دانشگاه الزهرا

گروه فیزیک

مباحث ویژه‌ی ریاضی در فیزیک

(گروه‌ها و جبرهای لی)

عزیزاله شفیع‌خانی

پاییز ۱۳۸۳

Version 0.2

فهرست مندرجات

فصل ۰

مقدمه

شاید نوشتن طرحِ یک درس و ارائه آن به صورت الکترونیکی (e-Lecture Notes) در ایران متداول نباشد، امّا این اولین ِ آن‌ها نیست. این مجموعه یک درس‌نامه برای دانشجویانِ تحصیلاتِ تکمیلی‌ی ِ فیزیک است و بی‌شک دارای اشکال‌های نگارشی و حتی علمی است. امّا می‌تواند با کمک شما روزی به یک کتابِ کامل تبدیل شود. در نتیجه خوشحال خواهم شد، اگر اشکال موجود آن‌را به صورت حضوری یا با ارسال مکتوب آن به وسیله‌ی پست ِ الکترونیکی «ashafie@alzahra.ac.ir» تذکر دهید. شاید با تکمیل این مجموعه اولین کتابِ به فارسی نگارش شده‌ی ِ نظریه‌ی گروه‌ها و جبر ِ لی‌در دست‌رس دانشجویان رشته‌ی فیزیک و علاقه‌مندان قراربگیرد.

بگذارید تا مقدمه را در فرصتی دیگر پس از کامل شدن فصل‌های این درس‌نامه تکمیل کنم، که حرف بسیار دارم.

در پایان تعدادی از فصل‌ها مسائلی گنجانده‌ام تا بعضی از ناگفته‌ها را در آن‌جا بگویم!

۱.۰ نمادها و قراردادها

در ابتدا نمادهایی که در طول این درس از آن‌ها استفاده خواهد شد به صورت فهرست‌وار آورده‌ام.

همه‌ی نمادهایی که در این درس استفاده خواهد شد، نمادهای مرسوم هستند.

نماد	معنی	مثال
$=$	Equals	$x^2 = 4$ so that $x = \pm 2$ in this case
$:=$	defined equal to	$(f \circ f)(x) := f(f(x))$
$/$	not	A slash through most symbols negatives that symbol, e.g. $\notin$, $\neq$
$\Rightarrow$	l.h.s. implies r.h.s.	$x = 2 \Rightarrow x^2 = 4$
$\Leftrightarrow$	each side implies the other	$x = \pm 2 \Leftrightarrow x^2 = 4$
iff	if and only if (same as $\Leftrightarrow$)	
$:$	is defined as	The map/function f maps values in
$\rightarrow$	maps from ... to	set S to set T, $f : S \rightarrow T$
$\mapsto$	maps to	$x \mapsto x^2$ means $f(x) := x^2 \in T, x \in S$
into		$\{f(x)\|x \in S\} \subset T$
(surjective)	onto	$\{f(x)\|x \in S\} = T$
(injective)	one-to-one	$x, y \in S$ and $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$
s.t.	such that	
w.l.o.g.	without loss of generality	
w.r.t.	with respect to	
$\exists$	there exists	
$\forall$	for all	
a mod n $\|a\|_n$	a modulus n	Take or add n to a until $0 \leq a < n$, $\|101\|_{10} = 1$
Associativity	Brackets not needed	$a * b * c = a * (b * c) = (a * b) * c$
Commutivity	Order does not matter	$5 \times 4 = 4 \times 5$ e.g. $+$ and $\times$ of real numbers, $+$ but not $\times$ of most matrices.
Non-Commutivity	Order matters	$\mathrm{A} \times \mathrm{B} \neq \mathrm{B} \times \mathrm{A}$ e.g. $\times$ of most matrices, and composition of most functions.
$\mathbf{a}$	The vector a	Notation for vectors in typed notes
$\vec{a}$		Possible hand written vector notation
A	The matrix A	Notation for matrices in typed notes Possible hand written matrix notation A
A^T, $\tilde{\mathrm{A}}$	Transpose	Switch rows and columns of matrix A
$\mathrm{A}^\dagger$	Hermitian Conjugate	Take complex conjugate of all elements and transpose of matrix
$*$	Group Multiplication	$g_1 \ * \ g_2 \in G \forall g_1, g_2 \in G$ (usually dropped for clarity)

نماد	معنی	مثال
e	Group Identity	$e * g = g \ * \ e = g \forall g \in G$
$\mathbb{I}$	Unit Matrix	$(\mathbb{I})_{ij} = \delta_{ij}$ (elsewhere I is often used instead)
δ_{ij}	Kronecker Delta	δ_{ij}= 1 if $i = j$, else = 0.
$(...)^{-1}$	Inverse	$g * g^{-1} = g^{-1} * g = e, \forall g \in G$ (Groups) $f^{-1}(f(x)) = x$ (functions, maps)
$\|\cdots\|$	The Order of a Group	Number of elements in group, $\|\{e, a, b\}\| = 3$.
$\{...\}$	a set of objects	$A = \{a, b, c\}$ means a, b and c in no special order are the elements of the set A.
$\emptyset$	the empty set	The set with no elements. N.B. not the same as set of one element, the number zero $\{0\} \neq \emptyset$.
$\in$	is an element of or belongs to	If $A = \{a, b, c\}$ then $a \in A$
$\notin$	is an not an element of	If $A = \{a, b, c\}$ then $d \notin A$
$\subset$	subset of (but not equal to)	$\{a, b\} \subset \{a, b, c\}$
$\subseteq$	subset of or possibly equal to	$\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$
$\cup$	union	$\{a, b, c\} \cup \{b, d, e\} = \{a, b, c, d, e\}$
$\cap$	intersection	$\{a, b, c\} \cap \{b, d, e\} = \{b\}$
$\|$	subject to (in the context of sets)	$A = \{x \| x \in R, x > 0, x < 1\}$ means $A = (0, 1)$.
$\sim$	equivalence (general) (groups)	An equivalence relation for elements of a set generalises the notion of equality, obeys three axioms and partitions sets, e.g. Cosets and Congugacy for groups.
$[\cdot]$	(Conjugacy) Class Set	of all distinct elements of a group congugate to each other e.g. $[a] := \{gag^{-1} \| \forall g \in G\}$
$\approx$	Homomorphic	If $G_1 \approx G_2$ then there exists a onto map between G_1 and G_2 which preserves the group structure.
$\cong$	Isomorphic	If $G_1 \cong G_2$ then there exists a one-to-one and onto (bijective) map between G_1 and G_2 which preserves the group structure.
$\mathbb{N}$	Set of all Natural numbers	$\mathcal{N} = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ (N.B. sometimes 0 is not included.
$\mathbb{Z}$	Set of all integers	$-2 \in \mathbb{Z}$, but $-2/3 \notin \mathbb{Z}$ (from German zahlen -to count)

نماد	معنی	مثال
$\mathbb{Q}$	Set of all rationals $\mathbb{Q}=\{x\mid x=a/b, b\neq 0, a,b\in\mathbb{Z}\}$	$-2/3\in\mathbb{Q}$, but $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$ (from Quotient?)
$\mathbb{R}$	Set of all Real Numbers	$-3.51\in\mathbb{R}$, $\pi\in\mathbb{R}$ but $3+2i\notin\mathbb{R},\mathbb{Z}\subset\mathbb{Q}\subset\mathbb{R}$
$\mathcal{I}$	Set of all Imaginary Numbers	$-2i\in\mathcal{I}$, $\pi i\in\mathcal{I}$, but $3+2i\notin\mathcal{I}$ Care: $\mathbb{I}$ is often used as an identity element, e.g. a unit matrix.
$\mathbb{C}$	Set of all Complex Numbers	$+3.51+\pi i\in\mathbb{C}$, $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$
$\mathbb{A}^+$	Positive elements of set A (excludes 0)	$+3.51\in\mathbb{R}^+, 0\not\subset\mathbb{Z}^+$
$A=A^T$	A is Symmetric Matrix	$A_{ij}=A_{ji}$
$A=-A^T$	A is Anti-symmetric Matrix	$A_{ij}=-A_{ji}$
$AA^T=\mathbb{I}$	A is Orthogonal Matrix	$\sum_{k=1}^n A_{ik}A_{kj}=\delta_{ij}$
$A=A^\star$	A is Real Matrix	$A_{ij}\in\mathbb{R}$
$A=-A^\star$	A is Imajinary Matrix	$A_{ij}\in\mathbb{C}$
$A=A^\dagger$	A is Hermitian Matrix	$A_{ij}=A^\star_{ji}$
$A=-A^\star$	A is Anti-hermitian Matrix	$A_{ij}=-A^\star_{ij}$
$AA^\dagger=\mathbb{I}$	A is Unitary Matrix	$\sum_{k=1}^n A_{ik}A^\star_{kj}$

فصل ۱

گروه‌ها

۱.۱ تعریف گروه و خصوصیات آن

۱.۱.۱ تعریف

مجموعه‌ای از اعضای متمایز، $G = \{g_i | i = 1, 2, \cdots\}$، که دارای یک قانون ترکیب $(*)$ بوده و دارای خصوصیات زیر باشند را گروه می‌نامند:

۱) بسته‌بودن:

$$g_1, g_2 \in G, g_1 * g_2 = g_3, g_3 \in G \tag{۱}$$

به زبان دیگر نگاشتی از $G \times G$ به G $(g_1 * g_2 = g_3, \;\; g_1, g_2, g_3 \in G)$ و یا

$$f : G \times G \to G \tag{۲}$$

۲) شرکت‌پذیری: برای هر $\forall\, g_i \in G$

$$g_1 * (g_2 * g_2) = (g_1 * g_2) * g_3 \tag{۳}$$

۳) عضو خنثی: عضوی مانند e چنان وجود دارد که

$$g * e = e * g = g, \;\; \forall g \in G \qquad (۴)$$

۴) عضو وارون: برای هر عضوی مانند $g \in G$ وجود دارد $h \in G$ی که $g * h = 1$

$$\exists h \in G, \;\; s.t. \;\; g * h = h * g = e \; \forall \; g \in G \qquad (۵)$$

e را عضو حنثی گروه و h را واردن عضو متناظر، g^{-1}، گویند.
اگر برای تمام $g, h \in G$، $g * h = h * g$ باشد،گروه را گروه جابه‌جایی یا آبلی گویند.

۲.۱.۱ چند مثال از گروه‌ها

از این پس ضربِ دو عضو از گروه، g_1 و g_2، را برای سادگی به‌جای $g_1 * g_2$ با $g_1 g_2$ نشان خواهیم داد. در ضمن خاصیتِ شرکت‌پذیری را با $g_1 g_2 g_3$ به جای $(g_1 * g_2) * g_3$ یا $g_1 * (g_2 * g_3)$ نشان خواهیم داد.

۱) **گروه بدیهی:** مجموعه‌ای با یک عضو، e، یک گروه تشکیل می‌دهد. عمل گروه به صورت $ee = e$ تعریف می‌شود. خاصیتِ بسته بودن و شرکت‌پذیری به صورت خودکار ارضاع می‌شود. روشن است که عضو خنثی و وارون نیز e است. این گروه یک گروه جابه‌جایی است.

۲) **گروهِ اعدادِ صحیح:** مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ تحتِ عملِ جمع ـ معمولی یک گروهِ جابه‌جایی تشکیل می‌دهد.
خاصیتِ بسته بودن، $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$، جمع دو عددِ صحیح یک عددِ صحیح است. روشن است عملِ جمع خاصیتِ شرکت‌پذیری دارد. عدد صفر عضوِ خنثی است، $(\forall n \in \mathbb{Z} | 0 + n = n + 0 = n \;)$. عضوِ وارون هر عضوی مانند n، عدد $-n$ است.

۳) **اعدادِ حقیقی و $\mathbb{R}^n$**: مجموعه‌ی اعدادِ حقیقی، $\mathbb{R}$، تحت عملِ جمع تشکیل گروهِ جابه‌جایی می‌دهند.
فضايِ اقلیدسی $\mathbb{R}^n$ تحتِ عملِ جمعِ برداری تشکیل گروهِ جابه‌جایی مشابه گروهِ اعدادِ حقیقی می‌دهند.

۴) **ماتریس‌های وارون‌پذیر**: برای هر n، عددِ صحیح و مثبت، مجموعه‌ی تمام ماتریس‌هایِ وارون‌پذیرِ $n \times n$ با درایه‌های حقیقی، تحت عملِ ضربِ ماتریسی یک گروه تشکیل می‌دهند.
این گروه برای $n \geq 2$ گروه ناجابجایی است.
برای اثبات: ضرب دو ماتریسِ وارون‌پذیر خود وارون‌پذیر است. چراکه $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ است. ضرب ماتریسی، شرکت‌پذیری است. ماتریس یکه، $(A_{ij} = \delta_{ij} \;\; \forall i, j = 1, \cdots dim\ A)$ عضوخنثی است. طبق تعریف، ماتریسِ وارون‌پذیر، وارون دارد. به سادگی می‌توان نشان داد این به استثنای $n = 1$، گروه ناجابجایی است. این گروه را گروهِ عامِ خطی (روی مقدار حقیقی)، $GL(n; \mathbb{R})$، گویند.

۵) **گروه متقارن (گروه جای‌گشت[1])**: مجموعه‌ی یک‌به‌یک و پوشا از مجموعه‌ی $\{1, 2, \cdots n\}$ به خودش تحتِ عملِ ترکیب یک گروه تشکیل می‌دهد. این گروه برای $n \geq 3$ ناجابجایی است.
بسته‌بودن: ترکیب دو نگاشت یک‌به‌یک و پوشا باز یک‌به‌یک و پوشا است. ترکیبِ توابع، شرکت‌پذیری است. نگاشتِ یکانی (که ۱ را به ۱، ۲ را به ۲ و غیره) عضوِ خنثی است. نگاشتِ یک‌به‌یک و پوشا دارای وارون است. مثال‌های ساده از این دست نشان می‌دهد، اگر n حداقل 3 باشد این گروه ناجابجایی است ∘
این گروه را گروه متقارن می‌نامند. و با S_n نشان می‌دهند. نگاشت یک‌به‌یک و پوشای $\{1, 2, \cdots n\}$ یک جای‌گشت است و هم‌چنین S_n گروه جای‌گشت نامیده می‌شود. گروه S_n دارای $n!$ عضو است. **مثال**: S_3: گروه S_3 مجموعه‌ی تمام جای‌گشت‌های سه موجودِ متمایز که هر عضو از این گروه متناظر باجای‌گشتِ مشخص یکی از سه موجود از مکانِ مرجعِ معین است. برای استقرارِ موجودِ اول سه امکان و برای موجودِ دوم دو و برای موجود سوم یک امکان

[1] Permutation Group

وجود دارد، پس در این مجموعه $3 \times 2 \times 1 = 6$ عضو داریم.

$$e = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$
$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad (٦)$$

ردیف اول بیان‌گر مکان مرجع و ردیف دوم بیان‌گر مکان بعد از عملِ جای‌گشت است.

٦) **دوران حول یک محور:** اگر یک سیستم ِ فیزیکی ابتدا به اندازه‌ی زاویه‌ی θ_1 و سپس به اندازه‌ی θ_2 چرخانده شود، حالتِ اولیه و نهایی هم به وسیله یک دوران، $\theta_3 = \theta_1 + \theta_2$، به هم مربوط هستند. این عمل همان خاصیتِ بسته بودن است. حال اگر سه دوران ِ متوالی انجام دهیم، فرقی نمی‌کند که ابتدا دوران اوّل و سپس دورانی معادل دوران‌های دوم و سوم و یا ابتدا دورانی معادل دوران‌های اوّل و دوم و سپس دوران ِ سوم را انجام دهیم. این عمل همان خاصیتِ شرکت‌پذیری است. عضو خنثی چیزی جز دوران به اندازه صفر درجه نیست. بالاخره عضو وارون نیز دوران در جهت عکس به مقدار مساوی مقدار مورد نظر است. روشن است که این گروه نیز گروه جابه‌جایی است.

۷) **دوران در سه بعد:** اگر یک سیستم فیزیکی ابتدا حول محور x و سپس حول محور y چرخانده شود نتیجه با حالتی که ابتدا حول محور y و سپس حول محور x چرخانده شود متفاوت است. با آنکه دوران در سه بعد گروه تشکیل می‌دهد اما این گروه جابه‌جایی (آبلی) نیست.

۲.۱ زیرگروه‌ها، مرکز و ضربِ مستقیم

تعریف: یک زیرگروه از گروهی مانند G، یک زیرمجموعه مانند H از G با خواص زیر است:

۱) عضو حنثی یک عضو H است.

۲) اگر $h \in H$ باشد، آن‌گاه $h^{-1} \in H$ است.

۳) اگر $h_1, h_2 \in H$ باشد، آن‌گاه $h_1h_2 \in H$ است.

این شرایط بر روی H تضمین می‌کند که H یک گروه است با همان عمل ضربِ G، اما محدود به H. خاصیت (۳) بسته‌بودن را بیان می‌کند. شرکت‌پذیری همانند شرکت‌پذیریِ G است خواص (۲) و (۳) نیز وجودعضو خنثی و وارون را تضمین می‌کند.

۱.۲.۱ زیرگروه‌های ناوردا:

اگر $H \subset G$ بوده و $a \in G$ و $h_i \in H$ باشند، $\{ah_ia^{-1}\}$ به ازای $i = 1, 2, \cdots, dimH$ تشکیل یک گروه می‌دهند. این گروه زیر گروه G است و آن را زیرگروه مزدوج H در G گویند. با انتخاب aهای مختلف زیرگروه‌های مزدوج مختلف بدست می آید.
اگر برای تمام aها $\{ah_ia^{-1}\} \equiv aHa^{-1} = H$ باشد. به عبارت دیگر تمام زیرگروه‌های مزدوج H بر H منطبق باشند، در این صورت H را زیرگروه ناوردای G نامند. برای روشن‌تر شدن مطلب فوق به مثال زیر توجه کنید.
اگر به ازای هر $h_1 \in H$ و $a \in G$، وجود داشته‌باشد $h_2 \in H$ چنان‌که $ah_1a^{-1} = h_2$، در این صورت $aH = Ha$ است. پس H زیر گروه ناوردای G است.
هر گروه دارای دو زیرگروه بدیهی است، $\{e\}$ و خود گروه است. اگر یک گروه دارای هیچ زیرگروه ناوردای نابدیهی نباشد، به آن گروه ساده[2] گویند. از سوی دیگر به گروهی که هیچ یک از زیرگروه‌های ناوردایش (جز $\{e\}$) آبلی نباشد، گروه شبه‌ساده[3] گویند. بدیهی است که تمام زیرگروه های یک گروه آبلی، زیر گروه‌های ناوردا هستند.

۲.۲.۱ مثال‌ها:

هر گروه حداقل دارای دو زیرگروه است: خود G وزیرگروه با یک عضو، $\{e\}$. (البته اگر G خودش گروه بدیهی باشد، آن‌گاه این دو زیرگروه یکی است.) این زیرگروه‌ها، زیرگروه‌های بدیهی نامیده می‌شوند.

Simple Group[2]
Semi-simple Group[3]

مجموعه اعداد صحیحِ زوج زیر گروه $\mathbb{Z}$ است: صفر زوج است. منفی هر عدد صحیح زوج، زوج است. بالاخره جمع دو عدد زوج، زوج است.

مجموعه H از ماتریس‌های حقیقی $n \times n$ با دترمینان یک، زیرگروه $GL(n;\mathbb{R})$ است. مجموعه H زیرمجموعه $GL(n;\mathbb{R})$ است، چرا که هر ماتریس با دترمینان یک وارون‌پذیر است. دترمینانِ ماتریس یکه یک است، بنابراین خاصیت (۱) ارضاء می‌شود. دترمینان وارون یک ماتریس با دترمینان یک نیزیک است، بنابراین خاصیت (۲) ارضاء می‌شود. بالاخره دترمینان ضرب دو ماتریس مساوی یِ ضرب دترمینان آن دو است، بنابراین خاصیت (۳) ارضاء می‌شود. این گروه را گروه خطیِ ویژه[4] بر روی اعداد حقیقی گویند و با $SL(n;\mathbb{R})$ نشان می‌دهند.

تعریف: مرکز[5] یک گروه مانند G، مجموعه‌ی تمام $g \in G$ چنان‌که برای تمام $h \in G$، $gh = hg$ باشد، است.

نشان دادن این‌که مرکز گروه G زیر گروه G است دشوار نیست.

تعریف: اگر G و H گروه باشند و ضرب دکارتی، G و H در نظر گرفته شود، یعنی مجموعه‌ی زوجِ مرتب (g,h) که $g \in G$ و $h \in H$ باشند. عمل ضرب روی این مجموعه به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(g_1,h_1)(g_2,h_2) = (g_1g_2,h_1h_2)$$

این عملِ ضرب دکارتی، G و H را به یک گروه می‌برد، که به آن ضرب مستقیم G و H گویند و با $G \otimes H$ نشان می دهند.

به سادگی می‌توان نشان داد که $G \times H$ تحت این عمل تشکیل گروه می‌دهد. برای مثال، عضو خنثی یِ $G \otimes H$ زوج (e_1,e_2) است که e_1 عضو همانی G و e_2 عضو همانی H است.

[4] Special Linear Group
[5] center

۱.۳ هم‌ریختی‌ها، یک‌ریختی‌ها و رتبه گروه

۱.۱.۳ هم‌ریختی و یک ریختی

تعریف: دو گروه G و H را در نظر بگیرید. نگاشت $\phi : G \to H$ را هم‌ریختی [6] گویند، اگر $\phi(g_1, g_2) = \phi(g_1)\phi(g_2)\ \forall g_1, g_2 \in G$ باشد. اگر ϕ هم یک‌به‌یک و هم پوشا باشد، آن‌گاه ϕ را یک‌ریختی [7] گویند. یک‌ریختی یک گروه با خودش را خودریختی [8] گویند.
به بیان دیگر، اگر H زیر گروه G، $H \subseteq G$، باشد و به یک و یا به چند عضو گروه G یک عضو از گروه H وابسته باشد (روشن است که ϕ پوشا نیز هست)، به طوری‌که عمل گروه حفظ شود، گروه H را تصویرِ هم‌ریخت گروه G گویند و آن را به صورت $G \sim H$ نمایش می‌دهند.

اگر به هر عضو گروه G یک و تنها یک عضو از H مربوط باشد، به بیان دیگر دو گروه نسبت به هم، هم پوشا و هم یک‌به‌یک باشند، H را تصویرِ یک‌ریخت G گویند. یک‌ریختی H و G را به صورت $G \approx H$ نشان می‌دهند.

قضیه: دو گروه G و H را به ترتیب با عناصرِ خنثیِ e_1 و e_2 در نظر بگیرید. اگر $\phi : G \to H$ یک نگاشت هم‌ریخت باشد، آن‌گاه $\phi(e_1) = e_2$ و $\forall g \in G\ \ \phi(g^{-1}) = \phi(g)^{-1}$ است.

اثبات: g یک عضو دل‌خواه از G است. آن‌گاه $\phi(g) = \phi(ge_1) = \phi(g)\phi(e_1)$ است. حال اگر رابطه‌ی اخیر را یک‌بار از سمت راست در $\phi(g)^{-1}$ و بار دیگر در $\phi(g^{-1})$ ضرب کنیم، از آن‌جا که $e_2 = \phi(e_1)$ است، داریم، $e_2 = \phi(e_1) = \phi(gg^{-1}) = \phi(g)\phi(g^{-1})$. روشن است که $\phi(g^{-1})$ همان وارون $\phi(g)$ است.

تعریف: دو گروه G و H را با یک نگاشت هم‌ریختِ $\phi : G \to H$ و e_2، عضو خنثیِ H، در نظر بگیرید. هسته‌ی [9] ϕ، مجموعه‌ی تمام $g \in G$ به‌طوری که $\phi(g) = e_2$ باشد، است.

مثال: گروه تقارنیِ یک مثلث متساوی الاضلع، D_3 با گروه جای‌گشت S_3 یک‌ریخت هستند.

---

[6] Homomorphisms
[7] Isomorphisms
[8] Automorphism
[9] Kernel

۲.۳.۱ رتبه‌ی گروه:

تعداد عناصر یک گروه را رتبه گروه[10] گویند.
می‌توان نشان داد، اگر گروه‌های G و H آمده در بالا هر دو محدود و هم‌رتبه باشند، در این صورت هر نوع رابطه هم‌ریختی بین این دو به شرط آن‌که این هم‌ریختی پوشا باشد، رابطه یک‌ریختی است. اگر رتبه دو گروه متفاوت باشد، ارتباط میان آن‌ها یک‌به‌یک نبوده و چندین عضو G به یک عضو H وابسته می‌شوند و بالعکس.

۳.۳.۱ گروه‌های با رتبه‌ی بی‌نهایت:

غالب اوقات عناصر یک گروه بستگی به یک یا چند پارامتر دارند. اگر این پارامتر بطور منفصل تغییر کند اعضای گروه را به صورت g_a نشان می‌دهند که در آن a بیانگر پارامتر است. اگر a بطور پیوسته تغییر کند، اعضای گروه را به صورت $g(a)$ نشان می‌دهند. در این حالت به ازای هر مقدار از a یک عضو گروه خواهیم داشت.
سه عضو $g(a)$، $g(b)$ و $g(c)$ از گروه G را در نظر بگیرید، به طوری که $g(a)g(b) = g(c)$ باشد. اگر c تابع پیوسته‌ای از a و b باشد[11]، در این صورت گروه را پیوسته می‌نامند.

۴.۳.۱ گروه لی:

در یک گروه پیوسته اگر c تابع تحلیلی از a و b باشد، گروه را گروه لی می‌نامند.
اگر یک گروه پیوسته دارای تعداد محدودی پارامتر باشد که بطور پیوسته تغییر کنند، گروه را پیوسته محدود می‌نامند.

۵.۳.۱ گروه‌های فشرده:

در این مرحله ما تعریف دقیقی از گروه‌های فشرده نخواهیم کرد و فقط به آنچه در بخش‌های بعد بدان نیاز خواهیم داشت، بسنده می‌کنیم.

[10] group order
[11] به عبارتی تغییر کوچک در a و یا b تغییر کوچکی در c ایجاد کند.

یک دسته اعداد را در نظر بگیرید، اگر قدرمطلق هیچ‌کدام از این اعداد از عدد معین و مثبتی مانند M تجاوز نکند، گویند این دسته اعداد محدوداند. اگر هر سری‌ی ـِ هم‌گرایی از این اعداد در نظر بگیریم بطوری که حّد این سری نیز عضو این سری باشد، گویند دسته اعداد مورد نظر بسته نیز است.

یک گروه r پارامتری را فشرده گویند اگر حوزه تغییرات پارامترهای آن محدود و بسته باشد.

مثال۱: گروه دوران یک گروه فشرده است. چون زاویه‌ی دوران حول هر محور در فاصله بسته $0 \leq \theta \leq 2\pi$ است.

مثال۲: گروه انتقال یک گروه فشرده نیست. زیرا پارامتر a در تبدیل $X' = X + a$ می‌تواند در فاصله‌ی بین 0 و ∞ تغییر کند. به بیان دیگر حوزه تغییرات a نامحدود است.

یک گروه پیوسته را به طور محّلی فشرده گویند، اگر در اطراف هر نقطه در فضای پارامترهای آن، یک ناحیه بسته وجود داشته‌باشد. بعضی از گروه‌های غیر فشرده مثل گروه لورنتز بطور محّلی فشرده‌اند.

۶.۳.۱ مسائل

۱) ثابت کنید $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ است.

۲) اگر سه اتمِ یک‌سان در سه رأس یک مثلثِ متساوی‌اضلاع قرار داشته‌باشند،

الف) نشان دهید تقارن‌های این سیستم یک گروه تشکیل می‌دهند.

ب) زیرگروه‌های این گروه را بدست آورید.

فصل ۲

گروه‌های ماتریسیِ لی

۱.۲ تعریف گروه ماتریسیِ لی

تعریف: اگر A_n ماتریسِ مختلط باشد، گوئیم A_n وقتی به حد همگرای ماتریسِ A میل می‌کند که تمام درایه‌های A_n به حد همگرای عناصرِ متناظرش در A میل نماید، $(\mathrm{A}_n)_{ij}{\to}\mathrm{A}_{ij}$.

تعریف: H هر زیرگروه دل‌خواه از $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$، در صورتی می‌تواند یک گروه ماتریسی لی باشد که شرط زیر را ارضاء نماید:

اگر $A_n \in \mathrm{H}$ هر دنباله‌ی دل‌خواه از A باشد و به حد همگرای‌اش، A، میل کند، یا $\mathrm{A} \in \mathrm{H}$ است و یا A وارون‌پذیر نیست.

این شرط بر روی H، تضمین می‌کند که H یک زیرمجموعه‌ی بسته از $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ است (این بدان معنا نیست که H در فضای ماتریس‌ها بسته است). در این صورت می‌توان گفت که گروه‌های ماتریسی لی، زیرگروه بسته از $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ هستند. به خاطر داشته‌باشید که تعداد زیادی از گروه‌های ماتریسی لی که ما بررسی خواهیم کرد، شرط قوی‌تر، اگر $A_n \in \mathrm{H}$ به A همگرا شود، $\mathrm{A} \in \mathrm{H}$ است، دارا هستند.

۱.۱.۲ پادمثال‌ها

به عنوان یک مثال از زیرگروه GL(n;ℂ) که بسته نیست (و روشن است که گروه ماتریسی لی هم نیست) مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های $n \times n$ وارون‌پذیر که درایه‌های ماتریس‌ها اعداد گویا باشند را در نظر بگیرید. این گروه زیرگروه GL(n;ℂ) است، اما زیرگروه بسته نیست. چرا که می‌توان یک رشته از ماتریس‌های وارون‌پذیر با درایه‌های گویا داشت که به یک ماتریس وارون‌پذیر با درایه‌های گنگ [1] به صورت همگرا میل کند. در واقع هر ماتریس وارون‌پذیر حقیقی حد یک رشته از ماتریس‌های وارون‌پذیر با درایه‌های گویا است.
مثال دیگر: یک گروه از ماتریس‌هایی که گروه ماتریسیِ لی نبوده ولی زیرگروه $\mathrm{GL}(2,\mathbb{C})$ است را در نظر بگیرید. اگر a یک عدد گنگ و حقیقی باشد و

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{ita} \end{pmatrix} \; | t \in \mathbb{R} \right\}.$$

روشن است در صورتی H زیرگروه GL(n;ℂ) است، که a گنگ باشد. اما از سوی دیگر ماتریس $\mathbb{I}-$ در H نیست. اگر بخواهیم e^{it} مساوی ۱− شود، دو امکان زیر مطرح است:
الف: اگر t یک عدد فردِ صحیح در π باشد، دیگر ta نمی‌تواند عدد صحیح ضرب در π باشد.
ب: اگر $t = (2n+1)\pi$ که n هر عدد مناسب است، باشد، می‌توان ta را دل‌خواه نزدیک به یک عدد فرد صحیح ضرب در π گرفت.
بدین روش می‌توانیم یک سری از ماتریس‌های عضو H که به $\mathbb{I}-$ همگرا می‌شوند، پیدا کرد که عضو H نیست. بنابراین H دیگر یک گروه ماتریسیِ لی نیست.

۲.۲ مثال‌هایی از گروه‌های ماتریسیِ لی

در این بخش ما به معرفی گروه‌های لی بسیارمهم خواهیم پرداخت.

[1] Irrational

۱.۲.۲ گروه‌های عام خطی GL(n;ℂ) و GL(n;ℝ)

گروه‌های عام خطی[2] (برای ℝ و ℂ) در برگیرنده کلیه ماتریس‌های وارون پذیرِ تبدیلات خطی در n بعد بوده و گروه‌های لی می‌باشند.

$$x'_i = \sum_j a_{ij} x_j, \quad i,j = 1,2,\cdots,n \Rightarrow x' = Ax \qquad (1)$$

که $a_{ij} \in \mathbb{C}$ها درایه‌های ماتریس A با بعد n می‌باشند. به‌ازای مقادیر مختلف a_{ij} ماتریس‌های بدست می آید که یک گروه GL(n;ℂ) تشکیل می‌دهند.
روشن است گروه GL(n;ℝ) زیرگروه GL(n;ℂ) است. گروه GL(n;ℂ) دارای $2n^2$ و GL(n;ℝ) دارای n^2 پارامتر مستقلِ حقیقی است.

۲.۲.۲ گروه‌های ویژه خطی SL(n;ℂ) و SL(n;ℝ)

گروه ویژه خطی[3]، گروه ماتریس‌های $n \times n$ وارون‌پذیر (با درایه‌های حقیقی و یا مختلط) با دترمینان یک، می‌باشد. هر دو گروه SL(n;ℂ) و SL(n;ℝ) زیرگروه GL(n;ℂ) هستند. تعداد پارامترهای حقیقی‌ی آن‌ها به ترتیب $2n^2 - 2$ و $n^2 - 1$ است.

۳.۲.۲ گروه‌های متعامد O(n)

یک ماتریس $n \times n$، A، را متعامد گویند، اگر درایه‌های آن شرط زیر را ارضاع نمایند:

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ij} A_{ik} = \delta_{ij}$$

تعریف معادل فوق آن است که ماتریس A ضرب داخلی را ناوردا بگذارد، $< x,y >=< Ax,Ay >$ برای تمام بردارهای x,y در $\mathbb{R}^n$. تعریف معادل دیگر آن است که ماتریس A متعامد است اگر $A^T A = I$ باشد. به بیان دیگر $A^T = A^{-1}$ است.

General Linear Groups[2]
Special Linear Groups[3]

از آن‌جا که $\det A^T = \det A$ و اگر A یک ماتریس متعامد باشد، آن‌گاه $\det(A^TA) = (\det A)^2 =$ $\det I = 1$. در نتیجه برای تمام ماتریس‌های متعامد A، $\det A = \pm 1$ است. این رابطه می‌گوید که، هر ماتریس متعامد باید وارون پذیر باشد. امّا اگر A یک ماتریس متعامد باشد، آن‌گاه

$$< A^{-1}x, A^{-1}y >=< A(A^{-1}x), A(A^{-1}x) >=< x, y > .$$

در نتیجه وارون یک ماتریس متعامد خود نیز متعامد است. علاوه بر این نکته، حاصل‌ضرب دو ماتریس متعامد خود نیز متعامد است، به بیان دیگر وقتی دو ماتریس A و B ضرب‌داخلی را ناوردا باقی گذارند، حتماً AB نیز این‌گونه خواهد بود. در نتیجه مجموعه ماتریس‌های متعامد یک گروه تشکیل می‌دهند.

یک مجموعه متشکل از تمام ماتریس‌های حقیقی‌یِ متعامد ِ $n \times n$ تشکیل گروه متعامد[4] O(n) می‌دهند و روشن است که این گروه خود زیرگروه GL(n;ℂ) می‌باشد. از آن‌جا که حد ماتریس‌های متعامد به‌دلیل حفظ‌شدن رابطه $A^TA = 1$ تحت حد، متعامد است. لذا O(n) یک گروه لی ماتریسی است. تعداد پارامترهای این گروه $n(n-1)/2$ است.

۴.۲.۲ گروه‌های متعامد ِ مختلط $\mathrm{O}(n;\mathbb{C})$

یک شکل دوخطی، ( ) روی $\mathbb{C}^n$ که به صورت $(x, y) = \sum x_i y_i$ تعریف می‌شود، در نظر بگیرید. این شکل ضرب داخلی نیست، چرا که مزدوجِ‌مختلط در آن تعریف نشده‌است. مجموعه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ مانند A که چنین شکلی را ناوردا باقی گذارد ($(Ax, Ay) = (x, y), \ \ \forall x, y \in \mathbb{C}^n$) تشکیل گروه متعامد ِ مختلط، $\mathrm{O}(n;\mathbb{C})$ می‌دهند.

الف: روشن است که ($\mathrm{O}(n;\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$) می‌باشد.

ب: A یک ماتریس $n \times n$

$$A \in O(n;\mathbb{C}) \ \ iff \ \ A^TA = \mathbb{I}$$

پ: می‌توان نشان داد که $\mathrm{O}(n;\mathbb{C})$ یک گروهِ ماتریسی لی است.

ت: $\forall A \in \mathrm{O}(n;\mathbb{C}), \ detA = \pm 1$.

[4] Orthogonal Groups

۵.۲.۲ گروه‌های متعامد ویژه $\mathrm{SO}(n)$

مجموعه‌ی ماتریس‌های $n \times n$ متعامد ِ حقیقی با دترمینان ۱+ را گروه متعامد ِ ویژه [5] گویند و با $SO(n)$ نشان می‌دهند. روشن است که این گروه زیرگروه $O(n)$ و در نتیجه زیرگروه $\mathrm{GL(n;\mathbb{C})}$ می‌باشد. از سوی دیگر

$$SO(n,\mathbb{R}) = SL(n,\mathbb{R}) \cap O(n)$$

می باشد. همچنین شرط تعامد و دترمینان یک تحت حد حفظ می‌شود. به همین دلیل $\mathrm{SO}(n,\mathbb{R})$ یک گروه ماتریسی لی است. این گروه دارای $n(n-1)/2$ پارامتر حقیقی است.

۶.۲.۲ گروه‌های متعامد ِ مختلط ِ ویژه $\mathrm{SO}(n;\mathbb{C})$

زیرمجموعه‌ای از ماتریس‌های $n \times n$ متعامدِ مختلط که دترمینان آن‌ها یک باشد، تشکیل گروه متعامد ِ مختلط ِ ویژه، $\mathrm{SO}(n;\mathbb{C})$، می‌دهند. روشن است که $\mathrm{SO}(n;\mathbb{C}) \subset \mathrm{O}(n;\mathbb{C}) \subset \mathrm{GL(n;\mathbb{C})}$ است و یک گروه ماتریسی لی است.

۷.۲.۲ گروه یکانی $\mathrm{U}(n)$

یک ماتریسِ مختلطِ $n \times n$ را همانی گویند، اگر بردارهای ستونی آن بهنجار ِ متعامد باشد. معادل این شرط آن است که $A^*_{ki}A_{kj} = \delta_{ij}$ باشد. به بیان دیگر ضرب داخلی تحت تبدیل ماتریس A حفظ شود، $<x,y>=<Ax,Ay>, \ \ \forall x,y \in \mathbb{C}^n$ [6] تعریف دیگر از ماتریس یکانی آن است که $A^\dagger A = \mathbb{I}$، یعنی $A^{-1} = A^\dagger$، باشد.

چون در حالت کلی $(\det A)^* = \det A^\star$ است و اگر A همانی باشد، آن‌گاه $\det(A^\dagger A) = |\det A|^2 = \det\mathbb{I} = 1$ است. در نتیجه $|\det A| = 1, \ \ \forall A \in \{\mathrm{Unitary \ \ Matrices}\}$ می‌باشد.

این شرط نشان می‌دهد که ماتریس‌های یکانی‌ی ِ وارون‌پذیر هستند، در نتیجه تشکیل گروه نیز می‌دهند.

مجموعه‌ی ماتریس‌های یکانی $n \times n$ تشکیل گروه $\mathrm{U}(n)$ را می‌دهند. این گروه $\mathrm{U}(n) \subset \mathrm{GL(n;\mathbb{C})}$

[5] Special Orthogonal Groups

[6] منظور از $< \ >$، ضرب داخلی در فضای مختلط ِ n بعدی به صورت، $<x,y>=\sum_i x_i^\star y_i$ است.

است. چون حد ماتریس‌های یکانی، یکانی است، پس این گروه یک گروه ماتریسی‌ی ِ لی نیز است. تعداد پارامترهای مستقلِ‌حقیقیِ این گروه n^2 می‌باشد.

۸.۲.۲ گروه‌های یکانی‌ی ِ ویژه $\mathrm{SU}(n)$

مجموعه‌ی ماتریس‌های یکانی با دترمینان یک تشکیل گروه $\mathrm{SU}(n)$ را می‌دهند. روشن است که این گروه نیز گروه ماتریسی است و $\mathrm{SU}(n) = \mathrm{U}(n) \cap \mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$ می‌باشد. در ضمن ماتریس یکانی می‌تواند دترمینانی به صورت $e^{i\theta}\ \ \forall\theta$ داشته باشد، در نتیجه $\mathrm{SU}(n)$ زیرگروه کوچک‌تری از $\mathrm{SO}(n)$ برای $\mathrm{O}(n)$ است. هم‌چنین بعد $\mathrm{SU}(n)$ یکی کم‌تر از $\mathrm{U}(n)$ است، در صورتی که بعد $\mathrm{SO}(n)$ با بعد $\mathrm{O}(n)$ یکی است. تعداد پارامترهایِ مستقل حقیقی‌ی ِ این گروه $n^2 - 1$ است.

۹.۲.۲ گروه‌های متعامد ِ تعمیم‌یافته $\mathrm{O}(n;k)$ و لورنتز $\mathrm{O}(3;1)$

فضای $\mathbb{R}^{n+k}$ که n و k اعداد صحیح ِ مثبت هستند، در نظر بگیرید. در چنین فضایی شکل دوخطی $[\ ]_{n+k}$ به صورت:

$$[x,y]_{n,k} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - \sum_{i=n+1}^{n+k} x_i y_i \tag{۲}$$

تعریف می‌کنیم. مجموعه‌ی ماتریس‌های $(n+k)\times(n+k)$ که شکل بالا را ناوردا می‌گذارند، $[Ax, Ay]_{n+k} = [x,y]_{n,k},\quad \forall x,y \in \mathrm{R}^{n+k}$، را گروه متعامد ِ تعمیم‌یافته، $\mathrm{O}(n;k)$، گویند. روشن است که این گروه نیز زیرگروه $\mathrm{GL}(n+k;\mathbb{R})$ است. از آن‌جا که گروه‌های $\mathrm{O}(n;k)$ و $\mathrm{O}(k;n)$ یکی هستند، ما خود را به حالت $n \geq k$ محدود می‌کنیم. مشابه روش‌های بالا می‌توان نشان داد که $\mathrm{O}(n;k)$ یک گروه ماتریسی لی است.

اگر A یک ماتریس ِحقیقی $(n+k)\times(n+k)$ و $\mathrm{A}^{(i)}$، iامین ستون این ماتریس،

$$A^{(i)} = \begin{pmatrix} A_{1,i} \\ \vdots \\ A_{n+k,i} \end{pmatrix}$$

باشد. آن‌گاه $A \in \mathrm{O}(n;k)$ است، اگر شرایط زیر ارضاء شود:

$$\begin{array}{lcll} [A^{(i)},A^{(j)}]_{n,k} & = & 0 & i \neq j \\ [A^{(i)},A^{(i)}]_{n,k} & = & 1 & i \leq n \\ [A^{(i)},A^{(i)}]_{n,k} & = & -1 & n+1 \leq i \leq n+k \end{array} \qquad (۳)$$

حال اگر g یک ماتریس قطری یِ $(n+k)\times(n+k)$ چنان که n عضو اول آن 1 و k عضو بعدی -1 باشد، $A \in \mathrm{O}(n;k)$ اگر و فقط اگر $A^T g A = g$ باشد. دترمینان این معادله عبارت است از $(\det A)^2 \det g = \det g$ و یا $(\det A)^2$. در نتیجه $\det A = \pm 1, \ \forall A \in \mathrm{O}(n;k)$.

گروه $\mathrm{SO}(n;k)$ مجموعه‌ی ماتریس‌های عضو $\mathrm{O}(n;k)$ با دترمینان $+1$ است. این گروه، زیرگروه $\mathrm{GL(n;\mathbb{R})}$ است و یک گروهِ ماتریسی لی می‌باشد.

از این مجموعه، گروه $\mathrm{O}(3;1)$، **گروه لورنتس و یا گروه همگن لورنتس** که $x^2+y^2+z^2-c^2t^2$ را تحت تبدیل ناوردا می‌گذارد، بیشتر مورد توجه فیزیک‌دانان است. این گروه دارای 6 پارامتر است. (ناگفته نماند که در ادبیات فیزیک $\mathrm{O}(n;1)$ برای $n \geq 1$ را نیز گروه لورنتس گویند.)

۱۰.۲.۲ گروه‌هایِ هم‌تافته $\mathrm{SP}(n;\mathbb{R}),\ \mathrm{SP}(n;\mathbb{C})$

گروه‌هایِ ویژه و خطی یِ عام، متعامد و یکانی و گروه‌های هم‌تافته [7]، گروه‌های کلاسیک می‌باشند. در این مجموعه‌ی گروه‌های کلاسیک، گروه‌های هم‌تافته به دلیل آن‌که تقارن پادمتقارن [8] شکل یِ دوخطی که با تقارن دوخطیِ مرسوم متفاوت است، را دارند، گروه‌هایی نامانوسی هستند. تقارن اریبی یِ دوخطی B بر روی $\mathbb{R}^{2n}$ را به صورت

$$B[x,y] = \sum_{i=1}^{n} x_i y_{n+i} - x_{n+i} y_i \qquad (۴)$$

تعریف می‌کنیم. مجموعه‌ی ماتریس‌های $\{A\}$ی $2n \times 2n$ که B را ناوردا باقی می‌گذارند(یعنی $B[Ax,Ay] = B[x,y],\ \forall x,y \in \mathbb{R}^{2n}$) را گروه واپیچیده‌ی حقیقی، $\mathrm{SP}(n;\mathbb{R})$، می‌نامند. این گروه، زیرگروه $\mathrm{GL}(2n;\mathbb{R})$ است. مانند قبل می‌توان نشان داد که این گروه یک گروه ماتریسی لی است.

---

[7] Symplectic Groups

[8] Skew Symmetric

اگر J یک ماتریس $2n \times 2n$ به صورت

$$J = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}$$

باشد، آن‌گاه $B[x,y] =< x, Jy >$. فقط و فقط اگر $A^T JA = J$ و A ماتریس $2n \times 2n$ باشد، $A \in SP(n;\mathbb{R})$. روشن است که، $(\det A)^2 \det J = \det J = \det J$ و یا $(\det A)^2 = 1$ است. در این صورت $\det A = \pm 1, \quad \forall A \in SP(n, \mathbb{C})$. تعداد پارامترهای آزاد این گروه $\forall\ n \geq 3 \quad n(2n+1)$ است.

۱۱.۲.۲ گروه هایزنبرگ H

مجموعه‌ی تمام ماتریس‌های 3×3 که به صورت

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{۵}$$

که a، b و c اعداد حقیقی و دل‌خواه هستند، باشند را گروه هایزنبرگ گویند. روشن است که ضرب دو ماتریس به شکل بالا، یک ماتریس به شکل مشابه خواهد بود و عضو وارون A نیز

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & ac-b \\ 0 & 1 & -c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{٦}$$

است. H زیرگروه $\mathrm{GL}(3;\mathbb{R})$ است. با توجه به رابطه (۵) حد ماتریس‌های این گروه، عضو همین گروه است. به همین دلیل H یک گروه ماتریسی است.

۱۲.۲.۲ گروه‌های $\mathbb{R}^\star$، $\mathbb{C}^\star$، S^1، R و $\mathbb{R}^n$

این مجموعه‌ها گروه‌های طبیعیِ ماتریسی نبوده ولی می‌توان آن‌ها را همانند گروه دانست.
گروه $\mathbb{R}^\star$ که دربرگیرنده اعداد حقیقی بدون صفر است، تحت عمل ضرب با $\mathrm{GL}(1;\mathbb{R})$ یک‌ریخت می‌باشد. درنتیجه $\mathbb{R}^\star$ گروه ماتریسی لی است. همانند آن گروه $\mathbb{C}^\star$، مجموعه‌ی اعداد مختلطِ بدون صفر، تحت عمل ضرب با گروه $\mathrm{GL}(1;\mathbb{C})$ یک‌ریخت است. گروه S^1 ِاعداد مختلط با قدرِ مطلق یک، با $\mathrm{U}(1)$ یک‌ریخت است.

گروه $\mathbb{R}$ تحت عمل جمع با گروه $\mathrm{GL}(1;\mathbb{R})^+$ (ماتریس‌های حقیقی ِ 1×1 با دترمینان مثبت) با نگاشت $x \to [e^x]$ یک‌ریخت است. گروه $\mathbb{R}^n$ تحت عمل جمع ِ برداری با گروه ماتریس‌هایِ حقیقی با درایه‌هایِ قطریِ مثبت

$$(x_1,\cdots,x_n) \to \begin{pmatrix} e^{x_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & e^{x_n} \end{pmatrix}$$

یک‌ریخت است.

۱۳.۲.۲ گروه‌های اقلیدوسی و پوانکاره

گروه اقلیدوسی، $E(n)$، گروه تمام نگاشت‌های از $\mathbb{R}^n$ به خودش که فاصله را ناوردا باقی می‌گذارد، است. به بیان دیگر

$$f\ \ \mathbb{R}^n \ \ \to \ \ \mathbb{R}^n \ s.t.\ \ d(f(x),f(y)) = d(x,y)\ \ \forall\, x,y \in \mathbb{R}^n$$

در اینجا d فاصله‌ی معمولی در $\mathbb{R}^n$، $d(x,y)=|x-y|$ است. در رابطه‌ی فوق ما حرفی در مورد ساختار f نه‌گفتیم، چرا که در حالت کلی لزومی ندارد f خطی باشد. گروه متعامد $\mathrm{O}(n)$ زیر گروه $E(n)$ است که نگاشت‌های خطی از $\mathbb{R}^n$ به خودش را که فاصله را ناوردا باقی میگذارد، است.
هم‌چنین گروه انتقال در $\mathbb{R}^n$، نگاشت‌هایی به صورت $T_x(y)=x+y$، نیز زیرگروه $E(n)$ است.
نکته: هر عضو T از $E(n)$ را می‌توان به صورت یک تبدیل خطی و یک انتقال نوشت،

$$T = T_x R,\ \ x\in\mathbb{R},\ \ R\in O(n)$$

می‌توان هر عضو $T=T_xR$ از $E(n)$ را به صورت زوج $\{x,R\}$ نوشت که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\{x,R\}y = Ry + x$$

و

$$\{x_1,R_1\}\{x_2,R_2\}y = R_1\{R_2y+x_2\}+x_1 = R_1R_2y + (x_1+R_1x_2).$$

هم‌چنین ضرب دو عملگرِ $E(n)$

$$\{x_1, R_1\}\{x_2, R_2\} = \{x_1 + R_1 x_2, R_1 R_2\}.$$

بالاخره وارون عضو $E(n)$

$$\{x, R\}^{-1} = \{-R^{-1}x, R^{-1}\}$$

است.

همان‌گونه که گفته شد $E(n)$ زیرگروه $\mathrm{GL(n;\mathbb{R})}$ نیست، چرا که انتقال یک تبدیلِ خطی نیست. اما $E(n)$ از طریق نگاشت

$$\begin{pmatrix} & & & x_1 \\ & R & & \vdots \\ & & & x_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{۷}$$

متناظر با $\{x, R\} \in E(n)$ با زیرگروه $\mathrm{GL}(n+1;\mathbb{R})$ یک‌ریخت است. این نگاشت یک نگاشت ۱−۱ و یک‌ریختی است. از این‌رو $E(n)$ گروه تمام ماتریس‌هایِ به صورت (۷) که $R \in \mathrm{O}(n)$ است، می‌باشد. روشن است که حد ماتریس‌هاییِ به شکل (۷)، به همان شکل است. پس گروه اقلیدوسی $E(n)$ یک گروه ماتریسیِ لی است.

مشابه بالا می‌توان گروه پوانکاره، $\mathrm{P}(n;1)$، را که گروهِ تمام تبدیلات در $\mathbb{R}^{n+1}$ به صورت

$$T = T_x A, \quad x \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad A \in O(n;1)$$

تعریف کرد. این گروه، گروهِ تبدیلاتِ آفین[9] در $\mathbb{R}^{n+1}$ است که «فاصله»ی لورنتسی $d_L(x,y) = (x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2 - (x_{n+1}, y_{n+1})^2$ را ناوردا باقی می‌گذارد. ضرب گروهیِ این گروه، مشابه ضرب گروهی گروه اقلیدوسی است.

گروه پوانکاره، $\mathrm{P}(n;1)$، با گروه ماتریس‌هایِ به شکل

$$\begin{pmatrix} & & & x_1 \\ & A & & \vdots \\ & & & x_n \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A \in O(n;1) \tag{۸}$$

[9] یک تبدیل آفین، تبدیلی از نوع $x \to Ax + b$ که A تبدیل خطی و b یک کمیت ثابت هستند، می‌باشد.

یک‌ریخت است. بدیهی است که این گروه هم یک گروه ماتریسیِ لی است.

۳.۲ فشرده‌گی

تعریف: اگر گروه ماتریسی لیِ G دارای شرط‌های زیر باشد به آن فشرده [10] گویند:
۱ــ اگر دنباله‌یِ هم‌گرای $A_n \in \mathrm{G}$، آن‌گاه حد این دنباله هم در G باشد.
۲ــ برای هر $A \in \mathrm{G}$، ثابتی مانند C به‌طوری که $|A_{ij}| \leq C \ \ \forall \ \ 1 \leq i,j \leq n$ باشد، وجود داشته‌باشد.
امّا مجموعه‌ی ماتریسی $n \times n$ مختلط را می‌توان $\mathbb{C}^{n^2}$ تصور کرد. تعریف‌های بالا بدین معنی است که در صورتی گروه G فشرده است که زیرمجموعه‌ی محدودی و بسته از $\mathbb{C}^m$ باشد (هر پوشاننده باز دارای زیرپوشش محدود است).
تمام مثال‌های ما به غیر از $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ و $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ شرط (۱) را دارا می‌باشند امّا شرط کران‌دار بودن (۲) را ندارند

۱.۳.۲ مثال‌هایی از گروه‌های فشرده:

گروه‌های $\mathrm{O}(n)$ و $\mathrm{SO}(n)$ فشرده هستند. خاصیت (۱) به‌دلیل آن‌که به ترتیب حد ماتریس‌های متعامد، متعامد و حد ماتریس‌های با دترمینان یک نیز یک است، ارضاء می‌شود. شرط دوم نیز به‌دلیل آن‌که نُرم بردار ستونیِ A یک است، در نتیجه $|A_{ij}| \leq 1 \ \ \forall \ 1 \leq i,j \leq n$ می‌باشد، ارضاء می‌شود. با همین استدلال گروه‌های $\mathrm{U}(n)$، $\mathrm{SU}(n)$ و $\mathrm{SP}(n)$ نیز فشرده هستند.

۲.۳.۲ مثال‌هایی از گروه‌های غیرفشرده:

بقیه گروه‌های ماتریسیِ لی غیرفشرده هستند. $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ و $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ شرط (۱) را نقض می‌کنند. دلیل این امر نیز آن‌است که حد یک ماتریس وارون‌پذیر ممکن است وارون پذیر نباشد. گروه‌های

[10] Compact

$\mathrm{SL}(n;\mathbb{C})$ و $\mathrm{SL}(n;\mathbb{R})$ نیز شرط (۲) را نقض می‌کنند. البته به‌غیر از حالت بدیهیِ $n=1$،

$$A_n = \begin{pmatrix} n & & & & \\ & \frac{1}{n} & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

که دترمینان آن یک است.

گروه‌های زیر نیز شرط (۲) را نقض می‌کنند و غیرفشرده هستند: $\mathrm{O}(n;\mathbb{C})$ و $\mathrm{SO}(n;\mathbb{C})$، $\mathrm{O}(n;k)$ و $\mathrm{SO}(n;k)$ (برای $n\geq 1,\ \ k\geq 1$)، گروه هایزنبرگ، H، $\mathrm{SP}(n;\mathbb{R})$ و $\mathrm{SP}(n;\mathbb{C})$، $\mathrm{E}(n)$ و $\mathrm{P}(n;1)$، $\mathbb{R}$ و $\mathbb{R}^\star$ و $\mathbb{C}^\star$.

۴.۲ گروه‌هایِ هم‌بند

تعریف: گروه G را هم‌بند گویند، اگر به ازای هر $A,B\in \mathrm{G}$، یک مسیر ِ پیوسته‌ی $A(t)$ در G وجود داشته باشد، به‌طوری که $a\leq t\leq b$، $A(a)=A$ و $A(b)=B$ باشند[11].

گروه ماتریسیِ لی ِ که هم‌بند نباشد را می‌توان به‌طور یکتا به مجموعه‌ای از چندین قطعه[12] تقسیم کرد، به‌طوری که هر دو عضوی از یک قطعه را به وسیله یک مسیر ِ پیوسته بتوان به هم وصل و دو عضو از دو قطعه‌ی مجزا را نتوان به یک‌دیگر وصل کرد.

قضیه: اگر G یک گروه ماتریسیِ لی باشد، قطعه‌یِ شامل همانی یک زیرگروه G است.

اثبات: فرض کنید A و B دو قطعه‌ی شامل عضو همانی است. در این صورت مسیرهای $A(t)$ و $B(t)$ که $A(0)=B(0)=I$، $A(1)=A$ و $B(1)=B$ وجود دارند. امّا $A(t)B(t)$ نیز یک مسیر ِ پیوسته است که I را به AB وصل می‌کند. در نتیجه حاصل ِ ضرب دو عضو از قطعه‌ی همانی باز در قطعه‌ی همانی است. هم‌چنین $A(t)^{-1}$ نیز یک مسیر ِ پیوسته از I به A^{-1} است و در نتیجه هر عضو وارون از قطعه‌ی همانی نیز در همان قطعه است. پس قطعه‌ی همانی یک زیرگروه است.

[11] در توپولوژی هم‌بند بودن را این‌گونه تعریف می‌کنیم: اگر بتوان دو نقطه از این فضا را بوسیله‌ی یک خط ِ مسیر ِ پیوسته که تمام نقاط آن در آن فضا قرارداشته باشد، به هم متصل کرد، فضا را هم‌بند و یا هم‌بندمسیر (Path-connected) گویند.

[12] Component

قضیه: گروه $\mathrm{GL(n;\mathbb{C})}$ برای تمام $n \geq 1$ همبند است.

اثبات: ابتدا حالت $n = 1$ را بررسی می‌کنیم. یک ماتریس ـ وارون‌پذیر ـ مختلط مانند A به صورت $A = [\lambda]$ که $\lambda \in \mathbb{C}^n$ که مجموعه‌ی تمام اعداد مختلط غیر صفر است، نشان داد. امّا به سادگی می‌توان یک مسیرِ پیوسته چنان پیدا کرد که دو عدد مختلط ـ غیر صفر را بدون عبور از صفر به هم متصل نمود.

برای تمام حالت‌های $n \geq 1$، از شکل جردنی ماتریس‌ها استفاده می‌کنیم. هر ماتریس $n \times n$ مختلط مانند A را می‌توان به صورت

$$A = CBC^{-1}$$

نوشت. B یک ماتریس ـ جردنی به صورت

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & \star \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

است. اگر A یک ماتریس ـ وارون‌پذیر باشد، λ_iها غیر صفر هستند، چرا که $\det A = \det B = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ است.

اگر $B(t)$ قسمت مثلث بالای قطر ـ ماتریس بالا ضرب‌در $(1-t)$ برای $0 \leq t \leq 1$ باشد و $A(t) = CB(t)C^{-1}$، آن‌گاه $A(t)$ مسیرِ پیوسته‌ی است که از A شروع و به CDC^{-1} ختم می‌شود که D به صورت یک ماتریس ـ قطری به صورت

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

است. این مسیر به دلیل آن‌که $\det A(t) = \lambda_1 \cdots \lambda_n$ برای همه‌ی tها است، در $\mathrm{GL(n;\mathbb{C})}$ قرار دارد. اما مشابه حالت $n = 1$، می‌توان $\lambda(t)_i$ی تعریف کرد که هر λ_iی را برای تمامِ مقادیر t از 0 تا 1 به 1 در $\mathbb{C}^\star$ متصل کند. در این صورت

$$A(t) = C \begin{pmatrix} \lambda_1(t) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n(t) \end{pmatrix} C^{-1}$$

است. این یک مسیرِ پیوسته است که از CDC^{-1} برای $t=1$ شروع و به $\mathbb{I}$ (CIC^{-1}) برای $t=2$ ختم می‌شود. امّا چون تمام λها غیر صفر هستند، مسیرِ پیوسته بر روی $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ قرار دارد. به‌هر حال اگر A و B دو ماتریس در $\mathrm{GL}(n;\mathbb{C})$ باشند، هر دو را می‌توان به نقطه‌ی همانی متصل نمود.

مثال: نشان دهید $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ هم‌بند نبوده ولی دارای دو قطعه‌ی هم‌بند است.

اثبات: چون $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ در برگیرنده‌ی تمام ماتریس‌های وارون‌پذیرِ $n\times n$ است، می‌توان این گروه را به دو قطعه‌ی A در برگیرنده‌ی تمام ماتریس‌های با دترمینان مثبت و قطعه‌ی B در برگیرنده‌ی تمام ماتریس‌های با دترمینان منفی تقسیم نمود. مسیرِ پیوسته را که این دو قطعه را به هم متصل می‌کند از ماتریس‌های با دترمینان صفر می‌گذرد که عضو $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})$ نیست.

امّا می‌توان نشان داد که هر یک از این قطعه‌ها خود هم‌بند هستند. به عنوان نمونه $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})^-$، مجموعه ماتریس‌های با دترمینان منفی، را در نظر بگیرید. اگر A و B دو ماتریس با دترمینان منفی باشند، در این صورت، اگر C یک ماتریس دل‌خواه با دترمینان منفی باشد، $C^{-1}A$ و $C^{-1}B$ در $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})^+$ خواهد بود که می‌توان آن دو را به وسیله مسیرِ پیوسته‌ی $D(t)$ در $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})^+$ به هم متصل نمود. ولی $CD(t)$ یک مسیرِ پیوسته در $\mathrm{GL}(n;\mathbb{R})^-$ است که A و B را به هم متصل می‌کند.

در جدولِ زیر تعدادی از گروه‌های ماتریسی از نظر هم‌بند بودن و تعداد قطعه‌های آن‌ها برای آگاهی‌ی بیش‌تر آمده است:

Group	*Connected?*	*Components*
$GL(n;\mathbb{C})$	*yes*	1
$SL(n;\mathbb{C})$	*yes*	1
$GL(n;\mathbb{R})$	*no*	2
$SL(n;\mathbb{R})$	*yes*	1
$O(n)$	*no*	2
$SO(n)$	*yes*	1
$U(n)$	*yes*	1
$SU(n)$	*yes*	1
$O(1;n)$	*no*	4
$SO(n;1)$	*no*	2
Heisenberg	*yes*	1
$E(n)$	*no*	2
$P(n;1)$	*no*	4

۵.۲ گروه‌های ساده—هم‌بند

تعریف: گروه ماتریسیِ لی را ساده—هم‌بند[13] گویند، اگر هر منحنی ـِ ی بسته در G را بتوان به‌طور پیوسته به یک نقطه در G جمع کرد.
به زبان دیگر، G را ساده—هم‌بند گویند، اگر بتوان یک مسیرِ پیوسته در G مانند $A(t)$ که $0 \leq t \leq 1$ است، که $A(0) = A(1)$ یک تابع $A(s,t)$ که $0 \leq s,t \leq 1$ در G یافت که مقادیری در G بگیرند که

۱– $A(0) = A(1) \ \ \forall\, s$

۲– $A(0,t) = A(t) \ \ \forall\, t$

۳– $A(1,t) = A(1,0) \ \ \forall\, t$

باید تصور کرد که $A(t)$ یک لوپ و $A(s,t)$ هم‌چون یک لوپ پارامتره است که $A(t)$ را به یک نقطه می‌برد. شرط اول بیان‌گر وجود چنین لوپی است، شرط دوم: اگر $s = 0$ باشد لوپ مورد نظر $A(t)$ است و شرط سوم: اگر $s = 1$ باشد لوپ مورد نظر یک نقطه است.

قضیه: گروه $\mathrm{SU}(2)$ ساده—هم‌بند است.
اثبات: از نظر توپولوژیکی $\mathrm{SU}(2)$ را می‌توان یک کره‌ی سه‌بعدی، S^3، که در فضای $\mathbb{R}^4$ غوطه‌ور است تصّور کرد. از سوی دیگر S^3 ساده—هم‌بند است.

---

[13] Simply-connected

مشابه جدول بالا برای گروه‌های ساده—هم‌بند نیز می‌توان به صورت زیر نوشت:

$Group$	$Simply\ \ Connected?$
$GL(n;\mathbb{C})$	no
$SL(n;\mathbb{C})$	yes
$GL(n;\mathbb{R})$	no
$SL(n;\mathbb{R})$	no
$SO(n)$	no
$U(n)$	no
$SU(n)$	yes
$SO(1;1)$	yes
$SO(n;1)\ (n \geq 2)$	no
$Heisenberg$	yes

۶.۲ هم‌ریختی و یک‌ریختی

تعریف: اگر گروه‌های G و H دو گروه ماتریسیِ لی باشند، به نگاشتی مانند $\phi\ \ : \mathrm{G}\ \rightarrow\ \mathrm{H}$ در صورتی هم‌ریختی گفته می‌شود که:

۱− ϕ یک هم‌ریختیِ گروه باشد.

۲− ϕ نگاشتی پیوسته باشد.

اگر ϕ، ۱−۱ و پوشا و نگاشت وارون ϕ^{-1} پیوسته باشد، در آن‌صورت ϕ را یک‌ریختیِ گروه لی گویند. اگر G و H گروه‌های ماتریسیِ لی باشند و یک یک‌ریختیِ گروه لی بین آن دو برقرار باشد، آن‌گاه G و H را یک‌ریخت گویند و مشابه قبل با $\mathrm{G} \sim \mathrm{H}$ نشان می‌دهند. دو گروه ماتریسیِ لی که یک‌ریخت باشند، در واقع یک گروه هستند.

در جدول زیر تعدادی هم‌ریختی و یک‌ریختی ِ ی بین گروه‌های کلاسیک نشان داده شده است.

$$\begin{array}{llcl}
dim=3: & SU(2;\mathbb{C}) & \sim & SO(3;\mathbb{R})\cong USP(2)\cong U(1;\mathbb{Q})\cong SL(1;\mathbb{Q}) \\
 & SU(1;1;\mathbb{C}) & \cong & SO(2;1;\mathbb{R})\cong SP(2;\mathbb{R})\cong SL(2;\mathbb{R}) \\
dim=6: & SO(4;\mathbb{R}) & \cong & SU(2;\mathbb{C})\otimes SU(2;\mathbb{C}) \\
 & SO^\star(4) & \cong & SU(2;\mathbb{C})\otimes SL(2;\mathbb{C}) \\
 & SO(3;1;\mathbb{R}) & \cong & SL(2;\mathbb{C}) \\
 & SO(2;2;\mathbb{R}) & \cong & SL(2;\mathbb{R})\otimes SL(2;\mathbb{R}) \\
dim=10: & SO(5;\mathbb{R}) & \cong & USP(4) \\
 & SO(4;1;\mathbb{R}) & \cong & USP(2;2) \\
dim=16: & SO(6;\mathbb{R}) & \cong & SU(4;\mathbb{C}) \\
 & SO(5;1;\mathbb{R}) & \cong & SU^\star(4)\cong SL(2;\mathbb{Q}) \\
 & SO^\star(6) & \cong & SU(3;1;\mathbb{C}) \\
 & SO(4;2;\mathbb{R}) & \cong & SU(2;2;\mathbb{C}) \\
 & SO(3;3;\mathbb{R}) & \cong & SL(4;\mathbb{R})
\end{array}$$

۱.۶.۲ مثال:

گروه‌های $\mathrm{SU}(2)$ و $\mathrm{SO}(3)$. این دو گروه با تقریب و نه به‌طور ِ دقیق یک‌ریخت هستند. یک نگاشت هم‌ریختیِ گروه لی، ϕ ،که $\mathrm{SU}(2)$ را به $\mathrm{SO}(3)$ به صورت ۲—۱، می‌نگارد وجود دارد.
فضای Vی تمام ماتریس‌های مختلط 2×2 هرمیتی‌ی ِ بدون رَد را در نظر بگیرید. فضای V، یک فضای حقیقی سه بعدی با پایه‌های

$$A_1=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix};\quad A_2=\begin{pmatrix}0&i\\-i&0\end{pmatrix};\quad A_3=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

می‌باشد. ضرب داخلی در این فضا را به صورت

$$<A,B>=\frac{1}{2}tr(AB)$$

تعریف می‌کنیم. به سادگی می‌توان نشان داد که این پایه‌ها، $\{A_1,A_2,A_3\}$ پایه‌های بهنجار ِ متعامد[14] برای فضای V هستند. با این انتخاب می‌توان V را با $\mathbb{R}^3$ یکسان دانست.

Orthonormal[14]

حال اگر U یک عضوی از $\mathrm{SU}(2)$ و A عضوی از V باشند، می‌توان نشان داد که UAU^{-1} در V است. در نتیجه برای هر $U \in \mathrm{SU}(2)$، می‌توان یک نگاشت خطی $\phi_U : \mathrm{V} \to \mathrm{V}$ تعریف کرد،

$$\phi_U(A) = UAU^{-1}.$$

هم‌چنین برای $U \in \mathrm{SU}(2)$ و $A, B \in \mathrm{V}$ داریم:

$$<\phi_U(A), \phi_U(B)> = \frac{1}{2}tr(UAU^{-1}UBU^{-1}) = \frac{1}{2}tr(AB) = <A, B> .$$

در نتیجه ϕ_U یک تبدیل متعامد در $\mathrm{V} \approx \mathbb{R}^3$ است که می‌توان آن‌را عضو $\mathrm{O}(3)$ تصور کرد.
روشن است که نگاشت $U \to \phi_U$، نگاشتی از $\mathrm{SU}(2)$ به $\mathrm{O}(3)$ است. به سادگی می‌توان نشان داد، این نگاشت یک هم‌ریختی، $\phi_{U_1U_2} = \phi_{U_1}\phi_{U_2}$ و پیوسته است. در نتیجه $U \to \phi_U$، یک نگاشت گروه لی از $\mathrm{SU}(2)$ به $\mathrm{O}(3)$ است. از سوی دیگر دترمینان عضوهای $\mathrm{O}(3)$، ± 1 است. چون $\mathrm{SU}(2)$ متصل و نگاشت فوق پیوسته است، در نتیجه ϕ_U باید نگاشتی به $\mathrm{SO}(3)$ باشد. پس $U \to \phi_U$ یک نگاشت گروه لی از $\mathrm{SU}(2)$ به $\mathrm{SO}(3)$ است.

۷.۲ مسائل

۱) اگر a یک عدد گویا باشد، نشان دهید مجموعه‌ی اعداد به شکل $e^{2\pi i n a}$ که $n \in \mathbb{Z}$، عضو S^1 است. حال اگر

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{iat} \end{pmatrix} | t \in \mathbb{R} \right\}$$

است. نشان دهید

$$\bar{G} = \left\{ \begin{pmatrix} e^{it} & 0 \\ 0 & e^{is} \end{pmatrix} | t, s \in \mathbb{R} \right\}$$

که $\bar{\mathrm{G}}$ بستار[15] ـ مجموعه‌ی G در فضای ماتریس‌های 2×2 است.
نکته: می‌توان $\bar{\mathrm{G}}$ را یک چنبره‌ی $S^1 \times S^1$ تصورکرد.

[15] Closure

۲) نشان دهید مجموعه ـِ ی تمام اعداد گویایِ غیر صفر تحت عمل ـِ ضرب تشکیل گروه می‌دهند. ثابت کنید این گروه به طور محلّی فشرده نیست.

۳) اگر $\mathrm{G} = \mathrm{H} \otimes \mathrm{K}$ باشد، نشان دهید:

الف– H و K با زیرگروه‌های ناوردای G یک‌ریخت‌اند.

ب– گروه $\mathrm{G/H}$ با گروه K یک‌ریخت است.

پ– H و K تصویر هم‌ریختِ G اند.

۴) نشان دهید گروه اعداد مثبت تحت عمل ضرب با گروه اعداد حقیقی تحت عمل جمع هم‌ریخت است.

۵) نشان دهید اگر

$$a = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

باشد،

الف: $\mathrm{G} = \{\mathbb{I}, a, a^2, a^3, b, ab, a^2b, a^3b\}$ تشکیل یک گروه می‌دهند (جدول ـِ ضرب عناصر ـِ گروه G را بنویسید.

ب: این گروه زیر گروه کدام گروه کلاسیک است؟

٦) نشان دهید

$$a = \begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}$$

در $\mathrm{SO}(2)$ است.

فصل ۳

نمایش گروه‌ها

۱.۳ درآمد

اگر بتوان یک رابطه‌ی هم‌ریخت بین گروه G و گروه تبدیلات خطی D در یک فضای $\mathbb{C}^n$ برقرار کرد، در این‌صورت گوئیم: یک نمایش nبعدی برای گروه G بدست آورده‌ایم. فضای $\mathbb{C}^n$ را فضای نمایش می‌نامند. به زبان دیگر، اگر G یک گروه ماتریسی باشد آن‌گاه یک نمایش با بُعد ِ محدود ِ مختلط از G یک هم‌ریختی ِ گروه لی،

$$\Pi \ : \ G \to GL(n;\mathbb{C}); \ \ n \geq 1$$

است. به بیان کلی‌تر یک هم‌ریختی ِ گروه لی به صورت،

$$\Pi \ : \ G \to GL(V); \ \ dim(V) \geq 1$$

که V یک فضای برداری مختلط با بُعد محدود است، می‌باشد.

نمایش همانند یک عمل (خطی) ِ گروه روی فضای برداری است.در این صورت برای هر عضو $g \in \mathrm{G}$ یک عمل‌گر ِ $\Pi(g)$ وجود دارد که بر روی فضای برداری اثر می‌کند.

۱.۱.۳ نمایش وفادار

گروه G ممکن است نمایش‌هایی با ابعاد مختلف داشته باشد. اگر G و D رابطه یک‌ریختی داشته‌باشند، نمایش را نمایش وفادار[1] گویند.

۲.۱.۳ نمایش صرف‌نظر از یک فاکتور

چون هر تبدیل خطی در $\mathbb{R}^n$ را می‌توان به وسیله یک ماتریس $n \times n$ نشان داد، لذا نمایش گروه G در حقیقت تصویر هم‌ریخت عناصر $g_i \in G$ آن بر روی گروه ماتریس‌های $n \times n$ می باشد. به‌عبارت دیگر نمایش Πی گروه G (با عناصر g_i) وابسته کردن مجموعه ماتریس‌های $\Pi = \{D(i)\}$ با عناصر g_i است.

$$g_0 \longrightarrow D(0) \quad = \mathbb{I} \tag{۱}$$

$$g_i \longrightarrow D(i) \tag{۲}$$

به‌طوری که اگر $g_i g_k = g_l$ باشد، $D(i)D(k) = D(l)$ خواهد بود. اگر از رابطه $g_i g_k = g_l$ نتیجه شود: $D(i)D(k) = \eta(i,k)D(l)$ و $|\eta| = 1$ باشد، نمایش را نمایش صرف‌نظر از یک فاکتور گویند.

۳.۱.۳ نمایش تقلیل‌پذیر و تقلیل‌ناپذیر

اگر دو نمایش مانند $D(i)$ و $D'(i)$ برای یک گروه داشته‌باشیم به گونه‌ای که رابطه‌ی $D'(i) = S^{-1}D(i)S$ برای هر iای بین آن‌ها برقرار باشد، در این صورت این دو نمایش را معادل گویند. در این حالت لزوماً فضای نمایش برای هر دو نمایش یکی نیست و بردارهای پایه‌ی آن‌ها متفاوت است.

اگر فضای نمایش هیچ زیر فضایی مثل $\mathbb{R}^m$ (که $n > m$ باشد) نداشته باشد که خود بتواند یک فضای نمایش واقع شود، به بیان دیگر هیچ زیرفضایِ ناوردای نداشته‌باشد، نمایش مربوطه را نمایش تقلیل ناپذیر[2] گویند. در غیر این صورت نمایش را تقلیل‌ناپذیر نامند.

---

[1] Faithful Representation

[2] Irreducible Representation

اگر یک نمایش تقلیل‌پذیر باشد، می توان یک زیرفضا پیدا کرد به‌طوری که بردارهای آن بوسیله ماتریس‌های $D(i)$ به یک‌دیگر تبدیل شوند. حال می‌خواهیم کلی‌ترین شکل یک نمایش تقلیل‌پذیر را بدست آوریم. کلی‌ترین شکل یک ماتریس $D(i)$ که فضای $\mathbb{R}^n$ را ناوردا می‌گذارد به صورت:

$$D(i) = \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} T(i) & S(i) \\ \hline 0 & Q(i) \end{array}\right) \\ \underbrace{}_{m}\underbrace{}_{n-m} \end{array} \quad \begin{array}{l} \}\, m \\ \}\, n-m \end{array} \tag{۳}$$

است. کلی‌ترین بردار در فضای $\mathbb{R}^m$ تحت تبدیل $D(i)$ به صورت زیر در می آید

$$D(i) \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{۴}$$

که باز متعلق به فضای $\mathbb{R}^m$ است. حال اگر $D(i)$ به صورت رابطه (۳) باشد و یک نمایش برای گروه G تشکیل دهد، می‌توان نشان داد که $T(i)$ و $Q(i)$ نیز نمایش‌های دیگری برای گروه G هستند. بر اساس رابطه $D(i)D(j) = D(k)$ داریم:

$$\left(\begin{array}{c|c} T(i)T(j) & T(j)S(j) + S(i)Q(j) \\ \hline 0 & Q(i)Q(j) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} T(k) & S(K) \\ \hline 0 & Q(k) \end{array}\right) \tag{۵}$$

بنابراین

$$T(i)T(j) = T(k), \quad Q(i)Q(j) = Q(k)$$

در نتیجه $T(i)$ و $Q(i)$ خود نمایش‌هایی برای گروه G هستند. چون در حالت کلی $S(i) \neq 0$ است، زیر فضای $\mathbb{R}^m_\perp$ یک زیر فضای ناوردا نیست. در بسیاری از حالت‌ها $\mathbb{R}^m_\perp$ یک زیر فضای ناوردا است. در این صورت

$$D(i) = \left(\begin{array}{c|c} T(i) & 0 \\ \hline 0 & Q(i) \end{array}\right) \tag{۶}$$

در این حالت ماتریس نمایش $D(i)$ جمع قطری ماتریس‌های $T(i)$ و $Q(i)$ هستند، $D(i) = T(i) + Q(i)$. ممکن است زیرفضای $\mathbb{R}^m$ و $\mathbb{R}^m_\perp$ به نوبه خود تقلیل‌ناپذیر باشند. در این صورت نمایش $\Pi\left(D^{(\tau)}(i)\right)$ کاملاً تقلیل‌پذیر است و به صورت:

$$D(i) = \begin{pmatrix} D^{(1)}(i) & 0 & 0 \\ 0 & D^{(2)}(i) & 0 \\ 0 & 0 & D^{(3)}(i) \end{pmatrix} \qquad (۷)$$

لذا

$$\Pi = \Pi^{(1)} \oplus \cdots \oplus \Pi^{(k)}; \;\; \Pi^{(r)} = \{D^{(r)}(i)\}$$

روشن است که هر یک از $\Pi^{(r)}$ها دارای ابعاد مختلفی هستند.
می‌توان نشان داد نمایش‌های یکانی و پادیکانی کاملاً تقلیل‌پذیر هستند. امّا تمام نمایش‌های گروه‌های شبه‌ساده کاملاً تقلیل‌پذیر هستند.

۲.۳ تشخیص نمایش‌های مختلف یک گروه

برای آن که بتوانیم نمایش‌های مختلف گروه G، $\Pi^{(r)} = \{D^{(r)}(i)\}$، را از هم تمیز دهیم کمیتی به نام مشخصه[3] به صورت $\chi^{(r)}(i) = \mathrm{tr} D^{(r)}(i)$ تعریف می‌کنیم. بدیهی است مشخصه برای تمام عناصر یک کلاس از نمایش‌ها مساوی است.
قضیه:فرض کنید G یک گروه تبدیلات ِ خطی و H زیرگروه ناوردای آن باشند. گروه دیگری مانند V را چنان در نظر می‌گیریم که بتوان هر عضو از گروه G را به صورت $v_i h_k, \;\; v_i \in V, \; h_i \in H$ نوشت. اگر $\Pi^{(s)} = \{D^{(s)}(g_i)\}$ نمایش تقلیل‌ناپذیرِ گروه G،

$$\Pi^{(s)} \;:\; G \;\to D^{(s)}(v_i h_k); \;\; v_i h_j \in G$$

$\Pi^{(s)}$ نیز یک نمایش ِ تقلیل‌ناپذیر با بُعد s گروه H،

$$\Pi^{(s)} \;:\; h_j \to D^{(s)}(h_j)$$

[3] Character

و هم‌چنین $\Psi^{(r)}$ نیز نمایش تقلیل‌ناپذیر گروه V و $\chi^{(r)}(v_i)$ مشخصه عضو v_i در نمایش $\Psi^{(r)}$ باشند، در این صورت

$$\chi^{(r)}(v_i)D^{(s)}(v_ih_j) \equiv \Phi(v_ih_j)$$

یک نمایش تقلیل‌ناپذیر گروه G خواهد بود. روشن است که اگر تمام نمایش‌های ممکن $\Pi^{(s)}$ و $\Psi^{(r)}$ را در نظر بگیریم تمام نمایش‌های تقلیل‌ناپذیر G بدست می آید.

قضیه:دو گروه $\mathrm{A} = \{a_i\}$ و $\mathrm{B} = \{b_j\}$ با بُعد یکسان که عضوهای آن‌ها با هم جابه‌جایی باشند را در نظر بگیرید. مجموعه‌ی حاصل‌ضرب عضوهای به شکل a_ib_j تشکیل گروه، $M = \{a_ib_j\}$، می‌دهند. این گروه را حاصل‌ضرب مستقیم[4] دو گروه A و B، $\mathrm{M} = A \otimes B$، می‌نامند. حال اگر $\Pi^{(r)} = \{D^{(r)}(a_i)\}$ و $\Psi^{(s)} = \{F^{(s)}(b_j)\}$ به ترتیب نمایش‌های تقلیل‌ناپذیر گروه‌های A و B باشند، آن‌گاه مجموعه ماتریس‌های $\{D^{(r)}(a_i) \otimes F^{(s)}(b_i)\}$ یک نمایش تقلیل‌ناپذیر از گروه M،

$$\{a_ib_j\} \;\rightarrow\; \{D^{(r)}(a_i) \otimes F^{(s)}(b_i)\}$$

خواهد بود. هم‌چنین می‌توان تمام نمایش‌های تقلیل‌ناپذیر ِ M را از ضرب مستقیم تمام نمایش‌های تقلیل‌ناپذیر ممکن A و B بدست آورد.

۳.۳ نمایش‌های گروه $\mathrm{SU}(2)$

این گروه، گروه ماتریس‌های 2×2 همانی ِ ی با دترمینان یک است. در نتیجه تبدیل در فضای دو بُعدی مختلط با عناصر (ξ_1, ξ_2) به صورت

$$\xi' = U\xi, \;\; UU^\dagger = \mathbb{I}, \;\; detU = 1$$

است. اگر اعضای گروه $\mathrm{SU}(2)$ به صورت

$$U = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \;\; a,b,c,d \in \mathbb{C}$$

[4] Direct Product

باشند. با استفاده از خاصیت $U^\dagger = U^{-1}$ می توان نشان داد $d = a^\star$ و $b = c^\star$ است. در نتیجه

$$U = \left(\begin{array}{cc} a & b \\ -b^\star & a^\star \end{array} \right), \quad a, b \in \mathbb{C}$$

است. شرط بالا هشت پارامتر حقیقی ِی آزاد را تبدیل به چهار پارامتر حقیقی نمود. از سوی دیگر با استفاده از شرط دترمینان یک، داریم:

$$detU = 1 \quad \Rightarrow \quad |a|^2 + |b|^2 = 1$$

در نتیجه فقط سه پارامتر آزاد ِ حقیقی باقی می‌ماند. به این پارامترها، پارامترهای کیلی—کلاین[5] می‌گویند. هم‌چنین به عناصر فضای مختلط (ξ_1, ξ_2) که به‌صورت $\xi' = U\xi$ تبدیل می‌یابند، اسپینورهای دو بُعدی متعلق به فضای سه بُعدی ِی حقیقی می‌نامند.

برای پیدا کردن نمایش‌های گروه $\mathrm{SU}(2)$، یک فضای خطی که به‌وسیله‌ی تک‌جمله‌ای‌های درجه‌ی n جاروب می‌شوند[6]، در نظر بگیرید. این فضا یک فضای ِ برداری ِی مختلط ِ $n+1$ بُعدی است. حال اگر $P_k = \xi_1^{n-k}\xi_2^k$ باشد، تمام تک جمله‌ای‌های درجه n به صورت زیر هستند:

$$P_0 = \xi_1^n, \;\; P_1 = \xi_1^{n-1}\xi_2, \cdots \;\; P_n = \xi^n$$

درست به تعداد $n+1$ تک‌جمله‌ای. از آن‌جا که اثر گروه $\mathrm{SU}(2)$ روی این فضا ترکیب خطی از تک‌جمله‌ای‌های همان فضا را می‌دهد، این فضا یک فضای خطی است. حال نشان خواهیم داد که با این فرض، یک فضای نمایش از گروه $\mathrm{SU}(2)$ است.

اگر بُعد این فضا را $n = 2j$ بگیریم، یک عضو از این فضا به صورت

$$P_m^{(j)} = \frac{\xi_1^{j+m}\xi_2^{j-m}}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}; \quad m = -j, \cdots j \tag{۸}$$

خواهد بود. ضریب تک‌جمله‌ای را $1/\sqrt{(j+m)!(j-m)!}$ به این دلیل انتخاب می‌کنیم که این نمایش یکانی باشد[7] حال تک‌جمله‌ای بالا را تحت تبدیل گروه $\mathrm{SU}(2)$،

$$\begin{array}{rcl} \xi_1' &=& a\xi_1 + b\xi_2 \\ \xi_2' &=& -b^\star\xi_1 + a^\star\xi_2 \end{array} \tag{۹}$$

---

[5] Cayley-Klein

[6] یک تک جمله‌ای (monomial) از درجه n یعنی تابعی به شکل $x^a y^b \cdots z^c$ که $a+b+\cdots+c=n$ است.

[7] **تعریف** : اگر G یک گروه ماتریسی ِ لی، $\mathcal{H}$ یک فضای هیلبرت و $U(\mathcal{H})$ یک گروه از عمل‌گرهای یکانی روی $\mathcal{H}$ باشند، آن‌گاه نگاشت هم‌ریختی ِی $\Pi \; G \to U(\mathcal{H})$ که شرط $A_n, A \in G, \;\; A_n \to A \;\; \text{then} \;\; U(A_n)v \to \Pi(A)v \;\; \forall\, v \in \mathcal{H}$ را ارضاع نماید، $U(\mathcal{H})$ را نمایش یکانی ی ِ G گویند.

قرار می‌دهیم. در این صورت

$$\begin{aligned} P_m^{(j)} \quad \rightarrow \qquad P_m'^{(j)} &= UP_m^{(j)} = \frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}\xi_1'^{j+m}\xi_2'^{j-m} \\ &= \frac{1}{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}(a\xi_1+b\xi_2)_1^{j+m}(-b^\star\xi_1+a^\star\xi_2)^{j-m} \end{aligned} \qquad (۱۰)$$

خواهد بود. با کمی عملیات جبری و بسط دو جمله‌ای‌های بالا $P_m^{(j)}$ی تبدیل یافته به صورت

$$P_m'^{(j)} = \sum_{k=0}^{j+m}\sum_{k'=0}^{j-m} \frac{\sqrt{(j+m)!(j-m)!}}{(j+m-k)!(j-m-k')!k!k'!} a^{j+m-k}(a^\star)^{k'}b^k(-b^\star)^{j-m-k'}\xi_1^{2j-k-k'}\xi_2^{k+k'} \qquad (۱۱)$$

با استفاده از رابطه‌ی (۸) خواهیم داشت:

$$\xi^{2j-(k+k')}\xi_2^{k+k'} = \xi_1^{j+(j-k-k')}\xi_2^{j-(j-k-k')} = P_{j-k-k'}^{(j)}\sqrt{(2j-k-k')!(k+k')!} \qquad (۱۲)$$

با باز تعریف $j-k-k' \equiv m'$ و استفاده از رابطه‌ی بالا، رابطه‌ی (۱۹) به صورت زیر ساده خواهد شد:

$$P_m'^{(j)} = \sum_{k=0}^{j+m}\sum_{m'} \frac{(-)^{k+m'-m}\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m)!}}{(j+m-k)!(j-k-m')!(k+m'-m)!k!} a^{j+m-k}(a^\star)^{j-k-m'}b^k(b^\star)^{k+m'-m}P_{m'}^{(j)} \qquad (۱۳)$$

با تعریف کمیت

$$D_{mm'}^{(j)}(a,b) \equiv \sum_{k=0}^{j+m} \frac{(-)^{k+m'-m}\sqrt{(j+m)!(j-m)!(j+m')!(j-m')!}}{(j+m-k)!(j-k-m')!(k+m'-m)!k!} a^{j+m-k}(a^\star)^{j-k-m'}b^k(b^\star)^{k+m'-m} \qquad (۱۴)$$

خواهیم داشت:

$$P^(j)_m \rightarrow P'^(j)_m = D^{(j)}(a,b)P_m^{(j)} = \sum_{m'} D_{mm'}^{(j)}(a,b)P_{m'}^{(j)} \qquad (۱۵)$$

با مقایسه‌ی رابطه بالا با رابطه‌ی (۱۰)، $D^{(j)}(a,b)$ نمایشی از U و در نتیجه نمایشی از گروه $\mathrm{SU}(2)$ است.

حالت $m'=j$ را بررسی می‌کنیم. در این صورت فقط حالت $k=0$ جواب دارد:

$$D^{(j)}_{mj}(a,b)=(-)^{j-m}\sqrt{\frac{(2j)!}{(j+m)!(j-m)!}}a^{2j-m}(b^\star)^{j-m} \qquad (۱۶)$$

در حالت $b=0$ و $a=\exp(i\alpha/2)$ تنها حالت غیر صفر وقتی است که $k=0$ باشد. در نتیجه

$$D^{(j)}_{mm'}(e^{i\alpha/2},0)=\delta_{mm'}e^{im\alpha}.$$

رابطه‌ی بالا نشان‌دهنده‌ی آن است که $D^{(j)}_{mm'}(e^{i\alpha/2},0)$ یک ماتریس قطری است. می‌دانیم هرگاه یک ماتریس قطری با ماتریسی جابه‌جایی باشد آن ماتریس نیز قطری است. در نتیجه

$$AD^{(j)}(e^{i\alpha/2},0)=D^{(j)}(e^{i\alpha/2},0)A\Rightarrow\left(AD^{(j)}\right)_{mm'}=\left(D^{(j)}A\right)_{mm'}$$

پس $A_{mm'}=a_m\delta_{mm'}$ است. حال اگر A با ماتریس $D^{(j)}_{mm'}(a,b)$ی رابطه (۱۴) جابه‌جایی باشد در این صورت

$$AD^{(j)}(a,b)=D^{(j)}(a,b)A\Rightarrow D^{(j)}_{mj}(a_j-a_m)=0$$

چون بنابر رابطه‌ی (۱۶)، $D^{(j)}\neq 0$، پس $a_m=a_j$ به این معنی که برای تمام مقادیر m درایه‌های قطر A مساوی است. درنتیجه نه تنها A قطری است بلکه مضربی از ماتریس واحد است.

بر اساسِ قاعده‌ی شور[8]، یک نمایش وقتی تقلیل‌ناپذیر است که تمام اعضای آن با هیچ ماتریسی جز ماتریس واحد جابه‌جایی نباشد.

پس $D^{(j)}$ یک نمایش تقلیل‌ناپذیر از گروه $\mathrm{SU}(2)$ است. روشن است به ازای هر jی یک نمایش با بُعد متفاوت وجود دارد که معادل نمایش دیگر نیست. ساده‌ترین نمایش $D^{(0)}$ است که یک نمایش یک بُعدی است. در این حالت تمام عناصر $\mathrm{SU}(2)$ عدد ۱ است. نمایش $D^{(1/2)}$ نمایش بنیادی ِی $\mathrm{SU}(2)$ است که خودش می‌باشد:

$$D^{1/2}(U)=U$$

نمایش $D^(1)$ در فضای سه بعدی است که $P_2=\xi_2^2,\;\; P_1=\xi_1\xi_2,\;\; P_0=\xi_1^2$ هستند. عنصر متناظر با U در این فضا

$$D^{(1)}(U)=\begin{pmatrix} a^2 & \sqrt{2}ab & b^2\\ -\sqrt{2}ab^\star & aa^\star-bb^\star & \sqrt{2}a^\star b\\ b^{\star 2} & -\sqrt{2}ab^\star & a^{\star 2}\end{pmatrix}$$

[8] Schur

می‌توان نشان داد که با حاصل‌ضرب مستقیم نمایش‌های $\mathrm{SU}(2)$ نمایش دیگری از $\mathrm{SU}(2)$ بدست می‌آید که در حالت کلّی تقلیل‌پذیر است (قضیه‌ی کلبش—گوردون[9]):

$$D^{(j_1)} \otimes D^{(j_2)} = D^{(j_1+j_2)} \oplus D^{(j_1+j_2-1)} \oplus \cdots \oplus D^{|(j_1-j_2)|}$$

نکته پایانی در این مثال را به رفتار اسپینور تحت تبدیل ـِ U اختصاص می‌دهیم. اگر دو طرف رابطه‌ی (۱۷) را مزدوج ـِ مختلط کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \xi'^{\star}_1 &= a^\star \xi_1^\star + b^\star \xi_2^\star \\ \xi'^{\star}_2 &= -b\xi_1^\star + a\xi_2^\star \end{aligned} \tag{۱۷}$$

مرسوم است که $\xi_1^\star \equiv \xi_{\dot 1}$, $\xi_2^\star \equiv \xi_{\dot 2}$ می‌نویسند. در این صورت

$$\begin{aligned} \xi'_{\dot 1} &= a^\star \xi_{\dot 1}^\star + b^\star \xi_{\dot 2} \\ \xi'_{\dot 2} &= -b\xi_{\dot 1} + a\xi_{\dot 2} \end{aligned} \tag{۱۸}$$

و یا

$$\begin{pmatrix} \xi'_{\dot 1} \\ \xi'_{\dot 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^\star & b^\star \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_{\dot 1} \\ \xi_{\dot 2} \end{pmatrix} = U^\star \begin{pmatrix} \xi_{\dot 1} \\ \xi_{\dot 2} \end{pmatrix}$$

پس $\begin{pmatrix} \xi_{\dot 1} \\ \xi_{\dot 2} \end{pmatrix}$ با $U^\star$ تبدیل می‌یابد. به سادگی می‌توان نشان داد که این نمایش جدیدی نیست و معادل تبدیل $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ -\xi_2 \end{pmatrix}$ تحت U است.

۴.۳ مولدهای گروه

۱.۴.۳ تابع نمایی یک ماتریس

تابع نمایی ـِ یک ماتریس نقش ـِ عمده‌ای در نظریه‌ی گروه‌ها دارد. تابع نمایی در تعریف جبر ـِ لی یک گروه لی ـِ ماتریسی وارد می‌شود و روشی است که از روی اطلاعات جبر می توان گروه را ساخت. از آن‌جا که محاسبات در جبر ـِلی به‌دلیل آن‌که یک فضای خطی است، ساده‌تر از محاسبات در گروه ـِ لی است، در نتیجه تابع نمایی نقش بارزتری پیدا می‌کند.

[9] Clebsch-Gordon

اگر X یک ماتریس ـ $n \times n$ ـ حقیقی و یا مختلط باشد، e^X را می‌توان به صورت سری ـ نمایی به صورت زیر تعریف کرد:

$$e^X = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{X^m}{m!} \tag{۱۹}$$

می‌توان نشان داد که سری فوق یک سری همگرا است. تابع نمایی فوق دارای خواص زیر است:

۱) $e^0 = \mathbb{I}$.

۲) e^X وارون‌پذیر است، $(e^X)^{-1} = e^{-X}$.

۳) برای تمام اعداد حقیقی و یا مختلط α و β، $e^{(\alpha+\beta)X} = e^{\alpha X} e^{\beta X}$ است.

۴) اگر $XY = YX$ باشد، آن‌گاه $e^{X+Y} = e^X e^Y$ است.

۵) اگر C وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه $e^{CXC^{-1}} = Ce^X C^{-1}$ است.

٦) نُرم تابع ـ نمایی یک ماتریس همواره کوچک‌تر ویا مساوی ـِ ی تابع ـ نمایی ـِ ی نُرم آن ماتریس، $||e^X|| \leq e^{||X||}$، است.

البته به خاطر داشته باشید که در حالت کلی $e^{X+Y} = e^X e^Y$ نیست. در صورتی خاصیت ۴ برقرار است که X و Y جابه‌جایی باشند. در حالت کلی باید از رابطه‌ی بکر– کمپبل–هاسدورف[10] استفاده کرد.

برای اثبات خواص فوق این‌گونه عمل می‌کنیم: خاصیت ۱ به نظر بدیهی است. خاصیت‌های ۲ و ۳ حالت‌های خاص خاصیت ۴ است. امّا خاصیت چهارم: اگر سمت راست را به صورت سری ـِ ی توانی نوشته و سپس جمله به جمله ضرب کنیم:

$$e^X e^Y = \left(\mathbb{I} + X + \frac{X^2}{2!} + \cdots\right)\left(\mathbb{I} + Y + \frac{Y^2}{2!} + \cdots\right)$$

و سپس جملاتی که جمع ـ توان‌های X و Y مساوی m است را فاکتورگیری کنیم،

$$e^X e^Y = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{m} \frac{X^k}{k!}\frac{Y^{m-k}}{(m-k)!} = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{m!}\sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}X^k Y^{m-k}$$

[10] Baker-Campbell-Hausdorff Formula

است. حال اگر و فقط اگر $[X,Y]=0$ باشد،

$$e^X e^Y = e^{X+Y}$$

برای اثبات خاصیت پنجم، کافی است، بنویسیم

$$(CXC^{-1})^m = CX^mC^{-1}.$$

البته خاصیت‌های دیگری نیز می‌توان به مجموعه‌ی بالا اضافه کرد، که به وقت مناسب به آن‌ها اشاره خواهد شد.

۵.۳ نمایش گروه‌هایِ لی و مولدهای گروه

فرض کنید $\mathrm{G}=\{g_\alpha\}$ یک گروه لی باشد و عناصر آن تابعیِ از r پارامترِ پیوسته باشد. نمایش این گروه روی فضای خطی‌یِ $V=\mathbb{R}^n$ به صورت

$$\Pi = \{D(\alpha)\}$$

که در آن $D(\alpha)$ ماتریس $n\times n$ و درایه‌های آن، $D_{\rho\sigma}(\alpha)$، تابع پیوسته از پارامترهای $\alpha_1,\cdots,\alpha_r$ هستند. حال اگر بردارهای پایه‌ی فضای نمایش را با Ψ که

$$\Psi = (\psi_1,\cdots,\psi_n)$$

است نشان دهیم، بدیهی است به تبدیل‌های روی $g_\alpha\in\mathrm{G}$ تبدیل‌های $\Psi\to\Psi'=D(\alpha)\Psi$ در V وابسته است. رابطه‌ی بالا را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\psi_\sigma \to \psi'_\sigma = D_{\rho\sigma}(\alpha)\psi_\rho;\quad \rho=1,2,\cdots,n \qquad (۲۰)$$

از آن‌جا که $D_{\rho\sigma}(\alpha)$ تابع پیوسته از پارامترهای α_i است، می‌توان سمت راست رابطه‌ی بالا را به صورت زیر بسط داد:

$$\psi'_\sigma = \left[\delta_{\rho\sigma} + \left(\frac{\partial D_{\rho\sigma}}{\partial\alpha_1}\right)_{\alpha=0} + \cdots + \left(\frac{\partial D_{\rho\sigma}}{\partial\alpha_r}\alpha_r\right)_{\alpha=0} + \mathcal{O}(\alpha^2)\right]\psi_\rho \qquad (۲۱)$$

جمله‌ی اول، $\delta_{\rho\sigma}$، ناشی از $D_{\rho\sigma}(0)$ است، زیرا بنابه قرارداد $\alpha = 0$ عضو یکانی‌یِ گروه G است. نمایش این عضو یکانی باید عضو یکانی ِ D، ماتریس واحد با بعد n، باشد. امّا r ماتریس

$$X^s \equiv \left(\frac{\partial D(\alpha)}{\partial \alpha_s}\right)_{\alpha=0}; \quad s = 1, 2, \cdots, r \tag{۲۲}$$

را عمل‌گرهای بی‌نهایت کوچک گروه G گویند. روشن است که در نمایش n بعدی Xها ماتریس‌های $n \times n$ هستند. هم‌چنین با آن‌که درایه‌های $D(\alpha)$ تابعی از αها هستند، امّا درایه‌های X^sهادر حالت کلی اعداد خالص، بگویید $\mathbb{C}$، می‌باشند. باتوجه به رابطه‌ی بالا تبدیل‌های بینهایت کوچک تا تقریب α در فضای نمایش به صورت

$$\psi_\sigma \to \psi'_\sigma = (\delta_{\rho\sigma} + \alpha_s X^s_{\rho\sigma})\psi_\rho; \quad \sigma = 1, 2, \cdots, n \;\; and \;\; s = 1, 2, \cdots, r \tag{۲۳}$$

و یا به‌شکل مجرد

$$\Psi \to \Psi' = (\mathbb{I} + \alpha_s X^s)\Psi \tag{۲۴}$$

است. در رابطه‌ی بالا $\mathbb{I}$ ماتریس واحد $n \times n$ است. این تبدیل در R^n تصویر تبدیل بینهایت کوچکِ گروه G است.

تبدیلِ محدودِ $g_\alpha \in \mathrm{G}$ را می‌توان به صورت

$$g_\alpha = \lim_{k\to\infty} (g_{\frac{\alpha}{k}})^k$$

نوشت. چون $g_{\frac{\alpha}{k}}$ برای مقادیر k بزرگ، تصویری به صورت $(\mathbb{I} + \frac{\alpha_s}{k} X^s)$ در فضای R^n است، بنابراین ماتریس $D(\alpha)$ که نمایش g_α در R^n است به صورت

$$D(\alpha) = \lim_{k\to\infty} (\mathbb{I} + \frac{\alpha_s}{k} X^s)^k = e^{\alpha_s X^s}$$

می‌باشد. در این‌صورت متناظر تبدیل g_α در فضای R^n عبارت است از:

$$\Psi \to \Psi' = e^{\alpha_s X^s}\Psi. \tag{۲۵}$$

عمل‌گرهای بینهایت کوچک ـِ X^s مستقل نیستند و باید شرط زیر را ارضاء نمایند:

$$[X_p, X_q] = \sum_{s=1}^{r} C_{pq}^s X_s = C_{pq}^s X_s \qquad (۲۶)$$

روابط بالا باید در هر نمایشی با همان ضرایب ـِ C_{pq}^s صدق کنند. این ضرایب عددی را ثابت‌های ساختاری[11] می‌نامند. روشن است که این ضرایب نسبت به جایگشت شاخص‌های p و q پادمتقارن هستند. با داشتن این ثابت‌های ساختاری می‌توان ساختمان یک گروه را مشخص کرد. اگر یک گروه ـِ دلخواه مانند G داده شود، می‌توان با انتخاب یک نمایش مناسب از آن گروه، عمل‌گرهای بینهایت کوچک آن گروه را بدست آورد. هم‌چنین با داشتن ثابت‌های ساختاری یک گروه می‌توان نمایش‌های با بُعد معینی از آن گروه را بدست آورد.

۶.۳ مثال‌هایی از مولدهای گروه‌های لی

در ادامه‌ی این فصل برای درک بیش‌تر موضوع دو مثال از مولدهای گروه را مورد بررسی قرار می‌دهیم.
گروه لی ـِ G را که گروه تبدیلات خطی بر روی فضای برداری ـِ V است در نظر بگیرید. اگر این فضای برداری n بُعدی باشد، در این صورت یک بردار عضو فضای V به صورت زیر تبدیل می‌یابد.

$$x' = D^{(n)}(a)x \quad \Rightarrow \quad x' = f(x,a)$$

که a معّرف r پارامتر است. در نتیجه $x_i = f_i(x_1, \cdots, x_n; a_1, \cdots, a_r)$ می‌باشد. روشن است برای $a = 0$، $D(0)$ عنصر ـِ همانی گروه است. در نتیجه $x = f(x,0)$ است. حال اگر a بی‌نهایت کوچک باشد، می‌توان f را حول عنصر یکانی بسط داد:

$$x + dx = f(x, da) \approx f(x,0) + \left(\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\right)_{a=0} da + \mathcal{O}(a^2) = x + \left(\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\right)_{a=0} da + \mathcal{O}(a^2)$$

در نتیجه

$$dx = \left(\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\right)_{a=0} da$$

---

[11] Structure Constant

حال با تعریف

$$U \equiv \left(\frac{\partial f(x,a)}{\partial a}\right)_{a=0}$$

خواهیم داشت

$$dx = U(x)da \Rightarrow dx_i = U_{i\nu}da_\nu$$

که در آن

$$U_{i\nu} = \left(\frac{\partial f_i(x,a)}{\partial a_\nu}\right)_{a_\nu=0}, \quad \forall i = 1,\cdots,n; \quad \nu = 1,\cdots,r$$

حال یک تابع مانند $F(X)$ را تحت تبدیل بالا قرار می‌دهیم.

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x}dx = \frac{\partial F}{\partial x}U(x)dx = da\left(U(x)\frac{\partial}{\partial x}\right)F$$

با تعریف

$$X \equiv U(x)\frac{\partial}{\partial x} \tag{۲۷}$$

تبدیل بینهایت کوچک یک تابع به صورت

$$dF = daXF \tag{۲۸}$$

است. عمل‌گر X یک عمل‌گر r بعدی با مولفه‌های

$$X_\nu = U_{i\nu}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

است. X همان مولد بی‌نهایت کوچک گروه می‌باشد و روشن است که به ازای هر پارامتر گروه یک مولد بی‌نهایت کوچک داریم.

۱.۶.۳ گروه $\mathrm{SO}(3) \equiv \mathrm{R}(3)$

تبدیل در این گروه به صورت $x' = Ax$ است که A ماتریس 3×3 و $AA^T = \mathbb{I}$ می‌باشد. اگر A به صورت یک عمل‌گر نزدیک همانی، $A = \mathbb{I} + a$ اختیار کنیم، به طوری که برای $a = 0$ عضو همانی باشد، تبدیل بی‌نهایت کوچک $(a = \epsilon)$ به صورت

$$x + dx = (\mathbb{I} + \epsilon)x \quad \Rightarrow \quad dx = \epsilon x$$

ولی چون $AA^T = \mathbb{I}$ است، پس $\epsilon = -\epsilon^T$ می‌باشد. در این صورت ϵ به صورت

$$\epsilon = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ -\epsilon_{12} & 0 & \epsilon_{23} \\ -\epsilon_{13} & -\epsilon_{13} & 0 \end{pmatrix} \tag{۲۹}$$

حال اگر $\epsilon_{12} \equiv a_3$, $\epsilon_{13} \equiv -a_1$, $\epsilon_{23} \equiv a_1$ در این صورت داریم:

$$\begin{aligned} dx_1 &= a_3x_2 - a_2x_3 &= f_1(x_1, x_2, x_3; a_1, a_2, a_3) \\ dx_2 &= -a_3x_1 + a_1x_3 &= f_2(x_1, x_2, x_3; a_1, a_2, a_3) \\ dx_3 &= a_2x_1 - a_1x_2 &= f_3(x_1, x_2, x_3; a_1, a_2, a_3) \end{aligned}$$

حال با توجه به رابطه‌ی

$$X_\nu = U_{i\nu}\frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial a_\nu}\right)_{a_\nu=0}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

در نتیجه

$$X_1 = x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - x_2\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X_2 = -x_3\frac{\partial}{\partial x_1} + x_1\frac{\partial}{\partial x_3}, \quad X_3 = x_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2}$$

می‌توان نشان داد که

$$[X_1, X_2] = X_3, \quad \cdots \tag{۳۰}$$

چون از ابتدا پارامترهای گروه را حقیقی فرض کردیم، مولدهای بالا نیز حقیقی شدند. امّا می‌توان ترکیب خطی‌ی ِ دل‌خواهی از مولدهای بالا چنان انتخاب کرد که مختلط شوند. به عنوان مثال برای مولدهای گروه $\mathrm{R}(3)$

$$L_j = iX_j$$

که در این صورت

$$[L_i, L_j] = i\epsilon_{ijk}L_k \tag{۳۱}$$

خواهد بود.

۲.۶.۳ گروه SU(2)

همان‌گونه که می‌دانید،این گروه، گروه ماتریس‌های 2×2 همانی ـ ی با دترمینان یک است. در نتیجه

$$x' = Ax, \quad AA^{\dagger} = \mathbb{I}$$

است. یک تبدیل بی‌نهایت کوچک این گروه به صورت

$$x' = (\mathbb{I}+\epsilon)x = x + dx \Rightarrow dx = \epsilon x$$

است. امّا چون $AA^{\dagger} = \mathbb{I}$ است در نتیجه

$$(\mathbb{I}+\epsilon)(\mathbb{I}+\epsilon^{\dagger}) = \mathbb{I} \Rightarrow \epsilon + \epsilon^{\dagger} = 0 \Rightarrow \epsilon^{\dagger} = -\epsilon$$

می‌باشد. از سویی دیگر چون باید $\det(\mathbb{I}+\epsilon) = 1$ باشد، بنابراین ϵ به صورت

$$\epsilon = \begin{pmatrix} ia_1 & a_2 + ia_3 \\ -a_2 + ia_3 & -ia_1 \end{pmatrix} \tag{۳۲}$$

است. با توجه به رابطه‌ی بالا

$$\begin{aligned} dx_1 &= ia_1x_1 + (a_2+ia_3)x_2 &= f_1(x_1,x_2;a_1,a_2,a_3) \\ dx_2 &= (-a_2+ia_3)x_1 - a_1x_2 &= f_2(x_1,x_2;a_1,a_2,a_3) \end{aligned}$$

می‌باشند. مشابه مثال بالا مقادیر مولدهای بی‌نهایت کوچک با استفاده از رابطه‌ی

$$X_\nu = U_{ij}\frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_i}{\partial a_\nu}\right)_{a_\nu=0}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

به صورت

$$X_1 = \left(\frac{\partial f_i}{\partial a_1}\right)_{a_1=0}\frac{\partial}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial f_1}{\partial a_1}\right)_{a_1=0}\frac{\partial}{\partial x_1} + \left(\frac{\partial f_2}{\partial a_1}\right)_{a_1=0}\frac{\partial}{\partial x_2}$$

است. در نتیجه

$$X_1 = ix_1\frac{\partial}{\partial x_1} - ix_2\frac{\partial}{\partial x_2} \tag{۳۳}$$

می‌باشد. به هم‌این ترتیب

$$X_2 = ix_2\frac{\partial}{\partial x_1} - x_1\frac{\partial}{\partial x_2} \tag{۳۴}$$

و

$$X_3 = ix_2\frac{\partial}{\partial x_1} + ix_1\frac{\partial}{\partial x_2} \qquad (۳۵)$$

خواهد بود. به سادگی می‌توان نشان داد که

$$[X_1, X_2] = -2X_3 \qquad (۳۶)$$

است. با تعریف $X_i = -2iJ_i$ شکل آشنای زیر بدست می‌آید:

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \qquad (۳۷)$$

با مقایسه‌ی رابطه‌ی (۱.۵) و (۱۳) مشاهده می‌شود که رابطه‌ی بین مولدهای دو گروه یکی است و یک رابطه هم‌ریختی بین این دو برقرار است.

۷.۳ مسائل

۱) اگر A و B دو ماتریس ناجابه‌جایی باشند، نشان دهید:

$$e^{-A}Be^{A} = B + \frac{1}{1!}[B, A] + \frac{1}{2!}[[B, A], A] + \cdots.$$

۲) ماتریس‌های زیر مولدهای گروه G هستند، ثابت‌های ساختاری آن رابدست آورید. این گروه چه نام دارد؟

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

۳) نشان دهید: $\det(e^X) = e^{\mathrm{tr}(X)}$.

۴) مولدهای بی‌نهایت کوچک گروه $\mathrm{SU}(3)$ را بدست آورید.

۵) آیا اسپینورهای $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ -\xi_2 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ تحت گروه $\mathbb{C}_2$ یکسان تبدیل می‌یابند؟ اگر خیر پس جمله‌ی عمومی تک‌جمله‌ای فضای نمایش چگونه است؟

فصل ۴

جبرِ لی

۱.۴ تعریف جبر لی

تعریف یک جبر ِ لی‌از دو بخش تشکیل شده‌است:
بخش اول ساختار آن، $\mathcal{G}$ یک فضای برداری (فضای خطی)، است. بخش دوم تعریف نوعی عمل دوخطی است، یعنی نگاشت $\mathcal{G} \times \mathcal{G} \to \mathcal{G}$ که به صورت $[.,.]$ نشان داده‌می‌شود و معمولاً آن‌را براکت لی می‌نامند. بُعد جبر ِ لی‌به‌وسیله بُعد فضایِ برداری متناظرش تعریف می‌شود، که البته می‌تواند محدود و یا نامحدود باشد. این فضایِ برداری می‌تواند روی اعداد حقیقی، $\mathbb{R}$ و یا اعداد مختلط، $\mathbb{C}$، باشد. در ادامه از $\mathcal{F}$ به عنوان هیئت اعداد، چه حقیقی و چه مختلط استفاده خواهیم کرد.

به مجموعه عمل‌گرهای $\{X_i\}$ که یک فضایِ برداری با عمل دوخطی

$$(X,Y) \in \mathcal{G} \mapsto [X,Y] \in \mathcal{G} \qquad (۱)$$

که براکت ِ لی و یا جابه‌جایی نامیده می‌شود و شرایط زیر را ارضاع می‌کند، تشکیل می‌دهند، جبر ِ لی‌گویند.

۱) پادمتقارن

$$\forall X,Y \in \mathcal{G} \;\; [X,Y] = -[Y,X]$$

۲) دوخطی

$$\forall\ X,Y,Z\in\mathcal{G},\ \ \forall\ \alpha,\beta\in\mathcal{F}\ \ [\alpha X+\beta Y,Z]=\alpha[X,Z]+\beta[Y,Z]$$

و

$$\forall\ X,Y,Z\in\mathcal{G},\ \ \forall\ \alpha,\beta\in\mathcal{F}\ \ [X,\alpha Y+\beta Z]=\alpha[X,Y]+\beta[X,Z]$$

۳) اتحادِ ژاکوبی

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$$

به یک جبر ـ لی‌به‌ترتیب حقیقی و یا مختلط گفته می‌شود، اگر $\mathcal{F}=\mathbb{R}$ و یا $\mathcal{F}=\mathbb{C}$ باشد.

قضیه: اگر عناصر نزدیک به عنصر یکانی ی ـ یک گروه را بتوان به صورت $U_i=e+\epsilon X_i$ نوشت، در این صورت مجموعه عمل‌کرهای $\{X_i\}$ تشکیل جبرِ لی می‌دهند.

اثبات: دو عضو، $U_i,U_j\in\mathrm{G}$ را به صورت $U_i=e+\epsilon X_i$ و $U_j=e+\epsilon X_j$ نزدیک به عضو همانی در نظر می‌گیریم. در این صورت

$$U_iU_jU_i^{-1}U_j^{-1}=e+\epsilon^2[X_i,X_j]$$

می‌باشد. چون طرف چپ متعلق به گروه G است پس طرف راست نیز متعلق به همان گروه است. در نتیجه $[X_i,X_j]$ نیز متعلق به مجموعه‌ی $\{X\}$ می‌باشد. بنابراین عمل‌گرهای X که به مولدهای گروه موسوم هستند، یک جبر ـ لی تشکیل می‌دهند.□

اگر $i=1,\cdots n$ $\{X_i\}$ یک دسته‌ی مستقل از اعضای یک جبر ـ لی باشند، می‌توان هر عضو ـ دیگر از این مجموعه را به صورت

$$X=\sum_i C_iX_i$$

نوشت که در این صورت بر اساس تعریف جبر ـ لی داریم:

$$[X_i, X_j] = C_{ij}^k X_k, \quad i, j, k = 1, \cdots n \qquad (۲)$$

که $C_{ij}^k \in \mathbb{C}$ است. همان‌گونه که در بخش‌های قبلی اشاره شد، این اعداد را ثابت‌هایِ ساختاری‌ـی گروه G گویند. از خواص این اعداد می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

۱) چون طرف چپ رابطه‌ی () نسبت به شاخص‌های i, j پادمتقارن هستند، در این صورت ثابت‌هایِ ساختاری C_{ij}^k نیز پادمتقارن هستند،

$$C_{ij}^k = -C_{ji}^k$$

۲) براساس اتحادِ ژاکوبی

$$\forall X_i \in G, [X_i, [X_j, X_k] + [X_j, [X_k, X_i] + [X_k, [X_i, X_j] = 0$$

خواهیم داشت:

$$C_{jk}^m C_{im}^p + C_{ki}^m C_{jm}^p + C_{ij}^m C_{km}^p = 0 \qquad (۳)$$

تمام اطلاعات ـ یک جبر در ثابت‌های ـ ساختاری آن نهفته است. در نتیجه هر دو جبر ـ لی‌ی با ثابت‌های ساختاری ـ یک‌سان دارای ساختمان جبری یک‌سانی هستند.

تعریف: اگر $\mathcal{L}$ و $\mathcal{M}$ جبر ـ لی‌باشند و

$$\Phi : \mathcal{L} \to \mathcal{M}$$

چنان نگاشتی باشد که

$$\forall \ \alpha, \beta \in \mathcal{F}, \quad X, Y \in L, \quad \Phi(\alpha X + \beta Y) = \alpha \Phi(X) + \beta \Phi(Y) \qquad (۴)$$

و

$$\Phi([X,Y]) = [\Phi(X), \Phi(Y)]$$

باشد، Φ را نگاشت هم‌ریختی و جبر لی ـِی $\mathcal{L}$ با $\mathcal{M}$ هم‌ریخت است.

روشن است که Φ ساختار خطی و براکت ـِ لی را ناوردا باقی می گذارند.

تعریف: اگر L یک جبر ـِ لی‌و

$$\forall\, X,Y \in \mathcal{L},\;\; [X,Y] = 0 \qquad (۵)$$

باشد، $\mathcal{L}$ را جبر آبلی یا جابه‌جایی گویند.

تعریف: زیرمجموعه‌ی K از جبر ـِ لی ـِ ی $\mathcal{L}$ را زیرجبر ـِ $\mathcal{L}$ گویند، اگر

$$\forall\, X,Y \in K,\;\; \forall \alpha,\beta \in \mathcal{F},\;\; \alpha X + \beta Y \in K,\;\; [X,Y] \in K \qquad (٦)$$

باشد.

۲.۴ زیرجبرها و ...

مشابه آن‌چه در فصل اول در باب گروه‌ها بیان شد، برای جبرها نیز زیرجبرهایی وجود دارد که در این بخش به آن خواهیم پرداخت.

تعریف: $\mathcal{I}$ زیرجبر ـِ ایده آل یا عمود و یا ناوردای[1] $\mathcal{L}$ گویند، اگر

$$[\mathcal{I}, \mathcal{L}] \subset \mathcal{I} \qquad (۷)$$

باشد. یعنی

$$\forall\, X \in \mathcal{I},\;\; \forall\, Y \in \mathcal{L},\;\; [X,Y] \in \mathcal{I}.$$

(هر جبر ـِ لی ـِی (غیر صفر) حداقل دارای دو ایده آل، خود گروه و زیرجبر $\{0\} \equiv 0$، شامل عضو صفر، است. این دو زیرجبر ـِ ایده آل را زیرجبرهای بدیهی و تمام بقیه زیرجبرها را زیرجبرهای شایسته[2] گویند.

[1] Ideal or Normal or Invarinat subalgebra

[2] Proper subalgebra

تعریف: اگر $\mathfrak{L}$ یک جبر ـِ لی‌باشد، رشته‌ی $\mathfrak{L}^0, \mathfrak{L}^1, \cdots, \mathfrak{L}^n$ که به‌صورت

$$L^0 \equiv \mathfrak{L}, \quad \mathfrak{L}^1 \equiv [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}], \quad \mathfrak{L}^2 \equiv [\mathfrak{L}, \mathfrak{L}^1], \cdots$$

تعریف می‌شود را رشته‌ی مرکزی ـِ ی نزولی[3] گویند.

روشن است که $\mathfrak{L}^n$ توان $(n+1)$ام از $\mathfrak{L}$ با عمل جابه‌جایی به عنوان عمل ضرب می‌باشد.

تعریف: اگر $\mathfrak{L}$ یک جبر ـِ لی‌باشد، رشته‌ی $\mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_1, \cdots, \mathfrak{L}_n$ که به‌صورت

$$\mathfrak{L}_0 \equiv \mathfrak{L}, \quad \mathfrak{L}_1 \equiv [\mathfrak{L}_0, \mathfrak{L}_0], \cdots, \mathfrak{L}_n \equiv [\mathfrak{L}_{n-1}, \mathfrak{L}_{n-1}], \cdots$$

تعریف می‌شود را رشته‌ی راه‌اندازی[4] گویند.

تعریف: جبر ـِ لی ـِ $\mathfrak{L}$ را پوچ‌توان[5] گویند، اگر $\exists n \in \mathbb{N}$ چنان‌که $\mathfrak{L}^n = 0$ باشد.

تعریف: به جبر ـِ لی‌حل‌پذیر[6] گویند، اگر

$$\exists n \in \mathbb{N}, \quad \mathfrak{L}_n = 0$$

باشد.

۱.۲.۴ جبرهای لی ی ساده و شبه‌ساده

جبرهای ـِ لی ساده و شبه ساده به ترتیب جبرهای ـِ لی ـِی غیربدیهی ـِی بدون ایده‌آل‌های شایسته و بدون ایده‌آل‌های آبلی (جز مجموعه‌ی $\{0\}$) هستند.

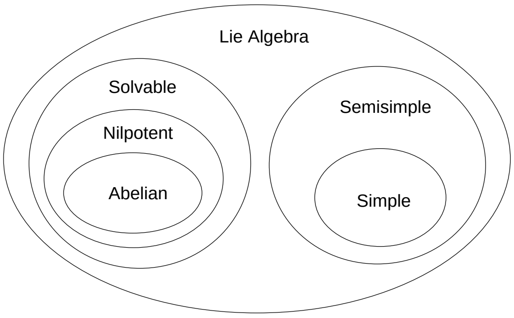
تعریف: جبر ـِ لی $\mathfrak{L}$ را ساده گویند، اگر $\mathfrak{L}$ غیرآبلی و دارای هیچ زیرجبر ناوردای (ایده‌آل) ـِ شایسته نباشد.

تعریف: جبر ـِ لی $\mathfrak{L}$ را شبه‌ساده گویند، اگر $\mathfrak{L} \neq 0$ و $\mathfrak{L}$ دارای هیچ زیرجبر ناوردای (ایده‌آل) ـِ آبلی غیر صفر نباشد.

با آوردن این دو تعریف، حال می‌توان این‌گونه خلاصه کرد: جبر ـِ لی ـِ پوچ‌توان حل‌پذیر است و هر

---

[3] Descending Centeral Sequence
[4] Derived Sequence
[5] Nilpotent
[6] Solvable Algebra



شکل ۱.۴: تقسیم‌بندی جبرهای لی

جبر ـ لی‌حل‌پذیر و پوچ‌توان می‌توانند زیرجبر آبلی داشته‌باشد. در نتیجه جبر ـ لی‌حل پذیر دیگر شبه‌ساده و ساده نیست. این تقسیم‌بندی در شکل (۱.۴) نشان داده‌شده‌است.

۲.۲.۴ فُرمِ کلینگ

با استفاده از حاصل‌ضرب ثابت‌های ساختاری، می‌توان کمیتِ تانسوری به صورت زیر ساخت:

$$g_{ik} = g_{ki} = c^p_{im} c^m_{kp}$$

که این تانسور، متقارن است و آن‌را تانسور متریک و یا فُرم ـ کلینگ[7] گویند.

قضیه: در یک جبر ـ لی‌اگر و فقط اگر $\det|g_{ik}| \neq 0$ باشد، آن جبر شبه‌ساده است.

مثال: جبر ـ لی $\mathfrak{so}(3)$:

روابط جابه‌جایی ـِی این جبر به صورت

$$[X_i, X_j] = C^k_{ij} X_k, \quad C^k_{ij} = \epsilon_{ijk} \tag{۸}$$

در این صورت ثابت‌های ساختاری که نسبت به جایگشت فرد شاخص‌ها پادمتقارن است، عبارت هستند از

$$C^3_{12} = 1, \quad C^1_{23} = 1, \quad C^2_{31} = 1$$

Killing Form[7]

حال با توجه به مقادیر بالا

$$g_{11} = C^k_{1m}C^m_{1m} = C^3_{12}C^2_{13} + C^2_{13}C^3_{12} = (1)(-1) + (-1)(1) = -2$$

در نتیجه $g_{ij} = -2\delta_{ij}$. پس جبر $\mathfrak{so}(3)$ یک جبر ـِ لی ـِ ی شبه‌ساده و فُرم ـِ کلینگ آن منفی است.

۳.۲.۴ مثال: جبر $\mathfrak{so}(4)$

با طرح این مثال، بحث‌های مطرح شده در چند بخش بالا را مورد بررسی قرار می‌دهیم. گروه $SO(4)$، گروه ماتریس‌های 4×4 متعامد ـِ با دترمینان یک است که 6 بعُد بوده و بیانگر دوران در فضای چهار بُعدی است. این گروه 6 پارامتر ـِ حقیقی دارد. عمل‌گرهای بی‌نهایت کوچکِ این گروه بر حسب چهار متغیر (x,y,z,t) به صورت

$$\begin{array}{lll} M_1 = z\partial_y - y\partial_z; & M_2 = x\partial_z - z\partial_x; & M_3 = y\partial_x - x\partial_y \\ N_1 = x\partial_t - t\partial_x; & N_2 = y\partial_t - t\partial_y; & N_3 = z\partial_t - t\partial_z \end{array} \quad (۹)$$

و جبر آن

$$[M_i, M_j] = \epsilon_{ijk}M_k, \;\; [M_i, N_i] = 0, \;\; [M_i, N_j] = \epsilon_{ijk}N_k, \;\; [N_i, N_j] = \epsilon_{ijk}M_k \quad (۱۰)$$

می‌باشد. با نگاهی دقیق‌تر به دو دسته روابط بالا، مشاهده می‌شود، این مولدها دو دسته‌اند. حال اگر بتوانیم به پایه‌ای برویم که حساب این دو دسته از هم جدا شوند، محاسبات ساده‌تر خواهد شد. با انتخاب

$$J_i = \frac{M_i + N_i}{2}, \;\; K_i = \frac{M_i - N_i}{2}, \;\; i = 1,2,3 \quad (۱۱)$$

روابط جابه‌جایی به شکل ساده‌تر زیر درمی‌آید

$$[J_i, J_j] = \epsilon_{ijk}J_k, \;\; [K_i, K_j] = \epsilon_{ijk}K_k, \;\; [J_i, K_j] = 0 \quad (۱۲)$$

J_i و K_i اعضای جبر ـِ لی ـِ ی $\mathfrak{so}(4)$ هستند و (J_1, J_2, J_3) و (K_1, K_2, K_3) نیز هر یک به طور جداگانه تحت عمل جابه‌جایی ـِ ی جبر، بسته‌اند. هر یک از این دو مجموعه، یک زیرجبر ـِ لی $\mathfrak{so}(4)$ هستند و خود جبر ـِ لی‌ی ـِ $\mathfrak{so}(3)$ تشکیل می‌دهند. در نتیجه جبر ـِ لی ـِ ی $\mathfrak{so}(4)$ جمع مستقیم دو جبر ـِ لی‌ی ـِ $\mathfrak{so}(3)$، $\mathfrak{so}(3) \oplus \mathrm{so}(3)$، است.

هر یک از (J_1, J_2, J_3) و (K_1, K_2, K_3) یک زیرجبر ناوردای مناسبِ $\mathfrak{so}(4)$ می‌باشند. در نتیجه جبر ـ لی‌ی ـ $\mathfrak{so}(4)$ دیگر ساده نیست. از آن‌جا که این دو ایده‌آل غیرآبلی‌اند، پس جبر ـ لی $\mathfrak{so}(4)$ شبه ساده است. امّا هر یک از این ایده‌آل ها خود یک جبرِ ساده هستند.

۳.۴ گروه لی و جبر لی

تعریف: اگر G یک گروه ماتریسی ـ لی باشد، آن‌گاه جبر ـ لی، $\mathcal{G}$، مجموعه‌ای چنان از تمام ماتریس‌های X است که e^{tX} برای تمام مقادیرt در G باشد. ما فیزیک‌پیشه‌ها معمولاً نگاشت $X \to e^{iX}$ را به‌جای تعریف بالا به‌کار می‌بریم. دلیل این تعریف نیز آن است که بیش‌تر علاقه داریم تا گروه‌های لی ی ـ را حقیقی و جبر ـ لی‌ی ـ مربوطه را مختلط به‌کار ببریم. همان‌گونه که قبلاً اشاره شد، جبر ـ لی فضای نمایش اعضای بی‌نهایت کوچک گروه است. به عبارت دیگر

$$exp \ : \ X \to \ e^{iX}$$

که به صورت مجرد

$$exp \ : \ \mathcal{G} \to \ G$$

است.

حال روشن است که چگونه می‌توان بین گروه و جبر ـ لی‌ی ـ مربوطه ارتباط برقرار نمود و جبرهای لی ـِی مربوطه را طبقه‌بندی کرد.

۴.۴ ثابت‌های ساختاری

در بخش‌های قبلی ثابت‌های ساختاریِ یک جبر ـ لی‌را تعریف کردیم ولی در این بخش به تعریف این ثابت‌های ساختاری از دیدگاه‌دیگری خواهیم پرداخت که در ارائه‌ی مطالب بخش‌های بعدی مفیدتر است.

در این بخش ما خود را به جبرهای لی ـِی با بُعد محدود، $\mathcal{L}$، محدود می‌کنیم. بُعد جبر $\mathcal{L}$ را، n، در نظر می‌گیریم. حال اگر پایه‌های $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ در $\mathcal{L}$ را در نظربگیریم، در آن صورت هر عضو

از $\mathcal{L}$ را می‌توان برحسب این پایه‌ها به صورت زیر بسط داد.

$$X = \sum_{i=1}^{n} X^i e_i, \quad \forall X \in \mathcal{L} \qquad (۱۳)$$

روشن است که می‌توان رابطه‌ی جابه‌جایی بین هر دو عضو از $\mathcal{L}$، $[X,Y]$ به‌طور کامل به‌وسیله براکت لی ـِی یک جفت پایه‌ی $[e_i,e_j]$ محاسبه نمود. چراکه

$$[X,Y] = \sum_{i,k=1}^{n} X^i Y^j [e_i,e_j]$$

است. از آن‌جا که $[e_i,e_j] \in \mathcal{L}$ است در نتیجه می‌توان براکت ـِلی ـِی $[e_i,e_j]$ را برحسب پایه‌های $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ بسط داد

$$[e_i,e_j] = \sum_{k=1}^{n} C_{ij}^k e_k; \quad i,j = 1,2,\cdots,n \qquad (۱۴)$$

C_{ij}^k را ثابت‌هایِ ساختاری در پایه‌های $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ می‌نامند. همان‌گونه‌که گفته‌شد، ثابت‌هایِ ساختاری نسبت به جایگشت فرد از شاخص‌ها پادمتقارن و اتحادِ ژاکوبی را ارضاع می‌کنند. می‌توان تمام جبرهای لی را به وسیله‌ی این ثابت‌های ساختاری طبقه‌بندی کرد. چون ثابت‌های ساختاری بستگی به انتخاب پایه‌ها دارند، در نتیجه می‌توان پایه‌هایی یافت که دارای بیشینهِ تعداد ثابت‌های ساختاری صفر باشند. نشان خواهیم داد که اگر جبری دارای زیرجبر ناوردا باشد، پیدا شدن این صفرها طبیعی است.

فرض کنید $\mathcal{I}$ یک ایده‌آل (زیرگروه ناوردا) با بُعد m در جبر ـ لی‌ی ـ $\mathcal{L}$ با بُعد n باشد. اگر $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ پایه‌های $\mathcal{L}$ باشند، به‌دلیل آن‌که $\mathcal{I}$ زیر فضای خطی از $\mathcal{L}$ است، $\{e_1,e_2,\cdots,e_m\}$ نیز پایه‌های $\mathcal{I}$ خواهند بود. حال اگر $1 \le j < m$ و $i = 1,2,\cdots,n$ باشند، به‌دلیل آن‌که $\mathcal{I}$ ایده‌آل است $[e_i,e_j] \in \mathcal{I}$ است. می‌توان این رابطه‌ی جابه‌جایی که در $\mathcal{I}$ قراردارد را بر حسب پایه‌های $\mathcal{I}$ بسط داد.

$$[e_i,e_j] = \sum_{k=1}^{i} C_{ij}^k e_k$$

در نتیجه برای $m+1 \le p \le n$، $1 \le j \le n$ و $1 \le i \le m$، $C_{ij}^p = 0$ است.

ایده‌آل‌ها ابزار بسیار مفیدی برای جداسازی جبرهای لی ـ ی پوچ‌توان، حل‌پذیر و (شبه)ساده هستند. در ادامه بحث برای درک بیش‌تر موضوع چند مثال را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

فضای برداری ِی ساخته‌شده به‌وسیله‌ی مجموعه ماتریس‌های $n\times n$، n^2بُعدی است. پایه‌های این فضا مجموعه ماتریس‌های $\{e_{ij}\}$ که $i,j=1,2,\cdots,n$ هستند، به‌صورت

$$(e_{ij})_{kl}=\delta_{ik}\delta_{jl} \tag{۱۵}$$

تعریف می‌شوند. رابطه‌ی بالا نشان می‌دهد، درایه‌های ناشی از تلاقی ستون jام و سطر iامِ ماتریس e_{ij} یک و بقیه صفر هستند. در نتیجه هر ماتریس $n\times n$ مانند $A=(a_{ij})$ را می‌توان برجسب این پایه‌ها بسط داد. بدیهی است که ضرایب بسط همان درایه‌های ماتریس A هستند.

$$A=\sum_{i,j}a_{ij}e_{ij} \tag{۱۶}$$

۱.۴.۴ نمایش همزاد

اگر ما یک مجموعه ماتریس، $\{T_i\}$ به صورت زیر تعریف کنیم.

$$(T_i)_{jk}\equiv -iC_{ijk} \tag{۱۷}$$

در آن صورت رابطه‌ی (۳) به صورت

$$[T_i,T_j]\equiv iC_{ij}^kT_k \tag{۱۸}$$

در می‌آید. به بیان دیگر، ثابت‌های ساختاری خود یک نمایش از جبر مورد نظر می‌سازند. چنین نمایشی که از ثابت‌های ساختاری بدست می‌آید را نمایش همزاد[8] گویند. بُعد این نمایش مساوی بُعد جبر ـِ لی‌است.

مولدها و روابط جابه‌جایی جبر ـِ لی‌متناظر با گروه ـِ لی مربوطه تعریف می‌کنند. روشن است که هر نمایش از گروه یک نمایش از جبر بدست می‌دهد. تمام تعاریف معادل بودن، تقلیل‌پذیری و تقلیل‌ناپذیری را که در فصل‌های قبل بدان‌ها اشاره شد را می‌توان به جبر تعمیم داد.

در حالت کلی، ثابت‌های ساختاری بستگی به انتخاب فضایِ برداری ِی مولدها دارد. معمولاً برای انتخاب پایه‌های مناسب، از نمایش همزاد استفاده می‌شود. کمیت $\mathrm{tr}\ (T_iT_j)$ را در نظر بگیرید.

[8] Adjoint Representation

کمیت داخل پرانتز یک ماتریس متقارن و حقیقی است. می‌توان این کمیت را با انتخاب ترکیب خطی و حقیقی ِ مناسب از عناصر جبر، قطری نمود. با انتخاب چنین پایه‌هایی خواهیم داشت:

$$tr \ \ (T_iT_j) = k_i\delta_{ij} \tag{۱۹}$$

امّا هنوز یک درجه‌ی آزادی که همانا بازمقیاس کردن است، باقی می‌ماند. در حالت کلی k_iها غیرصفر هستند مثلاً یک گرفت ولی نمی‌توان علامت آن‌را عوض نمود. در ادامه‌ی بحث ما تمام k_iها را مثبت انتخاب می‌کنیم. برای تمام جبرهای لی فشرده‌ی شبه‌ساده ما

$$tr \ \ (T_iT_j) = \lambda\delta_{ij} \tag{۲۰}$$

که در آن λ مثبت است، انتخاب می‌کنیم. در چنین نمایشی ثابت‌های ساختاری کاملاً پادمتقارن هستند. هم‌چنین در این نمایش تمام مولدها در نمایش همزاد ماتریس‌های هرمیتی خواهند بود. می‌توان نشان داد که برای تمام گروه‌های لی ِ فشرده تمام نمایش‌ها معادل نمایش هرمیتی عمل‌گرها است و تمام نمایش‌های تقلیل‌ناپذیر در نمایش ماتریسی، ماتریس‌های هرمیتی محدود هستند. این صورت

۵.۴ جبر لی‌ی خطی‌ی ویژه

در این بخش به بررسی جبر $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ خواهیم پرداخت. برگزیدن این مثال از آن جهت اهمیت دارد که مثالی غیربدیهی است و از سوی دیگر بسیاری از نکاتی که در بررسی این مثال بدان‌ها خواهیم پرداخت قابل تعمیم به دیگر جبرهایِ لی است.

تعریف: جبر ِ لی ِی خطی ِی ویژه، $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$، مجموعه‌ای از ماتریس‌های $n\times n$ با رَد صفر است (به یاد بیاورید که اعضای گروه این جبر دترمینان صفر داشتند). بُعد این جبر برابر با تعداد ماتریس‌های بدون رَد صفرِ $n\times n$ مستقل است.

$$dim \ \ \mathfrak{sl}(n,\mathbb{C}) = n^2-1.$$

مشابه قبل حالت‌های $n \geq 2$ مورد نظر است. مرسوم است $n = k+1$ برای $k \geq 1$ تعریف می‌کنند و جبر $\mathfrak{sl}(k+1,\mathbb{C})$ را با A_k نشان می‌دهند. در این صورت بُعد A_k برابر است با

$$dim \ \ \mathfrak{sl}(k+1,\mathbb{C}) = k(k+2)$$

است.

برای تعریف پایه‌های $\mathfrak{sl}(k+1,\mathbb{C})$ کلی‌ترین شکل ماتریس‌های $A \in \mathfrak{sl}(k+1,\mathbb{C})$ را به صورت زیر در نظر می‌گیریم:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots\vdots\vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

که

$$trA = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = 0, \quad n = k+1$$

است. حال ماتریس A را به صورت یگانه به سه بخش قطری (A_d)، بالا مثلثی (A_+) و پایین مثلثی (A_-) تقسیم می‌کنیم.

$$A = A_- + A_d + A_+ \qquad (۲۱)$$

پایه‌های A_+ مشابه قبل به صورت e_{ij} که $1 \leq i < j \leq k+1$ است، انتخاب می‌کنیم. با توجه به رابطه‌ی (۱۴)، درایه‌های $(e_{ij})_{pq} = \delta_{ip}\delta_{jq}$ می‌باشند. پایه‌های A_- نیز به صورت e_{ij} که $1 \leq j < i \leq k+1$ هستند. این دو بخش تعداد $(k+1)^2 - (k+1) = k(k+1)$ را دربر می‌گیرد. درنتیجه تعداد k ماتریس قطری ـِی بدون رَد نیاز داریم که این ماتریس‌ها را نیز به صورت

$$h_i \equiv e_{ii} - e_{i+1,i+1}, \quad i = 1, 2, \cdots, k \qquad (۲۲)$$

تعریف می‌کنیم. انتخاب ماتریس‌های e_{ij} با $i \neq j$ و h_i به صورت بالا را پایه‌های استانداردِ یا پایه‌های کارتان—شوالیِ[9] $\mathfrak{sl}(k+1,\mathbb{C})$ گویند.

ماتریس‌های e_{ij} برای $i < j$ ماتریس‌های بالا مثلثی هستند. آن‌ها پایه‌های زیرجبر پوچ‌توان $k(k+1)/2$ بُعدی $\mathfrak{sl}(k+1,\mathbb{C})$ می‌باشند. این زیرجبر را با N_+ نشان می‌دهند. مشابه آن پایه‌های

[9] Cartan-Chevalley

e_{ij} با $i > j$ ماتریس‌های پایین مثلثی هستند و پایه‌های زیرجبر پوچ‌توانِ جبر $\mathfrak{sl}(k+1,\mathbb{C})$ می‌باشند که با N_- نشان داده می‌شوند. بالاخره h_i ها اعضای زیرجبر ناوردای k بُعدی هستند که با H نشان داده می‌شود. بر این اساس می‌توان هر عضوی از جبر $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ را به صورت یگانه تجزیه نمود. اگر جبر ـِ لی $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ رابه صورت یک فضای برداری در نظر به‌گیریم، این فضای جمع‌مستقیم سه زیر فضا به‌صورت

$$\mathfrak{sl}(k+1,\mathbb{C}) = N_- \oplus H \oplus N_+ \qquad (۲۳)$$

نوشت. این تجزیه را تجزیه‌ی مثلثی[10] جبر ـِ لی‌نامند. یک مفهوم کلی را در قالب جبر $\mathfrak{sl}(n,\mathbb{C})$ بیان کردیم. این مفهموم کلی و قابل تعمیم به تمام جبرها، انتخاب پایه‌های h_i و e_{ij} بود. براساس این پایه‌ها می‌توان ساختارِ جبر را بیان نمود. **تعریف:** به عناصر پایه

$$\begin{array}{llll} e_{12}\equiv e_1, & e_{23}\equiv e_2, & \cdots, & e_{k,k+1}\equiv e_k \\ e_{21}\equiv f_1, & e_{32}\equiv f_2 & ,\cdots, & e_{k+1,k}\equiv f_k \\ h_1, & h_2, & \cdots, & h_k \end{array} \qquad (۲۴)$$

مولدهای کارتان—شوالی ـِی جبر $A_k = sl(n,\mathbb{C})$ گویند. تعداد این مولدها برای A_kها $3k$ می‌باشد.
بر اساس این مولدها روابط جابه‌جایيِ $sl(n,\mathbb{C})$ به صورت

$$\begin{array}{lll} [h_i,e_i]=2e_i & [h_i,f_i]=-2f_i & [h_i,h_j]=0 \\ [h_i,e_{i+1}]=-e_{i+1} & [h_i,f_{i+1}]=f_{i+1} & [e_i,f_j]=\delta_{ij}h_j \\ [h_i,e_{i-1}]=-e_{i-1} & [h_i,f_{i-1}]=f_{i-1} & \end{array} \qquad (۲۵)$$

که $i,j=1,2,\cdots,k$ هستند، می‌باشد. با یک نگاه به روابط بالا، مشاهده می‌شود که روابط $[e_i,e_j]$ و $[f_i,f_j]$ غایب هستند. فعلاً بدون پرداختن به جزئیات، با معرفی روابط سرِ[11] به جای دو دسته رابطه‌ی جابه‌جایی روابط را کامل می‌کنیم.

$$\sum_{j=k}^{k+1}(-1)^j \left(\begin{array}{c} k+1 \\ j \end{array} \right)(e_i)^j(e_l)(e_j)^{n-j}=0, \quad i\neq l, \quad e\leftrightarrow f \qquad (۲۶)$$

روابط جابه‌جایی بالا را می‌توان به صورت معادلات ویژه‌مقداری ـِی عمل‌گرهای h_i زیر نوشت:

$$ad\ h_i(h_j) \equiv [h_i,h_j] \equiv h_i|h_j>=0 \qquad (۲۷)$$

[10] Triangular Depcomposition
[11] Serre Relation

$$ad\ h_i(e_j) = (2\delta_{ij} - \delta_{i-1,j} - \delta_{i+1,j})e_j \qquad (۲۸)$$

$$ad\ h_i(e_j) = -(2\delta_{ij} - \delta_{i-1,j} - \delta_{i+1,j})f_j \qquad (۲۹)$$

نوشت. روابط از نوع $[e_i, e_{i+1}]$ در پایه‌های کارتان–شوالی مستقیماً وجود ندارد، امّا می‌توان آن‌را از روی روابط جابه‌جایی موجود در پایه‌های کارتان–شوالی نوشت.

$$[e_i, e_{i+1}] = e_{i,i+2}$$

با نگاهی دقیق‌تر به روابط جابه‌جایی بالا، مشاهده می‌شود حتی نیازی به دانستن h_i نیست، چرا که می‌توان از مجموعه‌ی کوچک‌تر، $\{e_i\}$ و $\{f_i\}$، شروع کرد و بقیه‌ی پایه‌ها را بدست آورد. بدین معنی که h_iها را می‌توان با استفاده از تعریف $[e_i, f_i] = \delta_{ij}h_j$ بدست آورد.

به عنوان مثال: $\mathfrak{sl}(2;\mathbb{C})$، جبر رتبه‌ی 3 است و ماتریس‌های

$$e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \ h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (۳۰)$$

پایه‌های استاندارد آن را تشکیل می‌دهند.

جبر $\mathfrak{sl}(3;\mathbb{C})$، جبر رتبه 8 و ماتریس‌های پایه‌های استاندارد آن می‌باشند.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ e_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (۳۱)$$

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ f_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},\ \ f_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ \ h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad (۳۲)$$

فصل ۵

وزن و ریشه

برای درک بیش‌تر مفهوم وزن و ریشه‌ی یک جبرِ لی، ابتدا به بررسی جبر $\mathfrak{su}(2)$ خواهیم پرداخت. سپس ایده‌ی کلی را در غالب تعدادی تعریف و قضیه مطرح می‌کنیم. و در قسمت پایانی جبر $\mathfrak{su}(3)$ را به‌عنوان مثال مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱.۵ $\mathfrak{su}(2)$

ساده‌ترین جبرِ لی‌غیرآبلی $\mathfrak{su}(2)$ است که دارای ۳ مولد به‌صورت $J_i, \quad i = 1,2,3$ و ثابت‌ساختاری آن $C_{ij}^k = \epsilon_{ijk}$ که نسبت به جایگشت فرد شاخص‌ها پادمتقارن است، می‌باشد. روابط جابه‌جایی عناصر این جبر به صورت

$$[J_i, J_j] = i\epsilon_{ijk}J_k \qquad (۱)$$

است.

همان‌گونه که از مکانیکِ کوانتومی به یاد دارید، این جبرِ تکانه‌ی زاویه‌ای است. در ادامه‌ی این بخش به بررسی نمایش‌های این جبر به روش عمل‌گری که از مکانیکِ کوانتومی به آن آشنایی دارید، می‌پردازیم که این روش قابل تعمیم به بقیه‌ی جبرهای لی است.

ابتدا یک نمایش مشخصِ غیرقابل تقلیل از عناصر جبر $\mathfrak{su}(2)$ را در نظر بگیرید. پایه‌هایی را انتخاب می‌کنیم که در آن نمایش ماتریسیِ J_3 قطری باشد. حال حالت‌هایی را در نظر می‌گیریم که J_3 دارای بیشینه ویژه‌مقدار باشد. اگر بیشینه ویژه‌مقدار چند تا باشد آن‌را با $\alpha = 1, 2, \cdots$ شماره‌گذاری می‌کنیم. در این صورت

$$J_3|j, \alpha >= j|j, \alpha > \tag{۲}$$

است. حالت $|j, \alpha >$ را چنان انتخاب می‌کنیم که $< j, \alpha|j, \beta >= \delta_{\alpha\beta}$ باشد. با استفاده از عناصر این جبر دو عمل‌گر بالابرنده و پایین‌آورنده (درست مانند عمل‌گرهای خلق و فنا در جبر نوسان‌گر هماهنگ که همان جبر وایل–هایزنبرگ است.)، به صورت

$$J^{\pm} \equiv \frac{(J_1 \pm iJ_2)}{\sqrt{2}} \tag{۳}$$

تعریف می‌کنیم. این عمل معادل ساختن پایه‌های کارتان–شوالیِ جبر است. در این صورت $\{J_3, J^+, J^-\}$ مجموعه‌ی جدیدی بدست می‌آید که هم‌چنان جبر $\mathfrak{su}(2)$ با روابط جابه‌جایی زیر خواهد بود.

$$[J_3, J^{\pm}] = \pm J^{\pm}, \quad [J^+, J^-] = J_3 \tag{۴}$$

اگر $|m >$ ویژه‌بردار J_3 باشد، در آن صورت $J_3|m >= m|m >$ و در نتیجه

$$J_3 \; J^{\pm}|m >= J^{\pm} \; J_3|m > \pm J^{\pm}|m >= (m \pm 1)J^{\pm}|m > . \tag{۵}$$

حال اگر j بیشینه ویژه‌مقدار J_3 باشد، در این صورت

$$J^+|j, \alpha >= 0$$

و اثر J^- بر روی این حالت

$$J^-|j, \alpha >\equiv N_j(\alpha)|j-1, \alpha >$$

است. امّا از آن‌جا که حالت‌های با αها مختلف متعامد ـ بهنجار هستند در نتیجه

$$N_j^\star(\beta)N_j(\alpha) < j-1, \beta|j-1, \alpha >=< j, \beta|J^+j^-|j, \alpha >=< j, \beta|([J^+, J^-] + J^-J^+)|j, \alpha >$$
$$=< j, \beta|[J^+, J^-]|j, \alpha >=< j, \beta|J_3|j, \alpha >= j < j, \beta|j, \alpha >= j\delta_{\alpha\beta}$$

است. در این‌صورت $j = |N_\alpha^2(j)|$ می‌باشد و ما $N_j(\alpha) = \sqrt{j} \equiv N_j$ انتخاب می‌کنیم. پس حالت $|j-1,\alpha>$ نیز متعامد ـ بهنجار است. اثر J^+ بر روی این حالت

$$J^+|j-1,\alpha>= \frac{1}{N_j}J^+J^-|j,\alpha>= \frac{1}{N_j}[J^+,J^-]|j,\alpha>= N_j|j,\alpha>$$

است. به بیان دیگر عملگرهای $J^\pm$ حالت $|j,\alpha>$ را به $|j\pm 1,\alpha>$، بدون تغییر α، می‌برند.

با بررسی اثر J^- بر روی $|j-1,\alpha>$، می‌توان نشان داد که حالت‌های $|j-2,\alpha>$ نیز متعامد ـ بهنجار هستند.

$$J^-|j-1,\alpha>= N_{j-1}|j-2,\alpha>, \quad J^+|j-2,\alpha>= N_{j-1}|j-1,\alpha>$$

با ادامه‌ی همین استدلال می‌توان حالت‌های متعامد ـ بهنجار $|j-k,\alpha>$ را به صورت زیر بدست آورد.

$$J^-|j-k,\alpha>= N_{j-k}|j-k-1,\alpha>, \quad J^+|j-k-1,\alpha> N_{j-k}|j-k,\alpha>$$

با توجه به آن‌چه که گذشت ضرایب بهنجارش رابطه‌ی زیر را ارضاء می‌کند

$$\begin{aligned} N_{j-k}^2 &= <j-k,\alpha|J^+J^-|j-k,\alpha>=<j-k,\alpha|[J^+,J^-]|j-k,\alpha>+<j-k,\alpha|J^-J^+|j-k,\alpha> \\ &= N_{j-k+1}^2 + j - k \end{aligned}$$

روابط بازگشتی‌ی ِ بالا را می‌توان با اضافه کردن بقیه‌ی روابط به صورت زیر حل کرد.

$$N_{j-k}^2 = (k+1)j - k(k+1)/2 = \frac{1}{2}(k+1)(2j-k) \qquad (٦)$$

با تعریف $j-k\equiv m$ خواهیم داشت

$$N_m = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{(j+m)(j-m+1)}. \qquad (۷)$$

امّا از سوی دیگر در اثر پی‌درپی J^- باید به حالتی برسیم که با اثر آخرین J^- بر روی آن، آن حالت صفر شود، $J^-|j-l,\alpha>=0$. در این صورت $N_{j-l}=0$ و یا $l=2j$ است. پس $j=l/2$ برای lهای درست است. چنین فضایی به αتا زیرفضای با بعُد $2j+1$ تقسیم می‌شود. این نمایش‌ها بوسیله‌ی بیشینه ویژه‌مقدار J_3، j که عددی درست یا نیمه‌درست است، مشخص می‌شود. بعُد این نمایش‌ها $(2j+1)$ است.

از همین روش می‌توان برای تجزیه‌ی هر نمایش دلخواه به نمایش‌های تقلیل‌ناپذیر استفاده کرد.

تعریف: ویژه‌مقدار J_3 را وزن و j را بیشینه‌وزن نامند.

همان‌گونه که در فصل گذشته بیان شد یکی از نمایش‌های مهم، نمایش همزاد است که به صورت زیر ساخته می‌شود. با بازنویسیِ زیر

$$c_{ijk} = \epsilon_{ijk} = (ad\ T_i)_{jk}$$

خواهیم داشت:

$$ad\ T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad ad\ T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad ad\ T_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

۲.۵ زیرجبر کارتان

تعریف: اگر G یک جبرِ لیِ شبه ساده باشد، زیر جبری که از عناصر شبه‌ساده[1] ساخته می‌شود را زیر جبرِ چنبره‌ای یا تورال[2] گویند. لازم به ذکر است که هر جبرِ لیِ شبه‌ساده دارای یک زیر جبر غیر صفر تورال است.

قضیه: اگر T زیر جبر تورال جبرِ لی‌باشد، آن‌گاه T یک جبرآبلی است.

اثبات: باید نشان دهیم که $[X,Y]=0 \quad \forall\ X,Y \in T,$ و یا معادل آن $\mathrm{ad}\ \ X(Y) \equiv \mathrm{ad}\ X|Y>=$ $[X,Y]=0$ است. اگر $Y \in T, Y \neq 0$ و ویژه‌بردار $\mathrm{ad}\ X$ با ویژه‌مقدار λ باشد،

$$ad\ X(Y) = ad\ X|Y>= [X,Y] = -ad\ Y(X) = \lambda X, \quad X,Y \in T \tag{۸}$$

بوده و باید نشان داد که $\lambda = 0$ است.

پایه‌های T را به صورت $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ چنان انتخاب می‌کنیم که ویژه‌بردارهای Y باشند،

$$ad\ Y(e_i) = [Y, e_i] = \mu_i e_i.$$

[1] مرسوم است به عناصر قطریِ جبر، عناصرِ شبه‌ساده گویند.

[2] Toral Subalgebra

حال X و Y را برحسب این پایه‌ها بسط می‌دهیم،

$$X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i, \quad Y = \sum_{i=1}^{n} \beta_i e_i.$$

در این صورت

$$ad\,Y(X) = ad\,Y(\sum_i \alpha_i e_i) = \sum_i \alpha_i [Y, e_i] = \sum_i \lambda \alpha_i e_i$$

از سوی دیگر

$$ad\,Y(X) = [Y, X] = -\lambda Y = -\sum_i \mu_i \beta_i e_i.$$

با مقایسه‌ی دو رابطه‌ی بالا

$$\alpha_i \mu_i = -\lambda \beta_i$$

است. امّا می‌دانیم

$$0 = ad\,Y(Y) = [Y, Y] = \sum_i (\beta_i \mu_i) e_i$$

می‌باشد. پس $\beta_i \mu_i = 0$ است. تمام β_iهابه دلیل آن‌که $Y \neq 0$ است نمی‌تواند صفر باشند. پس برای آن β_iهای مخالف صفر $\mu_i = 0$ و بالعکس. در نتیجه $\lambda = 0$ است. لذا تمام ویژه‌مقادیر عمل‌گر $\mathrm{ad}\ X|_T,\ X \in T$ و $[X, Y] = 0$ $\forall\ X, Y \in T,$ پس T یک زیرجبر آبلی است. □

یک جبر ـِ لی ـِ $\mathfrak{L}$ می‌تواند دارای تعدادی زیرجبر تورال بوده و بعضی از آن‌ها دربرگیرنده‌ی دیگری نیز باشد. یک زیرجبر تورال را بیشینه گویند، اگر این زیرجبر، زیرجبر شایسته‌یِ هیچ زیرجبرِ تورال دیگری نباشد. از آن‌جا که جبر ـِ لی L دارای بُعد محدود است، چنین زیرجبر تورالِ بیشینه‌ای می‌تواند وجود داشته‌باشد. برای جبر ـِ لی ـِ شبه‌ساده، این زیرجبر را زیرجبر کارتان گویند و آن را با H نشان می‌دهند. روشن است که $H \neq L$ است، چرا که در این صورت L یک جبر آبلی خواهد بود.

تعریف: اگر $\mathfrak{L}$ یک جبر ـِ لی ـِ شبه‌ساده و H زیرجبر کارتان آن باشد، آن‌گاه $r = \dim\ H$ را رتبه‌ی جبر ـِ لی ـِ $\mathfrak{L}$ گویند.

۳.۵ وزن و ریشه

اگر X_j در نمایش تقلیل‌ناپذیر D، مولد جبرِ ساده‌ی G باشد، بیشینه مولدهای قطری (عناصر زیرجبر کارتان) که از ترکیب خطی X_jها بدست می‌آید را به صورت

$$h_i = C_{ij} X_j; \quad h_i \in H, \quad i = 1, 2, \cdots, m$$

که h_iها هرمیتی، C_{ij}ها حقیقی و m بیشینه مقدار ممکن که نشان دهنده‌ی رتبه‌ی جبرهستند، نشان می‌دهیم. در این صورت

$$[h_i, h_j] = 0, \quad tr(h_i h_j) = K_D \delta_{ij} \tag{۹}$$

است. روشن است که h_iها متناظر با J_3 در $\mathfrak{su}(2)$ هستند.

اگر حالت‌های نمایش D را با $|\mu, D>$ که

$$h_i|\mu, D >= \mu_i|\mu, D >$$

است نمایش دهیم، μ_i را وزن، بردار $\{\mu_i, \mu_j, \cdots, \mu_m\}$ را بردار وزن و $|\mu, D>$ها را فضای وزنِ متناظر با وزن μ در نمایش D گویند. از این پس خود را به نمایش همزاد محدود می‌کنیم و حالت‌های متناظر با T_i را با $|T_i>$ نشان می‌دهیم. ضرب برداری در فضای $\{|T_i>\}$، V، را به صورت

$$< T_i|T_j >\equiv \lambda^{-1} tr(T_i^\dagger T_j) \tag{۱۰}$$

تعریف می‌کنیم. اثر مولدها به عنوان عمل‌گر بر روی این حالت‌ها به صورت

$$T_i|T_j >= |[T_i, T_j] > \tag{۱۱}$$

است. همان‌گونه که بخش‌های پیش متذکر شدیم، عناصر جبر خود یک فضای برداری تشکیل می‌دهند و عمل در این فضای برداری به صورت براکتِ لی است. حال مجموعه‌ی عناصر جبر را در پایه‌های کارتان—شوالی، $\{e_{ij}, f_{ij}, h_i\}$ را در نمایش همزاد به صورت $\{E_\alpha, E_{-\alpha}, h_i\}$ نشان می‌دهیم (البته در ادامه‌ی بحث نقش شاخص α روشن خواهد شد). اثر این مولدها بر روی فضای V عبارت است از:

$$h_i|h_j >= |[h_i, h_j] >= 0 \tag{۱۲}$$

پس $|h_i>$ها حالت‌های با وزن صفر هستند. امّا

$$h_i|E_\alpha >= |[h_i, E_\alpha >= \alpha_i|E_\alpha > \qquad (۱۳)$$

و

$$< E_\alpha|h_i =< [E_\alpha, h_i]| =< E_\alpha|(-\alpha_i) \qquad (۱۴)$$

در نتیجه E_αها نیستند. بلکه $E_\alpha^\dagger = E_{-\alpha}$ بوده و درستی انتخاب پایه‌ها در نمایش همزاد را نشان می‌دهد. وزن‌های α_i را در نمایش همزاد ریشه گویند و مجموعه‌ی $\{\alpha_i\}$ را بردار ریشه نامند.

بهنجارش این مولدها را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$< E_\alpha|E_\beta >= \lambda^{-1} tr(E_\alpha^\dagger E_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \ \ < h_i|h_j >= \lambda^{-1} tr(h_i h_j) = \delta_{ij}$$

با مقایسه‌ی رابطه بالا و رابطه‌ی (۹) مشاهده می‌شود که $\lambda = K_{\mathrm{ad}}$ برای نمایش همزاد است. البته ریاضی‌پیشه‌ها معمولاً λ را همواره مساوی یک می‌گیرند، امّااین قرارداد برای فیزیک‌پیشه‌ها چندان خوش‌آیند نیست و برای سادگی محاسبات برای هر جبر مقدار λ را متفاوت اختیار می‌کنند. روشن است، با انتخاب λ مقادیر K_D به‌طور یکتا مشخص می‌شوند.

۴.۵ خواص وزن‌ها و ریشه‌ها

بر اساس آن‌چه در بخش (۱.۵) آمد، E_α و $E_{-\alpha}$ها به ترتیب عمل‌گرهای بالامثلثی و پایین‌مثلثی، مشابه $J^\pm$ عمل‌گرهای بالابرنده و پایین‌آورنده‌ی وزن‌ها به صورت

$$h_i E_\alpha|\mu, D >= [h_i, E_\alpha]|\mu, D > + E_\alpha h_i|\mu, D >= (\mu + \alpha)_i E_\alpha|\mu, D > \qquad (۱۵)$$

هستند. همانند بخش (۱.۵) که رابطه‌ای بین ویژه‌مقادیر J_3 بدست آوردیم، می‌خواهیم رابطه‌ای بین وزن‌ها و ریشه‌ها بدست آوریم. اگر بیش از یک حالت با وزن μ وجود داشته باشد، $|\mu, D>$ را برای یک αی معین چنان اختیار می‌کنیم که

$$E_\pm|\mu, D >= N_{\pm\alpha,\mu}|\mu \pm \alpha, D > \qquad (۱۶)$$

باشد. در نمایش همزاد حالت $E_\alpha|E_{-\alpha}$ حالت با وزن صفر است، چرا که

$$E_\alpha|E_{-\alpha}>=|[E_\alpha,E_{-\alpha}]>=\beta_i|h_i>$$

که در آن

$$\beta_i=<h_i|E_\alpha|E_{-\alpha}>=tr(h_i[E_\alpha,E_{-\alpha}])/\lambda=tr(E_{-\alpha}[h_i,E_\alpha])/\lambda=\alpha_i tr(E_{-\alpha}E_\alpha)/\lambda=\alpha_i$$

است. پس $[E_\alpha,E_{-\alpha}]=\alpha_i h_i$. حال برای نمایش D

$$<\mu,D|[E_\alpha,E_{-\alpha}]|\mu,D>=<\mu,D|\alpha_i h_i|\mu,D>=\alpha\cdot\mu \tag{۱۷}$$

امّا از سوی دیگر

$$<\mu,D|[E_\alpha,E_{-\alpha}]|\mu,D>=<\mu,D|E_\alpha E_{-\alpha}|\mu,D>-<\mu,D|E_{-\alpha}E_\alpha|\mu,D>=|N_{-\alpha,\mu}|^2-|N_{\alpha,\mu}|^2$$

ولی

$$N_{-\alpha,\mu}=<\mu-\alpha,D|E_{-\alpha}|\mu,D>=<\mu-\alpha,D|E_\alpha^\dagger|\mu,D>=<\mu,D|E_\alpha|\mu-\alpha,D>^\star=N^\star_{\alpha,\mu-\alpha}$$

پس

$$\alpha\cdot\mu=|N_{\alpha,\mu-\alpha}|^2-|N_{\alpha,\mu}|^2. \tag{۱۸}$$

اگر به صورت پی در پی E_α و $E_{-\alpha}$ را بر روی حالت $|\mu,D>$ اثر دهیم، بالاخره به بیشینه و یا کمینه وزنی می‌رسیم که به ترتیب با اثر E_α و $E_{-\alpha}$ حالت‌های نهایی صفر شوند، یعنی

$$E_\alpha|\mu+p\alpha,D>=0,\quad E_{-\alpha}|\mu-q\alpha,D>=0 \tag{۱۹}$$

که p و q عددهای مثبت و درست هستند. در این صورت

$$\begin{array}{ccccc}
|N_{\alpha,\mu+(p-1)\alpha}|^2 & - & 0 & = & \alpha\cdot(\mu+p\alpha)\\
|N_{\alpha,\mu+(p-2)\alpha}|^2 & - & |N_{\alpha,\mu+(p-1)\alpha}|^2 & = & \alpha\cdot(\mu+(p-1)\alpha)\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
|N_{\alpha,\mu}|^2 & - & |N_{\alpha,\mu+\alpha}|^2 & = & \alpha\cdot(\mu+\alpha)\\
|N_{\alpha,\mu-\alpha}|^2 & - & |N_{\alpha,\mu}|^2 & = & \alpha\cdot(\mu)\\
\vdots & & \vdots & & \vdots\\
|N_{\alpha,\mu-q\alpha}|^2 & - & |N_{\alpha,\mu-(q-1)\alpha}|^2 & = & \alpha\cdot(\mu-(q-1)\alpha)\\
0 & - & |N_{\alpha,\mu-q\alpha}|^2 & = & \alpha\cdot(m-qa)
\end{array}$$

با جمع تمام روابط بالا

$$0 = (p+q+1)(\alpha \cdot \mu) + \alpha^2 \left[\frac{p(P+1)}{2} - \frac{q(q+1)}{2}\right] = (p+q+1)\left[(\alpha \cdot \mu) + \frac{\alpha^2}{2}(p+q)\right]$$

و یا

$$\frac{\alpha \cdot \mu}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}(p-q) \qquad (۲۰)$$

پس $(\alpha \cdot \mu)/\alpha^2$ یک عدد نیمه‌درست است. این محدودیت برای تمام نمایش‌ها درست است ولی سادگیِ ویژه‌ای در نمایش همزاد دارد. در این نمایش μ خود یک ریشه است. اگر این ریشه در نمایش همزاد را β بنامیم، در این صورت

$$\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} = \frac{1}{2}(q-p) \equiv \frac{m}{2} \qquad (۲۱)$$

که در آن m عدد درست است، خواهد بود. امّا اگر از ابتدا به‌جای $E_{\pm\alpha}$ از $E_{\pm\beta}$ شروع می‌کردیم، رابطه‌ی مشابه‌ای به صورت زیر بدست می‌امد

$$\frac{\beta \cdot \alpha}{\beta^2} = \frac{1}{2}(q'-p') \equiv \frac{m'}{2} \qquad (۲۲)$$

با ضرب دو رابطه‌ی (۲۱) و (۲۲) خواهیم داشت

$$\frac{mm'}{2} = \frac{(\alpha \cdot \beta)^2}{\alpha^2\beta^2} = Cos^2\theta \qquad (۲۳)$$

که θ زاویه‌ی بین دو بردار ریشه است. با توجه به رابطه‌ی (۳۲)، θ فقط می‌تواند مقادیر

mm'	θ
0	$\pi/2$
1	$\pi/3,\ 2\pi/3$
2	$\pi/4,\ 3\pi/4$
3	$\pi/6,\ 5\pi/6$
4	$0,\ \pi$

داشته باشد. پس زاویه‌های مجاز بین ریشه‌های یک جبرِ ساده‌ی لی فقط می‌تواند مقادیر بالا باشد.

۵.۵ su(3)

معمولاً بهترین روش برای هضم مفاهیم عام، آوردن مثال است. در نتیجه در این بخش برای درک بیش‌ترِ مفاهیم و کاربردهای رو بخش قبل به بررسی یک مثال، جبرِ $su(3)$، خواهیم پرداخت. این مثال از این رو که کاربرد زیادی در فیزیک ذرات بنیادی دارد و از سوی دیگر چون مثالی غیر بدیهی است اهمیت پیدا می‌کند.

گروه $\mathrm{SU}(3)$، گروه ماتریس‌های یونیتاری با دترمینان یک، گروه شبه متصل ـ ساده است. مولدهای این گروه ماتریس‌های 3×3 بدون رَد است. بدون رَد بودن مولدها نتیجه‌ی دترمینان یک بودن اعضای گروه است. پایه‌های جبر $\mathfrak{s}u(3)$ در ادبیات فیزیک با آن‌چه در فصل قبل آمد متفاوت است. این پایه‌ها در فیزیک پایه‌های گلمن[3] هستند. امّا ما در بخش اول پایه‌هایی که در فصل قبل برای $\mathfrak{s}u(3)$ معرفی کردیم را انتخاب کرده و وزن‌ها و ریشه‌های آن را بدست خواهیم آورد. نشان خواهیم داد که چرا پایه‌های گلمن انتخابی بهتر به نظر می‌رسد و در ادامه به بررسی آن‌ها خواهیم پرداخت.

۱.۵.۵ پایه‌های استاندارد

نمایش‌های مختلط جبر $\mathfrak{s}u(3)$ با نمایش‌های مختلط خطی جبرِ مختلط شده‌ی $\mathfrak{s}u(3)_c$ متناظر است. امّا از سوی دیگر جبر ـ $\mathfrak{s}u(3)_c$ با جبر $\mathfrak{s}l(3,\mathbb{C})$ یک‌ریخت است. از همین رو به‌جای بررسی جبر $\mathfrak{s}u(3)$ به بررسی جبر $\mathfrak{s}l(3,\mathbb{C})$ می‌پردازیم.

پایه‌های استانداردِ جبر $\mathfrak{s}u(3)$ عبارت است از

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (۲۴)$$

[3] Gell-Mann

$$f_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{13} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad h_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{۲۵}$$

به سادگی مشاهده می‌شود مجموعه‌ی $\{e_1, f_1, h_1\}$ و $\{e_2, f_2, h_2\}$ دو جبر $sl(2,\mathbb{C})$ تشکیل می‌دهند. $\{h_1, h_2\}$ نیز زیر جبر ـ کارتان است. روابط جابه‌جایی اعضای جبر عبارت هستند از:

	e_1	e_2	e_{13}	f_1	f_2	f_{13}	h_1	h_2
e_1	0	e_{13}	0	h_1	0	$-f_2$	$-2e_1$	e_1
e_2	$-e_{13}$	0	0	0	h_2	f_1	e_2	$-e_2$
e_{13}	0	0	0	$-e_2$	e_1	$h_1 + h_2$	$-e_{13}$	$-e_{13}$
f_1	$-h_1$	0	e_2	0	0	0	$2f_1$	$-f_1$
f_2	0	$-h_2$	e_1	0	0	0	$-f_2$	$2f_2$
f_{13}	f_2	$-f_1$	$-(h_1 + h_2)$	0	0	0	f_{13}	f_{13}
h_1	$2e_1$	$-e_2$	e_{13}	$-2f_2$	f_2	$-f_{13}$	0	0
h_2	$-e_1$	$2e_2$	e_{13}	f_1	$-2f_2$	$-f_{13}$	0	0

5.1: جابه‌جایی در پایه‌های استاندارد

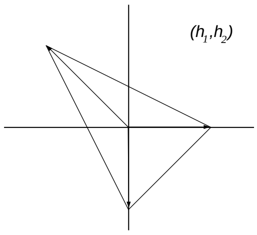
وزن‌ها و ریشه‌های $\mathfrak{su}(3)$

چون زیرجبر کارتان دارای دو عضو است، در نتیجه بردارهای وزن به صورت $\mu = (m_1, m_2)$ هستند. برای پیدا کردن مولفه‌های بردار وزن ابتدا ویژه پایه‌های h_1 و h_2 را به صورت زیر معرفی می‌کنیم.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{۲۶}$$

که ویژه مقادیر h_1 در این پایه‌ها به ترتیب $(0,-1,1)$ و ویژه مقادیر h_2 در این پایه‌ها $(-1,1,0)$ هستند. در نتیجه بردارهای وزن عبارت‌اند از

$$\mu_1 = |1, 0> \quad \mu_2 = |-1, 1> \quad \mu_3 = |0, -1> \tag{۲۷}$$



شکل ۱.۵: نمودار وزن‌ها در پایه‌های استاندارد

بردارهای وزن در صفحه‌ی (h_1, h_2) در شکل (۱.۵) نشان داده‌شده است. این سه ریشه یک مثلث متساوی‌الساقین تشکیل می‌دهند.

با توجه به تعریف ریشه

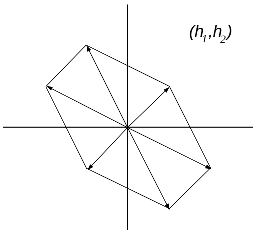
$$\exists \ Z \in su(3) | [h_1, Z] = \alpha_1 Z, \quad [h_2, Z] = \alpha_2 Z$$

که Z را بردار ریشه‌ی متناظر با ریشه‌ی α گویند. حال ریشه‌ها که وزن‌های غیر صفر نمایش همزاد هستند، با استفاده از جدول (۱.۵) بدست می‌آید:

Z	α
e_1	$(2, -1)$
e_2	$(-1, 2)$
e_{13}	$(1, 1)$
f_1	$(-2, -1)$
f_2	$(1, -2)$
f_{13}	$(-1, -1)$

دو ریشه‌ی مربوط به دو مولد e_1 و e_2 که به صورت

$$\alpha^{(1)} = (2, -1), \quad \alpha^{(2)} = (-1, 2) \tag{۲۸}$$



شکل ۲.۵: نمودار ریشه‌ها در پایه‌های استاندارد

را ریشه‌ی ساده گویند. به سادگی می‌توان دید که با ترکیب خطی این دو ریشه می‌توان ریشه‌های دیگر را ساخت:

$$\begin{array}{lcc} (2,-1) &=& \alpha^{(1)} \\ (-1,2) &=& \alpha^{(2)} \\ (1,1) &=& \alpha^{(1)}+\alpha^{(2)} \\ (-2,1) &=& -\alpha^{(1)} \\ (1,-2) &=& -\alpha^{(2)} \\ (-1,-1) &=& -(\alpha^{(1)}+\alpha^{(2)} \end{array}$$

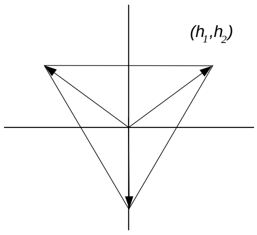
با ترسیم این ریشه‌ها در صفحه‌ی (h_1,h_2) یک شش ضلعی بدست می‌آید، شکل (۲.۵).

۲.۵.۵ پایه‌های گلمن

این پایه‌ها را از ماتریس‌های گلمن می‌سازیم. ماتریس‌های گلمن به صورت زیر هستند.

$$\lambda_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \lambda_2=\begin{pmatrix}0&-i&0\\i&0&1\\0&0&0\end{pmatrix},\ \lambda_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\ \lambda_4=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&0\\1&0&0\end{pmatrix} \quad (۲۹)$$

$$\lambda_5=\begin{pmatrix}0&0&-i\\0&0&0\\i&0&0\end{pmatrix},\ \lambda_6=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix},\ \lambda_7=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&-i\\0&i&0\end{pmatrix},\ \lambda_8=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-2\end{pmatrix} \quad (۳۰)$$



شکل ۳.۵: نمودار وزن‌ها در پایه‌های گلمن

در این صورت مولدها را $T_i = \lambda_i/2$ تعریف می‌کنیم که

$$tr(T_iT_j) = \frac{1}{2}\delta_{ij}$$

باشد. روشن است که $h_1 = T_3$ و $h_2 = T_8$ اعضای زیرجبر کارتان هستند. در این صورت بردارهای وزن $(|\mu_1, \mu_2>)$ با توجه به ویژه‌بردارهای (۶۲) به ترتیب از چپ به راست

$$(\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}), \quad (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2\sqrt{3}}), \quad (0, -\frac{1}{\sqrt{3}}) \qquad (۳۱)$$

هستند. در این صورت نمایش این بردارهای در فضای دوبعدی یک مثلث متساوی الاضلاع است، شکل (۳.۵).

E_αها که یک ریشه را به ریشه‌ی دیگر می‌برد، به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sqrt{2}}(T_1 \pm iT_2) \equiv E_{\pm\alpha} = \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{2}e_1 \\ \sqrt{2}f_1 \end{array} \right\}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}(T_6 \pm iT_7) \equiv E_{\pm\beta} = \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{2}e_2 \\ \sqrt{2}f_2 \end{array} \right\}, \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(T_4 \pm iT_5) \equiv E_{\pm\gamma} = \left\{ \begin{array}{c} \sqrt{2}e_{13} \\ \sqrt{2}f_{13} \end{array} \right\}\end{aligned} \qquad (۳۲)$$

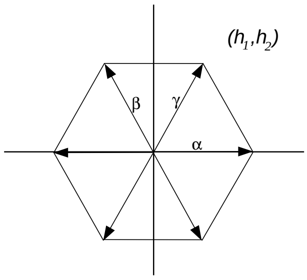
که در آن e_iها و f_iها پایه‌های کارتان—شوالی هستند. حال با استفاده از رابطه‌ی

$$h_i|E_\alpha >= \alpha_i|E_\alpha > \rightarrow \Delta = \{\alpha\} \qquad (۳۳)$$

ریشه‌ها، Δ ، را می‌سازیم. در این صورت ریشه‌ها عبارت هستند از

$$\pm\,\alpha = (\pm 1, 0) \quad \pm\,\beta = (\mp\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}), \quad \pm\gamma = (\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}) \qquad (۳۴)$$

که در شکل (۴.۵) نشان داده است.



شکل ۴.۵: نمودار ریشه‌ها در پایه‌های گلمن

برای $\mathfrak{su}(3)$ زاویه‌ی بین هر دو ریشه‌ی متوالی 60° است.

فصل ۶

ریشه‌های ساده و شاخص‌های دینکین

۱.۶ ریشه‌های ساده

با مشخص کردن پایه‌ها در زیر جبر کارتان، $\{h_i\}$ مولفه‌های بردارهای وزن، μ_iها مشخص می‌شود. در این صورت

تعریف: به بردار وزنی مثبت گفته می‌شود، اگر اولین مولفه‌ی غیر صفر آن مثبت باشد.

پس در حالت کلی وزن‌هامثبت، منفی و یا صفر هستند. با این تقسیم‌بندی فضای وزن دو بخش می‌شود. با آن که این تقسیم‌بندی صوری است، اما خواهیم دید که در محاسبات کمک بزرگی است. شاید پرسیده شود که مرتبه‌ی هر یک از این ریشه‌ها چگونه است؟ جواب بسیار ساده است: $x > y$ است اگر $x - y > 0$ باشد. در این حالت بیشینه وزن در یک نمایش ِ تقلیل‌ناپذیر، وزنی است ک از همه بزرگ‌تر است. با رتبه‌بندی بالا، بیشینه‌وزن یکتا است. به یاد بیاورید که در فصل قبل از بیشینه‌وزن $su(2)$ شروع کردیم و بقیه‌ی نمایش را ساختیم.

حال می‌توان مفاهیم بالا را به ریشه‌ها که خود وزن در نمایش همزاد هستند، تعمیم داد. بر همین اساس پس ریشه‌هادر حالت کلی مثبت ، منفی و یا صفر هستند. مشابه عمل عمل‌گرهای خلق و فنا، اثر E_α و $E_{-\alpha}$ به ترتیب بر روی بیشینه‌وزن و کمینه‌وزن در یک نمایش معین صفر می‌دهند.

تعریف: ریشه‌ی ساده به ریشه‌ای گفته می‌شود که ترکیب خطی ِ دیگر ریشه‌ها (با ضرایب نامنفی)

نباشد.
تاکنون نشان دادیم که با داشتن بیشینه‌وزن می‌توان تمام نمایش یک جبر را ساخت و به همین روش نیز می‌توان با استفاده از ریشه‌ها تمام یک نمایش را بدست آورد. امّا حال نشان خواهیم داد که می‌توان تمام یک نمایش جبر را با استفاده از ریشه‌های ساده بدست آورد.
قضیه: اگر α و β ریشه‌های ساده باشند در آن صورت $\beta - \alpha$ دیگر ریشه نیست.
اثبات: فرض کنید $\beta - \alpha > 0$ یک ریشه است. در این صورت $\beta = \alpha + (\beta - \alpha)$ که جمع دو ریشه‌ی مثبت است، نیز باشد ریشه باشد. امّا چون β جمعِ دو ریشه است پس β دیگر ریشه‌ی ساده نیست. به همین صورت اگر $\beta - \alpha < 0$ ریشه باشد، α دیگر ریشه‌ی ساده نیست. هر دو نتیجه با فرض اولیه متناقض است. پس $\beta - \alpha$ ریشه نیست. در این صورت $E_{-\alpha}|E_\beta >= 0$ است.□
بر اساس رابطه‌های

$$E_{-\alpha}|\mu - q\alpha, D >= 0, \quad \frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}(p-q)$$

برای $q = 0$ داریم $\frac{\alpha\cdot\beta}{\alpha^2} = -\frac{1}{2}p$. حال روشن است که با دانستن p زاویه‌ی بین دو ریشه‌ی ساده بدست می آید. از سوی دیگر برای دو ریشه‌ی ساده داریم

$$2\frac{\alpha \cdot \beta}{\alpha^2} = -p, \quad 2\frac{\alpha \cdot \beta}{\beta^2} = -p'$$

که با تقسیم و ضرب این دو رابطه خواهیم داشت

$$\frac{\beta^2}{\alpha^2} = \frac{p}{p'}, \quad \cos\theta = -\frac{1}{2}\sqrt{pp'} \tag{۱}$$

که θ زاویه‌ی بین دو ریشه‌ی ساده است. پس نسبت طول دو ریشه‌ی ساده و زاویه‌ی بین آن دو را می‌دانیم. از آن‌جا که $\cos\theta$ همواره منفی است پس

$$\frac{\pi}{2} \le \theta < \pi \tag{۲}$$

می‌باشد.
قضیه: مجموعه‌ی از ریشه‌هایی که زاویه‌ی بین آن‌ها $\pi < \theta < (1/2)\pi$ باشد، آن ریشه‌ها مستقل خطی هستند.
اثبات: اگر دو ریشه مستقلِ خطی نباشند، می‌توان نوشت $\sum_i C_i\alpha^i = 0$. حال اگر ریشه‌های ساده را

به دو بخشِ $\Gamma_\pm$ به‌گونه‌ای تقسیم کنیم که $\alpha^i \in \Gamma_+$ اگر $C_i \geq 0$ و $\alpha^i \in \Gamma_-$ اگر $C_i \leq 0$ باشند. در این صورت

$$B \equiv \sum_{\alpha^i \in \Gamma_+} C_i \alpha^i = \sum_{\alpha^i \in \Gamma_-} (-C_i)\alpha^i = A; \quad C_i > 0 \qquad (۳)$$

است. A و B بدلیل آن‌که جمع دو ریشه‌ی ساده هستند، بردارهای مثبت ِ مخالف صفر هستند. امااین غیر ممکن است، چرا که بدلیل آن‌که $\alpha \cdot \beta \leq 0$ است $A^2 = A \cdot B \leq 0$ می‌باشد. پس حکم ثابت شد، این دو مستقل خطی هستند.□

تعداد ریشه‌های ساده مساوی رتبه‌ی جبر، m، است و هر ریشه‌ی مثبت دیگر را می‌توان از ترکیب خطی ریشه‌های ساده بدست آورد. امّا نه تنها ریشه‌های مثبت از ترکیب خطی ریشه‌های ساده بلکه تمام ریشه‌ها را نیز می‌توان با داشتن ریشه‌های ساده نوشت. تنها مشکل آن است که بتوان تشخیص داد که کدام‌یک از این بردارهای ریشه هستند. برای روشن‌تر شدن موضوع و بیان یک چهارچوب عملی تشخیص، نیازمند مقدماتی کوتاه هستیم، که پس از بیان آن‌ها دوباره به موضوع بالا برمی‌گردیم.

۱.۱.۶ نگاهی دیگر به ریشه‌های $\mathfrak{sl}(k+1,\mathbb{C})$

دیدیم وزن از اثر اعضای زیرجبرِ کارتان بر روی ویژه بردارهایشان بدست آمد. به بیان دیگر مؤلفه‌های بردارهای وزن چیزی جز ویژه‌مقادیرِ اعضای کارتان نیست. حال اگر λ_j ها بردارهای ویژه‌ی hها باشند، در این‌صورت

$$h_i|\lambda_j >= \mu_i^j|\lambda_j > \qquad (۴)$$

که در آن μ_i^j مؤلفه‌ی jام بردار وزن iام است. امّا در نمایش همزاد

$$[h_i, e_j] = \alpha_i^j e_j = (\mu_i^j - \mu_i^{j+1}) e_j$$

است که α_i^jمؤلفه‌ی jام ریشه‌ی ساده‌ی iام است. روشن است α^jها و μ^jها مستقل ِ خطی هستند. به همین صورت

$$[h_i, e_{j,j+2}] = (\mu_i^j - \mu_i^{j+2}) e_{j,j+2} = (\alpha_i^j + \alpha_i^{j+1}) e_{j,j+2}$$

است. در حالت کلی

$$[h, e_{q,p}] = (\mu^q - \mu^p)e_{q,p} = \sum_{j=q}^{p-1} \alpha^j e_{q,p} \tag{۵}$$

است. پس α^j ریشه‌ی ساده و ریشه‌های بعدی عبارت هستند از

$$\Delta = \{\pm(\alpha^q + \alpha^{q+1} + \cdots \alpha^p) | 1 \leq p, q \leq k\} \tag{٦}$$

و ریشه‌های ساده

$$\Xi = \{\alpha^1, \alpha^2, \cdots, \alpha^k\} \tag{۷}$$

هستند. ریشه‌ی متناظر با عضو $e_{1,k+1}$، $v \equiv \mu^1 - \mu^{k+1}$ که بیشینه‌ریشه گفته می‌شود عبارت است از:

$$v = \alpha^1 + \alpha^2 + \cdots + \alpha^k = \sum_{i=1}^{k} \alpha^i. \tag{۸}$$

با این روش ما تمام ریشه‌های جبر $\mathfrak{sl}(k+1, \mathbb{C})$ را بدست آوردیم.

۲.۱.٦ زنجیره‌ی ریشه‌ها

اگر α و $\beta \neq \pm\alpha$ ریشه باشند، در آن صورت مولدهای متناظر با کل ریشه‌ها که از اثر e_α بر e_β بدست می‌آید، عبارت هستند از: $e_\beta, e_{\beta+\alpha}, \cdots, e_{\beta+p\alpha}$. با اثر f_α که متناظر با ریشه‌های منفی، $f_\alpha \in \mathcal{L}_\alpha$، است، سری $(e_\beta, e_{\beta-\alpha}, \cdots, e_{\beta-q\alpha})$ بدست می‌آید. حال بوسیله‌ی این دو رشته از مولدها، ریشه‌های زیر بدست می‌آید

$$\beta - q\alpha, \cdots, \beta, \cdots, \beta + p\alpha \tag{۹}$$

که به آن رنجیره‌ی αی β گفته می‌شود.

۲.۶ ماتریس کارتان

برای ریشه‌های ساده می‌توان ماتریس Aی چنان تعریف کرد که درایه‌های آن به صورت

$$A_{ij} = 2\frac{\alpha^i.\alpha^j}{(\alpha^j)^2} \tag{۱۰}$$

که

$$\{\alpha^i\} \in \Xi; \quad i = 1, \cdots, m \tag{۱۱}$$

ریشه‌های ساده و تعداد آن‌ها مساوی رتبه‌ی جبر است. روشن است که A یک ماتریس $m \times m$ و عناصر قطری آن نیز همواره 2 است. اگر $A_{ij} \neq 0$ باشد، $A_{ji} \neq 0$ است. می‌توان نشان داد عناصر غیر قطری $0, -1, -2, -3$ هستند.

در پایه‌های $\{e_i, f_i, h_i\}$ جبر به صورت

$$[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_j, \quad [h_i, e_j] = A_{ji} e_j, \quad [h_i, f_j] = -A_{ji} f_j \tag{۱۲}$$

است که در آن‌ها A_{ji}ها درایه‌های ماتریس کارتان هستند.

فرض کنید اگر α^iها ریشه‌های ساده باشند، آیا هرترکیب خطی از آن‌ها، $\beta = \sum_{\{\alpha^i\}} k_{\alpha^i}\alpha^i$ نیز ریشه است؟

اگر $\beta = \sum_{\{\alpha^i\}} k_i \alpha^i$ باشد، کمیتی مانند $\sum_{\{\alpha^i\}} k_i \equiv k$ تعریف می‌کنیم که به آن تراز ِ ریشه[1] می‌گویند. k عدد درست مثبت است. ریشه‌های تراز ِ یک، همان ریشه‌های ساده هستند. حال اگر ریشه‌ی β را تا تراز ِ n بدست آورده باشیم و به خواهیم ریشه‌ی β را در تراز ِ $n+1$ بدست آوریم، این‌گونه عمل می‌کنیم: با اثر $E_{-\alpha}$ بر روی ریشه‌های تراز ِ n و ادامه‌ی آن می‌توان ریشه‌ی‌های زنجیره‌ی ریشه‌ی β، $\beta, \beta - \alpha, \cdots, \beta - q\alpha$، را بدست آورد. عضوهای بعدی زنجیره‌ی β یعنی $\beta + \alpha, \cdots, \beta + p\alpha$ را نیز با اثر E_α بدست می‌آوریم. حال باید دید آیا آن‌چه بدست آمده درست است. با استفاده از روابط قبلی داریم.

$$-(p - q) = \frac{2\beta \cdot \alpha^i}{(\alpha^i)^2} = \sum_j k_j \frac{2\alpha^j \cdot \alpha^i}{(\alpha^i)^2} = \sum_j k_j A_{ji} \tag{۱۳}$$

---

[1] Root Level

در نتیجه یک روش آزمون بدست آمد

$$p = q - \sum_j k_j A_{ji}, \quad p \in \mathbb{Z}^+ \qquad (۱۴)$$

که p همواره عددی درست و مثبت است. پس $\beta + \alpha^i$ در صورتی ریشه است که $p \in \mathbb{Z}^+$ باشد. روشن است که جمع n درایه‌ی سطر jام ـ ماتریسِ کارتان را تا جایی ادامه می‌دهیم که با اضافه کردن jامین ریشه‌ی ساده به ریشه، یک ریشه‌ی جدید بدست آید.

مثال: ماتریس ـ کارتان جبر $\mathfrak{su}(3)$ به صورت

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad (۱۵)$$

در پایه‌های استاندارد است. با α^1 شروع می‌کنیم. می‌خواهیم ببینیم آیا با اضافه کردن α^2 یک ریشه در تراز ـ2 بدست می‌آید؟ به یاد بیاورید که $2\alpha^1$ و $\alpha^1 - \alpha^2$ ریشه نیستند. از آن‌جا که

$\boxed{2 \quad -1}$ درایه‌های سطر اول

و

$\boxed{-1 \quad 2}$ درایه‌های سطر دوم

پس

$$\sum_j k_j A_{j2} = k_1 A_{12} = 1 \times (-1) \Longrightarrow p > 0 \Longrightarrow \alpha^1 + \alpha^2 \in \Delta$$

امّا اگر $\beta = \alpha^2$ باشد و به خواهیم ببینیم $\alpha^2 + \alpha^1$ ریشه است یا نه

$$\sum_j k_j A_{j1} = k_2 A_{21} = 1 \times (-1) \Longrightarrow p > 0 \Longrightarrow \alpha^1 + \alpha^2 \in \Delta$$

امّا در تراز سوم: $\beta = \alpha^1 + \alpha^2$ ریشه‌است، آیا $\beta + \alpha^1 = 2\alpha^1 + \alpha^2$ نیز ریشه است؟

$$\sum_j k_j A_{j1} = k_1 A_{11} + k_2 A_{21} = 1 \times (2) + 1 \times (-1) \Longrightarrow p < 0 \Longrightarrow 2\alpha^1 + \alpha^2 \notin \Delta$$

و مشابه رابطه بالا $\alpha^1 + 2\alpha^2$ نیز ریشه نیست،

$$\sum_j k_j A_{j1} = k_1 A_{12} + k_2 A_{22} = 1 \times (-1) + 1 \times (2) \Longrightarrow p < 0 \Longrightarrow 2\alpha^1 + \alpha^2 \notin \Delta$$

۳.٦ شاخص‌های دینکین

به یاد بیاورید

$$h_i|\mu, D >= \mu_i|\mu, D > \tag{۱٦}$$

که μ بردار وزن بود. از سوی دیگر دیدیم که $\mu_i - \mu_{i+1} = \alpha_i$ است. در این صورت زنجیره‌ی ریشه‌ها

$$\mu - q\alpha, \cdots, \mu, \cdots, \mu + p\alpha$$

است و همچنین

$$2\frac{\mu \cdot \alpha}{(\alpha)^2} = -(p-q)$$

می‌باشد.

همواره یک نمایش مشخصِ غیرقابل تقلیل بوسیله یک برین‌وزن مشخص می‌شود. حال اگر $\{\alpha^i\}$ ریشه‌های ساده و μ برین‌وزن ـِ یک نمایش غیرقابل تقلیل باشد، یعنی $E_\alpha|\mu, D >= 0$. در آن صورت $\mu + \alpha^i$ دیگر وزن نیست. پس

$$\mu_i = 2\frac{\mu \cdot \alpha^i}{(\alpha^i)^2} > 0$$

است. هر برین وزنی مانند μ را به وسیله‌ی یک عدد مثبت ـِ درست به نام شاخص ـِ دینکین[2] به صورت زیر تعریف می‌کنند.

$$q^i \equiv \frac{2\mu \cdot \alpha^i}{(\alpha^i)^2} \tag{۱۷}$$

که q^iها اعداد درست هستند. از آن‌جا که α^iها مستقل خطی هستند، $\alpha^i \in \Xi$، در نتیجه q^i، μ را به‌طور یگانه تعیین می‌کنند. از سوی دیگر مجموعه‌ی $\{q^i\}$ یک بردار μ می‌دهد که برین‌وزن یک نمایش است. تعداد اعضای این مجموعه مساوی رتبه‌ی جبر است. پس با داشتن شاخص ـِ دینکین، برین وزن مشخص می‌شود. با داشتن برین وزن می‌توان تمام وزن‌های نمایش مورد نظر را بدست آورد. روش بدست آوردن این وزن‌ها مشابه روش یافتن ریشه‌های یک جبر ـِ لی‌از ماتریس کارتان است.

[2] Dinkin Index

پرسشی که در پیش رو داریم این است: اگر M یک وزن باشد، آیا $M-\alpha^i$ نیز وزن است؟ برای جواب به این پرسش از برین وزن شروع می‌کنیم و با اثر $E_{-\alpha}$ زنجیره‌ی وزن‌ها را مشابه حالت ریشه بدست می‌آوریم. امّا وقتی برین وزن را بدانیم از رابطه‌ی $2\frac{\mu\cdot\alpha^i}{(\alpha^i)^2}=-(p-q)$، p را می‌دانیم. حال اگر

$$M_i=2\frac{M\cdot\alpha^i}{(\alpha^i)^2}\Longrightarrow q^i=p_i+M_i>0 \qquad (۱۸)$$

باشد، در این صورت می‌دانیم که می‌توان با کم کردن α^i از وزن M یم وزن دیگر بدست می آید. شاخص ـِ دینکین ـِ وزن ـِ $M-\alpha^j$ را با کم‌کردن A_{ji} از M_j یادداشت می‌کنیم و مشابه قبل ادامه می‌دهیم.

نگاهی دیگر به شاخص ـِ دینکین، نشان می‌دهد اگر μ^iها وزن‌های بنیادی[3] باشند، در آن صورت هر وزن دیگر را می‌توان به صورت ترکیب ـِ خطی از این وزن‌ها نوشت:

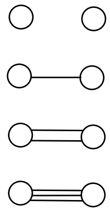
$$\mu=\sum_i^m q^i\mu^i \qquad (۱۹)$$

که q^iها همان شاخص‌های دینکین هستند.

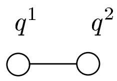
۱.۳.٦ نمودارِ دینکین

نمودار ـِ دینکین یک گونه خلاصه نویسی برای ریشه‌های ساده است. هر ریشه‌ی ساده را به وسیله‌ی یک دایره نمایش می‌دهند. اگر تمام دایره‌ها توخالی باشد، یعنی ریشه‌های ساده دارای طول مساوی هستند و اگر تعدادی توخالی و تعدادی توپُر باشند، مجموعه‌ی ریشه‌های ساده‌ی متناظر با دایره‌های توخالی و توپُر طول یکسان دارند ولی طول مجموعه‌ی ریشه‌های متناظر با دایره‌های توپُر کوچک‌تر از ریشه‌های متناظر با دایره‌های توخالی است. هر دو جفت دایره بوسیله‌ی خطوطی به یک‌دیگر متصل شده‌اند که بر حسب تعداد این خطوط زاویه‌ی بین ریشه‌های متناظر با دایره‌ها مشخص می‌شود، بدون خط $90°$، یک خط $120°$، دو خط $135°$ و سه خط $150°$ (شکل ۱.٦).

[3] Fundamental weights



شکل ۱.۶: نمودارهای دینکین



شکل ۲.۶: نمودارِدینکین ِ جبر $\mathfrak{s}u(3)$ با شاخص‌های دینکین

۴.۶ مثال $\mathfrak{s}u(3)$

باز مثال $\mathfrak{s}u(3)$ را برای درک مفاهیم این فصل برگذیده‌ایم. چون جبر $\mathfrak{s}u(3)$ جبر رتبه‌ی 2 است پس دارای دو ریشه‌ی ساده‌است. نمودار این جبر به صورت

در بخش‌های زیر به بررسی‌ی تعدادی از نمایش‌های مختلف جبر $\mathfrak{s}u(3)$ خواهیم پرداخت.

۱.۴.۶ نمایش $(1،0)$

اگر $q^1 = 1, \ \ q^2 = 0$ باشد برای شروع کار ابتدا ماتریس کارتان را در بالا نوشته سپس مقدار q^1 و q^2 را در زیر آن می‌نویسیم. در ردیف دوم مقادیر سطر قبلی که شاخص‌های دینکین بودند را سطرهای ماتریس کارتان کم می‌کنیم و در یک ردیف می‌نویسیم. در ردیف بعد این بار مقادیر ردیف قبلی را از سطرهای ماتریس کارتان کم می‌کنیم و می‌نویسیم و به همین ترتیب ادامه می‌دهیم. اگر اعداد بدست آمده مثبت بود مقدار بدست‌آمده متناظر با وزن مربوطه است.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{c} \boxed{q^1 = 1 \quad q^2 = 0} \\ \mu^1 - \alpha^1 \quad \mu^2 - \alpha^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cc} \boxed{q^1 - A_{11} = -1 \quad q^2 - A_{12} = 1} & \boxed{q^1 - A_{21} = 2 \quad q^2 - A_{22} = -2} \\ \mu^1 - 2\alpha^1 \qquad \mu^2 - \alpha^1 - \alpha^2 & \mu^1 - \alpha^2 - \alpha^1 \qquad \mu^2 - 2\alpha^2 \end{array}$$

براساس جدول بالا وزن‌های ممکن: μ^1، $\mu^1 - \alpha^1$ و $\mu^1 - \alpha^1 - \alpha^2$ هستند. این همان نمایش 3، نمایش بنیادی‌ی جبر $\mathfrak{su}(3)$ است. نمایش $(0,1)$ نیز بر همین اساس بدست می‌اید که نمایش $\bar{3}$ است.

۲.۴.۶ نمایش (1،1)

با توجه به روش بالا

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{1 \quad 1}$$

$$\boxed{-1 \quad 2} \quad \boxed{2 \quad -1}$$

$$\boxed{-3 \quad 0} \quad \boxed{0 \quad 0} \quad \boxed{0 \quad 0} \quad \boxed{0 \quad -3}$$

$$\boxed{-5 \quad 1} \quad \boxed{-2 \quad -2} \quad \boxed{-2 \quad 1} \quad \boxed{1 \quad -2} \quad \boxed{-2 \quad -2} \quad \boxed{1 \quad -5}$$

با توجه به دیاگرام بالا وزن‌های این نمایش $\mu = \mu^1 + \mu^2$، $\mu - \alpha^1$، $\mu - \alpha^2$، $\mu - \alpha^1 - \alpha^2$، $\mu^1 - \alpha^2 - \alpha^1$، $\mu - 2\alpha^1 - \alpha^2$ و $\mu - \alpha^1 - 2\alpha^2$ $\mu^1 - 2\alpha^1 + 2\alpha^2$ هستند. این نمایش 8، نمایش همزاد است.

۶.۴.۳ نمایش (2،0)

این نمایش، نمایش 6 است و وزن‌های آن به ترتیب: $2\mu^1$، $2\mu^1-\alpha^1$، $2\mu^1-2\alpha^1$، $2\mu^1-\alpha^1-\alpha^2$، $2\mu^1-2\alpha^1-\alpha^2$ و $2\mu^1-2\alpha^1-2\alpha^2$ می‌باشند. نمایش $\bar{6}$ نیز $(0,2)$ است که با همین روش بدست می‌آید.

۶.۴.۴ نمایش (3،0)

این نمایش، نمایش 10 است که وزن‌های آن: $3\mu^1$، $3\mu^1-\alpha^1$، $3\mu^1-2\alpha^1$، $3\mu^1-3\alpha^1$، $3\mu^1-\alpha^1-\alpha^2$، $3\mu^1-2\alpha^1-\alpha^2$، $3\mu^1-\alpha^1-2\alpha^2$، $3\mu^1-2\alpha^1-2\alpha^2$، $3\mu^1-3\alpha^1-2\alpha^2$ و $3\mu^1-3\alpha^1-3\alpha^2$ می‌باشند. نمایش $\bar{10}$ نیز $(0,3)$ است که با همین روش بدست می‌آید.

۶.۵ مسائل

۱) σ_i و $\sigma_i\eta_1$ که σ_iها و η_1 ماتریس‌های پائولی هستند، تشکیل یک جبر می‌دهند. این جبر بوسیله‌ی یک گروه که شبه‌ساده است تولید می‌شود.

الف: ریشه‌های ساده‌ی این جبر را بیابید.

ب: نمودار ِ دینکین ِ آن چگونه است.

۲) ۱۰ ماتریس σ_i، $\sigma_i\tau_1$، $\sigma_i\tau_3$، τ_2 که σ_iها و τ_iها ماتریس‌های مستقل ِ پائولی در فضای متعامد، تشکیل یک جبر ِ ساده می‌دهند. اگر $h_1=\sigma_3$ و $h_2=\sigma_3\tau_3$ را به عنوان اعضای زیرجبر کارتان در نظر بگیریم.

الف: ریشه‌های این جبر را بیابید.

ب: وزن‌های نمایش چهاربعدی که بوسیله این ماتریس‌ها تولید می‌شود را محاسبه کنید.

ج:ریشه‌های ساده، وزن‌های بنیادی و نمودار دینکین را بدست آورید.

۳) ماتریس ِ کارتان ِ جبرِ G_2 به صورت

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

است.

الف: ریشه‌های این جبر را بدست آورید.

ب: نمودار ریشه‌ها را ترسیم کنید.

۴) ماتریس ِ کارتان ِ جبرِ B_2 به صورت

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

است.

الف: ریشه‌های این جبر را بدست آورید.

ب: نمودار ریشه‌ها را ترسیم کنید.

پیوست‌ها

پیوست I: تاریخچه مختصر گروه‌های لی

در بسیاری از موارد وقتی موضوعی مورد مطالعه قرارمی‌گیرد، داشتن ایده‌ای از تاریخ تکوین آن موضوع کمک کننده است. لذا در این پیوست به صورت فهرست‌وار دانشمندانی که در تکوین ایده‌های اساسی نظریه گروه‌های لی نقش داشتند را می آوریم.

- ۱۸۷۳: گروه‌های لی، سوفوس لی (۱۸۴۲—۱۸۹۹)
- ۱۸۹۶ نمایش گروه‌های محدود و مشخص، جورج فبی‌نیوس (۱۸۴۹—۱۹۱۷)
- ۱۸۹۷: انتگرال‌گیری روی گروه‌های لیِ فشرده، آدلف هویرویتس (۱۸۵۹—۱۹۱۹)
- ۱۹۰۵: لم شور، ای‌سای شور (۱۸۷۵—۱۹۴۱)
- ۱۹۱۳: نمایش‌های بالاترین وزن‌های جبرهای لی، الی کارتان (۱۸۶۹—۱۹۵۱)
- ۱۹۲۵: نظریه‌ی نمایش عام گروه‌های لی فشرده، فرمول مشخصه‌ی وایل، هرمان وایل (۱۸۸۵—۱۹۵۵)
- ۱۹۲۵—۶: مکانیک کوانتمی، ورنر هایزنبرگ (۱۹۰۱—۱۹۷۶)، اروین شرودینگر (۱۸۸۷—۱۹۶۱)، پی.ای.ام دیراک (۱۹۰۲—۱۹۸۴)

- ۱۹۲٦: نظریه‌ی پیتر—وایل
- ۱۹۳۱: جبر و گروه هایزنبرگ و نظریه‌ی استون—فون نیومن، وایل، مارشال استون (۱۹۰۳—۱۹۸۹)، جان فون نیومن (۱۹۰۳—۱۹۵۷)
- ۸—۱۹۳۵: جبرهای کلی‌فورد و اسپینورها، ریچارد براور (۱۹۰۱—۱۹۷۷)، وایل، کارتان
- ۱۹۵۱: نمایش‌های گروه‌های شبه‌ساده‌ی نافشرده، هاریش—چاندرا (۱۹۲۳—۱۹۸۳)
- ۱۹۵۴: نظریه‌ی بورل—ویل، آرماند بورل (۱۹۲۳—)، آندره ویل (۱۹۰٦—۱۹۹۸)
- ۱۹۵۷: نظریه‌ی بورل—ویل—بووت، رائول بووت (۱۹۲۳—)
- ۱۹٦۴: نمایش‌های متاپلیک‌تیک، وایل
- ۱۹٦۸: جبرهای لی کس—مودی، ویکتور کس (۱۹۴۳—)، روبرت مودی (۱۹۴۱—)
- ۱۹۷۰: کوانتش هندسی، روش مدارها، برترام کوس‌تانت (۱۹۲۸—)، الکساندر کریلوف (۱۹۴۱—)
- ۱۹۷۴: نمایش‌های بالاترین وزن‌های جبرهای کس—مودی، کس

پیوست II: تبدیلات متعامدبهنجار چهاربُعدی

یک فضای چهار بُعدی با مختصات $x_\mu \quad (\mu = 1,2,3,4)$ در نظر می‌گیریم. به هر نقطه از این فضا یک بردار مختصات $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ وابسته می‌کنیم.
بنابر تعریف طول این بردار برابر است با

$$S = \sqrt{x_\mu x^\mu} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2}$$

طول S در حالت کلی هر مقدار مختلطی می‌تواند باشد. حال یک تبدیل خطی‌ِی همگن در نظر بگیرید که به هر بردار این فضای بردار دیگری وابسته می‌کند:

$$x_\mu \longrightarrow x'_\mu = \alpha_{\mu\nu} x_\nu ; \quad \mu = 1,2,3,4 \tag{۲۰}$$

مجموعه اعداد $\alpha_{\mu\nu}$ درایه‌های ماتریس تبدیل هستند. حال ببینیم تحت چه شرایطی این تبدیل طول هر بردار را ناوردا می‌گذارد:

$$S' = \sqrt{X'_\mu \cdot X'_\mu} = \sqrt{X_\mu \cdot X_\mu} = S$$

به سادگی می‌توان نشان داد که شرط ناوردائی طول منجر به شرط زیر می‌شود:

$$\alpha_{\mu\nu}\alpha_{\mu\rho} = \delta_{\nu\rho}; \quad \nu, \rho = 1, 2, 3, 4 \tag{۲۱}$$

این روابط روابط متعامد بهنجار نامیده می‌شوند. با استفاده از این روابط می‌توان عکس تبدیلات (۰۲) را پیدا کرد. برای این منظور کافی است رابطه (۱) را در $\alpha_{\mu\rho}$ ضرب کرده و روی ρ جمع کنیم. لذا خواهیم داشت:

$$X_\rho = \alpha_{\mu\rho} X'_\mu \tag{۲۲}$$

حال اگر باز شرط ناوردا بودن طول را بکار ببریم به شکل دیگری از شرط متعامد بهنجار می‌رسیم:

$$\alpha_{\mu\rho}\alpha_{\nu\rho} = \delta_{\nu\nu} \tag{۲۳}$$

حال اگر فاصله‌ی بین دو نقطه‌ی $X^{(1)}$ و $X^{(2)}$ را بصورت

$$d = \sqrt{(x_\mu^{(1)} - x_\mu^{(2)})(x_\mu^{(1)} - x_\mu^{(2)})}$$

تعریف کنیم، در این صورت این فاصله نیز تحت تبدیلات خطی فوق‌الذکر ناوردا می‌ماند.

حال نشان خواهیم داد که مجموعه‌ی خطی (۱) یک گروه تشکیل می‌دهد:

۱) اگر دو تبدیل متوالی از نوع (۱) را در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$X'_\mu = \alpha'_{\mu\nu} X'_\nu = \alpha'_{\mu\nu}\alpha_{\nu\rho} X_\rho \equiv \beta_{\mu\rho} X_\rho$$

به سادگی می‌توان نشان داد که ضرایب $\beta_{\mu\rho}$ هم در شرط متعامدبهنجار صدق می‌کنند. بنابراین از ترکیب دو تبدیل متعامدبهنجار یک تبدیل متعامدبهنجار بدست می آید.

۲) شرط شرکت پذیری $\alpha(\beta\gamma) = (\alpha\beta)\gamma$ نیز برقرار است.

۳) عضو واحد، $\alpha_{\mu\nu}=\delta\mu\nu$ وجود دارد.

۴) تبدیل وارون همان شرط متعامدبهنجار (۲) است.

بنابراین، این تبدیلات یک گروه تشکیل می‌دهد. این گروه تبدیلات خطی که فاصله را در فضای چهاربعُدی، $\mathbb{C}^4$، ناوردا می‌گذارد، گروه تبدیلات متعامدبهنجار مختلط چهاربعُدی نامیده و آن را با $O(4)$ نشان می‌دهند. این گروه شش پارامتر مختلط دارد (برای شانزده عضو ده رابط بصورت $\alpha_{\mu\rho}\alpha_{\nu\rho}=\delta_{\nu\nu}$ وجود دارد).

گروه تبدیلات لورنتز

با اعمال شرط‌هایی بر روی $\alpha_{\mu\nu}$ زیرگروه‌های مختلف $O(4)$ بدست می‌آید. مثلاً اگر فضای چهاربرداری بالا یک فضای حقیقی‌ِی چهاربعُدی، $\mathbb{R}^4$ باشد (یعنی تمام نقاط آن بوسیله‌ی مختصات حقیقی X_μ نشان داده شود)، تمام درایه‌های $\alpha_{\mu\nu}$ حقیقی خواهند بود. در این صورت گروه بدست آمده بیان‌گر دوران در فضای چهار بعُدی خواهد بود. اگر حالتی را در به صورت زیر نظر بگیریم که فضای دارای سه مختصه‌ی حقیقی و یک مختصه‌ی موهومی باشد:

$$X_1=x,\;\; X_2=y,\;\; X_3=z,\;\; X_4=ict$$

بطوری که x، y و z مختصه‌های فضای معمولی و c سرعت نور باشد. در این صورت فضای برداری را فضای مینکوفسکی گویند. هر واقعه بوسیله‌ی یک نقطه نشان داده می‌شود. در فضای مینکوفسکی «متریک» حقیقی ولی نامعین است. بدین معنی که مربع «فاصله» بین دو نقطه، یعنی $(X_\mu^{(1)}-X_\mu^{(2)})$ می‌تواند مثبت، صفر و یا منفی باشد. در حالت اول گوئیم: جدایی دو ذره شبه‌مکانی است. در حالت دو گوئیم: جدایی دو ذره شبه نور و در حالت سوم گوئیم: جدایی شبه زمانی است.

برای روشن‌تر شدن مطلب یک دستگاه مختصات به نقطه‌ی O وابسته می‌کنیم. اگر برای سهولت از مختصات y و z صرف‌نظرکنیم، در این صورت وضعیت سایر نقاطدر شکل مخروط نور نمایش داده شده است:

هر علامت نورانی که از O سرچشمه می‌گیرد در امتداد مخروط نور حرکت خواهد کرد. نقاط داخل مخروط گذشته و آینده را نشان می‌دهند. جدایی تمام نقاط داخل مخروط از نقطه‌ی O شبه‌زمانی

است. هر ذره‌ی مادی که از O می‌گذرد بایستی همواره داخل این مخروط بماند و این بدان معنی است که از نظر نسبیت خاص سرعت ذره حداکثر سرعت نور است. جدایی تمام نقاط خارج مخروط نور از O شبه‌مکانی است. از O به هیچ نقطه‌ای از این ناحیه نمی‌توان بوسیله‌ی یک پدیده‌ی فیزیکی رسید. بدین معنی که هیچ رخ‌دادی در این ناحیه نمی‌تواندیک ارتباط علت و معلولی با حادثه‌ی O داشته باشد.

در مورد تبدیلات خطی در فضای مینکوفسکی بایستی به‌گونه‌ای $\alpha_{\mu\nu}$ را محدود کنیم که حقیقی بودن مختصات حفظ شود. بنابراین باید:

$$\alpha_{ik} \in \mathbb{R}; \quad i,k = 1,2,3, \quad \alpha_{i4},\ \alpha_{4i} \in Im; \quad i = 1,2,3, \quad \alpha_{44} \in \mathbb{R} \qquad (۴۲)$$

باز می‌توان نشان داد که این تبدیلات نیز یک گروه تشکیل می‌دهد.

گروه تبدیلات خطی همگن

$$X_\mu \longrightarrow X'_\mu = \alpha_{\mu\nu} X_\nu$$

که در آن $\alpha_{\mu\nu}$ شرط‌های (۴۲) را اضاء می‌کنند، گروه تبدیلات همگن لورنتز نامیده می‌شود. برای سادگی کار ما از این پس آن را با $\mathcal{L}$ نشان می‌دهیم. گروه $\mathcal{L}$ نقش مهمی در فیزیک دارد. بر اساس اصول نسبیت خاص تمام قوانین طبیعت بایستیتحت هر تبدیلات گروه لورنتز ناوردا باشد. به زبان دیگر باید تمام قوانین فیزیک در دستگاه‌هایی که بوسیله‌ی تبدیلات لورنتز به هم مربوط می‌شوند یک شکل داشته باشند.

دیگر زیرگروه‌ها

باز با اعمال شرطی دیگر بر روی درایه‌های نمایش ماتریسی α زیرگروه‌های دیگری از گروه تبدیلات متعامدبهنجار در چهار بعُد را معرفی می‌کنیم.

اگر

$$\alpha_{i4} = \alpha_{4i} = 0; \quad \alpha_{44} = 1$$

باشند. گروه تبدیلات متعامدبهنجار در فضای سه بعُدی مختلط بدست می آید که آن را به $O(3)$ نمایش داده می‌شود. اگر تمام ضرایب را در تبدیلات گروه $O(3)$، حقیقی بگیریم به زیرگروه $SO(3)$

و یا $\mathbb{R}_4$ یعنی گروه دوران در فضای سه بُعدی می‌رسیم. از آن‌جا که کلیه‌ی تبدیلات $SO(3)$ تمام صفحات عمود بر مختصه‌ی X_4 را ناوردا می‌گذارد ساده‌تر است این زیرگروه را کلاً در فضای سه بُعدی حقیقی بیان کنیم. اگر مختصات را به x_i که $i=1,2,3$ باشد، نمایش بدهیم در این صورت طول یک بردار برابر است با

$$S=\sqrt{x_i\cdot x_i}=\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^3} \qquad (۲۵)$$

این تبدیلات به صورت

$$x_i\longrightarrow x_i'=\alpha_{ik}x_k;\quad i=1,2,3$$

که در آن ضرایب α_{ik} حقیقی هستند. از آن‌جا که این تبدیلات طول بردار را ناوردا می‌گذارد لذا باید

$$\alpha_{ik}\alpha_{il}=\delta_{kl};\quad k,l=1,2,3$$

تعداد پارامترهای مستقل این گروه سه تا است. زیرا نه تا α_{ik} داریم که بدلیل متعامدبهنجار بودن تبدیلات شش معادله برای α_{ik} هابدست می آید و لذا سه پارامتر آزاد باقی می‌ماند.

تبدیلات بی‌نهایت کوچک

یک عنصر بی‌نهایت گوچک از گروه $O(4)$ را در نظر بگیرید. این تبدیل بی‌نهایت کوچک تفاوت کمی با تبدیل واحد دارد لذا بدیهی‌ترین شکل آن به صورت

$$X_\mu\longrightarrow X'=(\delta_{\mu\nu}+\omega_{\mu\nu})X_\nu$$

که در آن $|\omega_{\mu\nu}|<<1$ است. از شرط $\alpha_{\mu\nu}\alpha_{\mu\rho}=\delta_{\nu\rho}$ نتیجه می‌شود:

$$\omega_{\mu\nu}=-\omega_{\nu\mu}$$

در نتیجه ماتریس ω شش درایه‌ی مستقل دارد که نقش شش پارامتر را برای تبدیلات بی‌نهایت کوچک، بازی می‌کنند.

برای گروه $O(4)$ ضرایب $\omega_{\mu\nu}\in\mathbb{C}$ و اختیاری هستند. برای گروه $SO(4)$ ضرایب $\omega_{\mu\nu}\in\mathbb{R}$ هستند. برای گروه $\mathcal{L}$ ضرایب ω_{ik} و ω_{44} حقیقی و ضرایب $\omega_{i4}=-\omega_{4i}$ موهومی هستند.

در فضای $\mathbb{R}^n$ این گروه بوسیله‌ی ماتریس‌های $n \times n$ نمایش داده می‌شوند. اگر این ماتریس‌ها را به D و عناصر فضای نمایش را به ψ نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\psi \longrightarrow \psi' = D(\alpha)\psi$$

برای یک تبدیل بی‌نهایت کوچک از گروه $O(4)$، $D\mathrm{G}$ را می‌توان به صورت

$$D = \mathbb{I} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu} J_{\mu\nu}$$

بوده که چون $\omega_{\mu\nu}$ نسبت به چایگشت اندیس‌ها پادمتقارن است، لذا $J_{\mu\nu}$ را نیز پادمتقارن انتخاب می‌کنیم. در نتیجه حال ما کلاً شش عمل‌گر بینهایت کوچک داریم. حال کمیت $D(\alpha)D(\mathbb{I}+\omega)D^{-1}(\alpha)$ را بد روش حل می‌کنیم:

$$D(\alpha)D(\beta) = D(\alpha\beta)$$

و

$$D^{-1}(\alpha) = D(\alpha^{-1})$$

بنابراین

$$\begin{aligned} D(\alpha)D(\beta) &= D(\alpha+\alpha\omega)D(\alpha^-1) \\ &= D(\mathbb{I}+\alpha\omega\alpha^{-1}) = \mathbb{I} + \frac{i}{2}(\alpha\omega\alpha^{-1})_{\rho\eta}J_{\rho\eta} \\ &= \mathbb{I} + \frac{i}{2}\alpha_{\rho\mu}\omega_{\mu\nu}(\alpha^{-1})_{\nu\eta}J_{\rho\eta} \\ &= \mathbb{I} + \frac{i}{2}\alpha_{\rho\mu}\alpha_{\eta\nu}J_{\rho\eta}\omega_{\mu\nu} \end{aligned} \qquad (۲۶)$$

از سوی دیگر

$$\begin{aligned} D(\alpha)D(\mathbb{I}+\omega)D^{-1}(\alpha) &= D(\alpha)[\mathbb{I} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J_{\mu\nu}]D^{-1}(\alpha) \\ &= \mathbb{I} + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}D(\alpha)J_{\mu\nu}D^{-1}(\alpha) \end{aligned} \qquad (۲۷)$$

با تساوی قراردادن این دو نتیجه خواهیم داشت:

$$D(\alpha)J_{\mu\nu}D^{-1}(\alpha) = \alpha_{\rho\mu}\alpha_{\eta\nu}J_{\rho\eta}$$

اگر $\alpha = \mathbb{I} + \omega$ قرار دهیم، در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} D(\mathbb{I}+\omega)J_{\mu\nu}D^{-1}(\mathbb{I}+\omega) &= (\mathbb{I}+\frac{i}{2}J_{\rho\eta}\omega_{\rho\eta})J_{\mu\nu}(\mathbb{I}-\frac{i}{2}J_{\lambda\sigma}\omega_{\lambda\sigma}) \\ &\cong J_{mu\nu}+\frac{i}{2}\omega\rho\eta J_{\rho\eta}J_{\mu\nu}-\frac{i}{2}\omega\lambda\sigma J_{\mu\nu}J_{\lambda\sigma}+O(\omega^2) \\ &= J_{mu\nu}+\frac{i}{2}\omega\rho\eta J_{\rho\eta}J_{\mu\nu}-\frac{i}{2}\omega\rho\eta J_{\mu\nu}J_{\rho\eta} \\ &= J_{mu\nu}+\frac{i}{2}\omega\rho\eta[J_{\rho\eta},J_{\mu\nu}] \end{aligned} \quad (۲۸)$$

از سوی دیگر

$$\begin{aligned} \alpha_{\rho\mu}\alpha_{\eta\nu}J_{\rho\eta} &= (\delta_{\rho\mu}+\omega_{\rho\mu})(\delta_{\eta\nu}+\omega_{\eta\nu})J_{\rho\eta} \\ &= J_{\mu\nu}+\omega_{\rho\mu}\delta_{\eta\nu}J_{\rho\eta}+\omega_{\eta\nu}\delta_{\rho\mu}J_{\rho\eta} \\ &= J_{\mu\nu}+\omega_{\rho\mu}J_{\rho\nu}+\omega_{\eta\nu}\delta_{\rho\mu}J_{\mu\eta} \\ &= J_{\mu\nu}+\omega_{\rho\mu}\delta_{\eta\mu}J_{\rho\nu}-\omega_{\rho\eta}\delta_{\nu\rho}J_{\mu\eta} \\ &= J_{\mu\nu}+\frac{1}{2}[\omega_{\rho\eta}\delta_{\eta\mu}J_{\rho\nu}+\omega_{\eta\rho}\delta_{\rho\mu}J_{\eta\nu}]-\frac{1}{2}[\omega_{\rho\eta}\delta_{\nu\rho}J_{\mu\eta}+\omega_{\eta\rho}\delta_{\nu\eta}J_{\mu\rho}] \end{aligned} \quad (۲۹)$$

در نتیجه

$$J_{mu\nu}+\frac{i}{2}\omega_{\rho\eta}[J_{\rho\eta},J_{\mu\nu}] = J_{\mu\nu}+\frac{1}{2}[\omega_{\rho\eta}[\delta_{\eta\mu}J_{\rho\nu}-\delta_{\rho\mu}J_{\eta\nu}-\delta_{\nu\rho}J_{\mu\eta}+\delta_{\nu\eta}J_{\mu\rho}] \quad (۳۰)$$

$$[J_{\rho\eta},J_{\mu\nu}] = -i[\delta_{\eta\mu}J_{\rho\nu}-\delta_{\rho\mu}J_{\eta\nu}-\delta_{\nu\rho}J_{\mu\eta}+\delta_{\nu\eta}J_{\mu\rho}] \quad (۳۱)$$

با جایگذینی

$$J_{ij} = \epsilon_{ijk}J_k, \quad J_i = ik_i$$

رابطه‌ی (۱۳) به صورت زیر در می آید:

$$\begin{aligned} [J_i,J_j] &= i\epsilon_{ijk}J_k \\ [J_i,K_j] &= i\epsilon_{ijk}K_k \\ [K_i,K_j] &= -i\epsilon_{ijk}J_k \end{aligned} \quad (۳۲)$$

گروه غیرهمگن لورنتز (گروه پوانکاره)

در بخش قبل دیدیم که گروه لورنتز فاصله‌ی $(X_\mu^{(1)} - X_\mu^{(2)})^2$ در فضای مینکوفسکی را ناوردا می‌گذارد. بدیهی است که گروه غیرهمگن لورنتز که بوسیله‌ی تبدیلات از نوع:

$$X_\mu \longrightarrow X'_\mu = \alpha_{\mu\nu} X_\nu + b_\mu \qquad (۳۳)$$

تعریف می‌شود. در رابطه بالا $\alpha_{\mu\nu}$ همان شرط متعامدبهنجار را دارد و b_μ یک بردار ثابت است و فقط شرطی که بر روی آن است $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ و $b_4 \in \mathbf{Im}$ است.

گروه همگن لورنتز به گروه پوانکاره نیز موسوم است. این گروه دارای زیرگروه‌های $\mathcal{L}$، گروه همگن لورنتز، و S، گروه انتقال، است. گروه انتقال بوسیله‌ی تبدیل‌های از نوع

$$X_\mu \longrightarrow X'_\mu = X_\mu + b_\mu \qquad (۳۴)$$

تعریف می‌شود. اما چون عناصر گروه انتقال با عناصر گروه همگن لورنتز جابجائی نیستند $\mathbb{L}$ حاصل‌ضرب مستقیم $\mathcal{L}$ در S نیست.

می‌توان نشان داد که $\mathcal{L}$ تصویرهم‌ریخت $\mathbb{L}$ و عنصر واحد است. از آنجا که S زیرگروه ناوردای $\mathbb{L}$ است لذا فاکتورگروه $\mathbb{L}/S$ با $\mathcal{L}$ یک ریخت است.

دو تبدیل پی‌در پی پوانکاره با یک تبدیل پوانکاره معادل است:

$$X'_\mu = \alpha_{\mu\nu} X_\nu + b_\mu, \quad X''_\mu = \alpha'_{\mu\nu} X'_\nu + b'_\mu$$

در نتیجه با جایگزاری رابطه دوم در رابطه‌ی اول خواهیم داشت:

$$X''_\rho = \alpha'_{\rho\mu}(\alpha_{\mu\nu} X_\nu + b_\mu) + b'_\rho = \alpha'_{\rho\mu}\alpha_{\mu\nu} X_\nu + \alpha'_{\rho\mu} b_\mu + b_\rho$$

اثر تبدیل پوانکاره $X'_\mu = \alpha_{\mu\nu} X_\nu + b_\mu$ را به $\{\alpha, b\}$ نشان می‌دهند. در نتیجه رابطه‌ی بالا با این شیوه‌ی نگارش بصورت

$$\{\alpha', \beta'\}\{\alpha, b\} = \{\alpha'\alpha, \alpha' b + b'\}$$

است. می‌توان نشان داد

$$\{\alpha, b\}^{-1} = \{\alpha^{-1}, -\alpha^{-1} b\}$$

زیرا

$$\{\alpha, b\}\{\alpha, b\}^{-1} = \{\alpha, b\}\{\alpha^{-1}, -\alpha^{-1}b\} = \{1, -\alpha\alpha^{-1}b + b\} = \{1, 0\}$$

ناوردایی لورنتز

فرض کنید دو ناظر که بوسیله‌ی یک تبدیل پوانکاره‌ی $\{\alpha, b\}$ به هم مربوط باشند، رخ‌دادهایی را ثبت می‌کنند. هر آن‌چه ناظر O بر حسب x می‌گوید، ناظر O' بر حسب $x' = \alpha x + b$ می‌گوید. اصل ناوردایی لورنتز می‌گوید: قوانین طبیعت برای این دو ناظر بایستی یکی باشد. یعنی حالت $|\psi' >$ از نظر ناظر O' باید معادل حالت $|\psi >$ از نظر ناظر O باشد. هم‌چنین باید اصل برهم‌نهش در هر دو دستگاه برقرار باشد. به عنوان مثال اگر برای ناظر O

$$\psi = a_1\psi_1 + a_2\psi_2$$

برای ناظر O' بایستس رابطه‌ی

$$\psi' = a_1\psi'_1 + a_2\psi'_2$$

این دو رابطه نشان می‌دهد که باید

$$\psi' = D(\alpha, b)\psi \qquad (۳۵)$$

باشد. یعنی یک عمل‌گر خطی حالت‌های جدید و قدیم را به هم مربوط می‌کند. از آن‌جا که باید حاصل‌ضرب اسکالر باید ناوردا باشد، لذا عمل‌گر D یونیتاری و یا پادیونیتاری است.

به سادگی می‌توان نشان داد

$$D(\alpha, \omega)D(\alpha', \omega') = D(\alpha\alpha', \alpha\omega' + \omega)$$

بنابراین عمل‌گرهای $D(\alpha, \omega)$ یک نمایش یونیتاری (یا پادیونیتاری) برای گروه پوانکاره تشکیل می‌دهند.

تبدیل بی‌نهایت کوچک پوانکاره به صورت زیر است:

$$\{\alpha, b\} = \{1 + \omega, \epsilon\}$$

مشابه‌قبل از شرط متعامدبهنجار نتیجه می‌شود که:

$$\omega_{\lambda\sigma} = -\omega_{\sigma\lambda}$$

در نتیجه ماتریس ω فقط 6 پارامتر مستقل و بردار ϵ نیز هم چهار مولفه دارند. بنابراین گروه پوانکاره یک گروه با10 پارامتر مستقل است. بر اساس نکات بالا می‌توان D را بصورت

$$D(1+\omega,\epsilon) = 1 + \frac{i}{2}\omega_{\mu\nu}J_{\mu\nu} + i\epsilon_\mu P_\mu \quad (۳۶)$$

نوشت که $J_{\mu\nu}$ و P_μ را مولدهای گروه پوانکاره گویند. چون D یونیتاری است J و P بایستس هرمیتی باشند. یعنی $P_\mu = P_\mu^\dagger$ و $J_{\mu\nu} = J_{\mu\nu}^\dagger$ حال برای بدست آوردن روابط بین مولدها مشابه قبل رابطه‌ی $D(\alpha,b)D(1+\omega,\epsilon)D^{-1}(\alpha,b)$ را ب دو روش محاسبه می‌کنیم.

$$\begin{aligned} D(\alpha,b)P_\mu D^{-1}(\alpha,b) &= \alpha_{\rho\mu}P_\rho \\ D(\alpha,b)J_{\mu\nu} D^{-1}(\alpha,b) &= \Lambda_{\rho\mu}\Lambda_{\eta\nu}[J_{\rho\eta} + b_\rho P_\eta - b_\eta P_\rho] \end{aligned} \quad (۳۷)$$

با جای‌گزاری $\alpha = 1+\omega$ و $b=\epsilon$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} i[J_{\alpha\beta}, J_{\mu\nu}] &= \delta_{\mu\beta}J_{\alpha\nu} + \delta_{\nu\beta}J_{\mu\alpha} - \delta_{\alpha\nu}J_{\beta\mu} - \delta_{\alpha\mu}J_{\beta\nu} \\ i[P_a, J_{\mu\nu}] &= \delta_{\alpha\mu}P_\nu - \delta_{\alpha\nu}P_\mu \\ [P_\alpha, P_\mu] &= 0 \end{aligned} \quad (۳۸)$$

حال با جایگزینی $J_{ij} := i\epsilon_{ijk}J_k$، $J_{i4} = -J_4 i := 1K_i$ و $P_0 := H$ روابط بالا به صورت زیر خلاصه می‌شوند:

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\epsilon_{ijk}J_k \\ [J_i, K_j] &= i\epsilon_{ijk}K_k \\ [K_i, K_j] &= -i\epsilon_{ijk}J_k \\ [J_i, P_j] &= i\epsilon_{ijk}P_k \\ [K_i, P_j] &= \delta_{ij}H \\ [J_i, H] &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[P_i, H] &= 0 \\ [K_i, H] &= -iP_i \\ [P_i, P_j] &= 0 \end{aligned} \qquad (۳۹)$$

در کل 10 مولد وجود دارد که سه تا J_i، سه تا K_i و چهار تا P_i هستند. J_iها همان عمل‌گرهای اندازه حرکت زاویه‌ای هستند و بنابراین می‌توان نوشت:

$$J^2|\psi\rangle = (J_iJ_i)|\psi\rangle = j(j+1)|\psi\rangle$$

در روابط بالا K_iها عمل‌گرهای تبدیلات خیز در راستای محور x_i و P_iها را می‌توان به اندازه حرکت خطی تعبیر کرد که مولدهای تبدیلات انتقال هستند و P_0 را نیز می‌توان انرژی تعبیر کرد.

با توجه به تعبیر P به عنوان اندازه حرکت خطی، کمیت ناوردای $P_\alpha P_\alpha$ را می‌توان $-m_\circ^2$ گرفت. از آن‌جا که عمل‌گرهای P_μ جابجایی‌اند، لذا می‌توان برای آن‌ها پایه‌های مشترک ساخت. فرض کنید که ویژه مقادیر این پایه‌های مشترک p_μ باشند. اما از آن‌جا که P_μها و J_iها جابجایی نیستند، لذا این پایه‌ها ویژه بردارهای هم‌زمان J_iها و P_μها نیستند. فقط در صورتی که جسم در حال سکون $(p, 0)$ باشد، این ویژه‌بردارها، پایه‌های هم‌زمان J_i و P_μ هستند. روشن است، از آن‌جا که J_iها خود جابجایی نیستند، این ویژه‌بردارها، پایه‌های فقط یکی از آن‌ها است. برای روشن‌تر شدن موضوع به نکته‌ی زیر توجه کنید:

اگر $|\psi_\sigma\rangle$ ویژه بردار مشترک P_μ و J_z باشد

$$\begin{aligned} J_z|\psi_\sigma\rangle &= \sigma|\psi_\sigma\rangle \\ P_i|\psi_\sigma\rangle &= 0 \\ H|\psi_\sigma\rangle &= m_\circ|\psi_\sigma\rangle \end{aligned} \qquad (۴۰)$$

حال عمل‌گر دیگری بنام بردار هموردای اسپین پائولی—لوبانسکی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S_\alpha := \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\mu\nu\lambda}J_{\mu\nu}P_\lambda$$

اثر این عمل‌گر بر روی حالت یک جسم ساکن عبارت است از

$$S_\alpha|\psi_\sigma\rangle = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\mu\nu\lambda}J_{\mu\nu}P_\lambda|\psi_\sigma\rangle = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\mu\nu0}J_{\mu\nu}P_0|\psi_\sigma\rangle = \frac{m}{2}\epsilon_{\alpha\mu\nu0}J_{\mu\nu}|\psi_\sigma\rangle \qquad (۴۱)$$

$$S_i|\psi_\sigma\rangle = \frac{m_\circ}{2}\epsilon_{i\mu\nu 0}J_{\mu\nu}|\psi_\sigma\rangle = \frac{m_\circ}{2}\epsilon_{ijk}J_{jk}|\psi_\sigma\rangle = m_\circ J_i|\psi_\sigma\rangle \quad (۴۲)$$

$$S_0|\psi_\sigma\rangle = 0 \quad (۴۳)$$

$$S^2|\psi_\sigma\rangle = (S_iS_i)|\psi_\sigma\rangle = S_i(m_\circ J_i|\psi_\sigma\rangle) = m_\circ^2 J_iJ_i|\psi_\sigma\rangle = m_\circ s(s+1)|\psi_\sigma\rangle \quad (۴۴)$$

در نتیجه ویژه‌مقدار عمل‌گر S^2 $m_\circ s(s+1)$ است و لذا $\frac{1}{m_\circ}S_\alpha$ عمگری است که در اثر بر روی حالت جسم در حال سکون به صورت غیرنسبیتی به اندازه‌حرکت زاویه‌ای تبدیل می‌شود.

دو عمل‌گر $P_\alpha P_\alpha = -m_\circ^2$ و $S_\alpha S_\alpha = m_\circ^2 s(s+1)$ ناوردای این گروه هستند که با تمام اعضا جابجایی‌اند. از آن‌جا که می‌توان حالت‌های مختلف یک ذره را بوسیله‌ی تبدیل وانکاره به هم مربوط کرد و در طی این تبدیلات دو کمیت بالا ناوردای باقی می‌مانند، در نتیجه هر ذره با دو عدد $m_\circ$ و s مشخص می‌شود.

چون دو عمل‌گر $P_\alpha P_\alpha$ و $S_\alpha S_\alpha$ با تمام مولدهای گروه‌پ.انکاره جابجایی‌اند پس مضاربی از عمل‌گر واحد هستند. بنابراین حالت‌های فیزیکی ذره ویژه‌حالت‌هایی برای نمایش‌های تقلیل‌ناپذیر گروه پوانکاره بوده و بعبارت دیگر فضای هیلبرت ذره، فضای یک نمایش تقلیل‌ناپذیر گروه پوانکاره است.

پیوست III: تبدیلات روی سیستم‌های فیزیکی

تبدیلاتی که بر روی سیستم‌های فیزیکی اثر کنند و آن‌ها را ناوردا قرار دهند، تشکیل گروه می‌دهند. حال برای بکارگیری‌ی ایده‌های نظریه‌ی گروه‌ها در سیستم‌های فیزیکی ابتدا با خواص حالت‌های فیزیکی و رفتار آن‌هادر اثر این تبدیل‌ها آشنا می‌شویم. از آن‌جا که در کوانتوم‌مکانیک هر حالت فیزیکی بوسیله‌ی بردار در یک فضای برداری یکانی بنام فضای هیلبرت نمایش داده و تبدیل‌های

تقارنی‌ی بر روی این فضاها نیز با اثر عمل‌گرهای یکانی و پادیکانی بیان می‌شود. برای این منظور در این بخش هرچند کوتاه به تعریف فضای برداری و عمل‌گرها می‌پردازیم.

میدان

میدان مجموعه‌ی متشکل از عنصرهای f_i با خواص زیر است:

۱) مجموعه عناصر $\{f_i\}$ یک گروه آبلی با قانون ترکیبِ جمع معمولی که عضو خنثی‌ی آن 0 است، تشکیل می‌دهد.

۲) تمام عناصر $\{f_i\}$ بدون 0 تحت عمل ضرب معمولی با عتصر خنثی‌ی e نیز تشکیل یک گروه آبلی می‌دهند.

۳) اگر a، b و c سه عنصرِ این مجموعه باشند، در این صورت

$$a(b+c) = a \cdot b + a \cdot c$$

است.

مثال: $\mathbb{R}$ و $\mathbb{C}$ مثال‌هایی از میدان هستند.

فضاهای برداری‌یِ خطی

یک فضای برداری، $\mathcal{V}$، روی یک میدان $\mathcal{F}$، مجموعه‌ی عناصری است که درای شرایط زیر باشند:

۱) مجموعه عناصری که تحت عمل «جمع»، بنام جمع‌برداری ، با عنصر خنثی‌ی 0 تشکیل یک گروه آبلی می‌دهند.

۲) برای هر $\alpha \in \mathcal{F}$ و هر $a \in \mathcal{V}$، بردار αa متعلق به $\mathcal{V}$ وجود دارد که حاصل‌ضرب α در a نامیده‌می‌شود که خواص زیر را دارد:

(a)

$$\forall\, a \in \mathcal{V},\ \ \forall \alpha, \beta \in \mathcal{F};\ \ \alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a \tag{۴۵}$$

(b)

$$\forall\, a \in \mathcal{V}\ \ ea = a \tag{۴۶}$$

(c)

$$\forall\, \alpha \in \mathcal{F},\ \ a, b \in \mathcal{V};\ \ \alpha(a+b) = \alpha a + \alpha b \tag{۴۷}$$

(d)

$$\forall \alpha, \beta \in \mathcal{F},\ \forall a \in \mathcal{V},\ \ (\alpha+\beta) = \alpha a + \beta a \tag{۴۸}$$

اگر میدانِ برداری‌ی $\mathcal{V}$ بر روی میدان اعدادِ حقیقی تعریف شده باشد، آن را فضا یا میدان برداری‌ی حقیقی و اگر بر روی میدان اعداد مختلط تعریف شده باشد فضای برداری را فضای برداری مختلط می‌نامیم.

مستقلِ خطی

یک دسته بردارهای $a_1,\ a_2,\ \cdots, a_n$ را در صورتی مستقلِ خطی گویند، اگر

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n = 0,\ \ a_i \in \mathcal{V},\ \alpha_i \in \mathcal{F} \tag{۴۹}$$

در صورتی که

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0 \tag{۵۰}$$

صادق باشد.
بُعد یک فضای برداری برابر بیشینه تعداد بردار خطی‌ی مستقل است که در آن فضا وجود دارد. یک بستار[4]ِ خطی زیرفضای $\mathcal{M}$ در $\mathcal{V}$ است که خود یک فضای برداری است.

فضای برداری یکانی

فضای برداری که در آن ضرب نرده‌ای به‌گونه‌ای تعریف شده باشد که:

۱) $\langle a|b\rangle$ یک عددِ نرده‌ای است.

۲) $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^\star$. پس $\langle a|b\rangle = \langle a|a\rangle^\star$ یک عدد حقیقی است.

۳) $\langle a|\lambda b\rangle = \lambda\langle a|b\rangle$

۴) $\langle a|b+c\rangle = \langle a|b\rangle + \langle a|c\rangle$

برقرار باشد، فضای برداری‌ی یکانی گویند. فضای برداری‌ی با خواص بالا را فضای متریک نیز می‌گویند. اگر $\langle a|b\rangle \geq 0$ نیز برقرار باشد، می‌گوییم متریک همواره غیرمنفی است. کمّیت $\sqrt{\langle a|a\rangle}$ را نُرم بردار a گوییم و آن‌را با $||a||$ نشان می‌دهند. اگر $\langle a|a\rangle = 1$ باشد گوییم a بهنجار است. در صورتی که $\langle a|b\rangle = 0$ باشد دو بردار a و b را متعامد می‌نامند.
اگر در دسته بردارهای $e_1, e_2, \cdots, e_n$، $\langle a|b\rangle = \delta_{ij}$ باشد، دسته بردارها را بهنجار متعامد گویند. اگر یک دستهِ بهنجارِ متعامد یک فضا را جاروب کنند، این دسته‌ی بهنجارِ متعامد را دسته‌ی کامل گویند. در این صورت می‌توان هر بردار در چنین فضای را بر حسب این دسته بسط داد.

$$\vec{a} = \sum_i \alpha_i \hat{e}_i$$

$$\langle e_j|a\rangle = \sum_i \alpha_i \langle e_j|e_i\rangle = \alpha_j$$

[4] Manifold

عمل‌گرها

اثر یک عمل‌گر بر روی فضای برداری نگاشتی است از آن فضا به همان فضا است.

$$\mathcal{L}\ \vec{a}\ \rightarrow\ \vec{b};\ \vec{a}, \vec{b} \in \mathcal{V}$$

به بیان دیگر

$$\vec{b} = \mathcal{L}\vec{a}$$

ما باهایی سر و کار داریم که شرط اضافه‌ی

$$\mathcal{L}(\vec{a} + \vec{b}) = \mathcal{L}\vec{a} + \mathcal{L}\vec{b}$$

را دارند. اگر اثر $\mathcal{L}$ چنان باشد که $\mathcal{L}(\lambda\vec{a}) = \lambda\mathcal{L}\vec{a}$ شود، را خطی و اگر $\mathcal{L}(\lambda\vec{a}) = \lambda^{\star}\mathcal{L}\vec{a}$ باشد، را پادخطی گویند.
یک مجموعه به صورت $\mathcal{L}_1$، $\mathcal{L}_2$، $\cdots$ در نظر بگیرید که روی فضای برداری‌ی $\mathcal{V}$ خودش را بدهد و فرض کنید: $\mathcal{L}_1\vec{a} = \vec{b}$ و $\mathcal{L}_2\vec{a} = \vec{c}$ باشند. در این صورت مجموع $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_2$ است که $\vec{a}$ را به $\vec{b} + \vec{c}$ می‌برد. از سوی دیگر

کتابنامه

R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications*, John Wiley & Sons Pub. Co., New York, (1974).

H. Georgi, *Lie Algebras in Particle physics*, Benjamin/Cummings Pub. Co., Menlo Park, (1982).

F. W. Byron and R. W. Fuller, *Mathematics of Classical and Quantum Physics*, Vol. 2, Addison-Wesley Pub. Co., Reading, (1970).

G. G. A. Bäerle and E. A. de Kerf, *Lie Algebras*, Studies in Mathematical Physics, Vol. 1, edit. van Groesen and E. M. de Jager, Elsevier Science Pub. Co. Amsterdam, (1990).

B. G. Wybourne, *Classical Groups for Physicsts*, John wiley & Sons Pub. Co., New York, (1974).

. A. de Azcárraga and J. M. Izquierdo, *Lie groups, Lie algebras, cohomology and some applications in physics*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, (1995).

J. Fuchs and C. Schweigert, *Symmetries, Lie Algebras and Representations*, Cambridge University Press, Cambridge, (1997).

ا. و. جوشی، مبانی نظریه‌ی گروه‌ها برای فیزیک‌دانان، ترجمه‌ی محسن سربیشه‌ای، موسسه چاپ و انتشارات آستان قدس رضوی، مشهد، (۱۳۷۲).