. Sur le segment [DF], placer le point S tel que DS = 3,5 cm. Les droites (RS) et (EF) sont-elles parallèles ? Le prouver.

Le choix des variables didactiques est ici fondamental pour obtenir des droites semblant être parallèles.

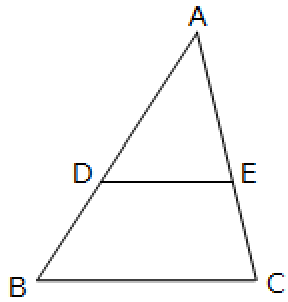
Pour prouver leur réponse, les élèves peuvent utiliser « une partie de la contraposée du futur théorème de Thalès ». Ils peuvent aussi faire une sorte de raisonnement par l'absurde.

Le but principal est ici de leur faire écrire des rapports.



3. La consigne (suite)

Étape 3 On sait que les points A, D, B et A, E, C sont alignés, que les droites (DE) et (BC) sont parallèles. Quelles conjectures pouvez-vous faire ?



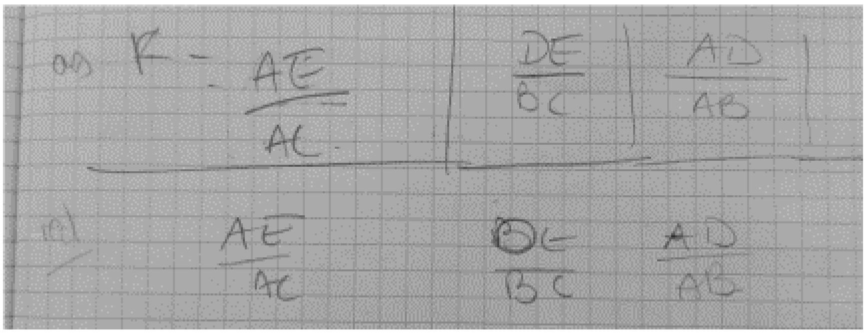
Les conjectures sont alors rapidement énoncées et justifiées :

- le triangle ADE est une réduction du triangle ABC,
- le triangle ABC est un agrandissement du triangle ADE,
- les angles des triangles sont les mêmes.

Le professeur demande alors :

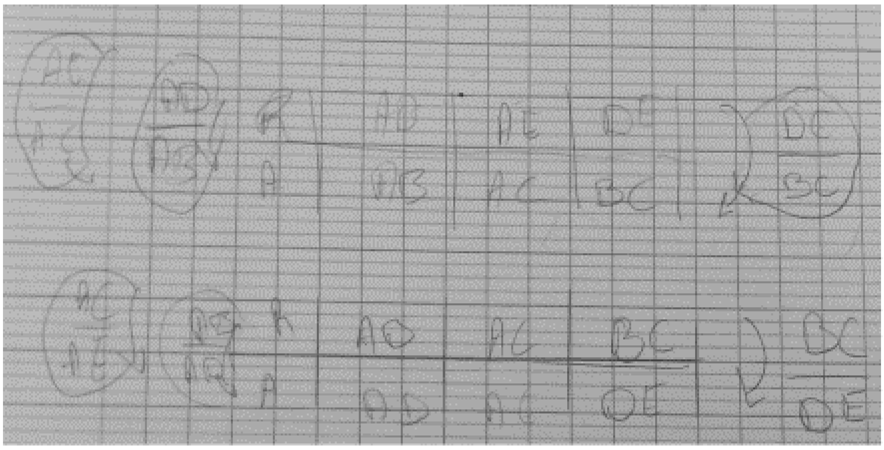
<u>Étape 3 (suite) :</u> Écrire, sans mesurer, le coefficient d'agrandissement.

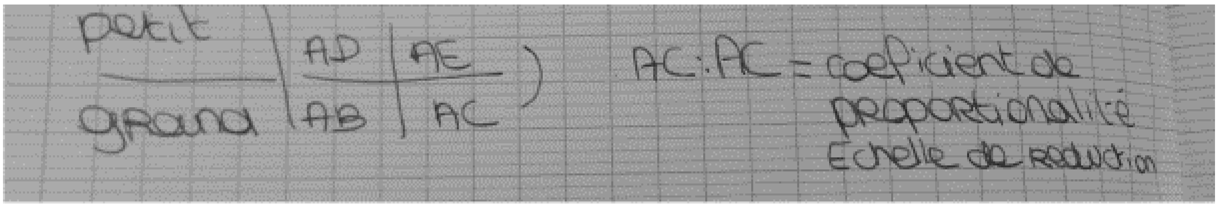
Certains élèves passent directement à l'écriture de ces rapports mais sans écrire l'égalité qui est loin d'être évidente pour eux.



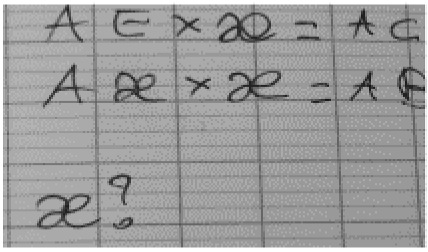
D'autres ont besoin du tableau pour se repérer et fournissent ainsi une méthode de recherche à ceux qui ne trouvent pas ces coefficients.

Avec parfois quelques imprécisions sur les opérations…



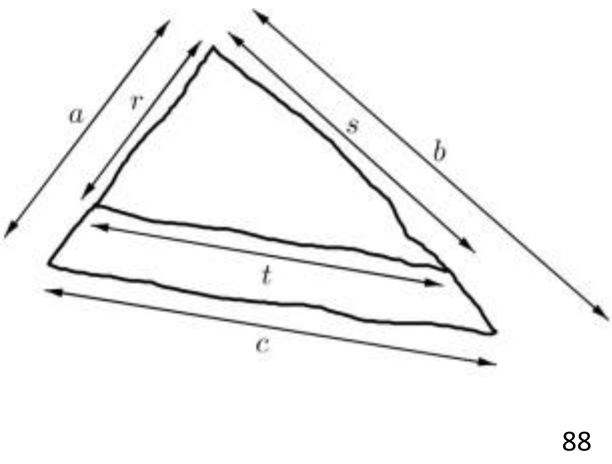


Quelques élèves ont encore du mal à reconnaître une multiplication à trou.



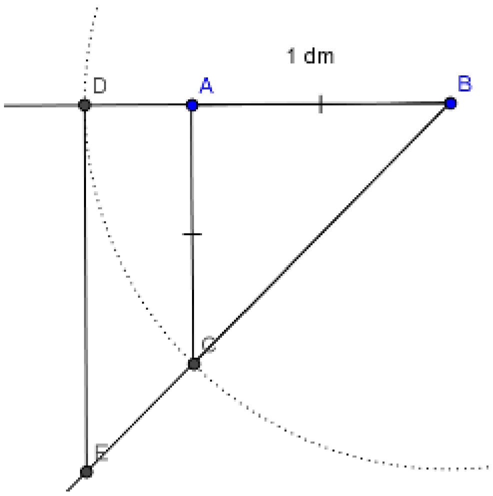
Un seul rapport est obtenu sur certains cahiers, les trois sont parfois proposés mais aucun élève ne passe à l'égalité des trois directement.

Pour conclure, en présentant aux élèves la figure ci-contre et en précisant que les lettres représentent ici les longueurs des côtés, le professeur demande d'écrire de plusieurs façons les coefficients d'agrandissement et de réduction.



Ce travail pourra être complété en troisième par la situation suivante qui permet d'aborder le cas de coefficients non rationnels.

Tracer un triangle isocèle ABC, rectangle en A tel que AB = AC = 1 dm. Sur la demi-droite [BA), placer un point D tel que BD = BC. La perpendiculaire en D à (BA) coupe (BC) en E. Quelle est la mesure de BE ?



Les rapports valent alors $\sqrt{2}$ ou $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

IV. Agrandissement d'une photo, vers l'alignement (aspect graphique)

Avertissement : cette situation peut difficilement être traitée sans avoir fait le début du parcours, au moins jusqu'à la situation 2 de Thalès.

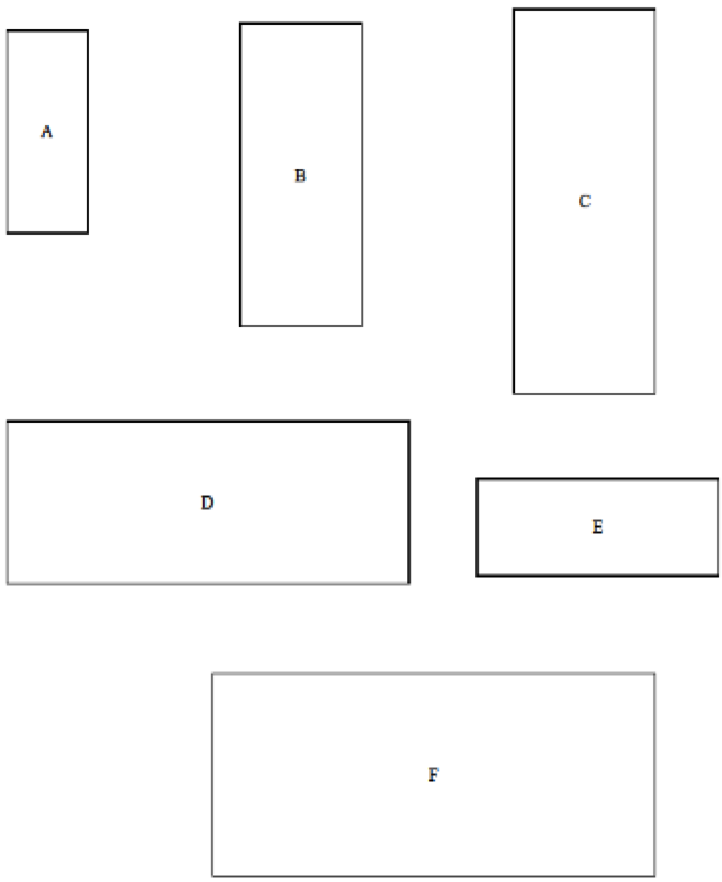
La consigne

Étape 1

Découper soigneusement les 6 rectangles (ou photos) de la feuille distribuée par le professeur. **Les dimensions des rectangles ne sont pas marquées.**

Comment sans aucun calcul ni aucune mesure, trouver quels sont les rectangles qui sont des agrandissements du plus petit ?

Voir document élève dans un fichier annexe.



Le but de la situation 3 est d’arriver à la représentation graphique de la largeur de la photo en fonction de sa longueur sans formaliser davantage la fonction.

Les élèves doivent trouver un critère permettant de discriminer les agrandissements : il est attendu qu'ils empilent les rectangles, le critère cherché étant l'alignement des sommets. Il est à noter que, à ce stade, les élèves auront déjà une expérience de « découpages et empilements » avec la première situation de la deuxième partie (la propriété de Thalès).

Cela revient donc à se convaincre que :

- si les points sont alignés, alors les dimensions sont proportionnelles ;
- si les points ne sont pas alignés alors les dimensions ne sont pas proportionnelles (contraposée de la réciproque de la première implication).

Autrement dit de l'équivalence entre l'alignement et la proportionnalité des dimensions.

Il y a « deux proportionnalités » : la proportionnalité entre les dimensions de la photo initiale et celles de la photo agrandie qui a été étudiée dans les deux premières situations et la proportionnalité entre les longueurs et largeurs des photos agrandies qui est plus particulièrement mise en évidence par l'empilement des rectangles dans cette situation 3.

Les dimensions des rectangles (non données aux élèves !) sont : (A) 5 cm par 2 cm ; (B) 7,5 par 3 ; (C) 10 par 4 ; (D) 11 par 5 ; (E) 6 par 2,4 et (F) 9,5 par 3,5.
Il y a trois agrandissements du rectangle (A) qui sont (B), (C) et (E), de sorte que les élèves puissent voir au moins quatre points alignés avec l'origine en plaçant astucieusement les rectangles.
Les rectangles (D) et (F) n'ont pas des dimensions proportionnelles à celle de (A) mais les écarts ne sont pas trop grands de façon à ce qu'on ne puisse pas s'en apercevoir sans placer les rectangles de cette façon. Cependant, l'écart est suffisant pour être visible quand les rectangles sont bien placés, malgré de petites erreurs dues au découpage.

Voici des propositions des élèves.

a. Beaucoup d'élèves voient que le rectangle (C) a des dimensions doubles de celles de (A) et qu'on peut donc rentrer 4 fois le rectangle (A) dans (C). Ils sont convaincus que (C) est un bon agrandissement.

b. Ils essaient de procéder de même avec le rectangle (B) en coupant (A) en deux dans le sens de la longueur et de la largeur. Le rectangle obtenu rentre 9 fois dans le rectangle (B).

c. D'autres essaient de faire le même type de raisonnement pour le rectangle (D) : le rectangle (A) rentre 5 fois et demi dans le rectangle (D), en coupant (A) dans le sens de la largeur uniquement. Ils sont trompés par ce qui se passe avec (C) et pensent que, pour trouver un agrandissement, il suffit de trouver un lien entre l'aire de chaque rectangle et l'aire de (A).
D'autres élèves ne sont pas d'accord avec eux, ce qui entraîne un débat dans la classe.
Le professeur peut expliquer qu'il s'agit d'une fausse piste en montrant des rectangles dont l'aire est la même, ou le double ou le triple de celle du rectangle de départ et qui n'en sont visiblement pas des agrandissements.

d. Pensant au fait qu'avec certains logiciels, il faut tirer sur le coin de la photo pour ne pas la déformer, certains élèves tracent une diagonale des rectangles et superposent les rectangles à partir d'un des sommets d'où part cette diagonale.

e. Quelques-uns tentent d'empiler les rectangles par leur centre (en utilisant la pointe de leur compas pour « piquer » les rectangles au centre !).

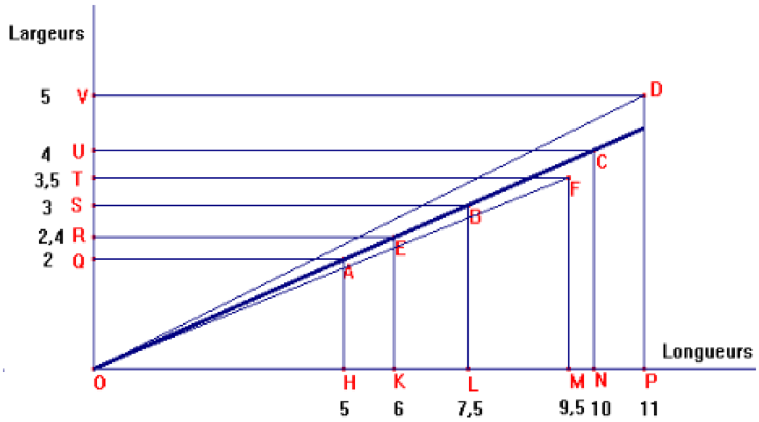
Dans cette situation 3, les élèves ont six rectangles, quatre ont des dimensions proportionnelles : ce qu'ils remarquent quand ils les empilent, ce sont les sommets qui ne sont pas alignés avec les autres. Ils envisagent facilement la proportionnalité dans le cas d'un alignement ou la non proportionnalité dans le cas contraire.

<u>La consigne (suite)</u>

<u>Étape 2 :</u> le début de cette situation 3 était consacré à l'action, les élèves ont trouvé une méthode pour décider des « bons et mauvais » agrandissements, superposer les rectangles.
Il s'agit maintenant de formuler des conjectures puis de se convaincre de leur validité :
- si les points sont alignés alors les dimensions sont proportionnelles ;
- si les points ne sont pas alignés alors les dimensions ne sont pas proportionnelles.

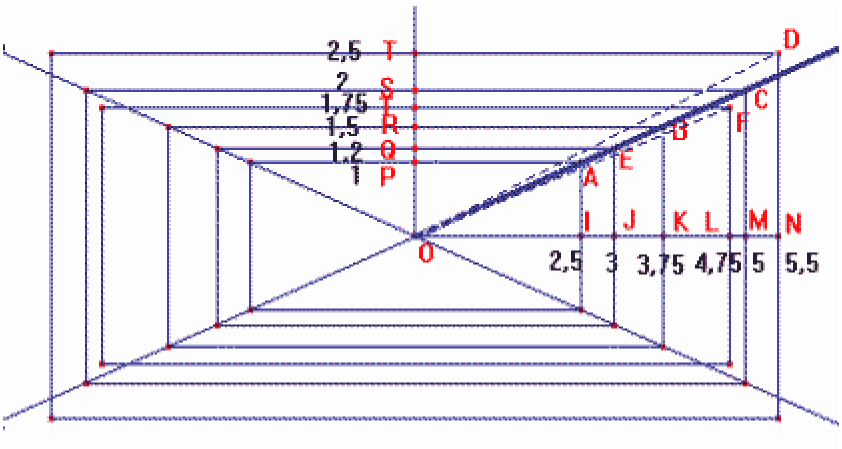
Le professeur donne maintenant les dimensions des rectangles et demande aux élèves de dessiner les rectangles superposés.

On obtient un dessin comme celui-ci.



Des élèves disent que ça ressemble à un graphique. Il peut arriver que l'idée de graphique n'apparaisse pas dans certaines classes. Le professeur peut la suggérer.

Ce que l'on obtient en empilant par le centre.

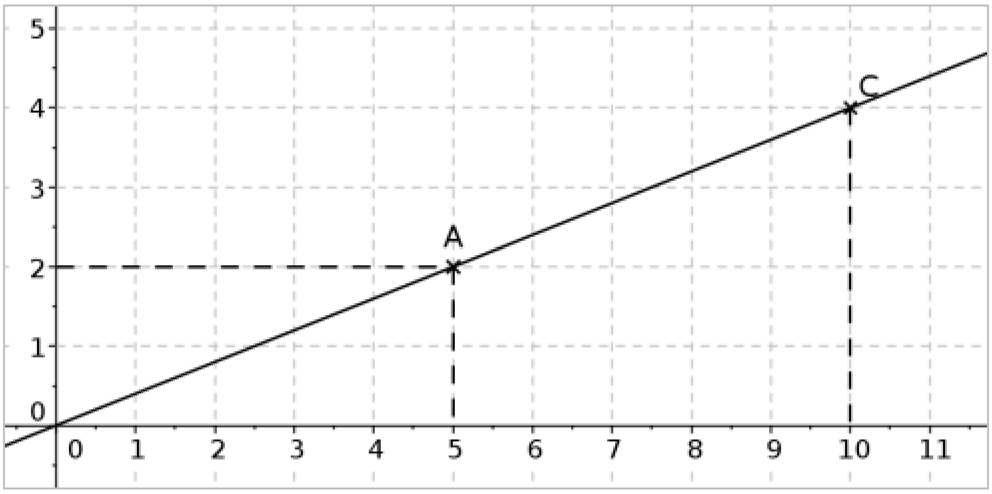


La consigne (suite)

Étape 3 : la propriété de Thalès étant disponible au moment où cette situation 3 est traitée, le professeur propose des éléments de preuve des conjectures. Le professeur reprend l'idée du graphique[8]. Tout d'abord, « si les points sont alignés alors les dimensions sont proportionnelles ».

[8] Si l'idée de graphique n'est pas apparue, le professeur adaptera la preuve proposée.

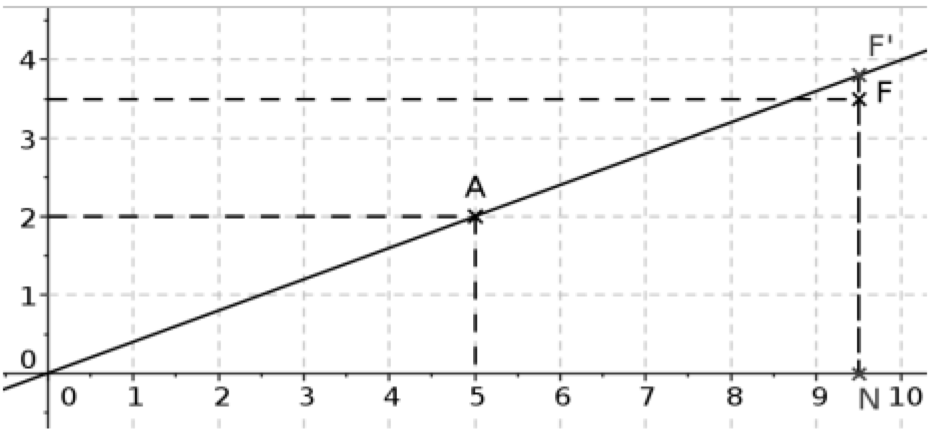
Dans un repère où est placé le point A de coordonnées (5 ; 2), les élèves doivent placer le point d'abscisse 10 aligné avec O et A. Ils calculent son ordonnée en utilisant la propriété de Thalès et donc vérifient qu'il y a bien proportionnalité.



Pour la deuxième conjecture (« si les points ne sont pas alignés alors les dimensions ne sont pas proportionnelles »), les élèves placent sur un graphique le point A (5 ; 2) et le point F de coordonnées (9,5 ; 3,5) qui n'est pas aligné avec O et A.

Le professeur leur fait alors considérer le point F' d'abscisse 9,5, aligné avec O et A et leur demande de calculer F'N.

$\frac{2}{FN'} = \frac{5}{9,5}$ donc F'N = 3,8 cm et donc $\frac{5}{9,5} \neq \frac{2}{3,5}$, il n'y a pas proportionnalité.



La consigne (suite)

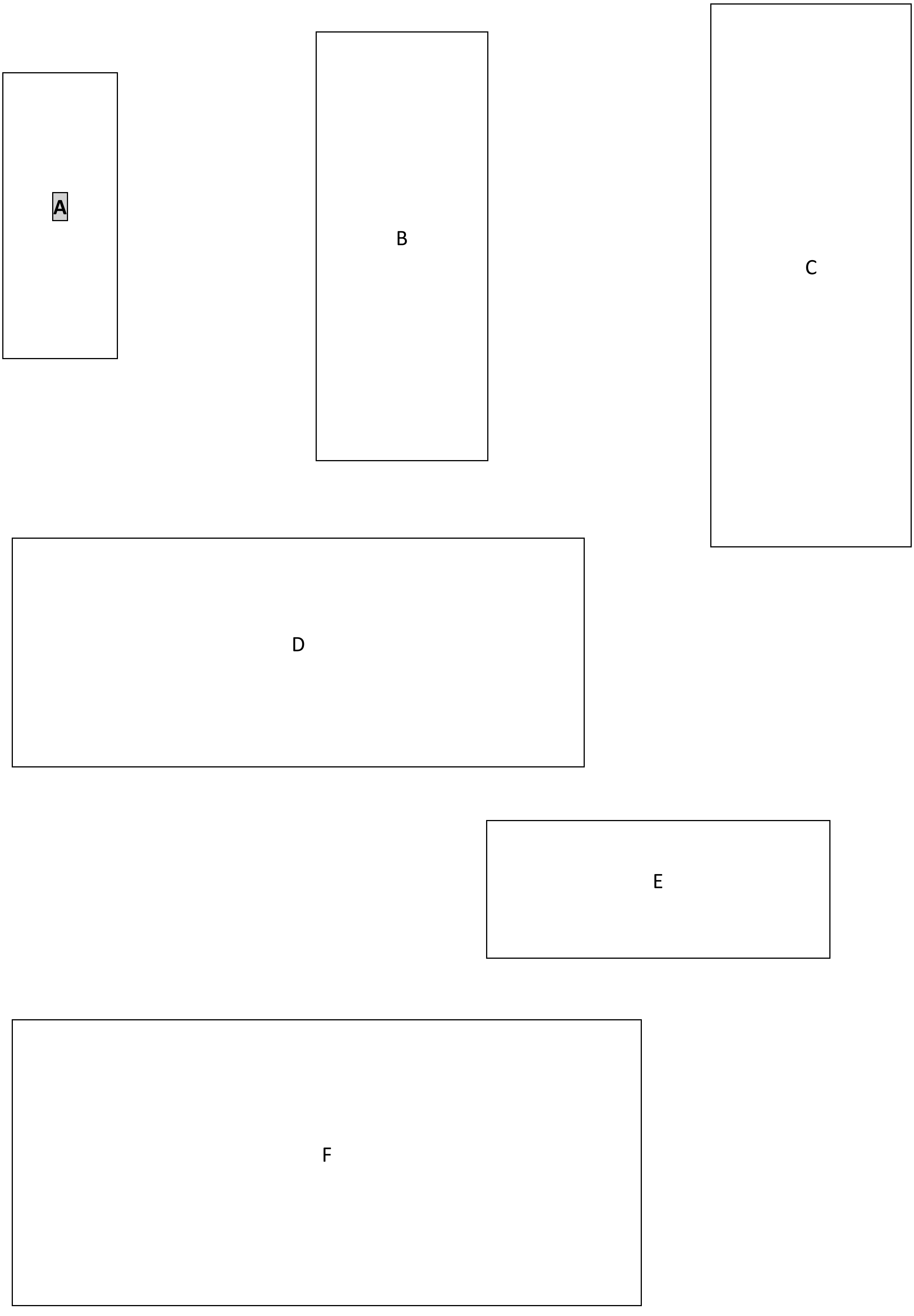
Étape 4 : pour terminer, les élèves doivent vérifier les résultats obtenus avec les rectangles empilés.

Le professeur leur demande de placer les dimensions des « bons » rectangles dans un tableau. Ils cherchent alors à savoir si c'est un tableau de proportionnalité : le but est maintenant de mettre l'accent sur la proportionnalité « largeur-longueur » de tous les « bons » rectangles avec des coefficients (2,5 ou 0,4 selon que l'on considère l'agrandissement ou la réduction) qui ne dépendent cette fois que du rectangle (A).
Le professeur fait remarquer que le rapport de proportionnalité de ce tableau n'est pas le même que celui qui a été utilisé pour le théorème de Thalès.
Les notions de coefficient directeur, de pente peuvent être évoquées !
Au final, dans cette situation, deux résultats essentiels sont dégagés, qui seront présentés aux élèves à l'aide d'exemples et que nous formulons ci-dessous pour le professeur.
x et *y* étant les dimensions du rectangle initial, *x'* et *y'* celles du rectangle agrandi :
1) si les points sont alignés alors $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$ et si les points ne sont pas alignés alors $\frac{x}{x'} \neq \frac{y}{y'}$;

2) $\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'}$ équivaut à $\frac{y}{x} = \frac{y'}{x'}$.

Ce dernier résultat, qui peut être démontré, pourra aussi être utile, par exemple pour justifier les formules de trigonométrie.
Tout est également en place pour caractériser graphiquement la proportionnalité en général.

ANNEXE :



V. Proposition de progression pour ce parcours

Avant d'aborder ce parcours, pendant le premier trimestre, il est indispensable de travailler avec les élèves la proportionnalité dans son ensemble et, en particulier, les procédures de calculs d'une quatrième proportionnelle.

En effet, elle est tout d'abord un outil essentiel dans les situations proposées, avant de redevenir objet d'étude avec sa caractérisation graphique.

Les propriétés des parallélogrammes et des angles alternes-internes doivent également être vues : elles permettent de justifier quelques cas particuliers pour la propriété de Thalès.

Le parcours débutera ensuite, au deuxième trimestre, par les situations 1 et 2 sur le thème de l'agrandissement d'une photo exposées dans la première partie.

Voici la progression sous forme synthétique.

Premier trimestre	Procédures de calcul d'une quatrième proportionnelle
	Propriétés des parallélogrammes et angles alternes-internes
Deuxième trimestre	Agrandissement d'une photo, situations 1 et 2
	Agrandissements et réductions de figures en général
	La propriété de Thalès, situations 1 et 2
	La propriété de Thalès, situation 3
Troisième trimestre	Agrandissement d'une photo, situation 3

Ce parcours permet une réelle activité mathématique des élèves, motivante, à la fois expérimentale et théorique : un véritable parcours d'étude et de recherche. Il donne du sens à la notion d'agrandissement-réduction et amène naturellement à s’intéresser au cas des triangles et donc à la propriété de Thalès.

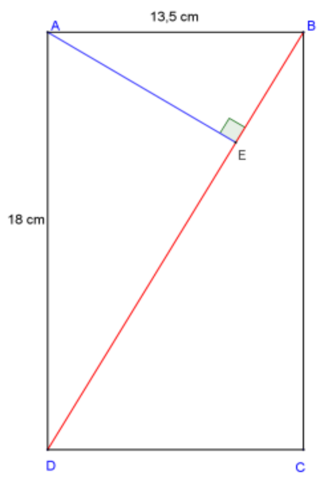
Il s'intègre parfaitement dans une progression de quatrième en mettant en œuvre la proportionnalité, à la fois outil et objet d'étude, les écritures fractionnaires.

Il se prolonge bien sûr en troisième avec le théorème de Thalès, dans sa forme classique, la trigonométrie, la fonction linéaire…

LES TROIS TRIANGLES RECTANGLES

Problème posé

La situation suivante est basée sur un rectangle de dimensions données à découper en trois triangles suivant les lignes marquées. Le but est de calculer les longueurs de tous les côtés des trois triangles.



Niveau : 3ème

Objectifs possibles

- Utilisation de la proportionnalité.
- Notion d'agrandissement et de réduction.
- Réinvestissement des propriétés de Thalès et de Pythagore.

Prolongements

- Effet de l'agrandissement ou de la réduction sur les aires
- Vers la trigonométrie.

Notions utilisées

- Théorème de Pythagore.
- Triangles semblables.
- Théorème de Thalès.
- Proportionnalité avec les différentes procédures.
- Coefficient de proportionnalité.

Matériel

- Ciseaux, compas et colle pour les élèves.
- Vidéoprojecteur et tableur pour le professeur.

Temps de mise en œuvre en classe : 2h

Les trois triangles rectangles

La situation suivante peut être utilisée en troisième, après avoir vu la propriété de Thalès. Elle a pour but de travailler les notions de proportionnalité, angles, propriétés de Thalès et de Pythagore, les calculs d'aires. C'est essentiellement une situation de réinvestissement. Elle permet également d'introduire (de faire découvrir) que si le rapport de proportionnalité entre les longueurs est k alors le rapport entre les aires est k^2 et de prolonger par la trigonométrie.

La compétence « Chercher » est particulièrement sollicitée dans cette situation, les élèves doivent extraire de la figure proposée les informations utiles, les reformuler, les organiser, les confronter à leurs connaissances, pour y voir les théorèmes de Thalès et de Pythagore qui vont leur permettre de calculer les dimensions manquantes.

I. Déroulement en classe

1. Étape 1 :

La figure ci-contre est projetée au tableau en couleur.

Il est conseillé de fournir aux élèves du papier quadrillé à petits carreaux pour faire le tracé afin de gagner du temps.

Il est possible de distribuer la consigne la veille pour demander aux élèves de faire le tracé et le découpage à la maison.

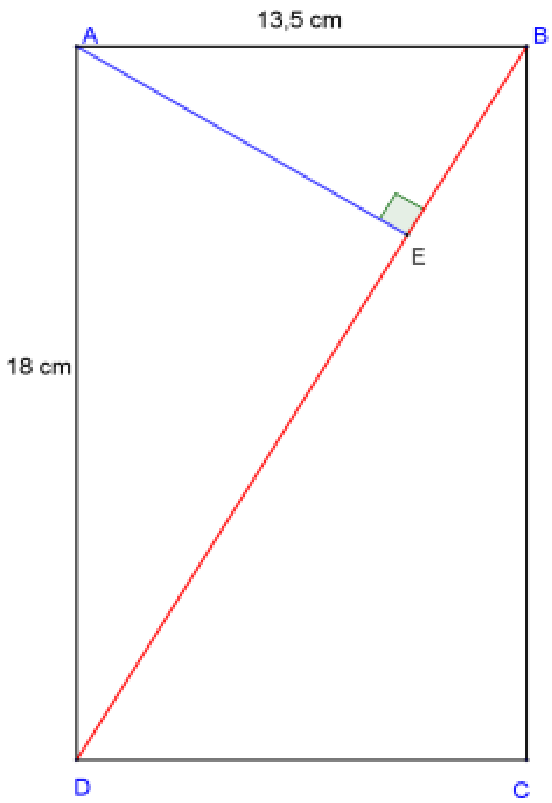


fig 1

Consigne :

<table><tr><td>
<u>Étape 1 :</u>
Construire un rectangle de 13,5 cm sur 18 cm.
Réaliser les tracés indiqués sur la figure (fig 1) en utilisant un feutre rouge épais et un feutre bleu épais. Repasser avec un feutre noir épais, les longueurs du rectangle (les côtés de 18 cm) et avec un feutre vert épais les largeurs du rectangle (les côtés de 13,5 cm).
Vous repasserez ces segments en couleur des deux côtés de la feuille.
</td></tr></table>

Comme nous l'avons indiqué ci-dessus, nous demandons de repasser au feutre de couleur l'hypoténuse et la hauteur du grand triangle en débordant des deux côtés du trait pour que, après découpage le long de ces traits, la couleur reste des deux côtés permettant aux élèves de retrouver les longueurs qui doivent être égales. D'autre part, nous demandons de repasser des deux côtés du papier, y compris les côtés du rectangle car, comme nous l'avons vu plus haut, soit le grand triangle, soit les deux petits devront être retournés pour obtenir la configuration de Thalès. Ceci permet aux élèves de retrouver alors les données.

2. Étape 2 :

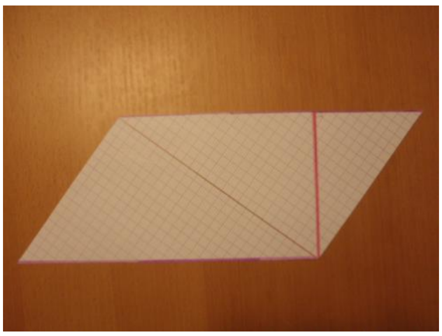
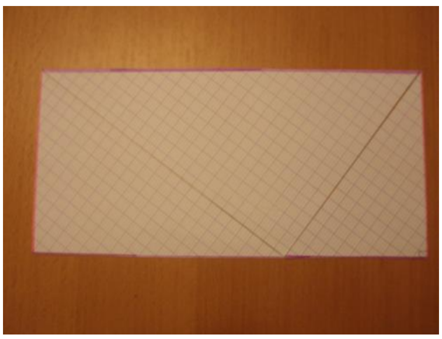
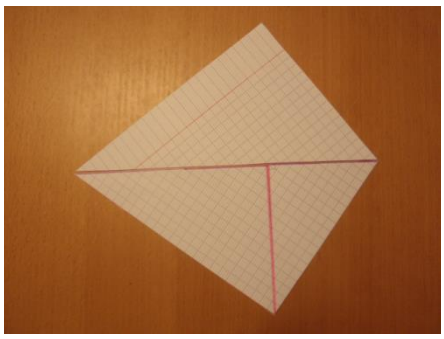
Que pensez-vous des trois triangles obtenus par découpage ? Calculer toutes leurs dimensions.

Ce travail peut se faire individuellement, à deux ou en groupe.

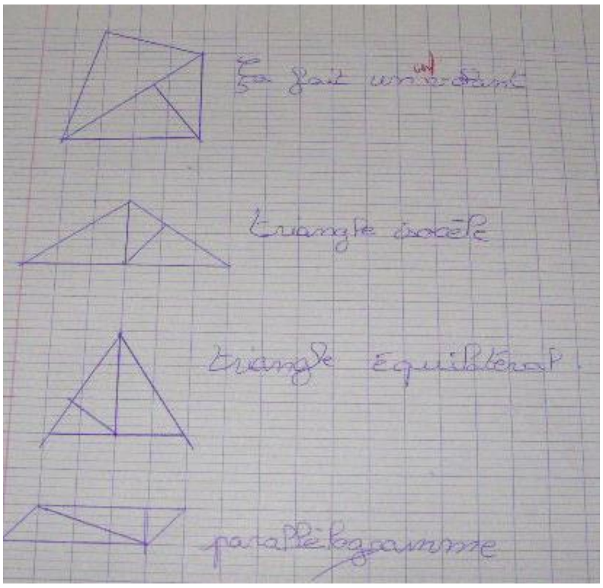
Cette étape se divise en deux parties.

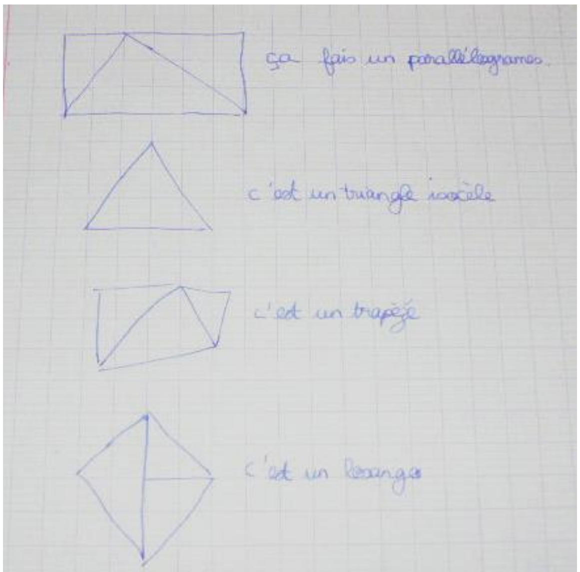
II. Première partie : le jeu avec les triangles

Certains élèves jouent avec les triangles, ils les assemblent afin d'obtenir d'autres figures, un parallélogramme, un rectangle, un cerf-volant.

Ils cherchent toutes les possibilités et réalisent des schémas afin d'être sûrs de tous les restituer lors de la mise en commun.

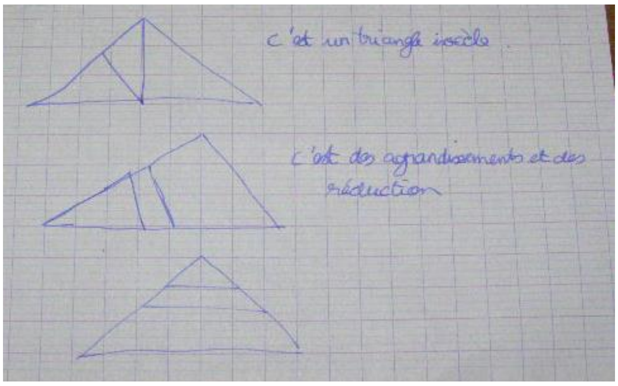


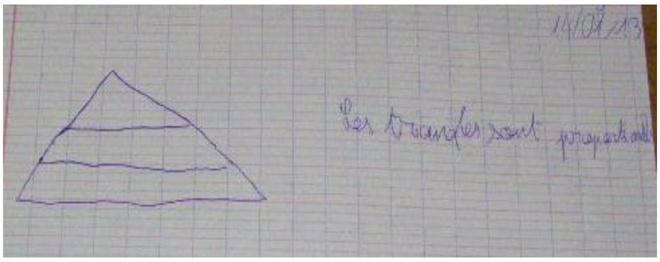


Parmi les puzzles réalisés par les élèves, deux sont utiles car ils pourront en aiguiller certains (peu nombreux) vers une solution du problème utilisant les aires après avoir calculé l'hypoténuse du grand triangle et sans utiliser le théorème de Thalès. Certes, on peut trouver directement la solution par les aires à partir de la figure de départ car l'aire du rectangle est connue et vaut le double de l'aire du triangle rectangle, ce qui permet de calculer sa hauteur connaissant l'hypoténuse. Les élèves n'y pensent pas. Tandis que, après avoir réalisé le nouveau rectangle ou le parallélogramme de même aire que le rectangle initial, ils voient que la longueur du rectangle est connue et qu'ils cherchent sa largeur ou bien c'est le côté du parallélogramme qui est connu et ils cherchent sa hauteur.

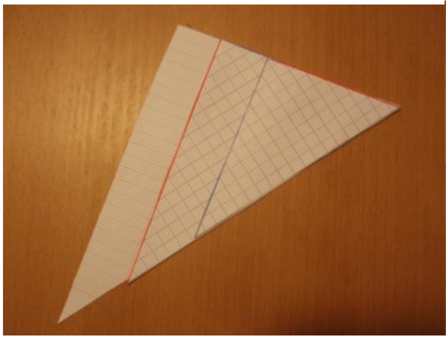
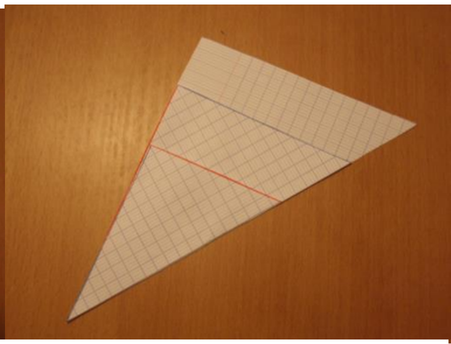
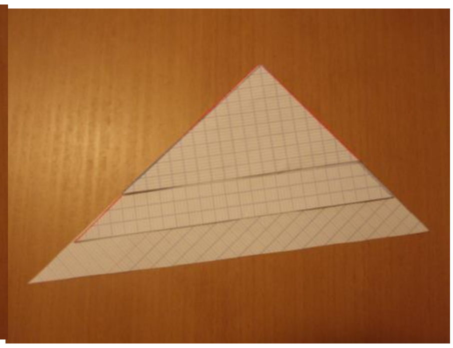
L'intérêt principal de cette situation est de faire utiliser la proportionnalité, donc le professeur donne des coups de pouce plutôt dans ce sens. Mais si certains élèves pensent aux aires, le professeur pourra valoriser leur intuition à la fin de la mise en commun, quand l'autre solution aura été explicitée.

En cherchant à disposer les triangles, les élèves ont l'idée de les superposer. Ainsi, ils arrivent à parler de proportionnalité ou d'agrandissement et de réduction.

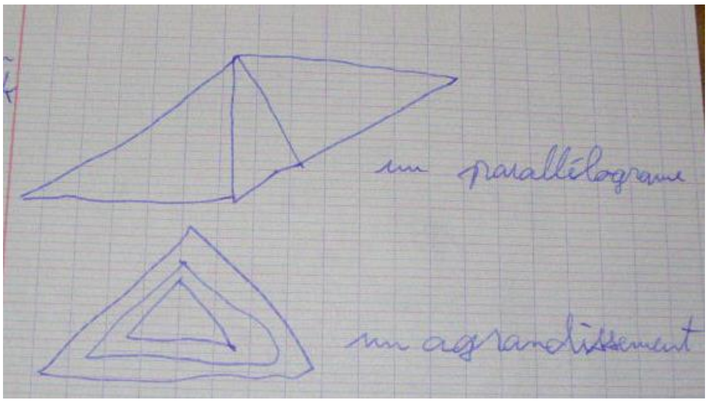


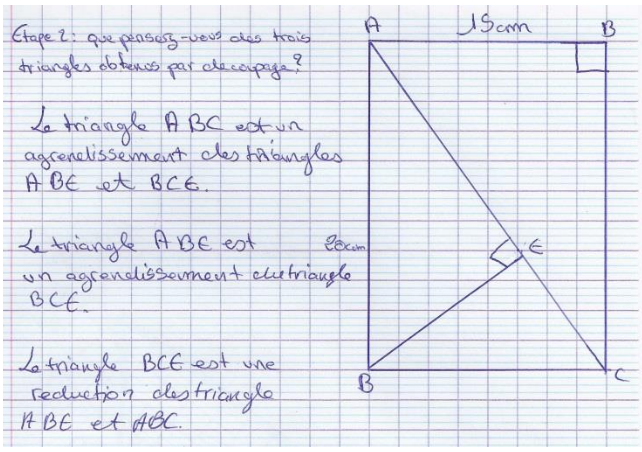


Ils trouvent quatre façons de superposer les triangles, par les angles droits, par un des angles aigus ou en essayant de centrer les deux petits triangles sur le grand, mais cette dernière proposition est rare.

Certains ont du mal à exprimer que les mesures des côtés des triangles sont proportionnelles ; ils se contentent de dire « agrandissement », « réduction » ou « les triangles sont proportionnels ».

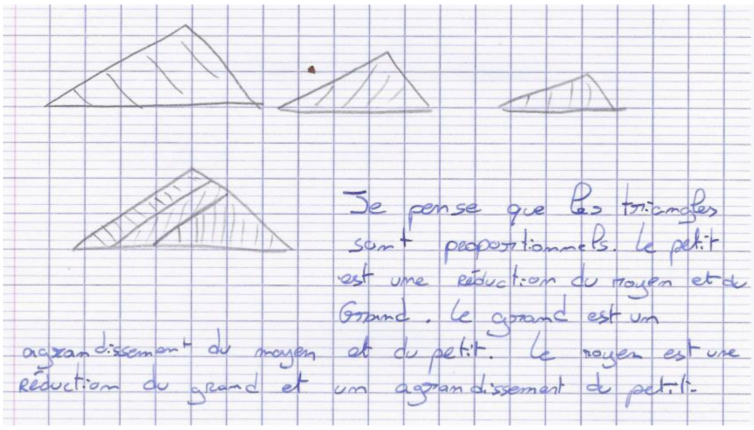



Etape 2 : que pensez-vous des trois triangles obtenus par découpage ?

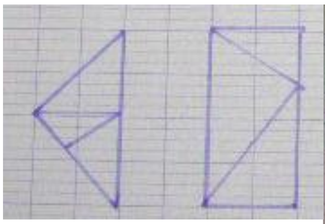
Le triangle ABC est un agrandissement des triangles ABE et BCE.

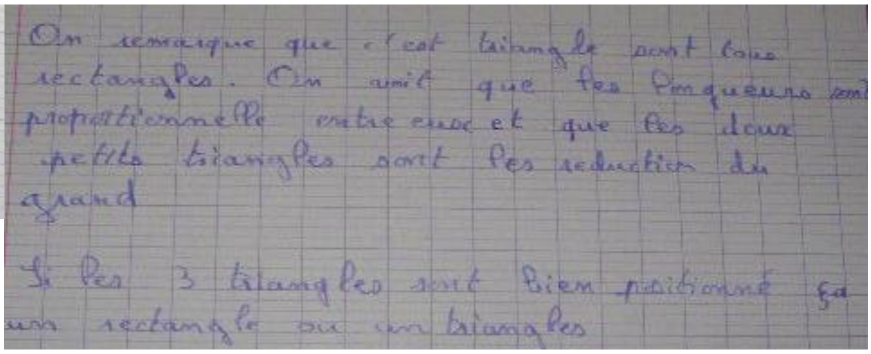
Le triangle ABE est un agrandissement du triangle BCE.

Le triangle BCE est une reduction des triangle ABE et ABC.


Je pense que les triangles sont proportionnels. Le petit est une réduction du moyen et du Grand. Le grand est un agrandissement du moyen et du petit. Le moyen est une réduction du grand et un agrandissement du petit.

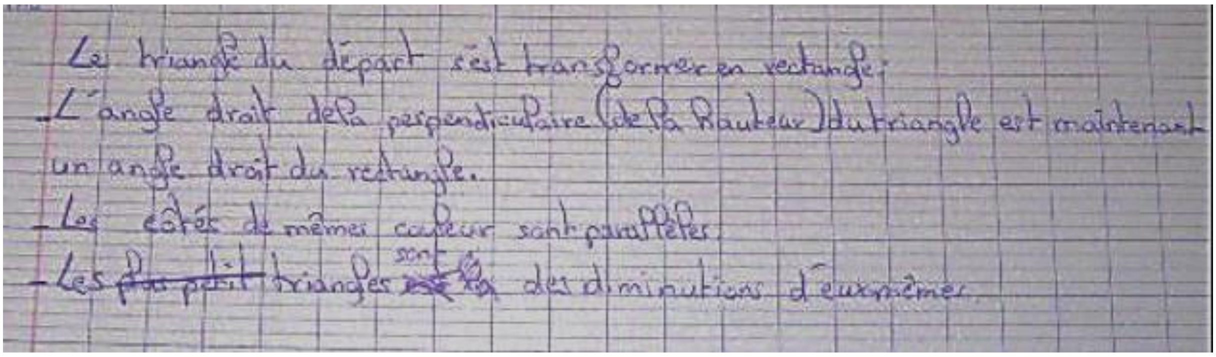
D’autres élèves évoquent correctement la proportionnalité des côtés.




On remarque que c'est triangle sont tous rectangles. On voit que les longueurs sont proportionnelle entre eux et que les deux petits triangles sont les reduction du grand

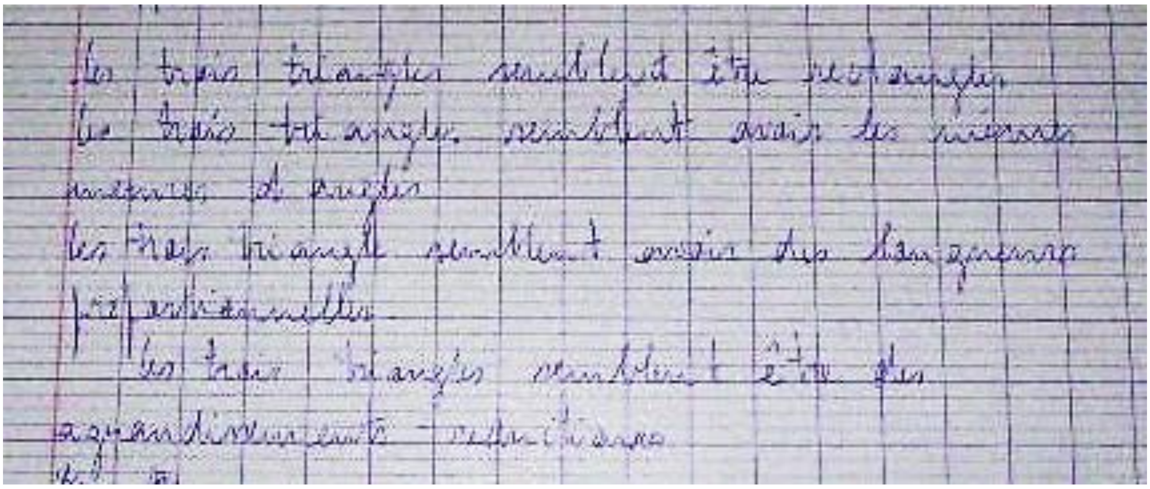
Si les 3 triangles sont bien positionné ça un rectangle ou un triangles

Certains élèves parlent de droites parallèles.


Le triangle du départ s'est transformer en rectangle.

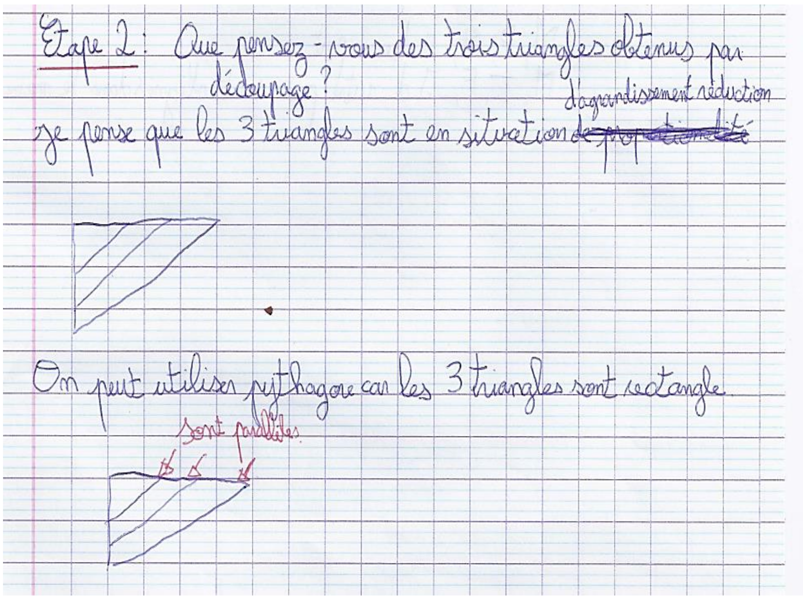
- L'angle droit de la perpendiculaire (de la hauteur) du triangle est maintenant un angle droit du rectangle.
- Les côtés de mêmes couleur sont parallèles.
- Les ~~plus petit~~ triangles sont ~~est la~~ des diminutions d'eux-mêmes.

Certains évoquent les angles de même mesure. Cet élève va jusqu'à rédiger des conjectures.



Les trois triangles semblent être rectangles.
Les trois triangles semblent avoir les mêmes ... angles
Les trois triangles semblent avoir des ... proportionnelles.
Les trois triangles semblent être des agrandissements - réductions.

Quelques-uns évoquent le théorème de Pythagore.



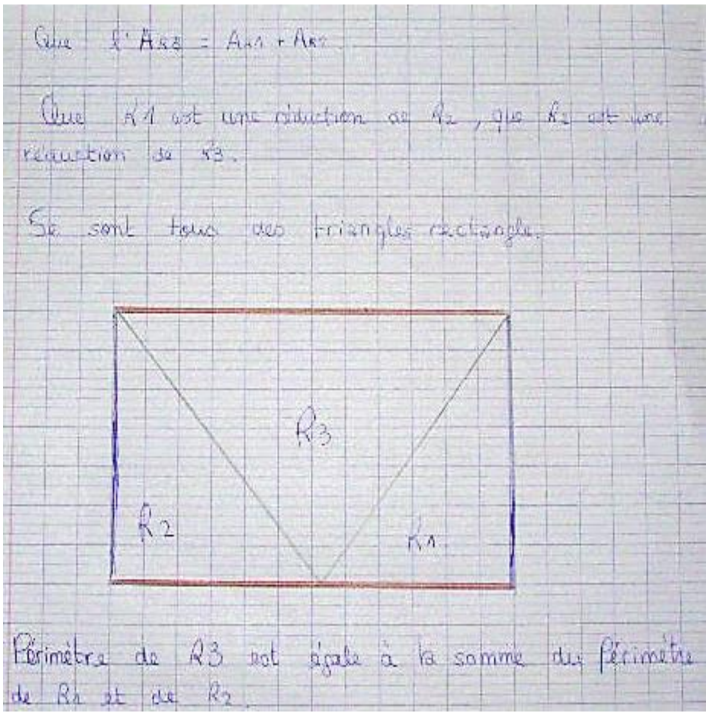
Etape 2 : Que pensez-vous des trois triangles obtenus par découpage ?

Je pense que les 3 triangles sont en situation ~~de proportionnalité~~ d'agrandissement réduction

On peut utiliser pythagore car les 3 triangles sont rectangle

sont parallèles

D'autres tentent de parler d'aire et de périmètre sans maîtriser ces deux notions ce qui conduit à des raisonnements erronés.



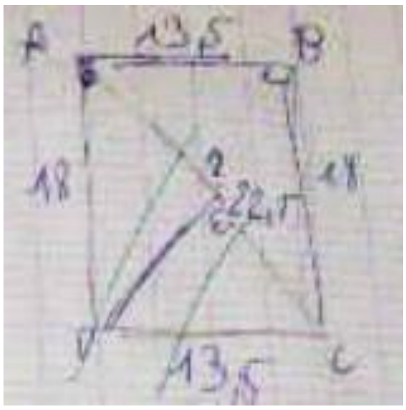
La mise en commun se fait en classe entière à l'aide du tableau numérique ou d'un vidéoprojecteur où le professeur présente les photos qu'il a réalisées de leurs travaux. Ainsi, les élèves peuvent mieux expliquer ce qu'ils ont fait au reste de la classe.

Dans le cas des trois triangles superposés sur un angle, le professeur sollicite les élèves pour prouver le parallélisme des droites en travaillant sur les angles. Le professeur propose de revenir à la figure initiale et, à l'oral, demande aux élèves de trouver des angles égaux. Il démontre ces égalités, avec la participation des élèves.

III. Deuxième partie : calcul des mesures des côtés

Le but de cette deuxième partie est de calculer toutes les longueurs en utilisant les propriétés de Thalès et de Pythagore.

Beaucoup d'élèves commencent avec le théorème de Pythagore pour calculer la longueur de l'hypoténuse du grand triangle.



Première difficulté : les élèves sont ensuite bloqués et n'arrivent pas à calculer les autres longueurs. On ne les laisse pas chercher trop longtemps. Le professeur intervient pour leur demander pourquoi ils n'utilisent pas les triangles superposés, voici leurs réponses :

- certains disent qu'ils ne comprennent pas comment obtenir cette configuration car il faut retourner l'un des triangles ;
- d'autres n'arrivent pas à retrouver les valeurs 13,5 cm et 18 cm.

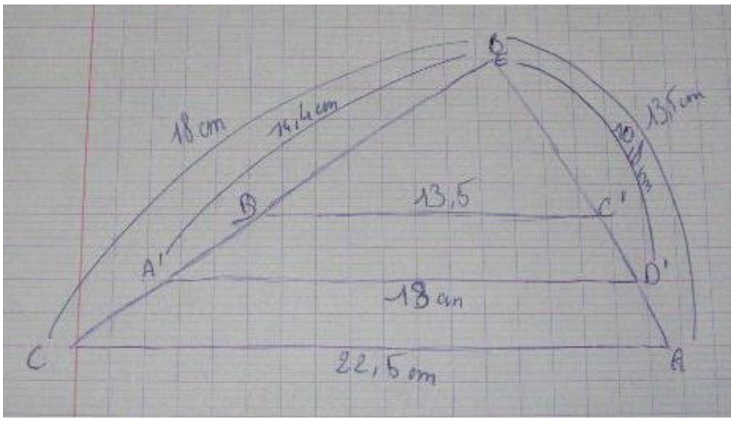
Le fait de mettre des couleurs sur tous les côtés de la figure initiale et recto verso diminue beaucoup ces deux écueils.

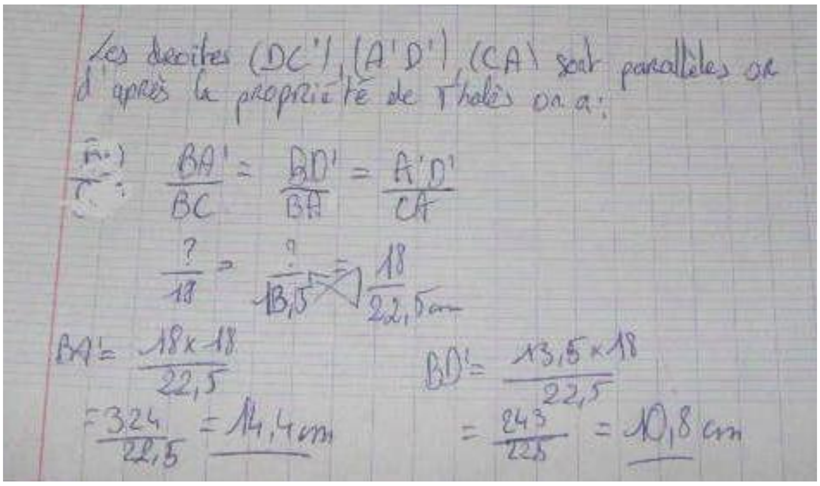
Le professeur peut alors représenter les triangles superposés au tableau (n'importe laquelle des trois configurations) et procéder à une mise en commun afin d'y placer toutes les longueurs connues.
Une fois cette difficulté levée, les élèves se mettent à calculer.

Deuxième difficulté : elle vient de l'utilisation du théorème de Thalès et de la rédaction de la solution car il y a trois triangles et non deux.
Pour les élèves qui restent bloqués, le professeur peut cacher une des parallèles sur la figure du tableau.
La compétence « Chercher » est en jeu ici. Il faut décomposer ce problème en sous-problèmes pour retrouver la formulation habituelle du théorème de Thalès.
Les élèves doivent utiliser les théorèmes de Thalès et de Pythagore pour trouver les dimensions des côtés des triangles, la compétence « Raisonner » est ici sollicitée.

IV. Productions des élèves

1. Avec les trois triangles superposés





Les droites (DC'), (A'D'), (CA) sont parallèles or d'après la propriété de Thalès on a :

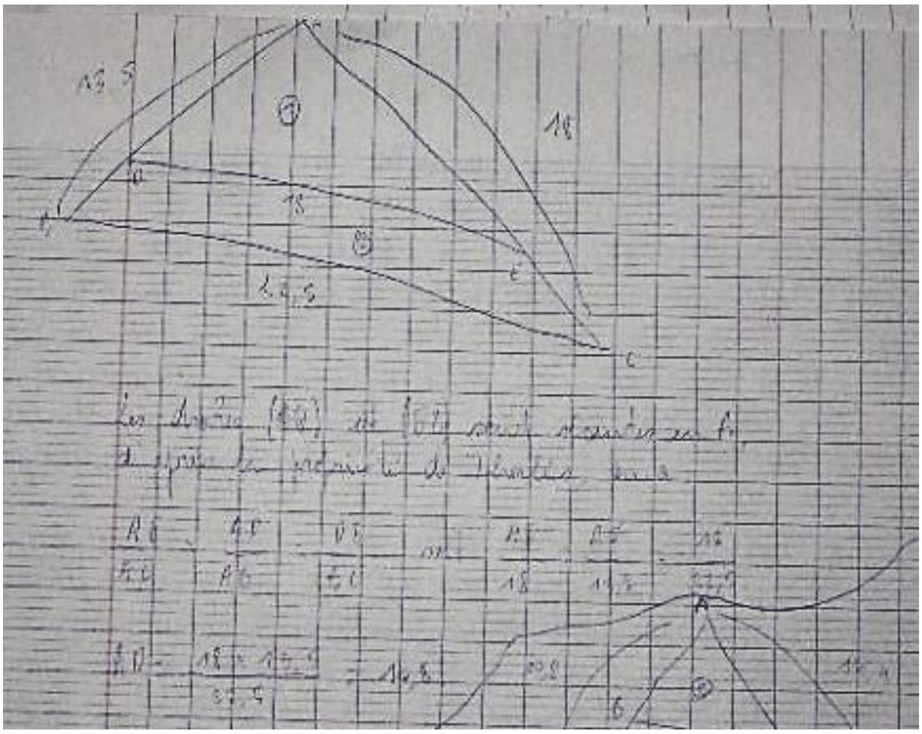
$$\frac{BA'}{BC} = \frac{BD'}{BA} = \frac{A'D'}{CA}$$

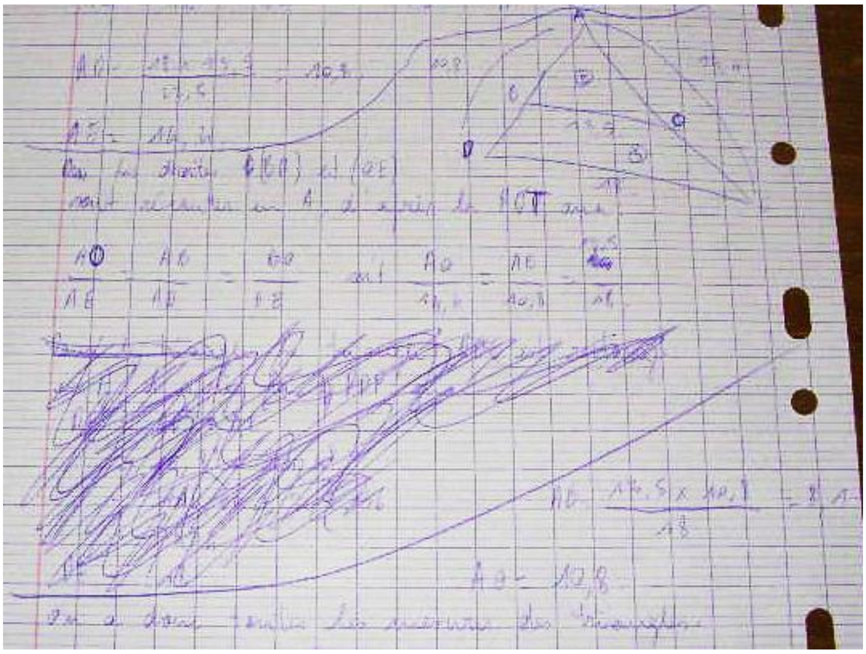
$$\frac{?}{18} = \frac{?}{13,5} = \frac{18}{22,5\text{ cm}}$$

$$BA' = \frac{18 \times 18}{22,5} = \frac{324}{22,5} = 14,4\text{ cm}$$

$$BD' = \frac{13,5 \times 18}{22,5} = \frac{243}{22,5} = 10,8\text{ cm}$$

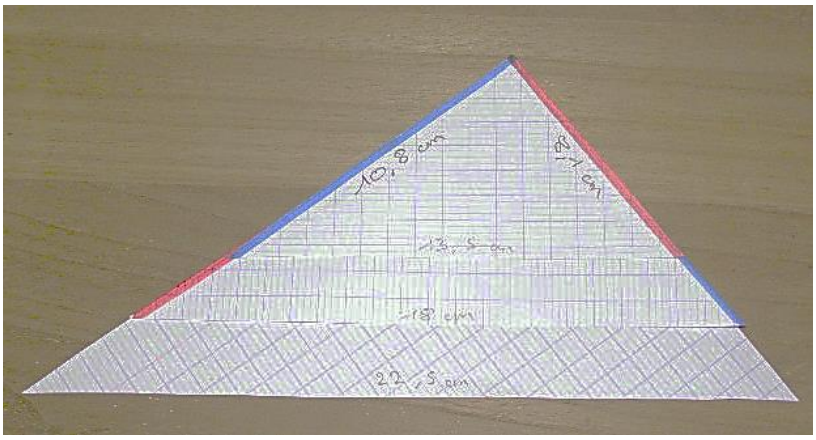
2. <u>Avec les triangles pris deux par deux</u>

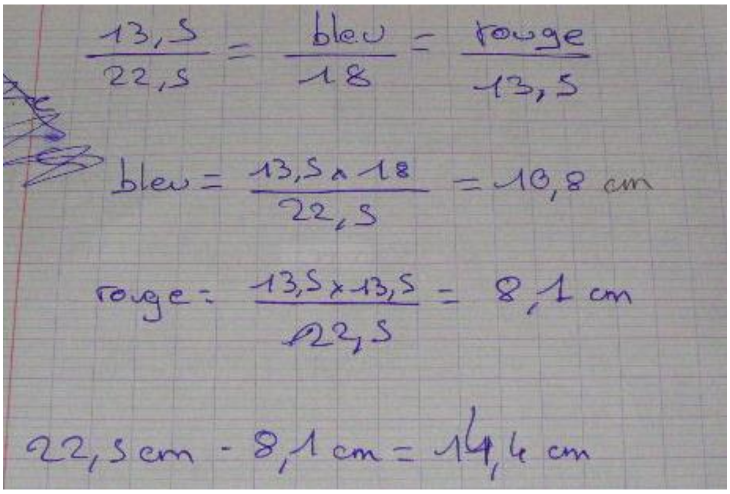




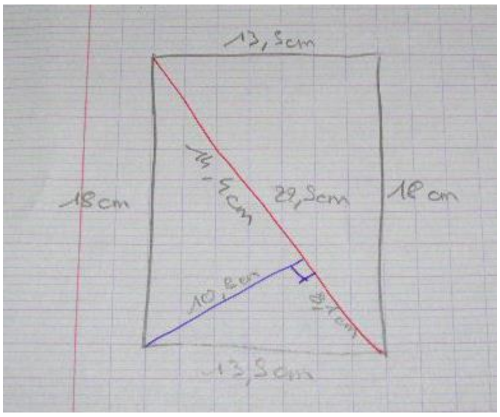
3. <u>En utilisant la notion d'agrandissement réduction</u>

L'élève a expliqué sa procédure : il calcule le coefficient de réduction entre le petit et le grand triangle et l'écrit sous forme de rapport.



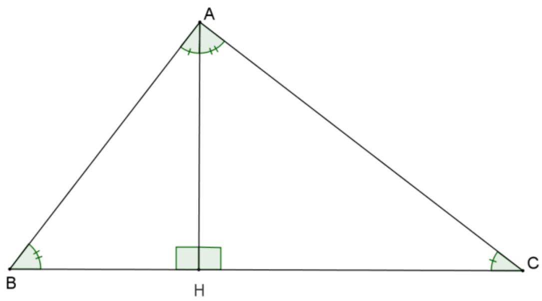


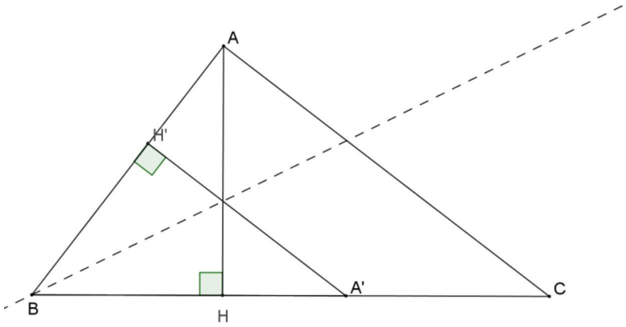
Pour calculer la dernière longueur, cet élève a procédé par soustraction en revenant à la figure initiale.



V. Étude de la figure utilisée pour l'enseignant

Cette situation est basée sur la similitude entre trois triangles : le triangle rectangle de départ et les deux triangles rectangles déterminés par sa hauteur relative à l'hypoténuse.





Les angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{HAC}$ étant tous les deux complémentaires à l'angle $\widehat{BAH}$, on a

$\widehat{ABH}$ = $\widehat{HAC}$.

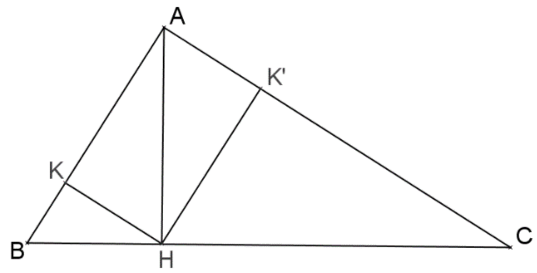
Les trois triangles rectangles ABC, ABH et AHC ont les mêmes angles. Ils sont semblables. Cette démonstration est à la portée des élèves.

On va demander aux élèves de découper les deux triangles ABH et AHC et de les poser sur un triangle isométrique au triangle ABC de départ de façon à obtenir la configuration de Thalès.

Par exemple, en faisant une rotation de centre H et d'angle 90°, les deux triangles ABH et ACH se placent en position d'homothétie. Mais la similitude devient indirecte, composée d'une similitude directe et d'une symétrie, si on veut introduire le triangle ABC. Par exemple dans la symétrie par rapport à la bissectrice de l'angle $\hat{B}$, le triangle ABH se transforme en A'BH' homothétique du triangle ABC dans l'homothétie de centre B. Donc pour avoir cette homothétie, les élèves devront retourner un des deux triangles en papier, ABH ou ABC. De même pour ACH et ABC. Nous avons vu que cela a une incidence pour le déroulement en classe.

VI. Importance de cette figure dans l'histoire et dans l'enseignement

Cette figure est très importante car elle est une des bases de la géométrie euclidienne dans le plan. Elle peut servir à démontrer le théorème de Pythagore :



[HK] et [HK'] sont les hauteurs relatives aux hypoténuses dans les triangles ABH et AHC.

Si $AH = kBC$ alors du fait de la similitude des triangles $HK = kAB$ et $HK' = kAC$

Calculons les aires des triangles.

$$A_{ABC}=\frac{1}{2}AH\times BC=\frac{1}{2}k\,BC^2 \quad ; \quad A_{AHB}=\frac{1}{2}KH\times AB=\frac{1}{2}k\,AB^2$$

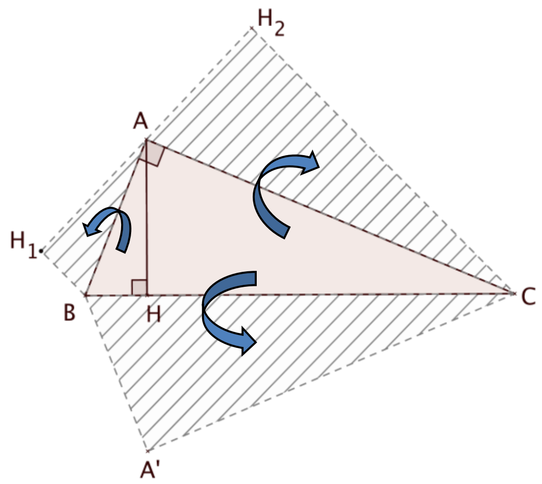
$$A_{AHC}=\frac{1}{2}K'H\times AC=\frac{1}{2}k\,AC^2$$

Or, $A_{ABC} = A_{ABH} + A_{AHC}$, donc : $k\,BC^2 = k\,AB^2 + k\,AC^2$ avec $k \neq 0$

donc $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Il est possible que le théorème de Pythagore ait été découvert ainsi dans l'Antiquité.

Cette figure montre trois triangles rectangles semblables construits sur les côtés d'un triangle rectangle ABC : $A'BC$ sur l'hypoténuse $[BC]$ et les deux autres ABH_1 et ACH_2 sur les côtés de l'angle droit.



Or, la somme des aires des deux figures construites sur les côtés de l'angle droit est égale à l'aire de la figure construite sur l'hypoténuse :

$$A_{A'BC} = A_{ABC} = A_{ABH} + A_{ACH} = A_{ABH_1} + A_{ACH_2}$$

Ceci est un cas particulier d'une généralisation du théorème de Pythagore avec trois figures semblables quelconques. Dans les Eléments, d'Euclide, la proposition 31 du livre VI énonce que « dans les triangles rectangles, la figure construite sur l'hypoténuse est équivalente à la somme des figures semblables et semblablement construites sur les côtés qui comprennent l'angle droit. ».

Ce résultat se généralise avec trois figures semblables quelconques.

Avant 1970, on démontrait le théorème de Pythagore en utilisant également la similitude de ces trois triangles et en écrivant la proportionnalité entre les mesures des côtés. Soit

$$\frac{\mathrm{BH}}{\mathrm{BA}} = \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{BC}} \quad (1)$$

donc : $BA^2 = BH \times BC$ et

$$\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{CA}} = \frac{\mathrm{CA}}{CB} \quad (2)$$

donc : $CA^2 = CH \times CB$,

Ce qui correspond à l'expression de cos $\widehat{ABH}$ dans les deux triangles ABH et ABC.

ce qui donne : $BA^2 + CA^2 = (BH + CH) \times BC = BC^2$.

En 1970, la similitude disparaît des programmes de collège et en 3ème, lors de la réforme dite « des maths modernes », apparaît un nombre réel appelé rapport de projection orthogonale (sans prononcer le mot de cosinus) d'un axe sur un autre. On admettait que le rapport de projection orthogonale d'un axe (D) sur un axe (D') est le même que le rapport de projection orthogonale de (D') sur (D). En utilisant cette fois des mesures algébriques, et en prenant la projection orthogonale de l'axe (BA) sur l'axe (BC), on obtient l'égalité (1). En prenant la projection orthogonale de l'axe (CA) sur l'axe (CB), on obtient l'égalité (2). Ces deux égalités amènent de la même façon le théorème de Pythagore.

Ainsi, pendant très longtemps, cette figure a été la base de l'enseignement de la géométrie métrique au collège. Récemment, jusqu'en 2016, le cosinus devait être enseigné en 4ème tandis que la tangente et le sinus n'étaient abordés qu'en 3ème. Ceci résultait des réformes successives des programmes qui avaient fait disparaître le mot rapport de projection orthogonale, qui n'était autre que le cosinus de l'angle des deux axes. Le cosinus restait là comme un vestige, coupé de ce qui avait motivé sa place de première ligne trigonométrique enseignée, et coupé de la figure fondamentale qui le reliait au théorème de Pythagore.

Les programmes de 2016 donnent les trois rapports trigonométriques comme un attendu de fin de cycle 4 sans précision sur le niveau où cela doit être traité. Cela permet de réunir l'enseignement de ces trois rapports en troisième.

1. Les variables didactiques pour la situation[9]

Pour éviter des calculs un peu difficiles pour des débutants, nous avons pris comme mesures des côtés du triangle ABC de départ des multiples du triplet pythagoricien 3, 4, 5.

Nous avons testé cette situation en donnant comme mesures des côtés du rectangle 15 (3×5) et 20 (4×5). Le calcul conduisait ainsi aux hypoténuses des triangles en progression arithmétique de 5 en 5 soit 15, 20, 25. Pour les côtés de l'angle droit, on trouve, 12, 16, 20 d'une part, donc en progression de 4 en 4 et 9, 12, 15, d'autre part, donc en progression de 3 en 3. Chez certains de nos collègues les élèves ont effectivement tout calculé en appliquant le théorème de Pythagore et la proportionnalité, mais d'autres ont mesuré et ont annoncé les résultats en admettant ces progressions arithmétiques comme évidentes.

Pour éviter cela il y a deux possibilités. Soit éviter encore les racines carrées mais avec le triplet pythagoricien 5, 12, 13, ce qui conduit à des mesures non décimales $\frac{144}{13}, \frac{60}{13}, \frac{25}{13}$ ou bien prendre par exemple comme mesure des côtés du rectangle 5 et 10, ce qui conduit aux mesures $5\sqrt{5}$,$4\sqrt{5}$, $2\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$. Ces calculs sont peut-être un peu difficiles et peuvent être réservés pour un devoir à la maison. Pour la situation traitée en classe, nous avons multiplié les longueurs 3 cm, 4 cm et 5 cm du triangle initial par 4,5. D'où les dimensions indiquées pour le rectangle de départ.

VII. Prolongements possibles

1. Vers la propriété de l'effet de l'agrandissement ou de la réduction sur les aires

[9] Cette situation est décrite dans *Mathématiques dynamiques*, Annie Berté, Nathan pédagogie, 1993

Comme ils ont toutes les dimensions des trois triangles, les élèves peuvent calculer leurs aires et leurs périmètres. Ils ont parlé d'agrandissement et de réduction, il est donc naturel de chercher les coefficients correspondants.

Le professeur demande aux élèves de calculer les coefficients de réduction :
du grand au moyen : 14,4/18 = 0,8 ;
du moyen au petit : 10,8/14,4 = 0,75 ;
du grand au petit : 10,8/18 = 0,6.
Puis il demande : « calculer les périmètres et les aires des trois triangles. »

Les élèves calculent les périmètres et aires du grand triangle :
périmètre : 13,5 cm + 18 cm + 22,5 cm = 54 cm
aire : 18 cm × 13,5 cm ÷ 2 = 121,5 cm^2

Puis certains pensent qu'il suffit de multiplier le périmètre et l'aire par le coefficient de réduction pour répondre.
Ils trouvent ainsi :
aire du petit triangle : 121,5 cm^2 × 0,6 = 72,9 cm^2
aire du triangle moyen : 121,5 cm^2 × 0,8 = 97,2 cm^2.

D'autres calculent à partir des dimensions des trois triangles.

Petit triangle :
périmètre : 13,5 cm + 8,1 cm + 10,8 cm = 32,4 cm
aire : 8,1 cm × 10,8 cm ÷ 2 = 43,74 cm^2
Triangle moyen :
périmètre : 10,8 cm + 14,4 cm + 18 cm = 43,2 cm
aire : 10,8 cm × 14,4 cm ÷ 2 = 77,76 cm^2

Les élèves sont étonnés des résultats sur l'aire. Ils constatent que l'aire n'est pas multipliée par le coefficient de réduction comme ils l'avaient prévu. Ils cherchent donc à savoir par quel nombre elle a été multipliée. Ils trouvent 0,36 et 0,64. Certains font très vite le lien avec $0{,}6^2$ et $0{,}8^2$.

Le professeur peut alors faire les calculs suivants pour leur montrer pourquoi le coefficient est au carré dans le calcul de l'aire et pas dans celui du périmètre.

Périmètre :

(22,5 cm × 0,6) + (18 cm × 0,6) + (13,5 cm × 0,6)

= (22,5 cm + 18 cm +13,5 cm) × 0,6

= 54 cm × 0,6

= 32,4 cm

Aire :

(18 cm × 0,6) × (13,5cm × 0,6) ÷2

= (18 cm × 13,5 cm) ÷ 2 × (0,6 × 0,6)

= 121,5 cm^2 × 0,36

= 43,74 cm^2

Bilan

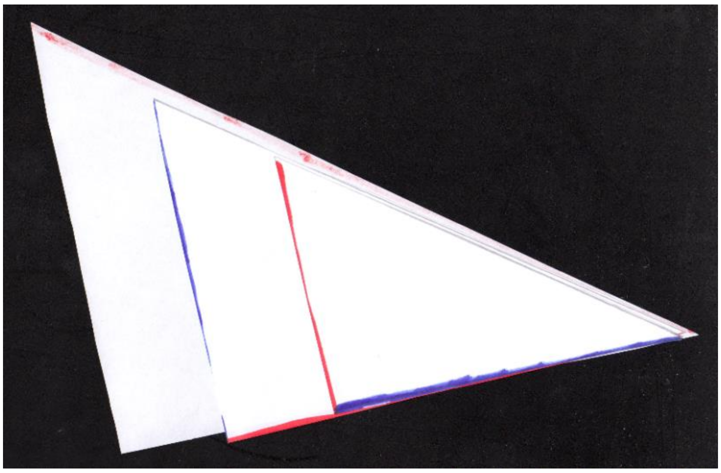
Dans un agrandissement ou une réduction de coefficient *k*, le périmètre de la figure agrandie ou réduite est multiplié par le coefficient de réduction *k*, et l'aire est multipliée par ce coefficient au carré, k^2.

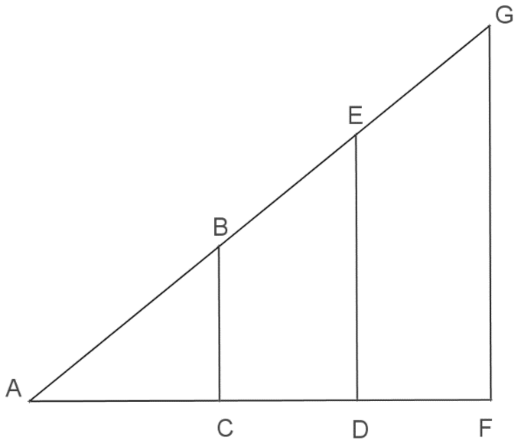
Exercice (d'après PISA)

Est-ce que cela revient au même si on achète une pizza ronde de 40 cm de diamètre à 20 euros ou deux pizzas de 20 cm de diamètre chacune à 10 euros chacune ?

2. Vers la trigonométrie

Le professeur récapitule les résultats en faisant remplir le tableau ci-dessous aux élèves et leur demande pourquoi certains de ces rapports sont égaux





AB = 10,8	AD = 14,4	AF = 18
BC = 8,1	DE = 10,8	FG = 13,5
AC = 13,5	AE = 18	AG = 22,5
$\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$ = 0,8	$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AE}}$ = 0,8	$\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AG}}$ = 0,8
$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AC}}$ = 0,6	$\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AE}}$ = 0,6	$\frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{AG}}$ = 0,6
$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{AB}}$ = 0,75	$\frac{DE}{\mathrm{AD}}$ = 0,75	$\frac{FG}{\mathrm{AF}}$ = 0,75

Que remarquez-vous ? Est-ce normal ?

On constate que $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AG}}$, c'est normal car ABC est une réduction de AFG de rapport 0,6 et que ADE est aussi une réduction de AFG rapport 0,8.

Donc $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{0{,}6 \times \mathrm{AF}}{0{,}6 \times \mathrm{AF}} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AG}}$ et $\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AE}} = \frac{0{,}8 \times \mathrm{AF}}{0{,}8 \times \mathrm{AF}} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AG}}$,

par suite, $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}} = \frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AG}}$. De même pour les autres égalités.

De quoi dépendent donc les rapports égaux à $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AC}}$?

Ils dépendent de l'angle $\widehat{ABC}$. Ce qui permet d'enchaîner sur la trigonométrie.

AGRANDISSEMENT DU PAVE

Problème posé

Le professeur présente à la classe un pavé droit de dimensions 6 cm, 4 cm et 2 cm.

Les élèves doivent construire un agrandissement de ce pavé sachant que la dimension de 4 cm doit devenir 7 cm.

Niveau

Fin de cycle 4 (3ème)

Objectifs possibles

- Réinvestissement de la proportionnalité (calcul d'une 4ème proportionnelle, définition d'un agrandissement).
- Comprendre l'effet d'un agrandissement sur les aires et les volumes.

Notions utilisées

- Construction d'un patron.
- Proportionnalité toutes procédures.
- Aire d’un rectangle.
- Volume d'un pavé droit.

Matériel

- Feuille de papier format A4.
- Matériel de géométrie.

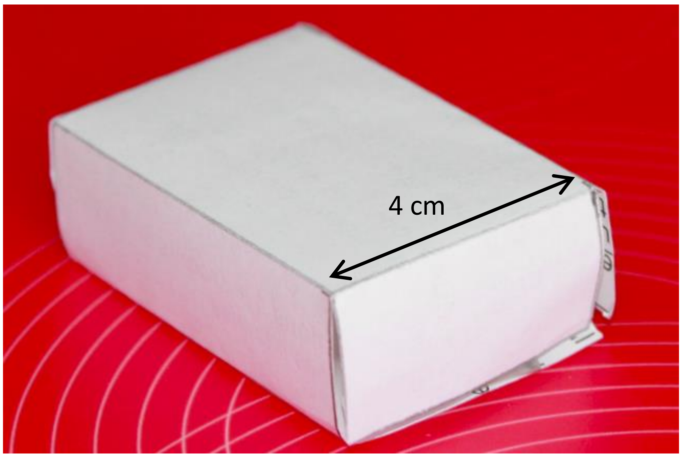
Temps de mise en œuvre en classe : 2 h

Agrandissement du pavé

I. La consigne

Voici un pavé droit de dimensions 6 cm, 4 cm et 2 cm. Construire un agrandissement de ce pavé sachant que la dimension de 4 cm doit devenir 7 cm.

En donnant cet énoncé, le professeur présente le pavé à la classe et montre une des arêtes mesurant 4 cm.



II. Objectifs

- Revoir la construction d'un patron.
- Travailler sur la proportionnalité : ce problème prolonge en 3ème celui prévu en 4ème sur l'agrandissement de la photo, un rectangle de dimensions 4 cm sur 8 cm dans lequel 4 cm devient 7 cm (dans cette brochure). Ce travail n'est pas inutile car, en général, nous ne suivons pas les mêmes élèves de la 4ème à la 3ème. Et même si des élèves ont déjà agrandi la photo en 4ème se retrouvent en 3ème, plusieurs auront sans doute oublié les procédures utilisées.
- Découvrir que le volume d'un solide est multiplié par k^3 quand chaque dimension est multipliée par *k.*

III. Variables didactiques

Les dimensions sont choisies de sorte que le patron de l'agrandissement entre dans une feuille de format A4, même si les élèves font l'erreur prévisible : ajouter 3 cm à chaque dimension.

IV. Organisation de la classe et déroulement

La recherche est engagée de manière individuelle. Puis assez vite, chaque élève échange avec son voisin sur son travail. Le professeur accepte ce travail d'équipe.

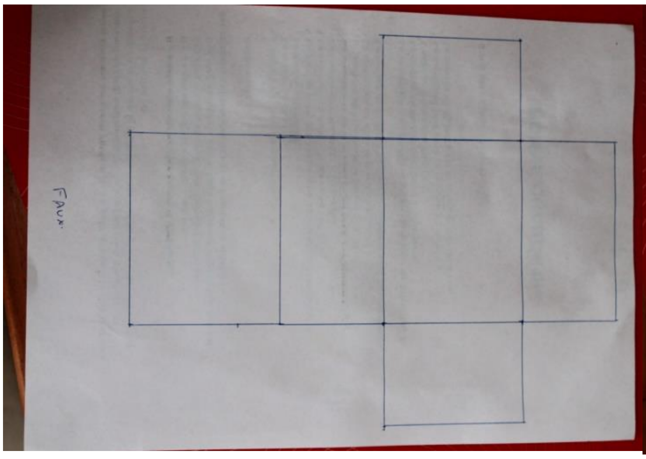
1. Étape 1 : comment construire un pavé ?

Certains élèves ne savent pas comment construire un pavé. D'autres proposent de construire un patron.

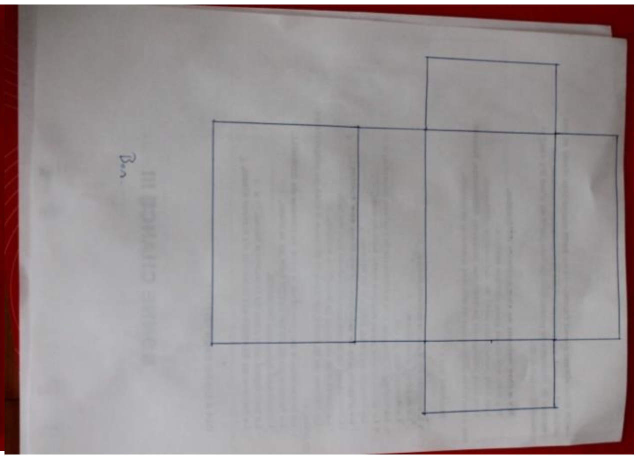
Quelques élèves ne sachant pas ce qu'est un patron, le professeur déplie le pavé exposé pour le leur montrer. Alors tous les élèves commencent à travailler.

2. Étape 2 : comment faire entrer le patron dans la feuille ?

Il est possible que certains élèves s'y reprennent à plusieurs fois avant d'arriver à faire entrer le patron dans la feuille. Ils ne savent pas par quelle face débuter le patron ni comment le disposer dans la feuille car ils n'anticipent pas. Certains prennent la feuille horizontalement et construisent le patron verticalement de sorte que la place est insuffisante et ils doivent recommencer. Il est important de prévoir assez de feuilles pour les brouillons : certains peuvent recommencer 6 ou 7 fois ! Ceci arrive d'autant plus à ceux qui ajoutent 3 cm à chaque dimension.



Ici les élèves ont ajouté 3cm à chaque arête.



Ici les élèves ont respecté la proportionnalité.

Ces difficultés étant surmontées, les élèves découpent leur patron pour construire le pavé et comparer leurs productions.

3. Étape 3 : mise en commun et recherche des erreurs

1- Il faut d'abord éliminer les patrons qui ne se ferment pas. Parfois jusqu'à 1/3 des élèves se trouvent avec un patron dont certaines faces qui devraient être superposables ne le sont pas. Le professeur montre que certains segments du patron correspondent à la même arête.

2- Il reste alors trois sortes de pavés :

- ceux dont seules les arêtes de 4 cm ont été agrandies et mesurent 7 cm, les autres restant à 6 cm et 2 cm ;

- ceux qui ont été agrandis en ajoutant 3 cm à chaque dimension ;

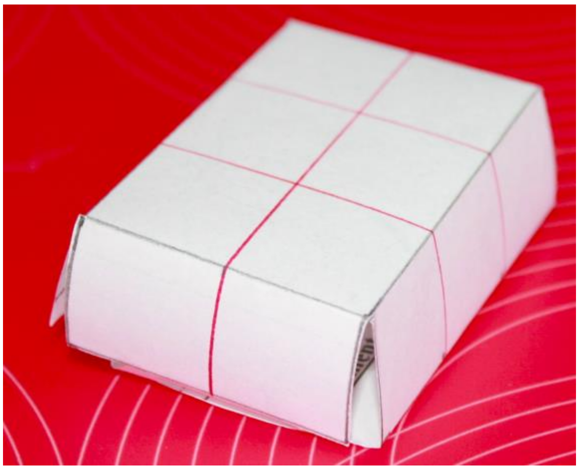
- ceux où la proportionnalité a été bien utilisée.

3- Quelle est la bonne solution ?

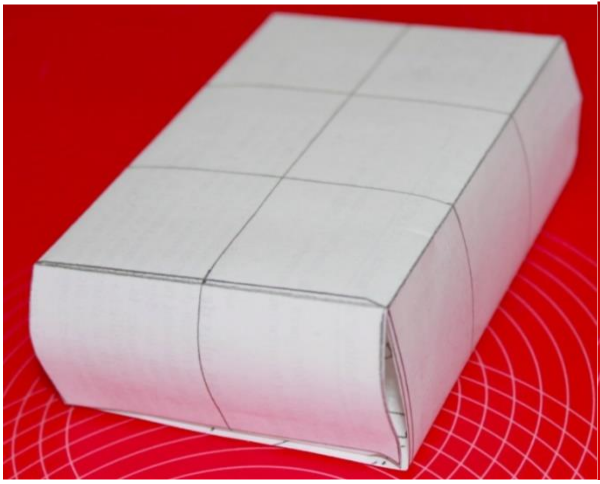
Les élèves éliminent facilement celui dont une seule dimension a été agrandie car il est trop déformé par rapport à l'original.

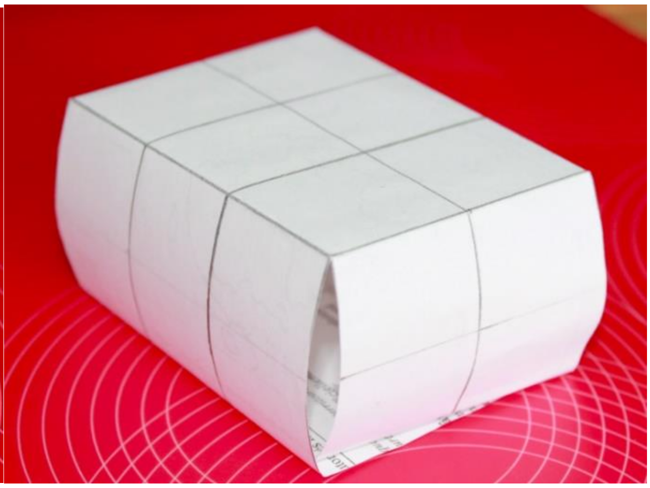
Le choix entre les deux solutions restantes peut s'avérer difficile.

Afin d'identifier la bonne solution, le professeur leur demande d'imaginer le pavé donné comme constitué de six cubes d'arête 2 cm. Il dessine alors les cubes sur ce pavé.



Le professeur fait de même sur les deux autres pavés proposés.





Sur un des deux pavés, des rectangles apparaissent et non des carrés. Les élèves sont alors convaincus que l'idée d'ajouter 3 cm à chaque dimension n'est pas bonne pour conserver la forme initiale.

4. Étape 4 : quelle procédure les élèves ayant obtenu la bonne solution ont-ils utilisées ?

(avec 3,5 cm et 10,5 cm)

Les méthodes sont nombreuses.

Certains ont multiplié par le coefficient de proportionnalité $\frac{7}{4}$.

D'autres ont utilisé la linéarité de la proportionnalité : 4 devient 7 donc 2 (la moitié de 4) devient 3,5 (la moitié de 7) et 6 (le triple de 2) devient 10,5 (le triple de 3,5).

5. Étape 5 : quel est l'effet de l'agrandissement du pavé sur son volume ?

Le pavé initial se décompose en 2 × 4 × 6 = 48 cubes de 1 cm de côté.
Son volume est 48 cm^3.
Quand on multiplie les dimensions par 3, le volume devient
$(2 \text{ cm} \times 3) \times (4 \text{ cm} \times 3) \times (6 \text{ cm} \times 3) = 3^3 \times 48 \text{ cm}^3$

De même, les aires des faces sont multipliées par 3^2.

6. Bilan

- Nous avons revu le patron d'un solide.
- Nous avons retravaillé la notion de proportionnalité. Pour agrandir le pavé sans le déformer, il faut multiplier ses trois dimensions par le même nombre.
- Nous avons découvert que lorsque les dimensions d'un pavé sont multipliées par 3, les aires des faces sont multipliées par 3^2, le volume est multiplié par 3^3.

7. Généralisation

Le professeur peut énoncer ce qui se passe quand on multiplie les trois dimensions d'un pavé par *k*, et plus généralement ce qui se passe pour n'importe quel solide :

- le calcul des aires s'obtient toujours par le produit de deux longueurs (à un coefficient multiplicatif près) qui seront toutes multipliées par *k* donc les aires sont multipliées par $k^{2.}$
- le calcul du volume s'obtient toujours par le produit de trois longueurs (à un coefficient multiplicatif près) qui seront toutes multipliées par *k*. Le volume est donc multiplié par k^3.

LE FORMAT A4

Problème posé

A partir de deux feuilles A4, découper une des feuilles en deux pour obtenir deux rectangles puis à nouveau découper un des rectangles obtenus encore en deux et ainsi de suite plusieurs fois.

Les rectangles sont ensuite empilés par un sommet et les élèves doivent trouver pourquoi et comment les sommets des rectangles sont alignés.

Niveau : $3^{\text{ème}}$ et 2^{nde}

Objectifs

- Réinvestir la notion de proportionnalité (proportionnalité entre les dimensions d'un rectangle).
- Utiliser le nombre irrationnel $\sqrt{2}$.

Notions utilisées

- Proportionnalité avec les différentes procédures.
- Les points représentant deux grandeurs proportionnelles sont alignés à l'origine.
- *f(x) = ax.*

Matériel

Matériel de géométrie.

Feuilles A4.

Ciseaux et colle pour les élèves.

Temps de mise en œuvre en classe : 1h pour les étapes 1 à 3.

Le format A4

Cette situation[10] peut s'utiliser en 3ème ou en 2de : il s'agit de la proportionnalité entre les dimensions de rectangles avec apparition, à la surprise des élèves, du nombre irrationnel $\sqrt{2}$.

Les élèves prennent très vite en charge le problème, en d'autres termes la dévolution du problème aux élèves par l'enseignant est facile. Les élèves commencent par une manipulation et une constatation suivies d'une conjecture. Celle-ci est invalidée par une deuxième manipulation. Ils ont alors envie de chercher une explication.

Les élèves n'ont pas souvent l'occasion de rencontrer des fonctions de la forme $f(x) = ax$ avec a irrationnel. Cette situation permet d'aboutir à des points alignés sur une droite de pente $\sqrt{2}$.

Elle permet aussi de distinguer la réalité et un modèle de cette réalité. Les rectangles de papier ont des sommets qui semblent alignés (ils le sont « physiquement », à l'œil nu) ; les rectangles abstraits devraient avoir des dimensions exactement dans le rapport $\sqrt{2}$ pour que les sommets soient alignés au sens mathématique du terme.

Il faut que les élèves sachent que deux points A et B dans un repère sont alignés avec l'origine si leurs coordonnées sont proportionnelles.

Ce résultat peut être établi avec la situation de l'agrandissement de la photo (p 53) où on étudie aussi un empilement de rectangles.

Il est aussi possible de ne traiter que quelques-uns des petits problèmes proposés dans les étapes 3, 4 et 5.

---

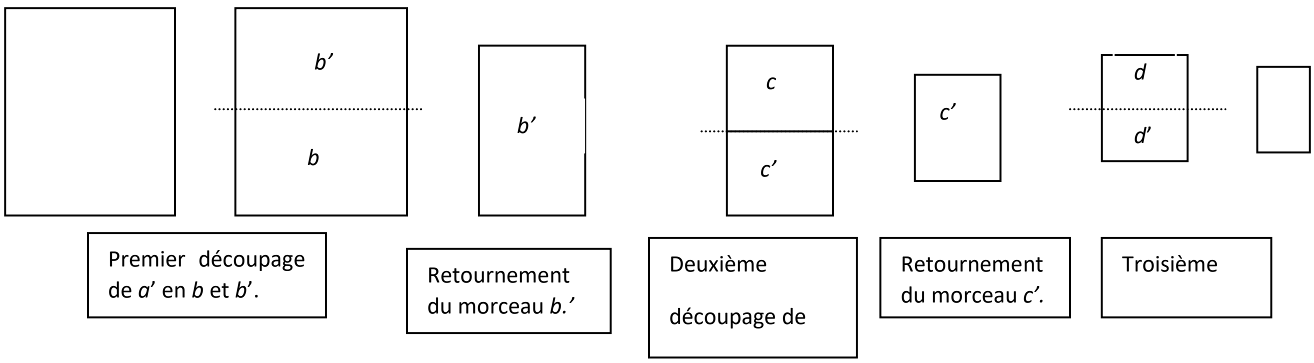
[10] Cf. *Mathématiques dynamiques*, Annie Berté, Nathan Pédagogie, 1993, p. 290-301. Une première publication en avait été faite dans une brochure de l'IREM d'Aquitaine intitulée : *Enseignement des mathématiques utilisant la « réalité »*, tome 1 : *Mise en œuvre dans l'enseignement secondaire des recherches en didactique des mathématiques* – 1987- réédition en février 1992.

I. Déroulement en classe :

1. Étape 1 : manipulation

Les élèves travaillent par groupes de deux. Le professeur donne à chaque binôme deux feuilles de format A4. Il demande d'en garder une entière (*a*) et de découper l'autre (*a*') en deux parties égales (*b* et *b*') comme indiqué sur le dessin. Le découpage doit se faire avec précaution pour que les coins des rectangles soient intacts.

Puis on recommence la manipulation : garder entier le rectangle *b*, le poser sur *a*. Le professeur montre au fur et à mesure des découpages, comment empiler les rectangles. Éventuellement retourner *b'* puis le découper en *c* et *c*' comme indiqué. Recommencer en gardant intact le rectangle *c*, le poser sur *a* et *b* et découper le rectangle *c*'en *d* et *d* ', etc.



Les élèves continuent le découpage de *d'*, en *e* et *e* ' et ainsi de suite jusqu'à 5 fois.
Il n'est pas utile de donner des noms *a, b*, *c*, *d…* aux feuilles à mesure qu'ils font le découpage. Ces noms ne figurent ici que pour la clarté de la rédaction écrite.

<u>Question :</u> Que pouvez-vous dire de tous ces rectangles *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f ?*

Réponse attendue : leurs dimensions sont proportionnelles.

2. Trois remarques importantes pour la gestion de la classe :

1- En général, le découpage amuse tellement les élèves qu'ils le continuent le plus loin possible jusqu'à obtenir de très petits morceaux. Il est impératif de les arrêter au morceau *f* pour éviter des bouts de papier volant dans tous les coins.

2- Il est conseillé de demander aux élèves d'organiser leur bureau en empilant soigneusement les rectangles *a, b, c, d, e* et *f* au fur et à mesure du découpage, pour ne rien égarer. Le professeur réalise la manipulation en même temps que les élèves, en montrant ce qu'il fait, car à chaque étape, il faut découper dans le bon sens. Dans un binôme, un des élèves découpe pendant que l'autre empile les rectangles.

3- L'empilement sur le même « coin » (fig. 1) est le plus intéressant pour continuer. C'est celui qui a été imposé car il préfigure des axes et l'alignement des points avec l'origine.

Si le professeur laisse les élèves libres, il pourra rencontrer d'autres empilements :

- l'empilement de façon à ce que tous les rectangles aient le même centre (fig 2) est assez intéressant, mais il faudra revenir à l'empilement précédent si on veut interpréter plus agréablement avec des calculs faisant intervenir les dimensions des rectangles et non les moitiés.

- l'empilement sur la feuille A4 des rectangles découpés et mis côte à côte (fig 3) ce qui illustre que : $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^{n+1}}$ en convenant que 1 est la mesure de l'aire de la feuille entière. Les aires successives sont en progression géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et donc la limite du premier membre est 1 quand n tend vers + ∞.

Ce résultat est très intéressant mais n'a pas de rapport immédiat avec ce que le professeur veut développer ensuite.

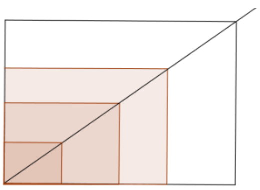


fig 1

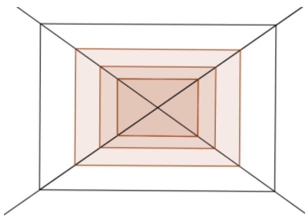


fig 2

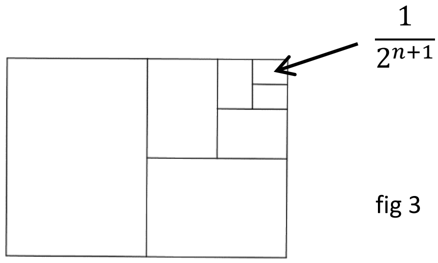
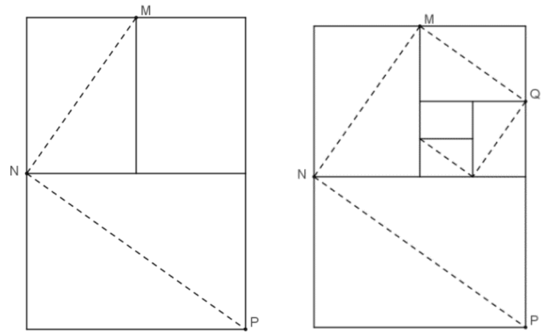


fig 3

Si le professeur veut revenir à la proportionnalité avec la fig. 3, il peut faire observer l'empilement des trois premiers rectangles seuls *a, b, c* (fig 4) et demander la position des deux diagonales des rectangles *b* et *c* soit [MN] et [NP]. Pour montrer qu'elles sont perpendiculaires, il faut utiliser les angles complémentaires, donc la proportionnalité des dimensions des rectangles.

On peut continuer à disposer les rectangles de sorte qu'une diagonale de chacun soit perpendiculaire à une diagonale du rectangle précédent (fig 5), ce que peu d'élèves proposent spontanément. On trouve un autre empilement proche de la fig 3.



Mais le « trou » n'est plus sur un côté du rectangle *a*.

On obtient une spirale qui entoure ce même « trou » devenant de plus en plus petit, situé cette fois à l'intérieur de la feuille *a*.

Fig 5

Ces empilements 3 et 5 entraînent le professeur vers une digression si l'objectif est d'arriver à la fonction linéaire $f(x) = \sqrt{2}\,x$. Les figures 3, 4 et 5 peuvent faire éventuellement l'objet d'un exercice ultérieur en classe ou en devoir à la maison.

3. Étape 2 : constatation de l'alignement, conjecture

Les élèves constatent alors que les sommets des rectangles sont alignés.

<u>Question :</u> pourquoi les sommets sont-ils alignés ? Comment l'expliquer ?

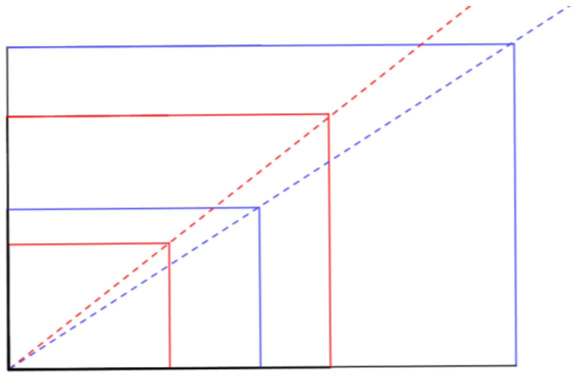
La réponse majoritaire est : « C'est évident puisqu'on a coupé en 2 à chaque fois ». Ceux qui n'utilisent pas cet argument sont muets sur la question.

Le professeur reprend en reformulant l'argument : « Vous êtes sûrs car vous pensez qu'on a divisé par 2 les dimensions ? » Ils répondent en chœur et cette fois plus vigoureusement : « Oui ! » car ceux qui n'avaient rien dit au premier abord sont très convaincus maintenant par l'argument de leurs camarades. Le professeur ajoute :

- Donc vous êtes sûrs que cela va se reproduire pour n'importe quelle feuille de papier ?
- Oui !
- Dans ce cas nous allons faire l'expérience.

Le professeur distribue à chaque groupe de deux élèves deux nouvelles feuilles d'un autre format (par exemple feuille de copie de petit format ou feuille 24×32). On recommence la même manipulation avec ces nouvelles feuilles et, oh surprise pour les élèves, les points ne sont pas alignés.

Ils regardent avec une certaine stupéfaction les papiers découpés et empilés et il y a très souvent au moins un élève qui dit : « mais c'est aligné une fois sur deux ! ».



Effectivement c'est exact : sur le dessin on voit que tous les sommets des rectangles rouges sont alignés avec l'origine et de même pour tous les sommets des rectangles bleus mais on obtient deux droites différentes. La classe cherche une explication un peu difficile à trouver.

Les réponses des élèves sont, parfois, assez près de la bonne explication du phénomène. Le professeur, tout en montrant les rectangles coupés selon une puis deux dimensions, reformule ces réponses : au deuxième découpage les deux dimensions sont bien divisées par 2, ce qui n'est pas le cas pour le premier découpage.

Dans nos classes, nous nous contentons de cette explication minimale sans formalisation générale pour deux dimensions L et *l*. Ce sera possible après les exercices qui vont suivre en leur donnant des valeurs particulières. Les élèves ne sont pas capables de trouver une telle formalisation avec deux lettres à ce stade ; c'est le professeur qui dirait tout, et cela casserait la dynamique de la séance ainsi que la recherche des élèves.

Pour l'instant, il suffit d'arriver à ce que certains élèves disent : « cela dépend des dimensions de la feuille » et peut-être que certains aillent jusqu'à dire « le format A4 est un cas particulier ».

4. Étape 3 : calculs numériques avec des dimensions particulières

Problème 1 : le professeur propose deux feuilles de papier de dimensions 10 cm sur 7 cm. On en coupe une en deux en partageant la longueur. Les élèves doivent prévoir, avant de superposer les feuilles, si les deux sommets seront alignés avec l'origine.

Les élèves arrivent à écrire qu'il faut savoir si l'égalité : $\frac{10}{7} = \frac{7}{5}$ est vraie. C'est l'occasion de revoir que la réduction au même dénominateur 35 revient à comparer les produits "en croix" 49 et 50. Or 49 ≠ 50 : pas d'alignement. On vérifie avec les feuilles de papier.

Problème 2 : on continue en découpant en deux la feuille obtenue précédemment de dimensions 7 cm sur 5 cm. Prévoir si le sommet de cette feuille et celui de la feuille de départ sont alignés avec l'origine.

Cette fois la réponse est oui car : $\frac{10}{7} = \frac{5}{3,5}$. On vérifie avec le matériel.

Bilan : on retrouve encore les sommets alignés car alors les deux dimensions ont été divisées par 2 et elles sont proportionnelles. Cela se produira quelles que soient les dimensions des feuilles de papier.

Toute la classe est maintenant bien persuadée que le format A4 a quelque chose de spécial puisqu'on obtient l'alignement dès le premier découpage.

Problème 3 : que se passe-t-il donc avec ce format ? Le professeur rappelle les dimensions du format A4 : 21 × 29,7 et il autorise la calculatrice pour faire les calculs des rapports.

Certains reprennent leur premier découpage et mesurent les dimensions des feuilles coupées. Le professeur peut interrompre les mesures en rappelant à tous que si on connaît les dimensions de départ, il est inutile de mesurer, il suffit de diviser par 2.

Les calculs donnent : $\frac{\frac{29,7}{2}}{\frac{21}{2}} = \frac{14,85}{10,5}$

Et que $\frac{21}{\frac{29,7}{2}}$ = 1,414141….. $= \frac{\frac{21}{2}}{\frac{\frac{29,7}{2}}{2}} = \frac{10,5}{\frac{14,85}{2}} = \frac{10,5}{7,425}$

Ceux qui avaient mesuré ne trouvaient pas exactement les mêmes résultats, mais des rapports légèrement différents ; ce qui attire l'attention sur le fait que des mesures donnent toujours des valeurs approchées.

Ceux qui ne mesurent pas mais s'arrêtent au millième ou avant, trouvent que tous ces rapports sont égaux.

En conclusion, les points sont alignés si on s'arrête à 1,414 ; ils ne sont alignés qu'une fois sur deux si on écrit davantage de décimales ! En fait, ils sont toujours « physiquement » alignés car on ne peut pas déceler la différence à l'œil nu, mais ils ne sont pas mathématiquement alignés.

Certains élèves remarquent que les nombres trouvés pour les rapports sont très voisins d'un nombre connu qui est $\sqrt{2}$.

La calculatrice donne $\sqrt{2} \approx 1{,}414213562$.

Est-ce un hasard ?

Pour répondre à cette question il faut abandonner les calculs et prendre deux lettres pour désigner les dimensions inconnues. Les élèves ont beaucoup de mal à le faire.

Pour eux, abandonner les nombres qui leur sont familiers et qui permettent de calculer, est une perte d'information. Utiliser des lettres les place dans un contexte où ils ne sont pas à l'aise. D'où notre étape 4.

5. Étape 4 : un peu d'algèbre

Problème 4 : dessiner un rectangle de largeur 6 cm. Combien doit mesurer sa longueur pour que, en le coupant en deux dans le bon sens, on obtienne l'alignement des sommets dès le premier découpage, comme avec le format A4 ?

La plupart des élèves se lancent en faisant des essais qui ne « marchent » pas en traçant des rectangles au hasard. Il faut un certain temps avant qu'ils pensent à passer par des calculs et appeler *x* la longueur cherchée, sinon le professeur le suggère sans trop attendre.

Exprimer les dimensions de l'autre rectangle en fonction de *x* n'est pas évident. Certains utilisent *y* ou une autre lettre et donc ne peuvent pas continuer. Ils disent alors : « employer des lettres ne sert à rien », on préfère faire des calculs ! On retrouve la difficulté des élèves pour la mise en équation d'un problème et leur tendance à l'éviter par des essais[11]. C'est possible quand l'équation est du premier degré, mais ce n'est pas le cas ici.

Pour désigner la moitié de *x*, les élèves proposent $x \div 2$ ou $\frac{x}{2}$. Il est utile pour la suite des calculs de les amener à écrire $0{,}5x$.

La condition donne :

$\frac{x}{6} = \frac{6}{0{,}5x}$; $0{,}5x^2 = 36$; $x^2 = 72$; $x = \sqrt{72}$; $x = 6\sqrt{2}$.

On trouve donc que la longueur doit mesurer la largeur multipliée par $\sqrt{2}$.

---

11 Cf. au chapitre des équations du premier degré, notre brochure *Algèbre en* 4ème, *Un enchaînement de situations*, IREM d'Aquitaine, 2009.

Problème 5 : j'ai deux rectangles de dimensions quelconques *x* et *y*. Je coupe chaque dimension de l'un d'entre eux en 2. Que pensez-vous des dimensions des deux rectangles obtenus ? Le démontrer.

Les élèves de collège disent que les dimensions sont proportionnelles car elles sont divisées par deux.

Le professeur écrit $\frac{x}{y} = \frac{0{,}5x}{0{,}5y}$.

Comprendre que la démonstration est ainsi finie n'est pas très facile en 3ème.

Problème 6: on cherche la condition sur les dimensions d'un rectangle pour que celui-ci donne un rectangle semblable (avec des dimensions proportionnelles) quand on le coupe une fois dans le sens de la longueur.

Cette fois, le problème est plus difficile car les mesures ne sont pas données et les élèves ne sont pas guidés pour désigner les deux dimensions inconnues. Au collège, le professeur reprend la main.

Si le professeur n'a pas posé les problèmes précédents, les élèves ont beaucoup de mal à prendre deux lettres pour désigner les dimensions inconnues. Quand il suggère de choisir des lettres comme *L* et *l*, certains élèves continuent en écrivant :

$\frac{L}{l} = \frac{a}{b}$ et sont bloqués. On arrive à : $\frac{L}{l} = \frac{l}{\frac{L}{2}}$ d'où la relation L = *l* $\sqrt{2}$

6. Retour sur la feuille de format A4

Si on considère une feuille de papier de format 21 × 29,7, on a bien, après le découpage, des points alignés au sens du physicien. En revanche, si on considère un rectangle de dimensions 21 × 29,7 les points ne sont pas alignés pour le mathématicien car $\frac{29{,}7}{21} \neq \sqrt{2}$ puisque $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Cette distinction est capitale. Il faut que ce soit clair pour les élèves car sinon ils vont continuer à confondre le rectangle mathématique (un concept) et le rectangle de papier (un objet physique).

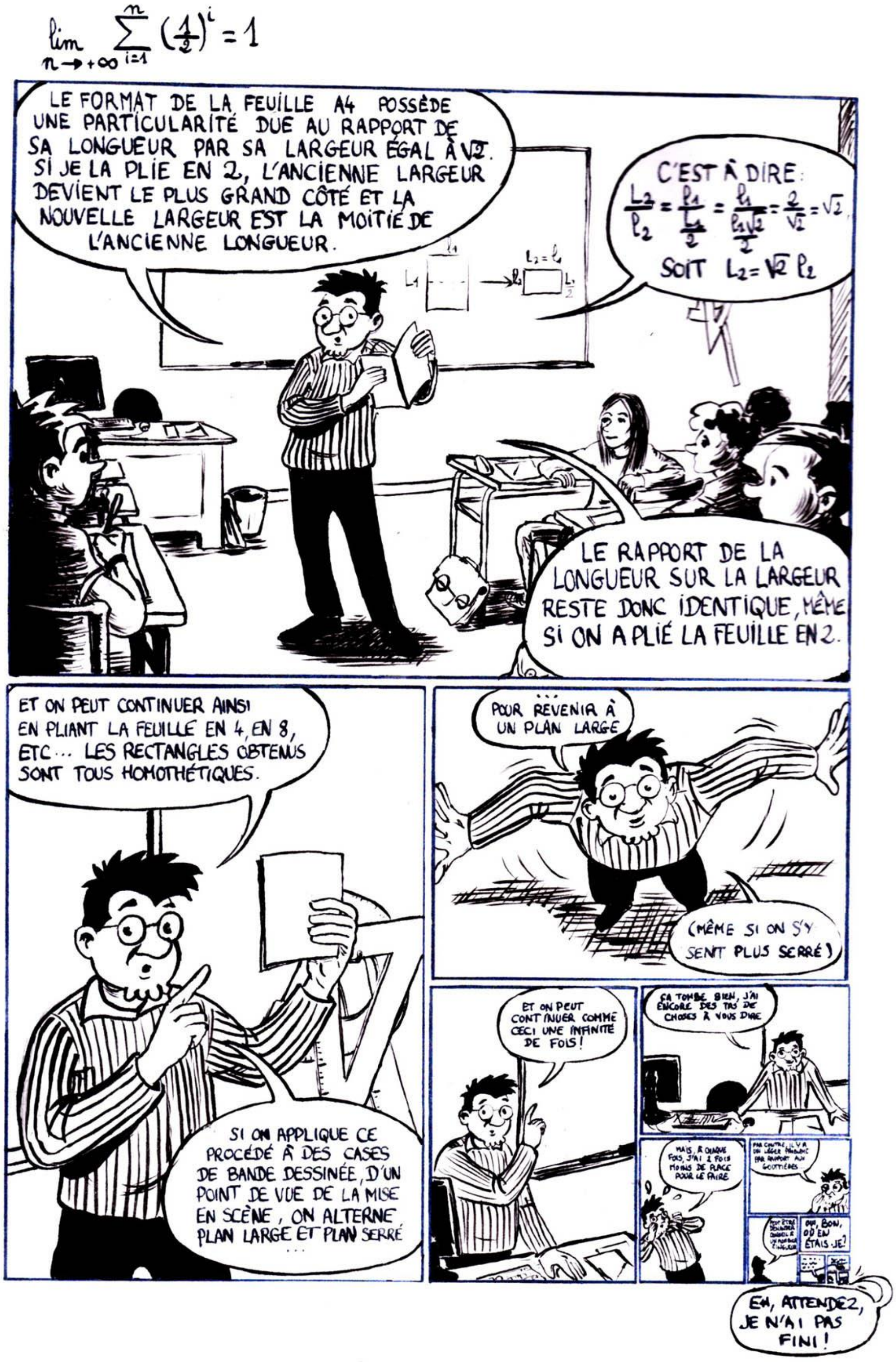
Cette situation est d'autant plus intéressante que le professeur peut introduire des axes sur la feuille de format A4 (axe des abscisses portant *l* et axe des ordonnées portant *L*) et demander l'équation de la droite qui porte tous les sommets des rectangles. C'est $L = l\sqrt{2}$.

On aurait pu choisir x pour la largeur des rectangles et y pour la longueur de sorte qu'on arrive à la forme usuelle $f(x) = y = \sqrt{2}\, x$.

Nous préférons L et l pour que, au moment d'écrire la relation, les élèves ne perdent pas de vue ce que représente pour le rectangle chacune des lettres L et l. Il n'est pas inutile que les élèves s'habituent à d'autres notations pour les fonctions, notamment pour la fonction linéaire rencontrée en physique sous la forme $d = vt$, U = RI, etc.

7. Étape 5 : et pour finir, une BD[12] !

Remarque : pour les besoins de la mise en page, une marge a été ménagée autour du dessin. Les dimensions réelles du dessin sont 17,6 cm par 25,1 cm. Le rapport est environ 1,426 ce qui n'est pas si loin de $\sqrt{2}$. (**Attention les dimensions de la figure ci-dessous sont réduites !**)



12 Cette bande dessinée a été publiée dans la Revue Tangente n°142 de septembre-octobre 2011

8. Étape 6 : mathématiques dans la réalité

Pourquoi le numéro 4 pour ce format et pourquoi un tel format ?

Il existe un format A3 obtenu en accolant deux feuilles de format A4, un format A2 obtenu en accolant deux feuilles de format A3, etc. On s'arrête au format A0 car alors on obtient une aire proche de 1 m^2.
Question : quelles sont les dimensions d'une feuille de format A0 ?
C'est *L* et *l* de sorte que :

$L = l\sqrt{2}$ et $L \times l = 1$ donc $L = \frac{1}{l}$ et $L = \frac{1}{L}\sqrt{2}$ donc $L^2 = \sqrt{2}$.

Donc $L = \sqrt{\sqrt{2}}$ en mètres et $\sqrt{\sqrt{2}} \approx 1{,}189207$ m.

On prend usuellement pour le format A0, 841 mm × 1189 mm.

Ces formats sont très utiles en imprimerie : en doublant une dimension, on double l'aire tout en gardant un format aux dimensions proportionnelles donc sans déformation[13]. On l'utilise avec nos ordinateurs pour faire des économies de papier en imprimant les documents : deux feuilles de format A4 accolées réduites en A5 contiennent sur une seule feuille de format A4.

9. Etape 7 : mathématiques et arts.

Les exercices qui suivent forment un ensemble, mais les questions peuvent être abordées de façon indépendante selon le temps dont on dispose.

Un rectangle dont les dimensions sont dans le rapport $\sqrt{2}$ est appelé « rectangle harmonique ». On peut considérer que c'est le cas de la feuille de format A4.
Ce rectangle est utilisé par les artistes. Le qualificatif « harmonique » a été donné pour la première fois par le peintre Paul Sérusier (1863-1927) qui faisait d'abord partie du groupe de Pont-Aven (Bretagne) avec Gauguin et qui anima ensuite un groupe de peintres appelés nabis (de l'hébreu nabi = prophète).

---

[13] Cf. dans la suite de ce document une étude des formats avec les élèves de collège devoir maison en annexe.

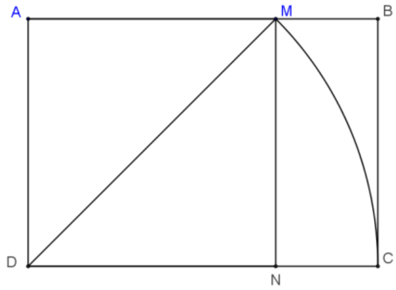
Un sculpteur, Michel Ventrone, a érigé à Annemasse (Savoie) une grande sculpture qui se présente comme un rectangle dont les dimensions sont 9,2 m et 6,5 m. Le rapport de ces dimensions est environ 1,415, donc très voisin de $\sqrt{2}$. Cette sculpture se nomme « La porte d'harmonie ».

II. Problèmes

1. Le carré, le cercle et la diagonale

On trace un carré AMND. Sa diagonale est [DM]. Le cercle de centre D et de rayon DM coupe la demi-droite [DN) en C. On termine le rectangle ABCD.

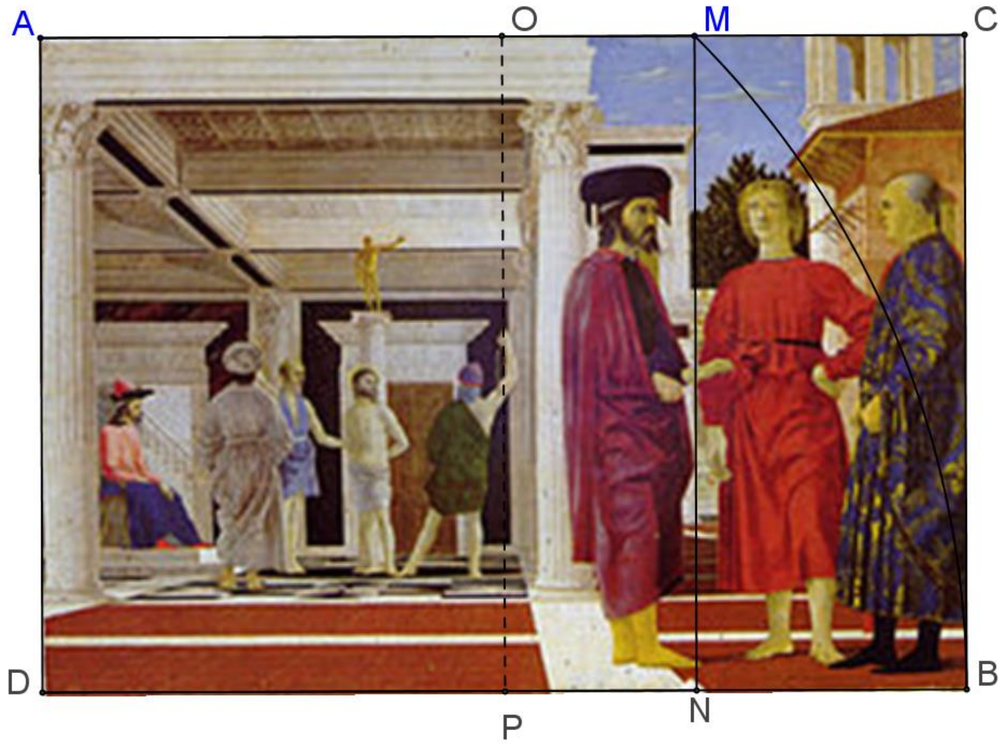
Quel est le rapport entre les dimensions du rectangle ABCD ?



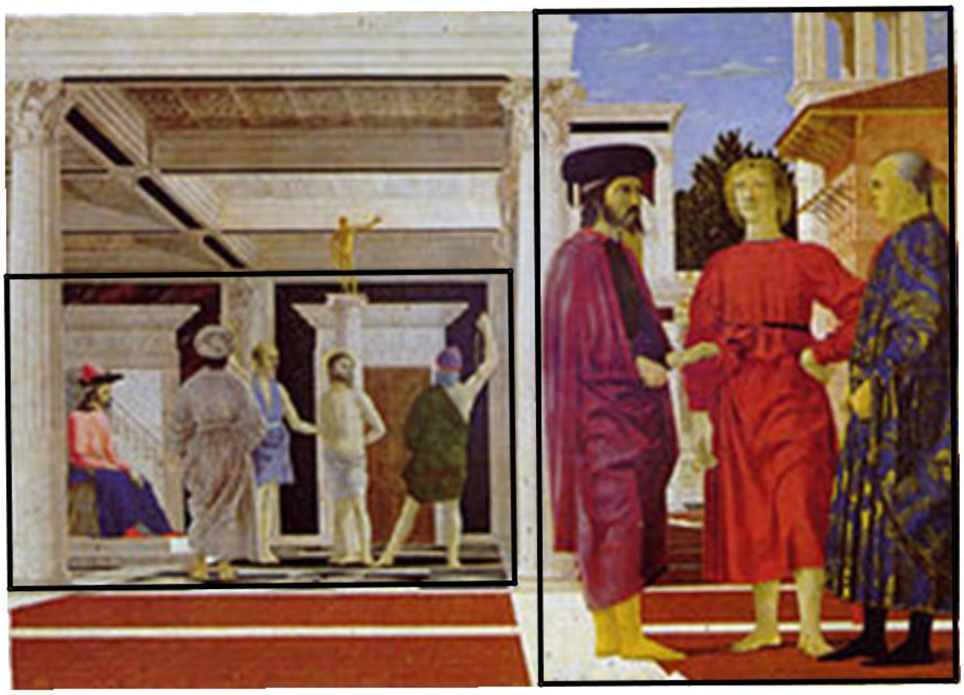
2. Le tableau : la flagellation du Christ de Piero de la Francesca (1455)

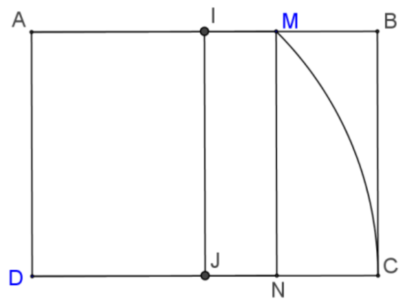
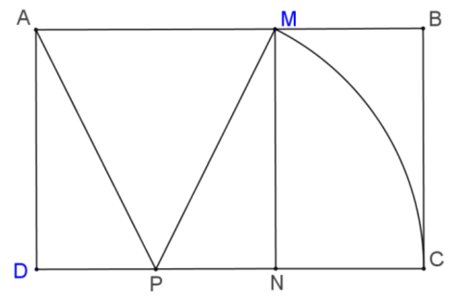
Il s'agit de deux scènes différentes qui se passent à des époques différentes : à gauche, la flagellation du Christ, à droite, une scène avec des personnages vivants à l'époque de la réalisation du tableau.

D'après les dimensions du tableau, 81,6 cm sur 57,9 cm, il s'agit d'un rectangle harmonique (81,6 ÷ 57,9 environ égal à 1,41) divisé en deux rectangles harmoniques par son axe de symétrie.



Il y a en outre des rectangles d'or à l'intérieur du tableau, rectangles dont le rapport des dimensions est $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.



Construction de trois rectangles harmoniques	Construction de deux rectangles d’or
	

On trace un carré AMND de côté 1.

Le cercle de centre D de rayon DM coupe [DN] en C ; DM = DC = $\sqrt{2}$.

I milieu de [AB] et J milieu de [DC]

Rectangles harmoniques :

ABCD, AIJD et IBCJ

On trace un carré AMND de côté 1.

P milieu de [DN]. Le cercle de centre P de rayon PM coupe la demi-droite [DN) en C ;

PM = PC = $\frac{\sqrt{5}}{2}$

DC = $\frac{\sqrt{5}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Rectangles d'or :

ABCD, MBCN

3. Problème : Rectangle ABCD dont les dimensions sont 8 unités et 6 unités.

a. Choisir un point M sur [AB] et un point N sur [DC] de sorte que AMND soit un rectangle ayant des dimensions proportionnelles à celles de ABCD et faire la figure.

b. Comment sont les droites (DB) et (AN) ?

Solution :

a. On trouve : $\frac{6}{8} = \frac{x}{6}$, x = 4,5.

b. Les tangentes des angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{DAN}$ sont égales. Donc ces angles sont égaux.

$\widehat{DAN}$ et $\widehat{NAB}$ sont complémentaires d’où $\widehat{NAB}$ et $\widehat{ABD}$ sont complémentaires aussi. Le triangle AOB est rectangle. Les droites (DB) et (AN) sont perpendiculaires.

Ceci est vrai quelles que soient les dimensions de départ car la proportionnalité entraîne l’égalité des tangentes donc des angles.

4. Réciproque du problème 3 :

Tracer un rectangle ABCD de dimensions quelconques. La perpendiculaire à la diagonale (DB) passant par A coupe [DC] en N. On termine le rectangle ADNM. Montrer, sans rien ne mesurer ni rien calculer que ce rectangle a des dimensions proportionnelles à celles du rectangles ABCD.

Solution :

Il s'agit de la réciproque de la propriété précédente.

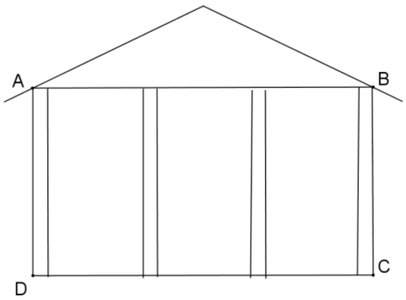
Les angles $\widehat{ABD}$ et $\widehat{DAN}$ sont égaux car ils ont le même complément, donc leurs tangentes sont égales, d'où l'égalité des rapports.

5. Le temple à colonnes

(Cf. le grand théâtre de Bordeaux ou la façade est du Parthénon)

Problème : on veut construire un monument de sorte que le grand rectangle ABCD soit proportionnel aux trois petits rectangles intérieurs.

a. Comment choisir la dimension BC si AB = 30 m ?



Le professeur peut préciser qu'il faudra négliger le diamètre des colonnes vu la grande dimension du monument.

Ceci doit être discuté en classe entière avec le professeur et la participation des élèves pour qu'ils comprennent bien cette modélisation avant de commencer leur recherche.

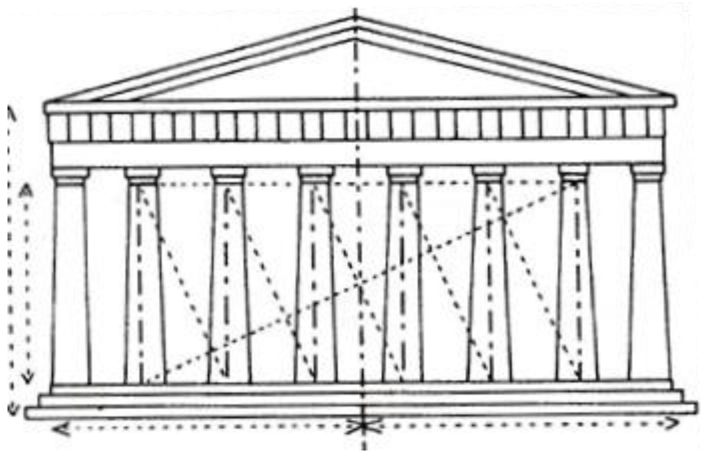
$$\frac{30}{x} = \frac{x}{10} \text{ donc } x^2 = 300 \text{ ou } x = 10\sqrt{3} \approx 17{,}32 \text{ m.}$$

b. Si AB n'est pas imposé, quelle condition doivent vérifier AB et BC ?

On désigne AB par L qui va jouer le rôle de 30 et on écrit cette fois une relation entre L et *l*.

On trouve : $\frac{L}{l} = \frac{l}{\frac{L}{3}}$ donc $L^2 = 3\,l^2$ donc $L = l\sqrt{3}$.

On peut penser à des variantes avec 3 colonnes et 2 rectangles intérieurs (c'est 3 colonnes si on compte les colonnes extérieures et on retrouve le format A4) ou 6 colonnes et 5 rectangles comme dans la façade est du Parthénon.

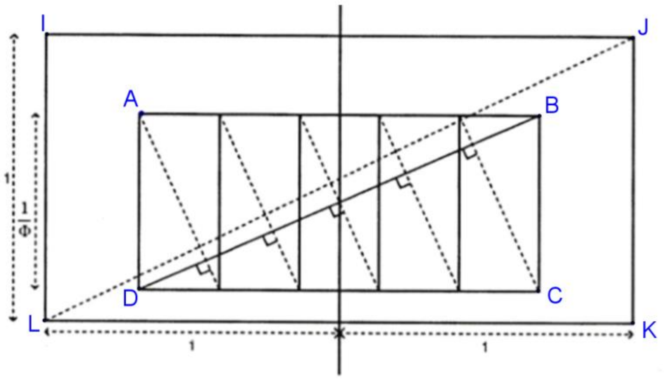


De façon générale, pour qu'un rectangle puisse se décomposer en n rectangles proportionnels au rectangle de départ, il faut que le rapport de ses dimensions soit $\sqrt{n}$.

En effet, $\frac{L}{l} = \frac{l}{\frac{L}{n}}$ donc $L^2 = n\,l^2$ donc $L = l\sqrt{n}$,

Et chaque diagonale du grand rectangle est perpendiculaire à toutes celles qu'elle coupe dans les petits rectangles.

On peut schématiser cette façade ainsi :

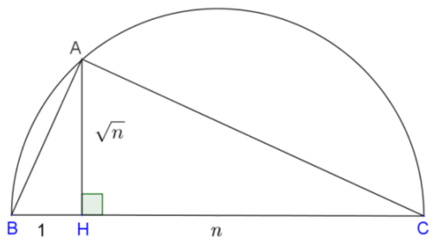


Sur ce schéma apparaissent cinq petits rectangles et deux plus grands ABCD et IJKL.

Le rectangle ABCD, formé par les 6 colonnes intérieures, est divisé par ces colonnes en 5 rectangles plus petits dont les dimensions sont dans les mêmes proportions que celles du rectangle ABCD. Donc on a AD = $\sqrt{5}$ AB.

D'autre part, le rapport entre les deux largeurs IJ et AB des rectangles ABCD et IJKL est le nombre d'or $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Ainsi le nombre $\sqrt{5}$ intervient à plusieurs niveaux dans les proportions de ce monument.



6. Problème : Construction de racine carrée

L'unité étant choisie, comment construire une longueur qui mesure $\sqrt{5}$? Et plus généralement $\sqrt{n}$?

Le professeur peut laisser les élèves chercher un peu car ils peuvent penser à tracer un triangle rectangle de côtés 1 et 2, ce qui donne $\sqrt{5}$ pour l'hypoténuse.

On sait déjà construire $\sqrt{2}$ (avec le carré) et $\sqrt{3}$ (avec le triangle équilatéral). Mais si on voulait construire $\sqrt{5}$ ou $\sqrt{6}$ comment faire ? On peut penser à "L'escargot de Pythagore", mais ce n'est pas la solution la plus rapide.

Une autre solution se trouve dans la situation que nous avons appelée « Les trois triangles rectangles », dans cette brochure (p 94).

Soit le segment [BC] et un point H de ce segment tel que la longueur de [BH] soit 1 et celle de [HC] soit *n*. Le demi-cercle de diamètre [BC] et la perpendiculaire en H à la droite (BC) se coupent en A.

Pourquoi le triangle BAC est-il rectangle ? (Réponse : il est inscrit dans un demi-cercle)

Pourquoi les triangles AHB et AHC ont-ils les mêmes angles et leurs côtés proportionnels ?
(Les angles $\widehat{ABH}$ et $\widehat{HAC}$ ayant le même complément sont égaux et leurs tangentes sont égales).

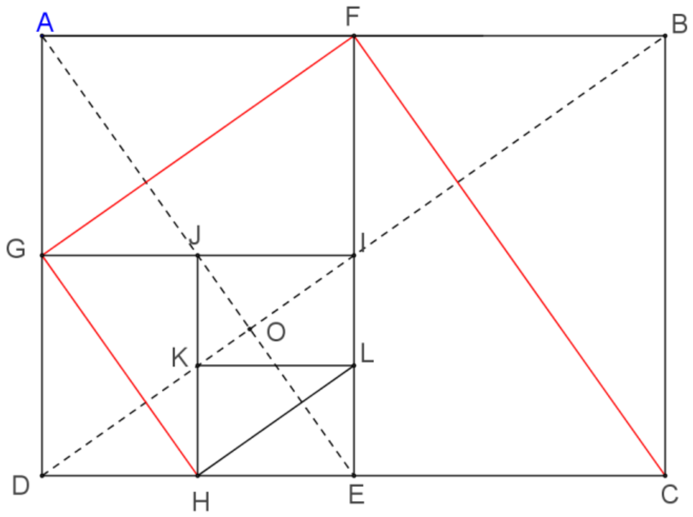
Il en résulte que $\dfrac{AH}{BH} = \dfrac{AC}{AH}$,

AH^2 = HB × HC = 1 × n, donc AH = $\sqrt{n}$.

7. La spirale logarithmique

Soit un rectangle ABCD, tel que AB = $\sqrt{2}$ AD.

Il est partagé par son axe de symétrie (EF) en deux rectangles dont les dimensions sont dans le même rapport que celles de ABCD.



On a déjà vu dans un exercice précédent que (AE) et (DB) sont perpendiculaires.

En effet, tan $\widehat{DAE}$ = $\dfrac{\mathrm{ED}}{\mathrm{AD}}$ = $\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AB}}$ = tan $\widehat{ABD}$ donc $\widehat{DAE}$ = $\widehat{ABD}$ et donc $\widehat{ABD}$ + $\widehat{EAB}$ = 90°. Dans le triangle rectangle ABD, la hauteur [AO] découpe deux autres triangles rectangles dont les côtés sont proportionnels à ceux de ABD, car les trois triangles ont les mêmes angles[14]. Donc OB = $\sqrt{2}$ OA et OA = $\sqrt{2}$ OD.

[14] Voir la situation des trois triangles rectangles dans cette brochure.

Le processus se poursuit à l'infini car le point I, intersection de (DB) et (EF), est le milieu de [EF]. On obtient ainsi deux rectangles AFIG et GIED dont les côtés sont proportionnels à ceux de AFED donc dans le rapport $\sqrt{2}$.

D'où, dans le triangle rectangle ADE, partagé en deux triangles rectangles par sa hauteur [DO],

OD = $\sqrt{2}$ OE.

Mais comme J est le milieu de [GI], dans le triangle rectangle EIJ, on a encore OE = $\sqrt{2}$ OI et

OI = $\sqrt{2}$ OJ.

Comme K est le milieu de [JH], dans le triangle rectangle IJK, on a aussi OJ = $\sqrt{2}$ OK.

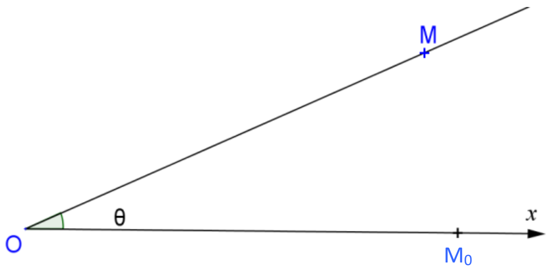
On retrouve l'empilement des rectangles découpés dans la séquence sur le format A4 (fig 5).

Les points B, A, D, E, I, J, K, L, etc. se placent tous sur une courbe appelée spirale logarithmique. Ici, on part de la demi-droite [Ox) et du point B de cette demi-droite. Chaque fois que la demi-droite tourne de 90°, on place un point de sorte que la distance de O à ce point soit $\frac{1}{\sqrt{2}}$ OB pour le premier puis $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ OB, puis $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^3$ OB, etc.

Le mot « logarithmique » se réfère à la suite exponentielle de raison $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Cette spirale s'enroule autour du point O, point asymptôte dont elle s'approche sans jamais l'atteindre car $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ tend vers 0 quand n tend vers l'infini.

Si on repasse en rouge les segments qui joignent ces points on a un joli dessin qui donne une idée de la spirale mais qui n'est pas une spirale logarithmique car une spirale est arrondie.

Le point M décrit une spirale logarithmique quand OM = a^{θ} où a est une constante[15].



Définition mathématique de cette courbe

[Ox) est demi-droite orientée, M un point

On part du point M_0 sur [Ox) avec $OM_0 = 1$.

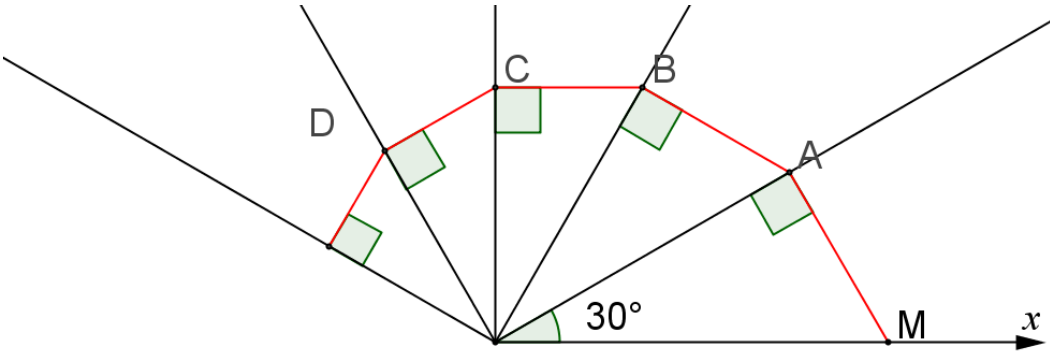
15 Il s'agit des coordonnées polaires de M (ρ et θ) avec ρ = OM

Chaque fois que □ augmente d'une valeur Δ□ constante, qui peut être aussi petite que l'on veut, on obtient un point M_1 tel que $OM_1 = a^{□+□□} = OM_0 \times a^{□□} = k\, OM_0$ puis

$OM_2 = OM_1 \times a^{□□} = kOM_1$.

À chaque augmentation régulière de □□□□le rayon [OM] tourne et il est multiplié par la constante *k.*

On pourra faire tracer aux élèves de plus belles courbes en faisant tourner la demi-droite [Ox) d'un angle plus petit, par exemple de 45° ou de 30°.



Le professeur pourra partir alors dans trois directions :

- soit vers l'art et les spirales car il y a de nombreuses sculptures (Mont-Saint Michel par exemple) où on trouve ces spirales ;
- soit vers la biologie avec la coquille du nautile, qui commence par se fabriquer un logement tout petit au départ et qui, lorsqu'il grandit s'en fabrique un autre de même forme collé à l'ancien mais plus grand et ainsi de suite ;
- soit vers les fractales à cause des figures qui se reproduisent semblables à elles-mêmes et de plus en plus petites (on est toujours dans le thème proportionnalité et géométrie).

8. Une construction ingénieuse :

Ce qui suit est un peu long et difficile à expliquer complètement en 3ème et même en seconde. Le professeur pourra en tirer des idées de problèmes à la maison.

Cette construction permet d'obtenir en même temps un grand rectangle et *n* rectangles à l'intérieur, tous isométriques et proportionnels au grand[16]. La démonstration est rédigée pour dans le cas *n* = 2, puis pour n = 3. On voit facilement que ceci peut se généraliser avec *n* rectangles.

---

16 Cf. *Mathématiques dynamiques*, Annie Berté, Nathan Pédagogie, 1993, page 299 et plus largement pour tout ce qui précède, pages 290 à 301.

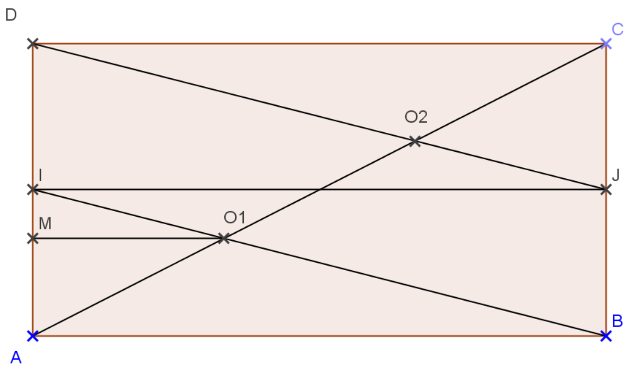
Dans ce qui précède sont déjà résolus de nombreux petits problèmes qui aident à comprendre cette construction. Cependant, il faut se convaincre encore d'une propriété directe et de sa réciproque.

Le cadre géométrique marche bien pour la propriété directe (application du théorème de Thalès dans le triangle) et le cadre analytique (fonction affine et démonstration d'un alignement) pour la propriété réciproque.

a. <u>Propriété directe</u>

Voici la démonstration pour *n* = 2 :

Soit ABCD un rectangle quelconque, posons AD = 2 pour normaliser le rectangle. Soit I et J milieux respectifs de [AD] et [BC], O_1 le point d'intersection de [IB] et [AC].



M est le projeté orthogonal de O_1 sur (AD).
Dans les triangles ADC et CBA,
(DJ) // (IB), AI = ID alors $AO_1 = O_1O_2$, de même CJ = JB alors $CO_2 = O_1O_2$, alors $AO_1 = O_1O_2 = CO_2$.
(O_1M) // (DC) et $AO_1 = \frac{1}{3}$ AC donc AM = $\frac{1}{3}$ AD = $\frac{2}{3}$.
On peut faire la même démonstration avec un rectangle ABCD tel qu'AD = 3 et découpé en trois rectangles identiques.

$(DJ_2) // (I_2J_1) // (I_1B)$

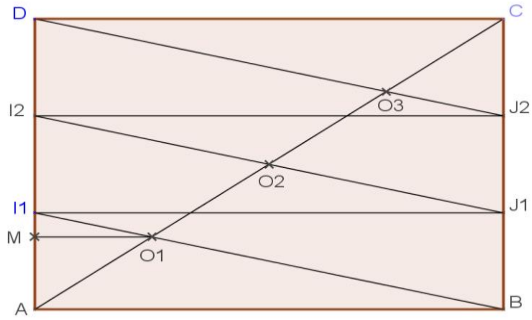
$AO_1 = O_1O_2 = O_2O_3$

$CO_3 = O_3O_2 = O_2O_1$

donc $AO_1 = O_1O_2 = O_2O_3 = O_3C$

$(O_1M) // (DC)$.

Alors $AO_1 = \frac{1}{4}$ AC et AM = $\frac{1}{4}$ AD = $\frac{3}{4}$.



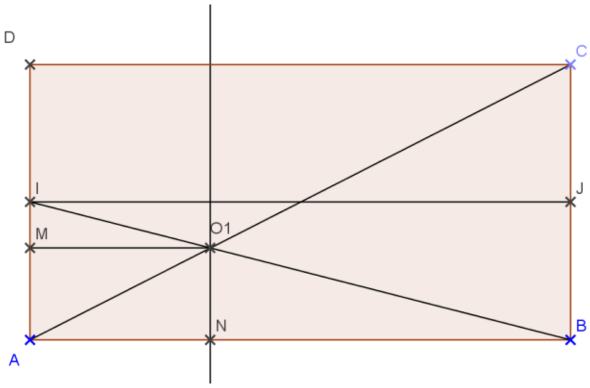
On peut généraliser cette relation au cas où

on découpe le segment [AD] en *n* parties égales ce qui nous donne comme relation : AM = $\frac{n}{n+1}$.

b. Réciproque

Soit ABCD un rectangle quelconque, posons AD = 2 pour normaliser le rectangle.

Soit I et J milieux respectifs de [AD] et [BC].



On place M sur [AD] tel que AM = $\frac{2}{3}$.

Soit O_1 un point de [AC] tel que (MO_1) est parallèle à [AB].

En utilisant le théorème de Thalès dans le triangle ADC, on démontre que $MO_1 = \frac{1}{3}$ DC.

Soit N le projeté orthogonal de O_1 sur [AB],

$\frac{NO_1}{AI} = \frac{\frac{2}{3}}{2} = \frac{1}{3}$ et $\frac{BN}{BA} = \frac{1}{3}$

On a alors dans le triangle BAI :

- $(NO_1) // ((AI)$;
- B, N et A sont alignés ;
- $\frac{NO_1}{AI} = \frac{BN}{BA}$;

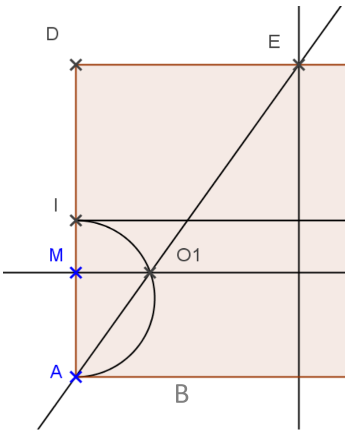
donc B, O_1 et I sont alignés.

c. Construction

On choisit un nombre *n* et on place les points I_i régulièrement sur le segment [AD]. On place le point M sur [AD] tel que AM = $\frac{n}{n+1}$. On trace ensuite le demi-cercle de diamètre [AI_1] et la perpendiculaire à [AD] passant par M. On obtient alors le point O_1.

On prolonge ensuite la droite (AO_1) et on obtient le point E sur la perpendiculaire à [AD] passant par D. On termine alors le rectangle ADEB.

Voici la figure pour n = 2 :



Les dimensions du rectangle ADEB sont donc 2 et $\sqrt{2}$.

CROISSANCE DES ETRES VIVANTS, PROPORTIONNELLEMENT OU NON

Problème posé

- Le professeur amène en classe des feuilles d'un même arbre de différentes tailles.

Les élèves se mettent par groupe de 4 et mesurent la longueur maximale L et la largeur maximale *l* de cinq ou six feuilles, de préférence prises sur un même rameau. Les résultats sont rassemblés dans un tableau.
Le professeur demande aux élèves s'ils peuvent faire des conjectures sur ces résultats.

- Le professeur fait discuter la classe sur des documents.

Par exemple un croquis représentant des silhouettes humaines allant d'un fœtus de 2 mois à un adulte, une poupée Ashanti ou une photo d'une telle statuette, une photo d'une jument et de son poulain.
Ces documents et la trame de la discussion sont fournis dans la brochure.

Niveau De la 6ème à la 2nde

Objectifs possibles

- Initier à l'activité de modélisation : le calcul des rapports L/ *l* et le report des données sur deux axes de coordonnées permet de comprendre ce que peut être une modélisation.
- Faire le lien entre mathématiques et autres disciplines (SVT, Arts plastiques).

Notions utilisées

- Proportionnalité (mise en évidence du coefficient de proportionnalité).
- Proportionnalité et représentation graphique.

Matériel

- Cinq ou six feuilles de magnolia (prises, de préférence, sur le même rameau).
- Règle graduée.
- Pour la seconde partie, les documents sont fournis dans la brochure. En complément, le professeur ou les élèves peuvent amener des documents personnels ou trouvés sur internet. La poupée Ashanti s'achète pour un prix modique chez les marchands ambulants africains.

Temps de mise en œuvre en classe : 1 heure

Croissance des êtres vivants, proportionnellement ou non

La séquence suivante peut se dérouler aussi bien en CM1 qu'en 6ème, 5ème ou 4ème, voire plus tard si on exploite les prolongements. Cette séquence est directement inspirée des travaux d'Emma Castelnuovo[17].

I. Les feuilles d'arbres

Le professeur amène en classe des feuilles d'un arbre, de différentes tailles. Les élèves se mettent par groupe de 4 et mesurent la longueur maximale L et la largeur maximale *l* de cinq ou six feuilles, de préférence prises sur un même rameau. Par exemple, les feuilles de magnolia sont très appropriées car assez grandes et assez résistantes au dessèchement.

Les résultats sont rassemblés dans un tableau.

L en cm	l en cm
20,5	7,9
19,2	7,3
18	6,9
16	6,5
12,6	4,9

Le professeur demande aux élèves s'ils peuvent faire des conjectures sur ces résultats.

Le tableau seul ne renseigne guère.

---

[17] Emma Castelnuovo, *Matematica, tome 2, figure e formule,* La Nuova Italia, p. 160 pour la croissance des feuilles, et p. 410 pour celle des enfants.

Emma Castelnuovo et Mario Barra, *Mathématique dans la réalité*, Ed. CEDIC, 1980, pour les feuilles page 65.

Fernando Corbalàn, *Le nombre d'or, Collection « Le monde est mathématique »* présentée par Cédric Villani, Ed. RBA, France, 2013.

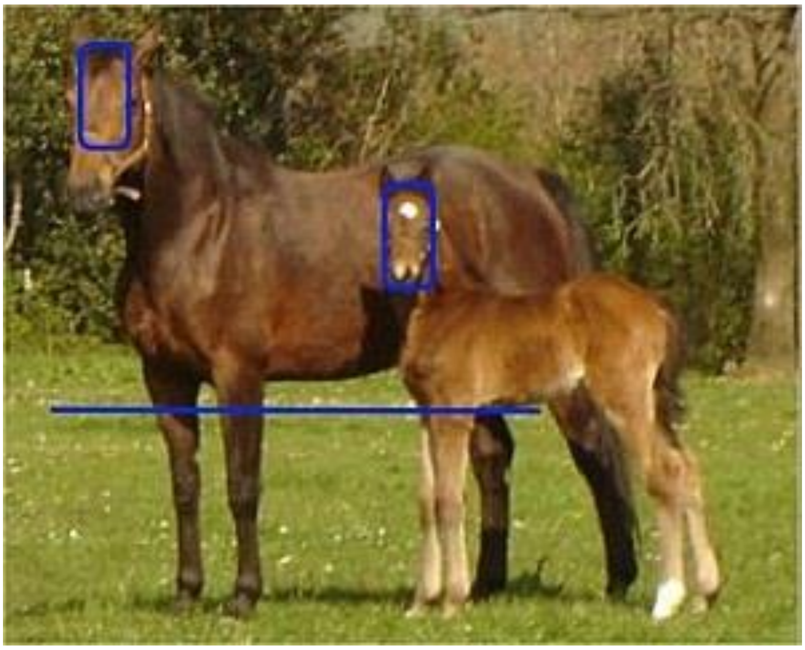
Mais les élèves peuvent penser :

- soit à la proportionnalité des dimensions donc à calculer les rapports L/ *l* ;
- soit à faire un graphique d'une dimension en fonction de l'autre.

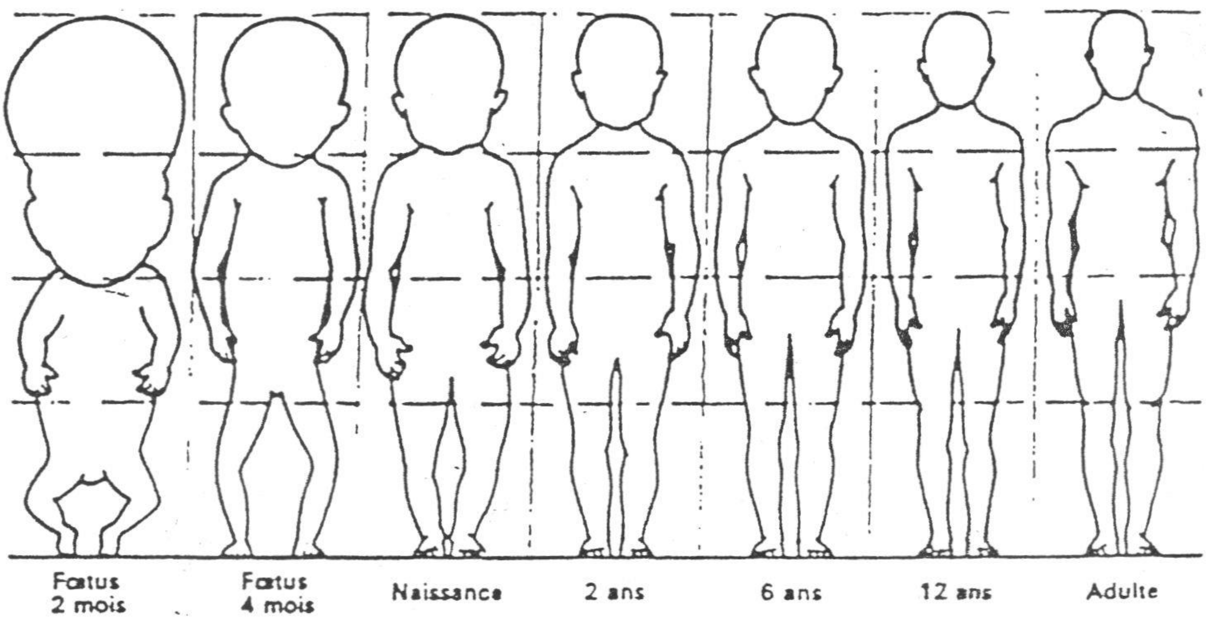
Pour les petites feuilles comme pour les grandes, L/ *l* est à peu près constant.
L'alignement n'est pas parfait car le modèle mathématique de la proportionnalité est trop simple pour expliquer d'autres phénomènes secondaires : orientation plus ou moins favorable de la feuille par rapport au soleil par exemple.
La « meilleure droite » qui passe au plus près de tous les points peut s'obtenir par la méthode des moindres carrés. C'est un prolongement possible.
Pour se rapprocher de la « réalité », il faut compliquer le modèle mathématique.

II. Les êtres vivants

Chez les animaux, la proportionnalité dans la croissance des différents éléments du corps n'est pas un modèle acceptable : le poulain a de très grandes pattes par rapport à sa taille.



Chez les humains, la hauteur totale divisée par la hauteur de la tête ne donne pas un rapport constant selon l'âge, l'enfant jeune ayant une grosse tête par rapport à son corps. Pour le cheval, ce sont les pattes qui sont importantes, pour les humains c'est le cerveau !



Dans le dessin ci-dessus, le fœtus représenté fait penser, avec sa grosse tête, aux poupées Ashanti, amulette de fécondité dans toute l'Afrique de l'Ouest. Ne pas respecter la proportionnalité est, pour un artiste, une des façons de produire un effet saisissant pour s'exprimer autrement qu'avec des mots.

Un professeur d'arts plastiques a exprimé son étonnement sur ce symbole de fécondité, en se référant aux vénus préhistoriques où, au contraire c'est le ventre qui se présente de façon disproportionnée.

C'est la richesse d'un travail interdisciplinaire de donner lieu à de telles remarques. Effectivement, nos élèves pourront aller voir la Vénus à la Corne de Laussel (Dordogne), sculpture en bas-relief datée du Périgordien supérieur et qui se trouve au Musée d'Aquitaine.

III. La Vénus de Laussel

http://fr.wikipedia.org/

La Vénus de Laussel ou Vénus à la corne est une Vénus paléolithique datant du Gravettien (environ 25 000 ans BP, Before Present, Paléolithique supérieur). Elle a été sculptée en bas-relief sur un bloc calcaire et peinte à l'ocre rouge. Elle correspond à un personnage féminin nu tenant dans sa main droite un objet interprété généralement comme une corne de bison. Elle est conservée au Musée d'Aquitaine, à Bordeaux.

Historique:

La Vénus fut découverte en 1911 sur le site archéologique de Laussel, dans la commune de Marquay, en Dordogne. Elle a été trouvée sur un gros bloc de calcaire mis au jour dans une séquence stratigraphique importante, explorée sous un long surplomb rocheux dominant la vallée de la Beune, dans la région des Eyzies. Elle fait partie d'un ensemble de blocs calcaires sculptés de figurations humaines et découverts dans le même site.

La paternité de la découverte de la Vénus est attribuée au médecin psychiatre bordelais Jean-Gaston Lalanne. Passionné d'anthropologie et de préhistoire, il avait loué le site de Laussel ainsi que l'abri-sous-roche de Cap-Blanc, situé à moins d'un kilomètre de là, afin d'y effectuer des fouilles. Celles-ci commencent dès 1908, mais J-G. Lalanne, retenu ailleurs pour des raisons professionnelles, s'en remet rapidement à ses ouvriers pour la poursuite du chantier. Dans la pratique, la Vénus à la corne fut découverte par les ouvriers employés par J.-G. Lalanne, conduits par le Périgourdin Raymond Peyrille. En 1911, plusieurs œuvres gravées sont découvertes successivement :

- entre mars et avril, les ouvriers trouvent un bloc orné d'une scène montrant deux personnages ;
- la Vénus à la corne est mise au jour début décembre ;
- une représentation féminine, dite « Vénus à tête quadrillée », est signalée dans une lettre de Peyrille à Lalanne datée du 11 décembre ;
- en février 1912, une dernière Vénus, dite « Vénus de Berlin », est vendue frauduleusement par Peyrille au Museum für Völkerkunde de Berlin, à l'insu de Lalanne. Peyrille fut condamné à six mois de prison pour abus de confiance mais le conservateur berlinois refusa de restituer l'objet, la condamnation ne faisant pas état d'un vol. La Vénus de Berlin a probablement été détruite pendant la Deuxième Guerre mondiale, durant les bombardements de mai 1945 et seuls en subsistent des moulages et une photographie.

La Vénus à la corne avait été sculptée sur un bloc volumineux dont la base se trouvait dans les niveaux ayant livré une industrie gravettienne. La partie ornée a été sciée afin d'être prélevée et mise à l'abri. Le sciage en question a été mal conduit : la portion coupée a une épaisseur de seulement un demi-centimètre à droite contre une quinzaine à gauche.

La Vénus fut transportée dans le petit musée privé de J-G. Lalanne au Bouscat où elle demeura après sa mort survenue en 1924, jusqu'en 1960, date à laquelle la famille fit don de l'ensemble des collections Lalanne au nouveau musée archéologique de Bordeaux, le futur Musée d'Aquitaine. Le 13 juillet 1926, les bas-reliefs du site de Laussel furent classés parmi les monuments historiques par un décret signé du président Gaston Doumergue.

La Vénus est aujourd'hui présentée au sein de l'exposition permanente du Musée d'Aquitaine, à Bordeaux en France. Elle a été exhibée dans le cadre d'expositions temporaires à l'American Museum of Natural History de New York en 1986 et au Musée national des beaux-arts du Québec en octobre 2003.

<u>Datation:</u>

La Vénus de Laussel n'a pu bénéficier de datation absolue mais elle est rapportée au Gravettien sur des bases stylistiques et stratigraphiques. Elle daterait donc d'environ 25 000 ans avant le présent.

<u>Description:</u>

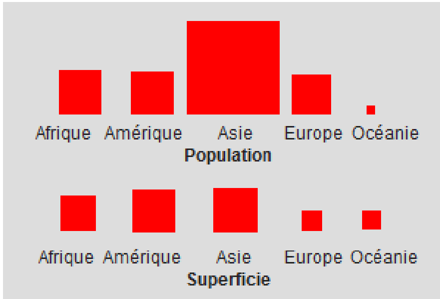
De relativement grandes dimensions (54 cm × 36 cm), elle a été détachée de la paroi afin d'être mise à l'abri.

La Vénus est représentée de face. Elle tient dans sa main droite une corne de bison, qui pourrait représenter une corne d'abondance. Sur cette corne, se trouvent 13 encoches, qui pourraient, selon certains chercheurs, représenter des cycles lunaires ou des cycles menstruels.

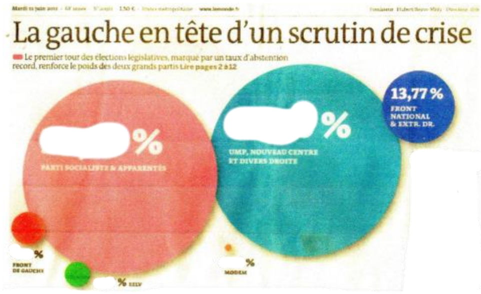
Sa main gauche est posée sur son ventre, ce qui pourrait indiquer qu'elle est enceinte. Ce qui semble être sa chevelure tombe sur son épaule gauche. Comme chez toutes les Vénus paléolithiques, on retrouve un certain nombre de conventions figuratives, avec certaines parties exagérément développées comme l'abdomen, les hanches, les seins, les fesses et la vulve alors que d'autres sont absentes comme les pieds et le visage, tourné vers la corne.

STATISTIQUES ET GEOMETRIE

I. Problème posé



<u>Première partie :</u> le professeur propose aux élèves un tableau qui donne les superficies et populations des continents en 2015 et qui est illustré par deux graphiques.
Les élèves doivent trouver comment a été construit le graphique pour la population puis refaire celui concernant la superficie en plus grand.



<u>Deuxième partie :</u> le professeur présente le graphique ci-contre, tiré d'un article du journal « Le Monde », illustrant les résultats des élections législatives dont la légende a été partiellement effacée. Les élèves doivent retrouver les pourcentages effacés, la méthode utilisée par les journalistes pour construire le graphique, puis construire une représentation mieux adaptée.
Une deuxième version propose l'analyse directe du document complet, l'idée étant alors de mettre les élèves dans la position d'un lecteur critique.

Niveau

Fin de cycle 4 ($3^{ème}$)

Objectifs possibles

- Travailler la proportionnalité avec l'aire d'un carré ou d'un disque.
- Se rendre compte que la façon de représenter des données influence l'interprétation qu'on peut en faire.

Notions utilisées

- Calculer l'aire d'un carré, d'un disque.
- Calcul d'une quatrième proportionnelle.

Matériel

- La fiche proposée par le professeur comportant les documents et les questions.
- Une calculatrice.

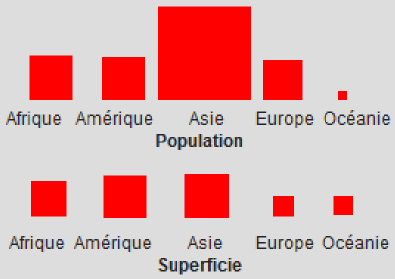
Temps de mise en œuvre en classe : 2 heures.

Statistiques et géométrie

II. Partie 1

Le tableau ci-dessous donne les superficies et populations des continents en 2015 et il est illustré par le graphique qui est tracé à gauche. (Source : *www.**statistiques-mondiales**.com*)

Nous allons étudier ces graphiques.



	Population 2015		Superficie (1)		Densité (2)
Afrique	1 154 millions	16,0 %	30	20,1 %	33,7
Amérique	969 millions	13,4 %	42	28,2 %	22,1
Asie	4 474 millions	62,0 %	44	29,5 %	96,4
Europe	604 millions	8,1 %	10	6,8 %	58,9
Océanie	37 millions	0,5 %	9	6,0 %	3.8
Antartique	1 500	0,0 %	14	9,4 %	0,0
Total	7,2 milliards		149	100,0 %	47,4
(1) en millions de Km2 - (2) Habitants par Km2					

1. Prenons le graphique représentant la population.

Cette représentation vous semble-t-elle conforme aux chiffres indiqués par le tableau ? Justifier votre réponse.

Cette question peut être corrigée à l'oral. Le carré qui représente l'Asie semble bien environ 4 fois plus grand que celui représentant l'Europe. On peut vérifier que celui de l'Océanie est environ 25 fois plus petit que celui de l'Europe (en termes d'aire bien sûr mais les élèves le voient-ils ?). Cela semble correspondre.

2. Prenons le graphique représentant la superficie. Il représente les chiffres indiqués dans le tableau, dans la troisième colonne. On veut refaire ce graphique en plus grand.

a. Prenons un carré de 1 cm de côté pour l'Europe, trouver les longueurs des côtés des autres carrés. Vous détaillerez vos calculs.

b. Tracer votre graphique. Vous semble-t-il conforme à celui du document ?

Cette partie se traite obligatoirement en classe, certains élèves auront utilisé la proportionnalité avec les longueurs des côtés des carrés et n'auront donc pas un graphique correct. D'autres auront peut-être pensé aux aires. Une discussion s'engage pour faire comprendre que la proportionnalité s'applique aux aires des carrés et non aux côtés. La proportionnalité avec les côtés donne une représentation qui n'est pas vraisemblable. L'Europe est représentée par un carré d'un centimètre de côté, le carré qui représenterait l'Asie devrait faire plus de 4 cm de côté, cela semble énorme ! Cela ne correspond pas aux proportions du graphique trouvé sur le net.

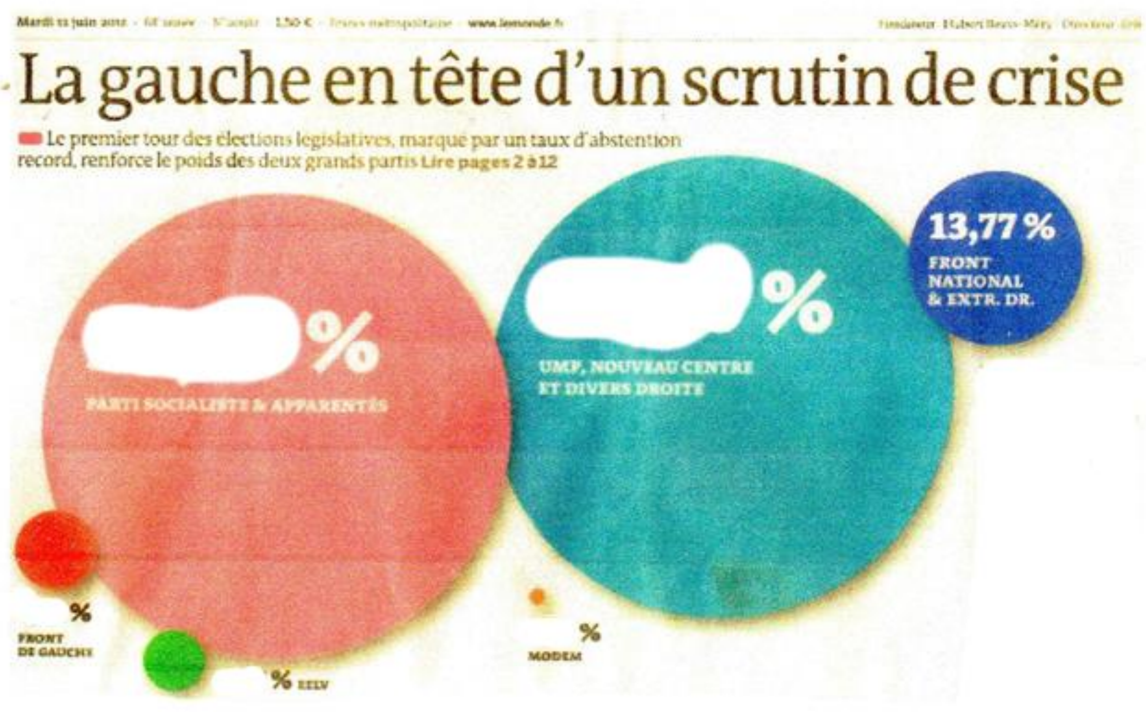
III. Partie 2

À partir d'un même document, deux situations de travail différentes sont détaillées ci-dessous.

L'objectif est de montrer en quoi les mathématiques permettent aux élèves d'adopter une position critique face au flux incessant d'informations auxquelles ils ont accès et d'être vigilant face aux représentations qui en sont faites (Domaine 5 du socle commun).

1. Proposition n°1

Le professeur distribue le document suivant aux élèves et le projette au tableau pour le présenter brièvement.



Le document ci-dessus est issu d'un article du journal « Le Monde » qui représente les résultats des élections législatives qui ont eu lieu en juin 2012.

Des élèves remarquent le sous-titre et disent qu'ils sont d'accord avec ce qui est dit, en effet les deux disques représentant le PS et l'UMP sont beaucoup plus grands que les autres. Les disques des trois autres partis semblent vraiment minuscules.

Étape 1 : les pourcentages obtenus par les divers partis politiques à l'élection ont été effacés, sauf celui du Front National.
Mentalement, donner un ordre de grandeur des pourcentages obtenus par les autres partis.
Justifier votre réponse.

Des élèves répondent que les deux cercles turquoise et rose contiennent le cercle bleu du FN au moins 6 fois chacun, ce qui fait plus de 60 % chacun et ils en déduisent que ce n'est pas possible puisque rien qu'avec ces trois partis, cela ferait déjà plus de 100 %. Ils en concluent que le graphique présenté est faux. La classe semble d'accord. Le professeur ne fait à cette étape aucun commentaire et passe directement à l'étape 2.

Étape 2 : le professeur projette les chiffres au tableau que les élèves reportent sur leur document : Front National : 13,77 % ; UMP, Nouveau Centre et divers droite : 34,10 % ; Parti Socialiste et apparentés : 34,43% ; Front de Gauche : 6,94% ; EELV : 5,57 % ; Modem : 2,33%.
Tracez un graphique analogue à celui présenté par le journal mais qui vous semble illustrer les résultats de ces élections de manière plus vraisemblable. Indiquez vos calculs.

Les élèves se lancent dans les calculs. Ils pensent en majorité à la proportionnalité entre les diamètres des disques et les pourcentages. Ils mesurent le diamètre du disque représentant le FN et calculent le diamètre correspondant pour le disque turquoise. La mesure du diamètre est faite de manière approximative.

Lors de la correction de ces calculs au tableau, certains élèves s'aperçoivent que la mesure trouvée correspond à celle qui figure sur leur document. Ils révisent donc leur jugement, le graphique proposé n'est pas faux ! Il est bien construit proportionnellement aux diamètres des cercles ! Ils sont alors bloqués et ne voient pas comment construire un graphique plus pertinent.

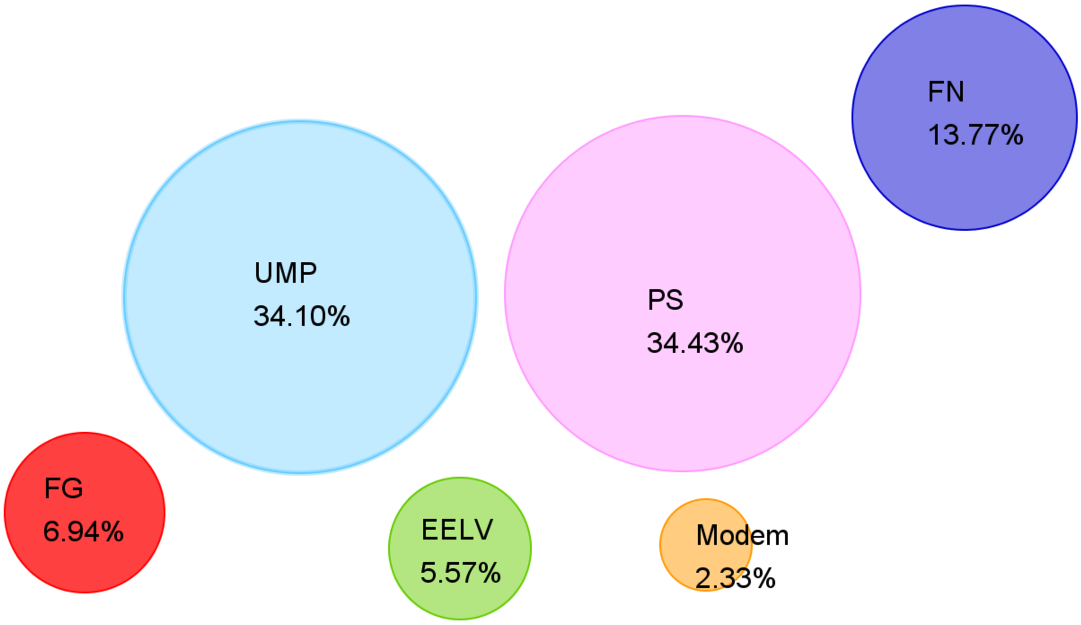
Pour trouver une nouvelle idée, le professeur relance alors le débat dans la classe. Quelques élèves, peu nombreux, se rappellent alors que lors de la comparaison, à l'étape 1, ils ont utilisé l'aire du disque. Ils tentent de l'expliquer aux autres. Le professeur intervient : il dessine à main levée les 6 ou 7 disques bleus à l'intérieur du disque rose. Finalement tous les élèves sont d'accord : les pourcentages doivent être proportionnels aux aires des disques et non à leurs diamètres.

Ils calculent l'aire du disque bleu. Des confusions entre diamètre et rayon, puis entre les formules du périmètre et celle de l'aire d'un disque, persistent.

Ils calculent l'aire des disques turquoise et rose et le professeur organise la correction de ces calculs au tableau.

Ensuite, les élèves se demandent comment retrouver le diamètre ou le rayon de ces disques pour tracer le graphique. Le professeur les guide éventuellement pour la résolution de l'équation πr^2 = aire, d'inconnue *r.*

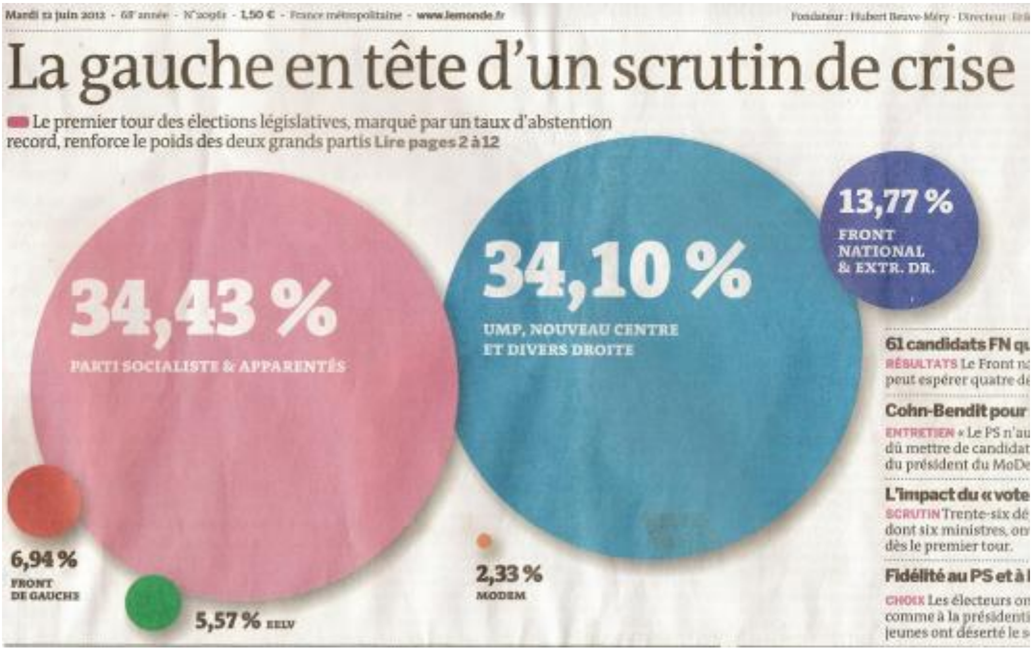
Les élèves tracent les trois premiers disques et constatent qu'effectivement, les proportions semblent plus réalistes.



Un débat s'installe alors en classe sur le choix fait par le journal. Le professeur demande aux élèves de relire le sous-titre de l'article. Contrairement à la représentation qu'ils viennent de construire, ils constatent que celle du journal valorise beaucoup les deux « grands partis », au détriment des autres. Ils se demandent si le sous-titre a été choisi avant de faire le graphique, celui-ci étant alors volontaire, pour renforcer l'argument. Ou bien si le sous-titre a été choisi après, se contentant de retracer l'impression donnée par le graphique.

En conclusion, on peut dire que les informations données dans les journaux ou sur les sites internet doivent être vérifiées et comparées car elles peuvent être trompeuses. Ici les mathématiques ont permis de le comprendre.

2. <u>Proposition n°2</u>


Mardi 12 juin 2012 - 68e année - 1,50 € - France métropolitaine - www.lemonde.fr

Fondateur : Hubert Beuve-Méry

La gauche en tête d'un scrutin de crise

Le premier tour des élections législatives, marqué par un taux d'abstention record, renforce le poids des deux grands partis Lire pages 2 à 12

34,43 % PARTI SOCIALISTE & APPARENTÉS

34,10 % UMP, NOUVEAU CENTRE ET DIVERS DROITE

13,77 % FRONT NATIONAL & EXTR. DR.

6,94 % FRONT DE GAUCHE

5,57 % EELV

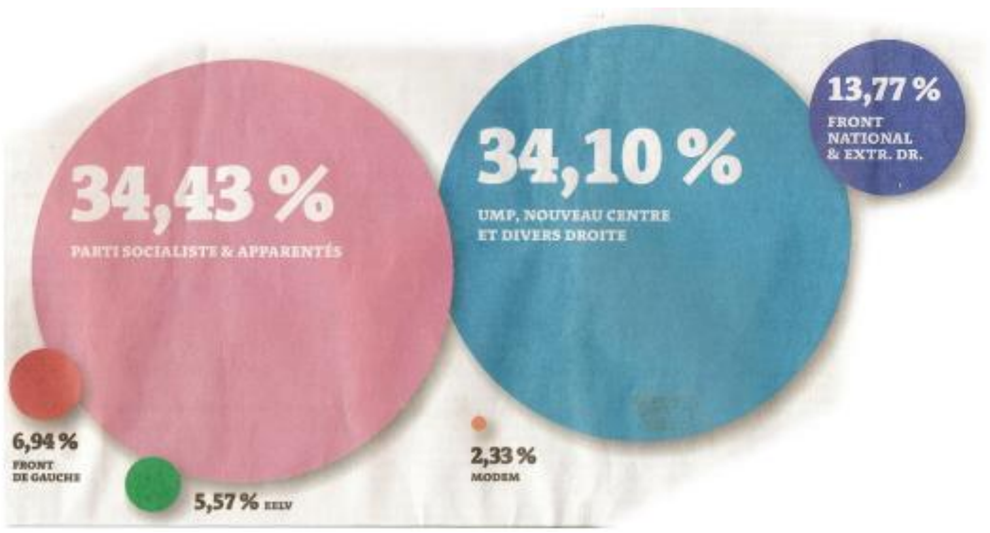
2,33 % MODEM

Les élèves sont mis dans la position du lecteur qui découvre l'article.

L'image ci-dessus est projetée, le professeur la présente rapidement : c'est un article à propos d'une élection (le texte complet de l'article n'est pas affiché), qui débute par une représentation des résultats, sur laquelle s'appuie le (la) journaliste comme en témoigne le sous-titre.

Le professeur dit que l'on va particulièrement s'intéresser à cette représentation graphique des pourcentages.

Il distribue alors le document suivant sur lequel ne figure plus que le graphique.



Consigne : « Que pensez-vous de cette représentation des résultats ? »

En fonction de la réaction de la classe, on peut préciser (mais sans trop en dire) : « est-ce une bonne représentation ? Illustre-t-elle correctement ce que disent les chiffres, leurs différences, puisque c'est son but ?... ».

Un premier temps de recherche (individuelle, cinq minutes) est proposé.

Le premier réflexe de la très grande majorité des élèves a été de se lancer dans le calcul de la somme des pourcentages : ce total est de 97,14 % ! Pour certains, très vite, il n'y a plus rien à dire...

Un premier moment collectif s'est imposé : le professeur explique alors que le pourcentage restant représente certainement des « non-inscrits » à un parti politique et que l'auteur(e) de l'article a fait le choix de ne pas les faire figurer.

Une fois ce point évoqué et « réglé », il relance la recherche en précisant à nouveau les objectifs de leur recherche.

Un bon nombre d'élèves remarque qu'il y a un « problème avec la taille des disques ».

Dans une des classes, le professeur a eu besoin d'expliciter la consigne : un graphique volontairement trompeur (rapidement fait au tableau, type diagramme en bâtons pour ne pas tout divulguer) leur est présenté. Cela a suffi pour les mettre sur la voie et pour que tous finissent par observer le « problème » évoqué plus haut.

La phase individuelle de recherche est terminée, une phase de synthèse collective débute.

Les élèves ont du mal à expliciter le « problème » : les disques rouge et vert sont trop petits par rapport aux rose et bleu ; ou inversement… Il va s'agir de définir précisément ce que signifie « la taille » d'un disque pour les élèves.

Pour aider, le professeur peut suggérer l'utilisation d'ordres de grandeur.

Par exemple, en faisant observer que le disque rouge représentant environ 7 % et que le disque rose représentant environ 35 %, le professeur demande comment devrait alors « être » le disque rose par rapport au disque rouge.

Ce disque doit être environ cinq fois « plus grand » que le disque rouge. Certains disent que « sa taille » doit être « cinq fois » celle du disque rouge.

Les élèves arrivent finalement à préciser que le disque rose semble bien plus que « cinq fois plus grand » que le disque rouge !

Il s'agit maintenant de leur faire préciser ce qu'ils entendent par « cinq fois plus grand » ou par la « taille » d'un disque.

Un certain nombre parle immédiatement d'aires en disant que l'aire du disque rose devrait être cinq fois plus grande que celle du disque rouge.

D'autres parlent du rayon ou du diamètre comme élément déterminant : tous sont incités à mesurer sur le graphique les rayons ou les diamètres des disques rouge et rose. Un nouveau problème peut alors se poser : comment les mesurer, sans avoir le centre des disques ? Le professeur peut décider d'approfondir ou non. Ici, les élèves ont mesuré approximativement les diamètres (et ont éventuellement divisé par 2) et le problème des procédures possibles, plus précises et rigoureuses, a été évoqué.

Ces mesures confirment que, approximativement, le rayon du disque rouge (entre 0,6 cm et 0,7 cm) est cinq fois plus petit que celui du disque rose (environ 3,2 cm) et que cela ne donne donc pas une « bonne » représentation de ce rapport. Ces mesures dépendent du format du document transmis aux élèves.

Tous sont donc d'accord pour travailler sur les aires : le professeur amène les élèves à préciser que les aires des disques doivent être proportionnelles aux pourcentages.

Il est alors décidé de construire une représentation conforme.

Pour ce faire, il est utile de garder un des disques présents comme disque de référence (pourcentage/aire et par suite, rayon) pour les calculs. Le choix a été fait ici de prendre le disque rose comme disque de référence. Les élèves mesurent le rayon de ce disque et calculent son aire (rayon 3,2 cm environ, aire d'environ 32,17 cm² pour un pourcentage de 34,43 %).

Il est alors demandé aux élèves de calculer les aires des autres disques (le professeur peut suggérer de construire un tableau de proportionnalité pour ceux qui ont du mal à démarrer).

Une fois ce travail terminé, le professeur demande de refaire le graphique avec les « bons » disques.

Un nouveau problème se pose : comment construire un disque d'aire donnée ?

Ce problème s'avère difficile pour la grande majorité des élèves. Le professeur devra, en fonction de sa classe, plus ou moins guider le travail vers la résolution d'équations du type πr^2 = aire, d'inconnue r !

Les élèves construisent ensuite le graphique sur lequel les aires sont donc proportionnelles aux pourcentages et peuvent ainsi comparer avec la représentation initiale.

Un retour au sous-titre de l'article peut ensuite être envisagé pour débattre de l'impact possible d'une mauvaise représentation, des intentions ou non de l'auteur(e)… et revenir ainsi aux objectifs de départ.