Introduction

La genèse de ce livre

Ce livre a de multiples racines et il est, par maints côtés, lié à mon histoire personnelle. Je fais partie d'une génération de mathématiciens, la dernière peut-être, qui a été nourrie au lait de la géométrie euclidienne : c'est sans doute en réfléchissant sur des problèmes de géométrie [1] que j'ai fait, pour la première fois, des mathématiques.

Malgré cela, mes débuts de mathématicien professionnel se sont déroulés assez loin de la géométrie. En effet, même si mon domaine de recherche s'appelle géométrie algébrique, il était, à l'époque, et après le passage de la tornade [2] Grothendieck, devenu beaucoup plus algébrique que géométrique. De même, l'enseignement que je dispensais à mes débuts, et notamment aux agrégatives de Sèvres [3], était très éloigné de la géométrie de nos pères. Il a fallu la conjonction de deux événements pour que cet enseignement bifurque, au début des années 1980. D'abord, mon cours d'algèbre (voir [Per96]) était écrit et disponible sous forme d'un polycopié, de sorte que le cours oral n'était plus aussi nécessaire, et ensuite, l'agrégation était devenue très difficile et toute impasse y était devenue impossible [4]. Cela m'a contraint à bâtir un enseignement de géométrie dans plusieurs domaines (géométrie projective, coniques, inversion, polyèdres, etc.) [5]. C'est en construisant cet enseignement

1. Au collège, ou plus précisément au Cours Complémentaire, une filière, faite en principe pour mener les élèves de milieu modeste au BEPC, mais dont certains pouvaient tout de même accéder à des études longues.

2. C'est dit sans la moindre nuance péjorative : j'ai une immense admiration pour l'œuvre de Grothendieck et je souscris très souvent à sa vision des mathématiques.

3. Il s'agit de l'École Normale Supérieure de Jeunes Filles.

4. Afin d'apaiser leur conscience, les jurys de concours s'arrangent toujours pour que le premier collé soit vraiment mauvais à leurs yeux. Dans le cas présent, le moyen d'assurer cet objectif avait été de proposer des couplages de leçons de géométrie.

5. J'ai appris une grande partie de ce que je sais en géométrie dans le livre de Marcel Berger, quand il n'était encore qu'un polycopié, écrit de sa main, photocopié et distribué sous le manteau comme un samizdat. Je profite de cette occasion pour lui rendre hommage.

que j'ai compris le sens du programme d'Erlangen et que j'ai commencé à en discuter les conséquences, notamment l'idée de mesurer la richesse d'une géométrie à l'aune des isomorphismes entre les divers avatars de son groupe.

Depuis cette époque, j'ai été amené à plusieurs reprises à enseigner la géométrie, à différents niveaux, et dans différents cadres. Tout d'abord, j'ai enseigné, pour la préparation à l'écrit du CAPES, la géométrie affine et la géométrie euclidienne, avec une entrée exclusivement fondée sur l'algèbre linéaire (voir [MCD07]). Ensuite, j'ai enseigné, en licence pluridisciplinaire [6], une géométrie plus élémentaire, plus proche de celle d'Euclide, avec une utilisation des invariants et des cas d'isométrie des triangles [7] plus conforme aux idées que je défends sur le sujet, voir [Per11].

Plusieurs occasions m'ont alors été données de mettre sur le papier mes idées mathématiques, épistémologiques et didactiques sur la géométrie et son enseignement et notamment en 1999 quand j'ai rédigé la partie géométrie du rapport d'étape de la commission Kahane [8], voir [dpJPK02].

Enfin, le dernier événement important pour mon histoire de géomètre, celui qui m'a convaincu d'entreprendre la rédaction de ce livre, a été la rencontre avec Yves Martin, au cours de l'élaboration de sa thèse sur l'utilisation du logiciel Cabri en géométrie non euclidienne [Mar02]. J'y ai découvert une vision extraordinaire des géométries non euclidiennes qui m'a amené à réfléchir beaucoup plus avant sur leurs rapports entre elles et avec la géométrie euclidienne.

On notera que tous ces événements gravitent autour de l'**enseignement** de la géométrie. Cela n'étonnera pas ceux qui me connaissent et savent combien, dans toute ma carrière d'enseignant-chercheur, j'ai penché vers le premier terme, et plus particulièrement vers la formation des maîtres. J'essaie dans ce livre de donner – notamment aux futurs professeurs – une vision de la géométrie qui leur permette de voir autrement l'enseignement de cette discipline. Je reviendrai dans la postface sur ce que l'écriture de ce livre, y compris dans ses chapitres non euclidiens, m'a appris sur l'enseignement de la géométrie euclidienne.

6. Mise en place à Orsay à partir de 1998 et destinée à la formation des futurs professeurs des écoles.

7. L'influence de mon épouse, vraie géomètre s'il en est, sur ma vision des choses et notamment sur ce point, est considérable.

8. De son nom officiel : Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques, mais elle était présidée de main de maître par Jean-Pierre Kahane.

Une vision de la géométrie

Avant d'entrer dans le vif du sujet, je souhaite avertir le lecteur en précisant ma vision de la géométrie. C'est d'ailleurs à dessein que je parle de **la** géométrie plutôt que des géométries, alors que ce livre en étudie pourtant au moins cinq (les géométries projective, elliptique, hyperbolique, anallagmatique [9] et euclidienne). En effet, je voudrais insister ici plus sur son unité que sur sa diversité. Dans la postface, en revanche, je mettrai l'accent sur la singularité de la géométrie euclidienne et les conséquences qu'il faut en tirer.

La géométrie que j'essaie de décrire ici est celle d'un géomètre très algébriste [10] par sa formation (voir [Per96], [Per95]), qui se reconnaît d'abord comme un disciple de Klein et de son célèbre programme d'Erlangen et dont le but plus ou moins avoué est la construction d'un calcul géométrique tel que le rêvait Leibniz :

Je croys qu'il nous faut encor une autre analyse proprement géométrique linéaire, qui exprime directement la situation [11] *comme l'algèbre exprime la grandeur. ... Les calculs y sont de véritables représentations de la figure et donnent directement les constructions.*

Bref, tenter de réconcilier l'algèbre et la géométrie : voilà mon objectif.

Le programme d'Erlangen

Retour à Euclide

Avant de parler du programme d'Erlangen, je voudrais expliquer pourquoi il me semble déjà en germe dans les éléments d'Euclide [12]. Examinons donc la preuve du premier cas d'égalité des triangles (Livre 1, proposition 4) :

Si deux triangles ont deux côtés égaux respectivement et les angles compris entre ces côtés égaux, ils auront de même égaux les troisièmes côtés et les triangles seront aussi égaux, ainsi que leurs angles restants opposés aux côtés égaux.

Voici, recopiée intégralement, la preuve d'Euclide (voir figure 1) :

9. Il s'agit de la géométrie de l'inversion.

10. À l'inverse, l'aspect géométrie différentielle sera très peu présent dans ce texte, hormis au chapitre 2 de la Partie IV dans l'étude des différents modèles des géométries non euclidiennes.

11. On peut comprendre ce mot au sens de "propriétés géométriques".

12. Je m'appuie ici sur les traductions françaises de Kayas (voir [Euc78]) et Peyrard et sur la traduction anglaise de Heath.

Soient $AB\Gamma$ et ΔEZ deux triangles tels que l'on ait : $AB = \Delta E$, $A\Gamma = \Delta Z$ et $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta Z}$. Je dis qu'il est aussi $B\Gamma = EZ$ et que ces triangles sont égaux[13] *et ont tous leurs autres éléments homologues égaux, c'est-à-dire que l'on aura aussi : $B\Gamma = EZ$, $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta EZ}$ et $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{\Delta ZE}$.*

En effet, si l'on appliquait le triangle $AB\Gamma$ sur le triangle ΔEZ de manière à faire coïncider d'abord les points A et Δ, puis les côtés AB et ΔE, le point B coïnciderait avec E, car $AB = \Delta E$. Les côtés $A\Gamma$ et ΔZ coïncideraient alors aussi, à cause de l'égalité entre les angles $\widehat{BA\Gamma} = \widehat{E\Delta Z}$, de sorte que le point Γ à son tour coïnciderait avec Z, car $A\Gamma = \Delta Z$. D'autre part, les points B et E ayant déjà coïncidé, les côtés $B\Gamma$ et EZ coïncideront aussi, car si d'une part B et E et d'autre part Γ et Z coïncident mais les côtés $B\Gamma$ et EZ ne coïncident pas, deux droites pourraient délimiter une aire[14]*, ce qui est impossible (Ax. 10). Nécessairement donc les côtés $B\Gamma$ et EZ coïncideront et ils seront égaux (Ax. 8).*

Par conséquent, le triangle $AB\Gamma$ tout entier coïncidera avec le triangle ΔEZ tout entier et il lui sera égal, et les angles restants de l'un coïncideront avec les angles restants de l'autre et ils seront respectivement égaux entre eux, à savoir : $\widehat{AB\Gamma} = \widehat{\Delta EZ}$ et $\widehat{A\Gamma B} = \widehat{\Delta ZE}$.

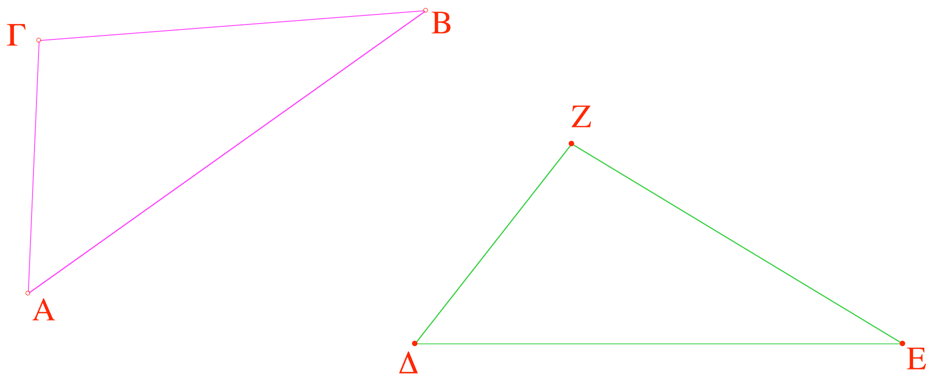

FIGURE 1 – Le premier cas d'égalité

Cette "preuve", qui utilise la méthode dite de superposition, est celle que l'on donnait autrefois en classe de cinquième et elle convainquait la plupart des élèves. Cependant, le mathématicien attentif y décèle évidemment un

13. Sans doute Euclide entend-il ici : ont même aire.

14. Le recours à cet axiome est inutile et semble bien être un ajout des commentateurs, voir la traduction anglaise de Heath.

point faible : que signifie le fait d'*appliquer*[15] le triangle $AB\Gamma$ sur ΔEZ[16] ?

Cette faille dans Euclide a été notée dès 1557 par Jacques Peletier et, en tous cas, David Hilbert, quand il a entrepris la refonte de l'œuvre d'Euclide, en était parfaitement conscient. La solution qu'il a adoptée est de prendre le premier cas d'égalité des triangles comme axiome et de bâtir le reste de la géométrie dessus. C'est une solution correcte, mais trop brutale à mon goût. Je serais plutôt en faveur d'une axiomatique qui permette de rendre valide la preuve d'Euclide et la méthode de superposition, si naturelle. Ce qui est nécessaire pour cela est de donner un sens à l'opération consistant à appliquer ou transporter une demi-droite sur une autre, propriété qui manifeste l'homogénéité du plan. Avec nos connaissances actuelles, on sent bien que derrière cela il y a la nécessité de la présence d'un **groupe** de transformations. Précisément, je propose de postuler qu'il existe un tel groupe qui opère **transitivement**[17] sur les **drapeaux** (un point, une demi-droite d'origine ce point, un demi-plan limité par cette demi-droite)[18]. Un groupe qui opère transitivement sur un ensemble : on est au cœur du programme d'Erlangen, comme on va le voir.

Le programme d'Erlangen

Le programme d'Erlangen est la thèse de Felix Klein, soutenue en 1872 dans cette ville. Le travail de Klein arrive après l'explosion des géométries, survenue dans la première moitié du dix-neuvième siècle avec la création, à côté de la géométrie euclidienne classique, de la géométrie projective, développée par Poncelet, Plücker et d'autres, de la géométrie anallagmatique, où s'illustre en particulier Liouville, des géométries non euclidiennes, avec Bolyai et Lobatchevski, etc. et il se veut une tentative d'**unification** de ces géométries. Le principe unificateur, adopté par Klein, est qu'une géométrie

15. On notera que le mot utilisé ici (et qui semble admis par tous les traducteurs) est celui qui sera retenu dans le langage moderne.

16. Il y a beaucoup d'autres zones d'ombre dans cette démonstration. Par exemple, lorsqu'Euclide parle de faire coïncider les côtés, il pense sans doute aux demi-droites qui les portent, mais il faut aussi faire attention aux demi-plans. En particulier, Euclide n'envisage pas le cas où les triangles sont échangés par une isométrie négative.

17. Ce mot sera un des mots-clés de ce livre. Rappelons que, si un groupe G opère sur un ensemble X non vide, on dit qu'il est **transitif** si l'on peut envoyer n'importe quel $x \in X$ sur n'importe quel $y \in X$ au moyen d'un élément de G.

18. Cette idée n'est pas nouvelle. Houël, au XIX-ème siècle, Schur dans ses *Grundlagen der Geometrie*, Bkouche plus près de nous, et d'autres sans doute, l'ont émise. R. Hartshorne développe dans [Har00] ce thème en définissant des mouvements : "rigid motions", mais il part de notions préliminaires de congruence des angles et des longueurs, alors qu'elles devraient pouvoir se déduire des mouvements. Il me semble donc qu'il reste une axiomatique à bâtir sur ce thème. C'est un de mes projets, voir [Per50] un jour peut-être.

consiste, pour l'essentiel, en la donnée d'un ensemble[19] X et d'un groupe G de transformations de X, autrement dit d'un groupe G opérant[20] sur X. Les éléments de G sont les transformations "permises" dans la géométrie en question et elles caractérisent cette géométrie. Il s'agit, par exemple, des isométries (affines) pour la géométrie euclidienne plane, ou des transformations affines pour la géométrie affine plane, ou encore des homographies pour la géométrie projective. Le plus souvent, l'ensemble X est muni de données supplémentaires, par exemple un ensemble $\mathcal{D}$ de parties remarquables (les droites, les cercles,...) et les transformations de G conservent globalement $\mathcal{D}$. Les propriétés relatives à la géométrie en question (propriétés affines, euclidiennes, projectives) sont celles qui sont conservées dans l'action du groupe, ainsi que le dit Klein (cf. [Kle74] p.7) :

"*étant donnés une multiplicité et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe.*"

Le programme d'Erlangen, c'est d'abord cela : une méthode de classification des résultats de géométrie, dont on verra plus bas comment elle peut être utilisée.

Par exemple, pour citer trois résultats célèbres, Pappus, qui n'emploie que les notions de concours et d'alignement, voir figure 2, est un théorème projectif tandis que Thalès, qui utilise des parallèles, est un résultat affine et Pythagore, qui met en jeu longueurs et orthogonalité, est un théorème euclidien. On peut dire, en quelque sorte, que chaque théorème possède une (et une seule ?) **niche écologique privilégiée**, qui correspond au cadre dans lequel il s'énonce avec le plus de généralité et, souvent, où il se démontre avec le plus de facilité.

L'exemple du théorème de Pascal sur l'hexagone inscrit, frère jumeau de Pappus, illustre bien cette idée. Ce théorème s'énonce d'abord avec un cercle : si a, b, c, a', b', c' sont six points d'un cercle et si les droites (bc') et $(b'c)$ (resp. (ca') et $(c'a)$, resp. (ab') et $(a'b)$) se coupent en u (resp. v, resp. w), les points u, v, w sont alignés, voir figure 3.

Il n'est pas difficile de montrer ce théorème dans ce cadre en utilisant le théorème de l'angle inscrit, il apparaît alors comme un théorème euclidien.

Il est clair cependant que ce théorème n'est pas énoncé là dans sa plus

19. Ici, il faut noter un point essentiel : c'est l'espace qui devient primordial et plus les figures, comme c'était le cas auparavant, voir la postface du R. P. Russo dans l'édition de 1974 du programme d'Erlangen, [Kle74] p. 62.

20. Pour la commodité, je dis les choses en langage moderne. La lecture du programme d'Erlangen n'est pas si facile pour un mathématicien des années 2000.

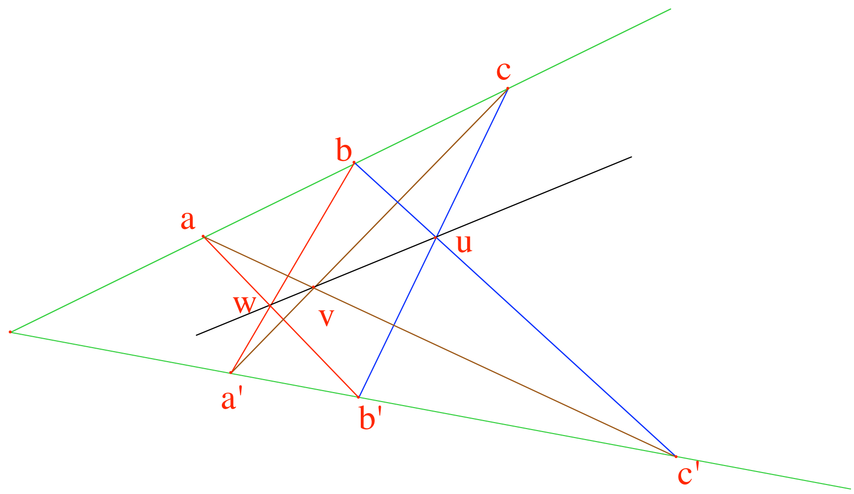

FIGURE 2 – Théorème de Pappus : u, v, w sont alignés

grande généralité. On peut aussi l'énoncer pour une ellipse. C'est alors devenu un théorème affine. On peut enfin l'énoncer pour une parabole ou une hyperbole et il devient un théorème projectif. C'est d'ailleurs dans ce cadre qu'il est le plus facile à prouver ce qui est, somme toute, moral, puisque le théorème est ici débarrassé de la gangue des notions affines et euclidiennes inutiles. Deux preuves me semblent particulièrement pertinentes :

• Celle qui utilise **l'invariant** fondamental associé à une conique : le birapport.

• Celle qui consiste à prouver le résultat dans le cas euclidien et à utiliser un argument de **transitivité** pour passer au cas général : il existe une homographie qui transforme un cercle en une conique quelconque (c'est essentiellement la méthode de Pascal).

Ce qui précède montre que la géométrie projective présente un indéniable intérêt par elle-même puisque nombre de théorèmes (Pappus, Pascal, mais aussi Céva, Desargues, Newton, que nous rencontrerons plus tard) ne se comprennent bien qu'en projectif. Mais, plus important encore, comme Klein l'explique, toutes les autres géométries usuelles en sont issues. C'est tout le sujet de ce livre et, en attendant mieux, l'objet du paragraphe suivant.

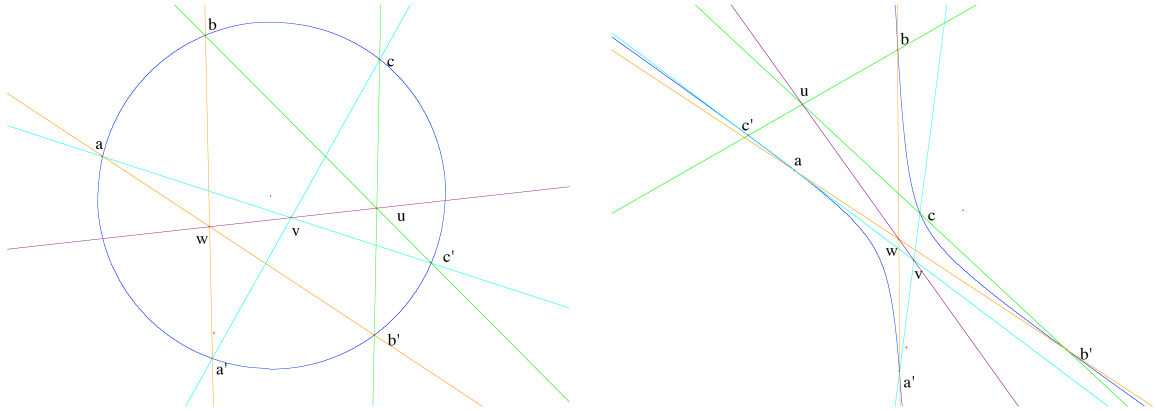

FIGURE 3 – Théorème de Pascal : u, v, w sont alignés

La géométrie projective, mère de toutes les géométries

Discussion sur les axiomatiques

Avant de préciser le rôle de la géométrie projective, il est nécessaire de dire un mot des fondements. Il y a plusieurs types d'axiomatiques possibles pour la géométrie, qu'elle soit euclidienne ou non, affine ou projective. Je n'en retiens ici que deux [21] :

• La première, la plus ancienne, est celle d'Euclide, corrigée par Hilbert (voir [Hilbert]), avec de nombreuses variantes, voir [Lio01], [CF95], ou – s'il est écrit un jour – [Per50]. Toutes ces axiomatiques partent de la définition du plan comme un ensemble de points muni de parties remarquables : les droites, avec des axiomes d'incidence et d'ordre. Il faut ensuite quelque chose qui assure l'homogénéité du plan (cas d'égalité, existence de symétries, transitivité sur les drapeaux, etc.) Ces axiomatiques, jusque là, sont aussi valables pour les géométries non euclidiennes. Ce n'est que lorsqu'on introduit l'axiome des parallèles (le fameux postulat d'Euclide) qu'elles se séparent.

• La seconde est celle qui passe par l'algèbre linéaire, sur le corps des réels ou un autre. Elle permet de définir à la fois les espaces affines, euclidiens ou non, les espaces projectifs, la géométrie euclidienne et les autres. Elle est maintenant bien connue, au moins au niveau du savoir universitaire. Dans le cas de la géométrie projective plane, le plan projectif $\mathbf{P}(E)$ est défini à partir d'un espace vectoriel E de dimension 3 sur un corps commutatif k, voir Partie I ci-dessous.

21. On peut citer aussi celle de Bachmann à base d'involutions, voir [Bac59].

Les coordonnées et le choix du linéaire

La question du choix d'une axiomatique est complexe. Elle peut être gouvernée par des raisons diverses, notamment didactiques. Sur le plan purement mathématique en tous cas, ce qu'il faut bien comprendre c'est qu'il est illusoire de vouloir séparer les domaines géométrique et numérique [22] : le nombre est dans la géométrie comme le ver est dans le fruit, ainsi qu'Emil Artin l'a montré très clairement (voir [Art62] ou Partie I Chapitre 4 ci-dessous). C'est l'une des faiblesses de la mathématique grecque de ne pas avoir pu prendre en compte ce fait, faute sans doute d'une manipulation simple des nombres [23]. Comme l'explique Lebesgue, l'invention des nombres décimaux par Stevin, au XVI-ième siècle, a sans doute joué un rôle crucial en permettant la naissance de la géométrie analytique [24].

Dans ce texte nous choisirons d'utiliser l'entrée par le linéaire, pour plusieurs raisons :

• Pour un mathématicien d'aujourd'hui, c'est de loin la plus simple [25] et, au niveau où se place ce livre, on peut supposer que les notions d'espace vectoriel et d'application linéaire sont suffisamment familières au lecteur pour que cette définition ne pose pas de problème.

• Toutes [26] les autres axiomatiques peuvent s'y ramener.

Attention, ce choix n'est en aucun cas un choix didactique pertinent, au moins pour le collège et le lycée, comme l'échec de la réforme des "mathématiques modernes" l'a amplement montré. Nous reviendrons sur ce point dans la postface.

Groupes, représentations linéaires et projectives

Une autre raison qui conforte le choix du linéaire est en germe dans la formulation du programme d'Erlangen donnée ci-dessus : une géométrie c'est

---

22. Le débat entre géométries analytique et synthétique qui a agité le XIX-ième siècle nous semble maintenant bien stérile.

23. Chez les Grecs, les rationnels ne sont pas considérés comme des nombres mais comme des rapports de grandeurs, au travers de la théorie des proportions, qui contient aussi en germe les nombres réels. Il est indéniable que la théorie des proportions est une belle construction, parfaitement rigoureuse, mais elle est très délicate à utiliser.

24. Et surtout de l'analyse, mais ce n'est pas notre sujet.

25. On comparera l'efficacité de l'approche proposée ici avec les contorsions auxquelles on est obligé de se livrer dans d'autres cadres. Le lecteur examinera par exemple les preuves du concours des droites remarquables du triangle (en géométrie non euclidienne) données dans ce livre et celles de Bachmann, voir [Bac59].

26. Un bémol : en travaillant d'emblée sur un corps on perd certaines géométries planes exotiques (plans de Moufang, etc., cf. [Hal76]). En revanche, les géométries "à la Bachmann", définies à partir des involutions se ramènent au cas linéaire, cf. [Bac59].

un groupe G **opérant** sur un ensemble X. Le sujet de notre étude est donc plutôt les opérations des groupes (c'est-à-dire leurs représentations comme groupes de permutations ou d'automorphismes) que les groupes abstraits. De ce point de vue, les algébristes connaissent bien l'intérêt [27] des représentations linéaires des groupes (le cas où X est un espace vectoriel E et où G est contenu dans le groupe des automorphismes $GL(E)$). Bien sûr, le cas linéaire n'est pas très intéressant géométriquement à cause de l'origine de l'espace qui y est imposée, mais, intimement liées aux représentations linéaires, ce sont les représentations projectives de G qui vont jouer ici le rôle essentiel. L'ensemble X est alors contenu dans l'espace projectif $\mathbf{P}(E)$ et G contenu dans le groupe des homographies $PGL(E)$.

Cette entrée par le linéaire permet bien sûr la définition des notions géométriques de base (points, droites, plans, sous-espaces projectifs, vus comme les zéros des équations linéaires), avec leurs propriétés d'incidence naturelles. Mais elle donne en plus *via* les opérations naturelles sur l'algèbre extérieure $\bigwedge E$ ou symétrique $S(E)$ induites par l'action de G sur l'espace vectoriel E, les objets définis par des équations polynomiales de plus grand degré : coniques, quadriques, etc. qui vont être au centre de notre étude.

Le corps de base

Un mot sur le corps de base. Bien entendu, celui qui retiendra le plus notre attention est le corps des réels, et nous veillerons à retrouver les notions classiques, en particulier tout ce qui est lié à l'ordre : demi-plans, demi-droites et leurs angles, etc. Mais nous nous intéresserons aussi au cas général, ne serait-ce que pour comprendre que des cas en apparence différents sur les réels (on pense aux géométries hyperbolique et elliptique) peuvent être plus proches qu'on ne le pense.

Les autres géométries sont dans la projective

L'idée essentielle développée par Klein c'est que toutes les géométries peuvent être obtenues à partir de la géométrie projective et d'une donnée supplémentaire.

Le cas le plus simple est celui de la géométrie **affine**. Si l'on dispose d'un plan projectif réel, on récupère le plan affine comme complémentaire d'une

27. Au point que certains esprits forts pensent même que la bonne notion n'est pas celle de groupe, mais celle de représentation. Lorsqu'on examine l'exemple du même groupe circulaire direct opérant sur des espaces aussi différents que la droite projective complexe, le plan projectif complexe et l'espace des cercles et droites, on ne peut qu'incliner dans leur sens.

droite projective D_∞ choisie arbitrairement comme droite à l'infini. Il est immédiat de décrire les propriétés affines en termes de cette droite. Ainsi, deux droites sont parallèles si elles se coupent sur D_∞. Une conique est une hyperbole, une parabole ou une ellipse selon qu'elle coupe D_∞ en 2, 1 ou 0 points.

On obtient ensuite un plan vectoriel en fixant un point arbitraire. Quand on est dans le plan affine, on obtient la géométrie euclidienne en se donnant une forme quadratique définie positive sur le plan vectoriel associé, ou encore, comme on le verra dans la Partie V, en se donnant deux points imaginaires à l'infini : les fameux points cycliques.

On obtient aussi, à partir du plan projectif réel $\mathbf{P}(E)$, les géométries non euclidiennes en se donnant une forme quadratique[28] q non dégénérée sur E. Si la forme est définie positive, donc anisotrope, $(X^2 + Y^2 + T^2)$ on a la géométrie **elliptique**, si elle est de Lorentz $(X^2 + Y^2 - T^2)$, la géométrie **hyperbolique**. On verra aussi, Partie V, que le cas d'une forme dégénérée parabolique X^2+Y^2 (mais sur l'espace dual) redonne la géométrie euclidienne ordinaire, et ce point de vue permet de mieux comparer les trois géométries métriques. Dans toutes ces géométries, la notion première (avant même celle de distance) est la notion d'orthogonalité (que l'on appelle aussi conjugaison dans certains cas).

Une autre façon de retrouver la géométrie euclidienne consiste à partir de la droite projective, mais cette fois sur $\mathbf{C}$. Ensemblistement, cette droite est en bijection avec $\widehat{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ et on récupère le plan affine euclidien, en bijection avec $\mathbf{C}$, en enlevant le point à l'infini (ou plus généralement un point quelconque). On obtient ainsi la géométrie **anallagmatique**. Ce qui est plus étonnant, et que nous étudierons au chapitre 5 de la Partie VI, c'est qu'on retrouve aussi à partir de $\widehat{\mathbf{C}}$ les géométries non euclidiennes : la géométrie hyperbolique en se donnant comme horizon, au lieu du point ∞, un cercle ou une droite, et la géométrie elliptique, en se donnant un cercle imaginaire.

On notera que la géométrie projective, dans les deux cas, apparaît comme une **compactification** du plan de la géométrie euclidienne, dans un cas comme plan projectif réel, dans l'autre comme droite projective complexe. Nous discuterons dans la Partie VI des différences entre ces deux approches.

28. Avec une forme alternée on obtient une géométrie symplectique (mais nous ne rencontrerons pas ce cas qui n'est intéressant qu'en dimension vectorielle paire).

Quels groupes ?

Groupes linéaires et orthogonaux

Un autre intérêt de l'entrée par le linéaire, c'est qu'elle rend transparent le choix des groupes à considérer. Dans le cas de la géométrie projective, le plan projectif $\mathbf{P}(E)$ est associé à un espace vectoriel E de dimension 3 et le groupe qui vient avec cet espace est le groupe linéaire $GL(E)$ des automorphismes de E, isomorphe au groupe des matrices 3×3 inversibles. En fait, le groupe intéressant est plutôt le groupe projectif $PGL(E)$ quotient de $GL(E)$ par les homothéties (qui sont triviales dans le projectif à cause de l'homogénéité des coordonnées). Les éléments de $PGL(E)$ sont appelés homographies. Pour obtenir la géométrie affine, on se limite aux homographies qui conservent D_∞, pour obtenir les groupes des géométries métriques on considère le groupe $O(q)$ des automorphismes qui conservent la forme quadratique donnée [29] et sa variante projective $PO(q)$.

Dans ce livre, on utilisera abondamment les propriétés algébriques de ces groupes pour lesquelles on renvoie à [Per96]. Dans le cas des groupes orthogonaux, on a essayé de montrer les points communs entre les divers cas (et surtout entre les géométries elliptique et hyperbolique, le cas euclidien étant singulier) et notamment le rôle crucial joué par les involutions [30] (c'est-à-dire les symétries), qui donnent les points de Frégier (voir Partie IV) les milieux, médiatrices ou bissectrices, voire les points bissecteurs. La raison algébrique de cette importance est évidemment le théorème de Cartan-Dieudonné qui assure que les involutions engendrent $O(q)$.

Isomorphismes de groupes et géométries riches : le choix de la géométrie plane

Les paragraphes IV, V, VI du programme d'Erlangen sont consacrés à illustrer une idée importante : si deux géométries correspondent à des opérations d'un **même** groupe (mais vu avec d'autres oripeaux) sur des ensembles différents, ce sont essentiellement les mêmes géométries. Klein donne plusieurs exemples de ce phénomène. En langage moderne, ces exemples correspondent à des isomorphismes bien connus (cf. [Per96] ou [Die70]) entre groupes orthogonaux $PO(q)$ et linéaires $PGL(n,k)$, en particulier :

• L'isomorphisme $PO(q) \simeq PGL(2,\mathbf{R})$, où q est une forme de Lorentz réelle à 3 variables, c'est à dire une forme de signature $(2,1)$.

29. Dans le cas euclidien, il s'agit des rotations et symétries orthogonales vectorielles.
30. On rejoint ici le point de vue de Bachmann qui fonde toute la géométrie sur les involutions.

• L'isomorphisme $PO^+(q) \simeq PGL(2, \mathbf{C})$, où q est une forme de Lorentz réelle à 4 variables, donc de signature $(3, 1)$.

• L'isomorphisme[31] $P\Omega(q) \simeq PSL(2, \mathbf{R}) \times PSL(2, \mathbf{R})$, où q est une forme hyperbolique réelle à 4 variables, c'est-à-dire de signature $(2, 2)$.

Ces isomorphismes ont chacun une interprétation géométrique. Par exemple, le premier explique que la géométrie d'une droite projective et celle d'une conique propre, ou encore la géométrie hyperbolique du plan, sont une seule et même géométrie. On rencontrera abondamment cet isomorphisme dans ce livre, notamment Partie III. Il n'est pas inutile ici de donner la formulation de Klein à son sujet pour mesurer la difficulté de la lecture du texte originel :

La théorie des formes binaires et la géométrie projective des systèmes de points d'une conique sont équivalentes, c'est-à-dire qu'à chaque théorème relatif aux formes binaires en correspond un relatif à ces systèmes de points et réciproquement.

Le second[32] isomorphisme est au cœur de la géométrie anallagmatique, voir Partie VI. D'une certaine manière, le groupe circulaire direct est le plus riche de tous puisqu'il peut revêtir trois aspects différents : groupe linéalre $PGL(2, \mathbf{C})$, associé à la géométrie de la droite projective complexe, groupe orthogonal $PO^+(q)$ pour une forme de Lorentz réelle à quatre variables, associé à la géométrie des droites et des cercles et groupe orthogonal $PO(Q)$ pour une forme (de Lorentz) complexe à trois variables, associé à la géométrie hyperbolique complexe[33].

Nous verrons plus bas le lien entre Erlangen et la théorie des invariants. La conséquence d'un tel isomorphisme sur cette théorie c'est qu'une géométrie qui se présente sous deux habits différents, possède les deux types d'invariants correspondants. Dans le cas du premier isomorphisme, il s'agit d'une part du birapport, invariant de la droite projective, et d'autre part des invariants liés à la forme quadratique qui définit la conique et qui permettent de définir orthogonalité, distance et angles au sens hyperbolique[34]. L'existence d'un isomorphisme de groupes comme ci-dessus, avec comme sous-produit

31. $\Omega(q)$ est le groupe des commutateurs de $O(q)$.

32. Le dernier correspond à la géométrie d'une quadrique de $\mathbf{P}^3$ et de ses deux familles de génératrices et ne sera pas abordé dans ce livre.

33. On notera cependant que ces isomorphismes n'ont pas tout à fait le même statut. Celui qui lie PGL et $O(Q)$ est universel, i.e. valable sur tout corps, tandis que ceux qui mettent en jeu $O^+(q)$ dépendent de l'existence d'un sous-corps d'indice 2 (ici les réels) ou d'un automorphisme involutif (ici la conjugaison), voir Partie VI.

34. Bien entendu, ces deux types d'invariants se calculent les uns à partir des autres. Par exemple, pour quatre points de la conique, on a la formule : $[\![a, b, c, d]\!]^2 = \dfrac{\varphi(a, c)\varphi(b, d)}{\varphi(b, c)\varphi(a, d)}$ si on note φ la forme polaire de q. Mais le fait qu'ils apparaissent sous deux formes multiplie les théorèmes. Le même argument vaut en géométrie anallagmatique, voir Partie VI.

la cohabitation de deux types d'invariants et la profusion de théorèmes qui en résulte, est caractéristique d'une géométrie **riche**, donc particulièrement digne d'intérêt. Or les isomorphismes entre groupes classiques ont été déterminés de manière systématique (voir [Die70]) et on montre qu'il n'y en a qu'en dimension vectorielle ≤ 5. Autrement dit, si l'on accepte la définition de géométrie riche proposée ci-dessus, il n'y a de telles géométries qu'en petite dimension.

Dans ce qui suit, nous avons fait le choix de nous limiter à la géométrie de la droite projective et surtout du plan projectif (sauf au chapitre 1 de la Partie I), donc de travailler en dimension vectorielle 2 ou 3. Le poids déjà important de ce livre est en soi une première justification de ce choix. Mais le paragraphe précédent est une justification autrement importante : géométrie ou dimension, il faut choisir !

Sous-groupes distingués et invariants orientés

Il y a un autre signe extérieur de richesse, ou au moins de singularité, pour une géométrie, qui est la présence de sous-groupes distingués. Une méthode classique d'investigation des groupes est ce qu'on appelle le dévissage. Pour étudier un groupe G elle consiste à utiliser un sous-groupe distingué N de G et son quotient G/N (qui est un groupe) pour tenter de ramener l'étude de G à celle des groupes plus petits [35] N et G/N. La plupart des groupes classiques (linéaires ou orthogonaux) sont très rétifs à cette procédure, étant pour la plupart simples (c'est-à-dire sans sous-groupes distingués non triviaux) ou peu s'en faut. Il y a cependant une exception notable, qui est le groupe des similitudes $\mathrm{Sim}\,(X)$ du plan euclidien X. En effet, ce groupe est au contraire très dévissé, avec la suite de sous-groupes distingués :

$$\{\mathrm{Id}\} \subset T(X) \subset \mathrm{Is}^{+}(X) \subset \mathrm{Is}\,(X) \subset \mathrm{Sim}\,(X),$$

où $T(X)$ est le groupe des translations, $\mathrm{Is}^{+}(X)$ le groupe des déplacements et $\mathrm{Is}\,(X)$ celui des isométries. Dans cette suite, ce qui est important, ce sont les groupes quotients. Dans le cas présent, ils sont tous abéliens, ce sont, dans l'ordre, $T(X) \simeq (\mathbf{R}^2, +)$, le groupe $\mathbf{U}$ des complexes de module 1, le groupe $\{\pm 1\}$ et enfin $(\mathbf{R}^*, \times)$. Chacun de ces groupes correspond à un invariant algébrique [36] associé à la géométrie euclidienne : vecteurs, angles orientés, orientation du plan, rapport de similitude, et on peut penser à bon droit que cette profusion d'invariants est l'origine de la fortune de la géométrie euclidienne. Nous reviendrons sur ce thème dans la postface.

35. Au sens du cardinal pour les groupes finis, de la dimension pour les groupes algébriques.

36. Au sens où ces invariants s'ajoutent, ou se multiplient, de manière raisonnable.

Erlangen et transitivité

On a vu que la notion de transitivité était déjà en filigrane dans Euclide et qu'elle menait à une preuve du théorème de Pascal. En vérité, la question de la transitivité est centrale dans la perspective du programme d'Erlangen : le groupe G est-il transitif sur les points X, sur les droites, sur les drapeaux (couples formés d'une droite et d'un point situé sur cette droite) ? L'est-il sur les couples de points ou de droites ? Cette problématique va notamment mener à la notion de repère en géométrie projective.

Voici un exemple élémentaire de son utilisation, dans la perspective de la classification des théorèmes proposée par le programme d'Erlangen.

Erlangen et transitivité, un exemple en géométrie affine

Le principe

1) On repère que le problème est un problème affine. Cela signifie qu'il peut mettre en jeu les notions d'alignement, de concours, de parallélisme, de milieux, de rapports de mesures algébriques sur des droites parallèles, de barycentres, d'aires [37] (mais pas de longueur, d'angle et d'orthogonalité qui sont des notions euclidiennes).

2) On effectue une transformation affine f (qui conserve les notions ci-dessus [38]) de façon à transformer le problème en un problème plus simple. Le plus souvent cela revient à traiter un cas particulier du problème présentant une propriété euclidienne supplémentaire (on transforme un triangle quelconque en un triangle équilatéral, un parallélogramme en un carré, etc.). Dans cette phase on utilise des résultats de **transitivité**.

3) On résout le problème ainsi simplifié (y compris, éventuellement, avec des outils euclidiens) et on revient au cas initial par la transformation inverse f^{-1}.

Voici un exemple, élémentaire mais révélateur, d'application de cette technique. On veut montrer que les médianes d'un triangle sont concourantes. Comme la notion de médiane est affine, on aura gagné si on montre qu'on peut transformer le triangle en un triangle équilatéral par une application affine. En effet, les médianes seront alors aussi les médiatrices et on montre facilement que celles-ci sont concourantes. Le point crucial est donc le lemme suivant :

37. Les aires (ou plutôt leurs rapports) sont un invariant affine, et pas seulement euclidien, comme on le voit en regardant l'effet d'une symétrie oblique sur un triangle.

38. Dans le cas des aires, une application affine générale conserve seulement les rapports d'aires, mais cela suffit dans la plupart des applications.

Lemme. *Le groupe affine est transitif sur les triangles.*

Démonstration. Il s'agit d'envoyer trois points a, b, c sur a', b', c' (non alignés). On commence par envoyer a sur a' par translation. Ensuite, il y a au moins deux façons de faire.

1) Les points b et c sont transformés en b'' et c''. Il ne reste plus qu'à effectuer la transformation linéaire (avec a' comme origine) qui envoie la base $\overrightarrow{a'b''}, \overrightarrow{a'c''}$ sur $\overrightarrow{a'b'}, \overrightarrow{a'c'}$ et on a gagné.

2) On détaille le processus en utilisant successivement une rotation pour amener (ab) sur $(a'b')$, une homothétie pour envoyer b en b', une transvection pour déplacer c sur la parallèle à (ab) afin de rendre le triangle isocèle, enfin une affinité pour finir le travail.

Les tiers

Les problèmes d'aires sont sans doute, dans le cas affine, ceux qui se prêtent le mieux à l'utilisation des principes d'Erlangen. Voici un exemple de ce type.

Soit abc un triangle, i, j, k des points situés respectivement sur les côtés $[bc]$, $[ca]$, $[ab]$ au tiers le plus proche de b, c, a. Les droites (bj) et (ck), (ck) et (ai), (ai) et (bj) se coupent respectivement en p, q, r. Déterminer l'aire du triangle pqr en fonction de celle de abc.

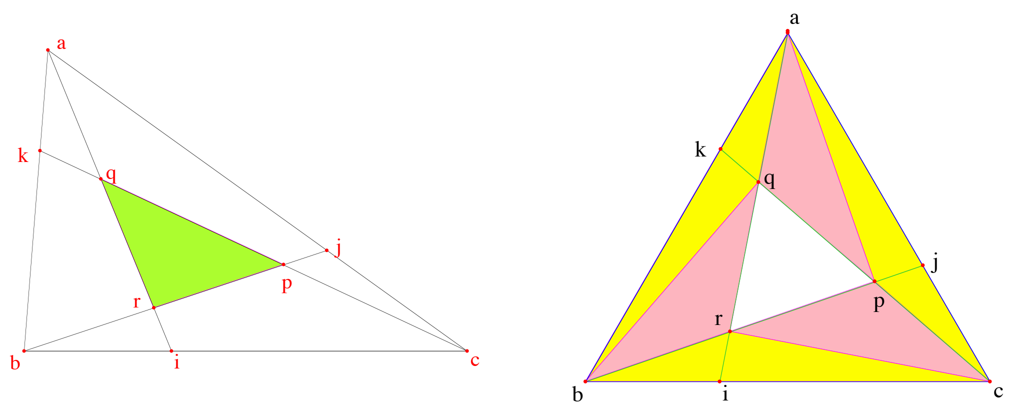

FIGURE 4 – Les tiers

Le problème est clairement affine (les seules notions mises en jeu sont les rapports $1/3$ sur une même droite et les rapports d'aires). On peut donc, pour le résoudre, le transformer par une application affine. On peut supposer que l'on est dans le plan euclidien et on transforme abc en un triangle **équilatéral**

$a'b'c'$ de centre o comme on l'a vu ci-dessus. On dispose alors d'un outil supplémentaire[39] : les rotations de centre o et d'angles $\pm 2\pi/3$ qui permutent a, b, c ; i, j, k et p, q, r. On en déduit nombre d'égalités d'aires, dont celles des triangles roses apq, bqr et crp et des triangles jaunes abq, bcr et cap. Avec $ic = 2\,ib$, on voit que le triangle qcr est d'aire double de qrb (c'est le lemme du chevron de [Per11]) et on en déduit que le triangle blanc central a même aire que le rose crp. Le lemme des proportions (*loc. cit.*), appliqué dans cqr, montre que l'on a $pq = pc$, et en l'appliquant dans aqc on en déduit que l'aire de apq est égale à celle de apc, donc que les aires jaunes et roses sont égales. En définitive, l'aire de pqr est le septième de celle de abc.

Pour une preuve élémentaire directe, voir [Per11] exercice 225. Pour d'autres exemples affines voir [JCD01], [Per08]. Pour un exemple projectif très simple, le "théorème à quatre points", voir ci-dessous Partie I **??** @2.5.11. On rencontrera l'usage de la transitivité de manière permanente dans ce livre soit pour ramener un problème à un cas particulier : une conique à un cercle (voir le lemme de Poncelet, Partie III, §3.4), deux cercles disjoints à deux cercles concentriques (voir l'alternative de Steiner, Partie VI, §4.3.3) ou encore, dans toutes les Parties, lorsqu'il s'agit de trouver une position agréable pour faire les calculs ou les démonstrations, voir par exemple Partie III le grand théorème de Poncelet ou Partie VI la construction des cercles tangents à trois cercles.

Conjugaison

La notion de transitivité est aussi essentielle pour étudier la conjugaison des transformations. Rappelons que si u et g sont des éléments d'un groupe G, le conjugué de u par g est gug^{-1}. Cette notion est d'une importance capitale dans tous les problèmes de classification, c'est elle qui donne un sens mathématique précis à l'idée de transformations "de même nature". De fait, lorsque les éléments u et v sont conjugués :

1) Ils sont de même nature algébrique : ils ont même ordre, leurs centralisateurs sont isomorphes, etc.

2) Si le groupe opère sur un ensemble X, ils sont de même nature géométrique et, plus précisément, les caractéristiques géométriques (par exemple les points fixes, les droites invariantes, etc.) de gug^{-1} sont les transportées par g de celles de u. Cette assertion, que j'appelle **principe de conjugaison**, n'est pas vraiment un théorème, mais a vocation à le devenir dans chaque

39. En vérité, cette transformation existe aussi dans le cas général : il existe une application affine qui permute (encore la transitivité) les points a, b, c et donc aussi les points i, j, k et p, q, r, mais elle est moins évidente, au sens propre du terme.

cas particulier. Par exemple, si X est le plan euclidien et G le groupe des isométries, on a les formules suivantes :

- si τ_D est la réflexion d'axe D, $g\tau_D g^{-1} = \tau_{g(D)}$,
- si σ_o est la symétrie de centre o, $g\sigma_o g^{-1} = \sigma_{g(o)}$,
- si $t_{\vec{v}}$ est la translation de vecteur $\vec{v}$, $gt_{\vec{v}}g^{-1} = t_{\vec{g}(\vec{v})}$, etc.

Inversement, pour deux transformations "de même nature" en un sens naïf, savoir si elles sont conjuguées est une question de transitivité. Par exemple, comme le groupe des isométries euclidiennes est transitif sur les droites, toutes les réflexions sont conjuguées. En effet, si on a τ_D et $\tau_{D'}$, il existe une isométrie g telle que $g(D) = D'$ et la formule ci-dessus montre qu'on a $\tau_{D'} = g\tau_D g^{-1}$. En revanche, deux translations $t_{\vec{v}}$ et $t_{\vec{w}}$ ne sont conjuguées dans le groupe des isométries que si leurs vecteurs sont de même longueur (mais elles le sont dans le groupe des similitudes). Dans le cas d'un corps autre que $\mathbf{R}$ (par exemple $\mathbf{Q}$), c'est ici qu'apparaissent nombre de problèmes arithmétiques.

Transitivité, orbites et invariants

Orbites

Ce qui précède montre l'importance de la transitivité dans l'application du programme d'Erlangen. Bien entendu, l'action d'un groupe G sur un ensemble X n'est pas toujours transitive, par exemple l'opération du groupe des isométries du plan euclidien sur l'ensemble des couples de points du plan ne l'est pas, mais ce défaut de transitivité n'est pas moins intéressant, car il conduit à la notion d'**orbite** : l'orbite de x est l'ensemble des $y \in X$ que l'on peut atteindre à partir de x *via* G. Les orbites forment une partition de X et on leur associe une relation d'équivalence $\sim$ définie ainsi : deux points sont équivalents si et seulement si ils sont dans la même orbite ($x \sim x' \iff \exists g \in G,\ g.x = x'$). La détermination de l'ensemble X/G des orbites est un résultat essentiel dans une géométrie donnée, comme on le verra dans ce qui suit (voir par exemple le chapitre sur le birapport dans la Partie I ou celui sur les cas d'isométrie des Parties IV et V, etc.). Le chapitre 7 de la Partie II est d'ailleurs consacré entièrement à une approche plus théorique de ces quotients, dans le cas des ensembles finis de points de $\mathbf{P}^2$, inspirée de Mumford (voir [Mum65]).

Invariants

Obstructions, invariants, critères de transitivité

Pour déterminer le quotient X/G il est nécessaire d'avoir des critères permettant d'affirmer que deux objets sont dans la même orbite et cette question mène tout droit à la notion d'invariant. En effet, la stratégie usuelle pour décrire X/G consiste à le paramétrer. C'est la procédure suivante :

1) On repère des **invariants** de X sous G, c'est-à-dire, pour $x \in X$, des éléments $\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x)$, le plus souvent numériques, qui sont invariants sous G : $x' = g.x$ (c'est-à-dire $x \sim x'$) implique $\Phi_i(x) = \Phi_i(x')$ pour tout i. Si deux éléments sont dans la même orbite, ils ont donc mêmes invariants.

Si l'on reprend l'exemple du groupe des isométries du plan euclidien agissant sur les couples (a, b), l'invariant naturel est la distance ab.

On construit ainsi une application $\Phi : X \to Y$, à valeurs dans l'espace "numérique" Y, disons $Y = \mathbf{R}^n$, par la formule $\Phi(x) = (\Phi_1(x), \dots, \Phi_n(x))$. L'application Φ induit alors une application $\overline{\Phi} : X/G \to Y$ définie par $\overline{\Phi}(\overline{x}) = \Phi(x)$.

2) On veut que Φ soit un **système complet d'invariants**, ce qui signifie qu'on a l'équivalence $x \sim x' \iff \Phi(x) = \Phi(x')$ ou encore que $\overline{\Phi}$ est injective. Lorsqu'on a un tel système on peut formuler ainsi les résultats de transitivité :

Deux éléments x et x' de X sont dans la même orbite si et seulement si leurs invariants (repérés par $\Phi(x)$ et $\Phi(x')$) sont les mêmes.

Dans l'exemple des couples de points du plan, cette condition est bien remplie par l'invariant distance.

Cette détermination d'un système complet d'invariants est liée au premier théorème fondamental sur les invariants (voir ci-dessous), qui permet de calculer tous les invariants polynomiaux à partir d'un nombre fini d'entre eux, mais elle est beaucoup plus facile que le théorème fondamental en général. C'est ce que Weyl appelle la partie fonctionnelle [40] du premier théorème.

3) Il reste enfin à préciser **l'image** de Φ ou de $\overline{\Phi}$, c'est-à-dire à déterminer quelles sont les valeurs possibles des invariants.

Si on a réalisé ces trois opérations, X/G est connu [41]. On peut voir cette

40. Pour ma part, je dirais sa partie ensembliste, l'autre étant en quelque sorte la partie "schématique" au sens de Grothendieck.

41. Au moins ensemblistement, car on espère pouvoir le munir de structures additionnelles, par exemple de variété, analogues à celles de X. En vérité, la construction d'une telle structure sur X/G est, en général, excessivement difficile, voir [Mum65] ou Partie II Chapitre 7, mais on peut souvent construire le quotient pour les objets "génériques". Comme le dit Mumford : *To construct both orbit spaces and moduli "generically" are simple exercises.*

recherche du quotient X/G comme la traduction moderne de la tâche proposée par Klein : *On donne une multiplicité et un groupe de transformations ; développer la théorie des invariants relative à ce groupe.*

Nous verrons apparaître ainsi, tout au long de ce livre, des invariants qui mesureront le défaut de transitivité d'une opération : le birapport dans l'opération de $PGL(2)$ sur les quadruplets de points de la droite [42], le crochet et sa variante affine, l'aire, pour l'opération de $SL(E)$, etc. Dans le cas de la géométrie métrique, le groupe est transitif sur points, droites et drapeaux (au moins si le corps n'est pas trop mauvais), mais les invariants (longueurs, angles) apparaissent comme des obstructions à la transitivité multiple : on ne peut envoyer par une isométrie deux demi-droites de même origine sur deux autres que si leurs invariants angles sont égaux. On a essayé d'en donner des définitions identiques en géométrie elliptique et hyperbolique, en introduisant l'invariant anallagmatique, quitte à retrouver ensuite les invariants usuels de la littérature.

En géométrie hyperbolique, nous retrouverons les orbites et les invariants à propos de la définition de la notion de cercle et de ses variantes (équidistante, horicycle [43]) et les phénomènes de simple transitivité des sous-groupes abéliens de transformations qui laissent stable une droite ou un point mèneront à des notions partielles de vecteurs et d'angles orientés.

Nous verrons enfin comment tous ces invariants permettent de faire de la géométrie (voir, par exemple pour l'utilisation du birapport, Partie I, Chapitre 3 ou Partie VI, chapitre 2, entre autres).

Une idée importante : la dimension

Pour étudier X/G, un outil important est la notion de dimension des variétés algébriques [44]. En termes intuitifs, la dimension d'un objet géométrique est simplement le nombre de paramètres [45] dont il dépend. On peut alors montrer – dans les bons cas – la formule $\dim X/G = \dim X - \dim G$ et cela permet de préciser le nombre d'invariants nécessaires pour décrire le quotient X/G. Ainsi, dans le cas où X est l'espace des triangles du plan euclidien (de dimension 6) et G le groupe des isométries (de dimension 3), on

---

42. On peut citer aussi le rapport des mesures algébriques pour l'opération du groupe affine sur les triplets de points d'une droite.

43. Appelé aussi horocycle, voir Partie IV.

44. Ou différentiables selon les goûts.

45. C'est d'ailleurs ainsi que Klein utilise ce concept. Il dit, par exemple : *Soit A une droite et B la triple infinité de transformations linéaires qui la reproduisent* – il s'agit de $PGL(2)$. Pour une utilisation de cette idée, voir sur ma page web : `http://www.math.u-psud.fr/ perrin/` la rédaction de la conférence *Même aire, même périmètre, et pourtant ...*

a $\dim X/G = 3$ et on a donc besoin de trois paramètres pour décrire ce quotient. Ces paramètres vont être des longueurs ou des angles et on retrouvera ainsi les cas d'isométrie des triangles chers à Euclide. Leur intérêt majeur est justement lié à la transitivité : il s'agit de fournir un critère pour qu'on puisse envoyer un triangle sur un autre par une isométrie, sans être obligé de l'exhiber explicitement et c'est cela qui en fait toute la force : *il peut le faire* comme auraient dit Pierre Dac et Francis Blanche[46].

Invariants, relations et théorèmes

L'origine des relations

Dans la situation générale du programme d'Erlangen, on a un groupe G qui opère sur un ensemble X et on cherche à déterminer le quotient X/G. On a vu qu'une façon d'aborder le problème est d'utiliser un système complet d'invariants, donc de construire une application injective $\Phi : X/G \to Y$ où Y est l'espace des invariants, en général un espace affine ou projectif. Il s'agit de déterminer l'image de Φ. En général, lorsqu'on a $\dim Y > \dim X - \dim G$, cette application n'est pas surjective, autrement dit on a "trop" d'invariants. Dans ce cas, les invariants ne sont pas indépendants, il y a des **relations** entre eux, et le sous-espace X/G de Y est une variété définie par une équation algébrique au moins. Nous allons voir que ces relations sont le cœur même de la géométrie associée. Voici deux exemples typiques de cette situation.

Exemple 1 : le groupe orthogonal du plan vectoriel

Considérons l'opération du groupe orthogonal euclidien $O(q)$ (rotations et symétries orthogonales vectorielles) sur les couples (a, b) de vecteurs $a = (a_1, a_2)$ du plan, donc sur un espace de dimension 4. Comme $O(q)$ est de dimension 1, on s'attend à avoir 3 invariants. Ces invariants sont les longueurs et les angles, ou leurs avatars algébriques : produits et carrés scalaires. *A priori*, il y a 4 invariants : les carrés scalaires $(a|a)$ et $(b|b)$ et les produits scalaires $(a|b)$ et $(b|a)$. Bien entendu, dans ce cas, il y a une relation évidente : la symétrie du produit scalaire $(a|b) = (b|a)$.

Si l'on considère l'opération du groupe $O^+(q)$ des seules rotations, on voit surgir de nouveaux invariants : les déterminants $[a, b]$ et $[b, a]$: $[a, b] = a_1b_2 - a_2b_1$ (on peut les comprendre aussi comme des produits vectoriels,

46. Pour une discussion sur l'intérêt didactique des cas d'isométrie, abandonnés il y a plus de trente ans dans l'enseignement de la géométrie au collège, puis réapparus et bannis à nouveau, voir par exemple la rubrique *Sur la géométrie* de ma page web.

voire des aires, voir Partie II). Comme $O^+(q)$ est encore de dimension 1 il doit donc y avoir deux relations supplémentaires. L'une est évidente, c'est l'antisymétrie du déterminant $[b,a] = -[a,b]$. L'autre est plus intéressante, il s'agit de la relation dite de Lagrange :

$$(a|b)^2 + [a,b]^2 = (a|a)(b|b),$$

qui n'est autre que la formule bien connue $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$.

Exemple 2 : le groupe des isométries affines et les triangles

Le groupe des isométries du plan affine euclidien est de dimension 3. Dans son action sur l'espace des triangles abc, on a repéré des invariants : longueurs et angles [47]. Il y a naturellement six invariants de ce type : les trois longueurs bc, ca, ab et les trois angles $\widehat{a}, \widehat{b}, \widehat{c}$ et on a ainsi un système plus que complet d'invariants. Dans ce cas X/G est de dimension 3 et Y de dimension 6. Il y a donc des relations entre les invariants. Elles sont à la fois bien connues et fondamentales :

• La relation de la somme des angles : $\widehat{a} + \widehat{b} + \widehat{c} = \pi$.

• Les trois relations d'Al-Kashi du type $bc^2 = ab^2 + ac^2 - 2ab.ac\cos\widehat{a}$.

On notera que, comme on a $\dim Y - \dim(X/G) = 3$, on s'attendrait à trouver trois relations seulement. Le fait qu'il y en ait quatre est la preuve qu'elles ne sont pas indépendantes [48]. Il y a donc des relations entre les relations [49] ! C'est ce type de phénomènes qui rend essentiel de munir X/G d'une structure de variété algébrique : dans les cas un peu compliqués le nombre de relations ne donne pas directement la dimension, on a besoin de l'ensemble de la résolution, voir Partie V **??** @8.2.20 et les exemples qui suivent.

Relations et théorèmes

Une citation de Bourbaki

L'importance des relations entre invariants ne tient pas seulement à leur usage pour la description des quotients X/G. En effet, ce sont elles aussi qui fournissent les théorèmes de la géométrie. L'un des points de départ de mon intérêt pour la théorie des invariants, il y a fort longtemps, est d'ailleurs la lecture, dans les Éléments d'histoire des mathématiques de Bourbaki (cf. [Bou60]), de la phrase suivante :

47. Ou leurs variantes algébriques : produits et carrés scalaires.
48. On montre facilement le résultat sur la somme des angles à partir des autres.
49. Un théorème de Hilbert assure tout de même que cette chaîne de relations finit par s'arrêter.

Mais la situation devient bien plus nette avec les progrès de la théorie des invariants qui parvient enfin à formuler des méthodes générales permettant en principe d'écrire tous les covariants algébriques et toutes leurs "syzygies[50]*" de façon purement automatique ; victoire qui, du même coup, marque la mort, comme champ de recherches, de la théorie classique des invariants elle-même et de la géométrie "élémentaire", qui en est devenue pratiquement un simple dictionnaire.*

Sans doute, rien ne permet de prévoir a priori, parmi l'infinité de théorèmes que l'on peut ainsi dérouler à volonté, quels seront ceux dont l'énoncé, dans un langage géométrique approprié, aura une simplicité et une élégance comparables aux résultats classiques, et il reste là un domaine restreint où continuent à s'exercer avec bonheur de nombreux amateurs (géométrie du triangle, du tétraèdre, des courbes et surfaces algébriques de bas degré, etc.). Mais pour le mathématicien professionnel, la mine est tarie ...

Discussion

Cette phrase[51] a joué un rôle considérable dans ma quête des liens qui unissent la géométrie et l'algèbre et ma première préoccupation a été de donner un sens **précis** et général à ce lien entre relations et théorèmes. On le trouvera, en détail, dans le cas de la géométrie projective linéaire, avec le "méta-théorème" **??**@2.4.4 de la Partie II. Le lecteur constatera qu'il faut travailler un peu pour parvenir à une formulation mathématiquement acceptable, mais il nous a semblé que le jeu en valait la chandelle.

Il restera ensuite à illustrer ce résultat, tout de même assez aride. Ce sera d'abord l'objectif des chapitres 3 et 4 de la Partie II de ce livre qui montreront le lien entre les relations et les théorèmes projectifs ou affines (Pappus, Desargues, Thalès, les lemmes des proportions, du trapèze, du chevron). C'est une amorce de réalisation du rêve de Leibniz évoqué plus haut. On discutera plus profondément de la nature des relations sous-jacentes à ces théorèmes.

On verra que certains (Pappus, Desargues) correspondent à des relations triviales. Il y a là une justice immanente : on sait depuis Artin que ces théorèmes correspondent à des propriétés du corps (commutativité, associativité), de sorte qu'avec notre entrée par les espaces vectoriels, ils sont constitutifs des géométries. On retrouve la métaphore du ver dans le fruit. Il y a toute une classe de théorèmes qui correspondent ainsi à des relations triviales (sans être triviaux pour autant). En fait, ils résultent pour l'essentiel du

50. C'est le mot savant pour relations.

51. Je ne m'associe pas à la condescendance qu'elle manifeste à l'égard des "géomètres amateurs".

"premier théorème fondamental" (qui permet de calculer tous les invariants à partir d'un nombre fini d'entre eux).

On verra que d'autres résultats, projectifs ou affines, sont plus profonds dans la mesure où les relations qui les sous-tendent sont non banales. En particulier, un résultat se dégage comme essentiel, à la fois dans notre pratique géométrique (voir Partie I, **??**) @ 3.1.5 et par sa place parmi les relations fondamentales (voir Partie II, **??** @ 4.3.4), il s'agit du théorème qui assure la conservation du birapport par les perspectives.

Au-delà de la géométrie projective linéaire et de sa fille bâtarde qu'est la géométrie affine, nous verrons dans ce livre une multitude d'illustrations de ce lien entre relations et théorèmes, à commencer par les résultats de concours des droites remarquables du triangle qui se révéleront, toujours et partout, comme des applications de "relations de Chasles" essentiellement triviales (voir ci-dessous), ou encore les diverses formules d'Al-Kashi, le théorème de l'angle inscrit et celui de Ptolémée, et bien d'autres. Nous verrons aussi dans les Parties IV, V et VI que les résultats sur la somme des angles d'un triangle de toutes les géométries métriques peuvent se voir comme des sous-produits de la formule de changement de base pour les formes quadratiques. Le théorème de Feuerbach lui-même sera aussi réduit à quelques relations, complexes, mais cependant triviales. Enfin, le plus bel exemple peut-être, est celui de la formule des six birapports et de son lien avec le théorème des six cercles de Miquel (voir Partie VI, ch. 2).

Un exemple

En attendant ces merveilles, et pour allécher le lecteur, voici un exemple, très simple, mais révélateur.

Soit abc un triangle du plan euclidien et h un point quelconque. La relation de symétrie (et la linéarité) du produit scalaire donnent l'identité :

$$\big((\overrightarrow{hb}-\overrightarrow{hc})|\overrightarrow{ha}\big)+\big((\overrightarrow{hc}-\overrightarrow{ha})|\overrightarrow{hb}\big)+\big((\overrightarrow{ha}-\overrightarrow{hb})|\overrightarrow{hc}\big)=0.$$

qui fournit aussitôt le concours des hauteurs du triangle. En effet, si l'on choisit pour h l'intersection des hauteurs issues de a et b, les deux premiers produits scalaires sont nuls (par exemple, le premier n'est autre que $(\overrightarrow{cb}|\overrightarrow{ha})$ par la relation de Chasles), donc aussi le troisième, et h est sur la troisième hauteur.

Détermination des invariants et des relations

Le plus fascinant peut-être, dans la théorie des invariants, c'est le résultat final : pour les groupes "classiques", **tous** les invariants et **toutes** les relations sont connus. C'est ce qui justifie la phrase de Bourbaki citée plus haut et l'un des objectifs de ce livre est de prouver cet ensemble de résultats. Ce sera chose faite dans la Partie II pour la géométrie projective, dans la Partie IV pour les géométries non euclidiennes, dans la Partie V pour la géométrie euclidienne et dans la Partie VI pour la géométrie anallagmatique. Ces théorèmes sont anciens, mais les textes qui les évoquent ne sont pas toujours faciles (voir par exemple le livre [Wey39], d'une richesse extraordinaire, mais terriblement compact) et nous avons tenté d'en donner des preuves souvent plus détaillées et parfois plus précises.

Les invariants

ll est bien naturel d'imposer aux invariants de dépendre des données, (points, droites, vecteurs, etc.) de manière "régulière". Dans le cas où le corps de base est $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$, ce mot peut avoir le sens de continu, voire différentiable, mais sur un corps quelconque, les seules fonctions régulières dignes de ce nom sur les espaces projectifs sont les fonctions rationnelles. La recherche des invariants de transitivité va donc peu ou prou se ramener à la recherche algébrique des invariants rationnels sous l'action des groupes du type $PGL(E)$ ou $PO(q)$. On est tout proche d'un problème classique de théorie des représentations, qui consiste à chercher les invariants polynomiaux de ces groupes. Dans ce cadre, on montre, voir Partie II et Parties IV, V, VI, que les seuls invariants (dans le cas d'un espace E de dimension 3) sont les crochets $[a, b, c]$ (le déterminant de ces trois vecteurs sur une base fixée, dans le cas linéaire) ou les valeurs $q(a)$ ou $\varphi(a, b)$ de la forme quadratique ou de sa forme polaire (dans le cas métrique).

Attention toutefois, même si elles sont proches, les opérations des groupes sur E et sur $\mathbf{P}(E)$ ne sont pas équivalentes et les invariants polynomiaux "ne passent pas au quotient", c'est-à-dire n'ont pas de sens en projectif. En effet, si l'on multiplie par exemple le vecteur a par un scalaire, ce qui ne change pas le point du projectif puisque les coordonnées y sont homogènes, les invariants $[a, b, c]$ ou $q(a)$ changent. Pour obtenir des invariants projectifs, il faut utiliser des invariants rationnels, quotients des invariants polynomiaux. On verra qu'on trouve ainsi le birapport :

$$[\![(xa),(xb),(xc),(xd)]\!] = \frac{[x,a,c]\times[x,b,d]}{[x,b,c]\times[x,a,d]}.$$

ou encore l'invariant "anallagmatique" $I(a, b) = \dfrac{\varphi(a,b)^2}{q(a)q(b)}$.

Comme conséquence des résultats vectoriels, on obtient que le seul invariant de la géométrie projective plane est le birapport $[\![(xa),(xb),(xc),(xd)]\!]$

défini ci-dessus. Dans le cas des géométries métriques, outre l'invariant anallagmatique, on verra apparaître une quantité plus mystérieuse : le Spin.

Les relations

Pour les invariants du groupe linéaire, c'est-à-dire les crochets, on montre que l'idéal des relations est engendré par les relations du type suivant :

$$(\mathcal{R}) \quad [b, c, d][a, x, y] - [a, c, d][b, x, y] + [a, b, d][c, x, y] - [a, b, c][d, x, y] = 0.$$

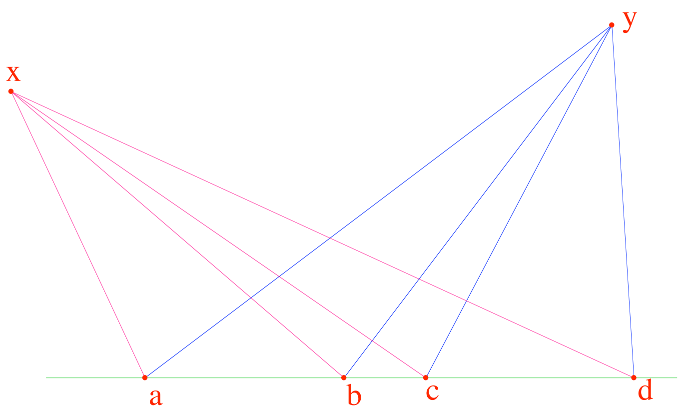

FIGURE 5 – Birapports et pinceaux

Si l'on en croit Bourbaki, la relation $\mathcal{R}$ ci-dessus, qui engendre toutes les autres relations, donc tous les théorèmes, doit apparaître comme la relation fondamentale de la géométrie plane. C'est bien le cas, et à un double titre :

• D'abord, nous verrons que cette relation traduit la propriété essentielle du plan, qui est d'être de dimension 2.

• Ensuite, cette relation, a pour conséquence l'égalité des birapports :

$$[\![(xa), (xb), (xc), (xd)]\!] = [\![(ya), (yb), (yc), (yd)]\!]$$

dans la figure 5.

Cette égalité de birapports, ou plutôt sa duale, signifie que les perspectives conservent le birapport et nous verrons, tout au long de la Partie I que c'est bien là un outil essentiel.

La dualité

Le mot vient d'être lâché : la dualité est, en géométrie projective, une autre notion fondamentale, une de celles qui justifient l'approche vectorielle. C'est l'un des fils conducteurs de ce livre et peut-être l'une de ses originalités : nous avons essayé de pousser le plus loin possible l'usage de ce concept. C'est facile en géométrie projective plane. En effet, comme on travaille dans le plan, il n'y a que deux types d'objets, points et droites et ils sont échangés par une dualité qui traduit celle de E et E^*. Cela permet de passer instantanément de propriétés d'alignement à des propriétés de concours et inversement ou de propriétés des points des coniques aux propriétés des tangentes (voir par exemple les théorèmes de Pascal et Brianchon). Cette dualité marche parfaitement en géométrie projective linéaire [52]. Elle fonctionne aussi à merveille et sans la moindre restriction en géométrie elliptique.

Ce qui est moins connu c'est qu'elle fonctionne aussi très bien en géométrie hyperbolique. Il convient pour cela, et c'est l'apport de ce livre par rapport aux textes usuels, de travailler non seulement dans le plan de Klein (par exemple), mais aussi à l'extérieur du disque frontière. On verra notamment trois exemples essentiels qui illustrent la force de ces conceptions :

• Cette vision des choses permet de comprendre certains phénomènes qui sans cela demeurent mystérieux. On a ainsi l'explication du fait qu'on rencontre habituellement deux types de situation pour les hauteurs d'un triangle hyperbolique : elles peuvent être concourantes ou avoir une perpendiculaire commune. En fait, dans le plan projectif entier elles sont toujours concourantes, mais si le point de concours est extérieur c'est sa polaire qui est la perpendiculaire commune.

• Elle permet de prouver d'un trait de plume des résultats en apparence différents. Ainsi, le concours des médiatrices et celui des bissectrices sont un seul et même théorème, le premier se lisant dans E et le second dans E^*.

• Enfin, elle fournit parfois de nouveaux concepts, ainsi, celui de point bissecteur de deux droites, dual de la notion de médiatrice de deux points.

En revanche, la notion de dualité est presque inexistante en euclidien et l'entrée que nous avons choisie à la Partie V le montre bien. En effet, dans ce cas les espaces E et E^* ne jouent pas des rôles symétriques : la donnée est celle d'une forme q^* sur E^* et cette forme étant dégénérée ne donne pas une forme sur E tout entier. C'est une différence fondamentale entre le cas euclidien et les autres, mais ce n'est pas la seule.

52. À tel point que Chasles finirait presque par regretter que la géométrie soit devenue trop facile, voir Partie I, Chapitre 2 la citation exacte après le théorème de Brianchon.

La mort de la géométrie ?

Le fait que tous les invariants et toutes les relations soient connus a une signification philosophique [53] fondamentale et il semble conforter l'assertion de Bourbaki sur la mort de la géométrie. Prenons une fois encore l'exemple de la géométrie projective linéaire et de l'invariant birapport, mais l'argument est plus général. Le "meta-theorème" **??**@ 2.4.4 de la Partie II confirme que les théorèmes de cette géométrie proviennent bien tous de relations entre les invariants. Comme on connait tous les invariants (il n'y a guère que le birapport) et toutes les relations (elles se déduisent de la conservation du birapport par les perspectives), on peut penser que l'on détient ainsi tous les résultats de la théorie.

En fait, et nous reviendrons largement sur ce point, à la fois dans le texte et dans la postface, c'est un peu plus subtil que cela. En effet, si l'on se fie à la fameuse phrase, les seuls théorèmes dignes d'estime seraient ceux qui proviennent des relations non banales [54]. L'expérience montre que ce n'est pas tout à fait le cas, certaines relations triviales menant à des théorèmes remarquables (Pappus, Desargues, Pascal ou même Feuerbach et Miquel), tandis qu'on est parfois bien en peine pour traduire géométriquement des relations algébriquement consistantes. Comme Bourbaki le reconnaît lui même : *rien ne permet de prévoir a priori, parmi l'infinité de théorèmes que l'on peut ainsi dérouler à volonté, quels seront ceux dont l'énoncé, dans un langage géométrique approprié, aura une simplicité et une élégance comparables aux résultats classiques* et c'est bien là le problème.

En vérité, on peut penser que cette affirmation néglige un aspect fondamental de la géométrie, qui est sa capacité à condenser sous une forme visuelle et intuitive, une grande quantité d'informations. Pour employer une métaphore, la géométrie est à l'algèbre ce que le cinéma est au livre, plus de choses sont dites parfois dans un seul plan (dans une seule figure) que dans de longs discours (de longs calculs). La géométrie est donc essentielle comme support intuitif des résultats algébriques, comme le dit Klein dans l'Annexe III du Programme d'Erlangen : *... un modèle géométrique est, à ce point de vue, des plus intéressants et des plus instructifs.*

Il y a plus, et la difficulté rencontrée ci-dessus pour décalquer fidèlement les relations sur les théorèmes le montre. Notre civilisation présente un étrange paradoxe. L'image y est omniprésente et cependant, son traitement devient

53. Ce n'est pas seulement un résultat théorique, c'est aussi un guide dans la pratique : savoir dans quelle géométrie l'on se trouve indique immédiatement quels sont les invariants pertinents (et quels sont ceux qui ne le sont pas !) et c'est souvent un atout décisif.

54. Pour dire les choses algébriquement, celles qui font partie d'un système générateur minimal de l'idéal des relations entre un système minimal d'invariants.

presque entièrement numérique [55]. Je pense qu'il s'agit d'une terrible erreur. Je cite encore Klein : *Je la considère* [l'intuition de l'espace] *comme subsistant par elle-même. Il existe une Géométrie qui ne peut pas ... n'être qu'une forme sensible de considérations abstraites. ... Pour cette Géométrie, un modèle ... n'est pas un moyen pour atteindre un but, mais la chose elle-même.*

On comprend bien d'où provient la dérive actuelle, tributaire de ce que l'on sait demander actuellement aux ordinateurs, c'est-à-dire essentiellement des calculs. Je considère qu'il s'agit d'une solution de facilité : il y a urgence à apprendre aux ordinateurs [56] à penser géométriquement !

Principes didactiques de ce livre

On a souhaité garder à ce livre un caractère relativement élémentaire, pour qu'un étudiant de master de mathématiques puisse le lire sans se heurter à de trop grandes difficultés. Cela n'empêche pas d'aborder parfois des choses plus compliquées (dualité, produit extérieur, idéaux, caractères, représentations), mais dans ce cas les rappels nécessaires sont proposés. À quelques endroits limités (par exemple dans la Partie II, notamment le chapitre 7, dans le chapitre 3 de la Partie III, le chapitre 6 de la Partie VI), on verra affleurer des notions de géométrie algébrique, certaines élémentaires et d'autres moins. À cet égard, on s'est efforcé de rappeler les principales propriétés utilisées, mais on renverra parfois le lecteur à [Per95] ou [Har77] entre autres.

On a voulu que ce livre soit avant tout un livre de géométrie, avec tout ce qu'elle comporte de visuel et de beau. Cela explique la profusion des figures [57] mais cela n'empêche pas que le texte est adossé à un support algébrique solide, avec parfois des renvois d'ascenseur : la géométrie peut aussi donner de l'algèbre (voir le théorème de Cartan-Dieudonné, le lien entre les points de Frégier et la norme spinorielle, le calcul de $\operatorname{Aut} O(q)$ ...).

Même si nous proposons de nouvelles lectures de la géométrie, nous avons essayé de retrouver les notions et résultats des anciens. Le lecteur y trouvera ou y retrouvera le théorème de Pappus et celui de Desargues, la division harmonique et les polaires, les théorèmes de Ménélaüs, Céva, Newton et Gergonne, le théorème de Desargues sur les pinceaux de coniques, le théorème de Pascal, les points de Frégier, les points de Gergonne ou de Na-

55. Le pire, à cet égard, étant la caricature qu'en donnent les actuels programmes des lycées dans lesquels la géométrie, ou ce qu'il en reste, est uniquement abordée du point de vue analytique.

56. Mais aussi aux élèves et aux futurs professeurs !

57. Les figures sont réalisées essentiellement avec le logiciel *Cabri géomètre*.

gel, le concours[58] des droites remarquables du triangle, le triangle orthique, le grand théorème de Poncelet, le théorème de Feuerbach, la droite de Simson et le théorème des six cercles de Miquel[59], etc.

Les choix de rédaction restent marqués par la formation de l'auteur qui n'a pas renié totalement Bourbaki. Cela sous-entend un effort pour arriver aux résultats avec une économie de moyens (voir par exemple le début de I 2 avec les perspectives ou le concours des droites remarquables du triangle en géométrie non euclidienne). Contrairement à Bourbaki, on n'a pas cherché systématiquement à placer les choses dans le cadre le plus général, ce qui devrait rendre la lecture de ce livre plus facile que celle de notre illustre prédécesseur.

Le calcul joue un rôle important dans ce livre et là encore, l'esthétique a été l'un de nos guides. Il y a de belles formules comme il y a de belles figures et ce sont souvent les mêmes : voir les exemples de Pappus et Desargues, le lemme des six birapports, ou les relations qui gouvernent le théorème de Feuerbach. S'il fallait formaliser ce qu'on entend par là, on pourrait mettre en avant les mots de simplicité et d'élégance et ils seraient souvent liés à des propriétés d'invariance, par permutation, par un groupe, etc.

Plus peut-être que toute autre partie des mathématiques, la géométrie a des racines qui remontent jusqu'au plus profond de l'histoire de l'humanité. Dans chaque partie de ce livre, on a essayé de donner des éléments sur l'histoire des notions étudiées et de rendre hommage aux géomètres des siècles passés dont nous restons largement débiteurs. En l'occurrence, parmi beaucoup d'autres, les deux noms qui se détachent ici sont ceux de Poncelet et de Klein.

Enfin, on a tenu à proposer au lecteur de nombreux exercices parce qu'il n'y a de vraies mathématiques que celles que l'on a comprises par soi-même.

Depuis que ce texte est sur ma page web, un certain nombre de collègues m'ont fait part de leurs remarques et je les en remercie vivement. Il s'agit[60] d'Erwann Aubry, Lionel Bérard-Bergery, Antoine Chambert-Loir, Marie-Claude David, Charles Delorme, Jean-Denis Eiden, Vincent Feuvrier, Robin Hartshorne, Guy Henniart, Jean-Pierre Kahane, Rashed Mnéimné, Marie-Jeanne Perrin-Glorian, Bernard Prum, Sylvie Ruette, Nicolas de Saxcé. Une mention spéciale va à Alain Busser qui détient pour l'instant, et de loin, le record du nombre de coquilles détectées.

58. L'un des *leitmotivs* de ce livre.
59. Une autre des obsessions de l'auteur.
60. Ceux que j'ai oubliés peuvent m'envoyer une lettre d'injures.

Bibliographie

[Art62] Emil Artin. *Algèbre géométrique.* Gauthier-Villars, Paris, 1962.

[Bac59] Friedrich Bachmann. *Aufbau der Geometrie aus dem Spiegelungsbegriff.* Springer Verlag, 1959.

[Bou60] Nicolas Bourbaki. *Éléments d'histoire des mathématiques.* Hermann, 1960.

[CF95] Annie Cousin-Fauconnet. *Enseigner la géométrie au collège.* Armand Colin, 1995.

[Die70] Jean Dieudonné. *La géométrie des groupes classiques.* Springer, Berlin, 1970.

[dpJPK02] (dirigé par) Jean-Pierre Kahane. *L'enseignement des sciences mathématiques.* Odile Jacob, Paris, 2002.

[Euc78] Euclide. *Les éléments (traduction Kayas).* Éditions du CNRS, 1978.

[Hal76] Marshall Hall. *The theory of groups.* AMS, Providence, 1976.

[Har77] Robin Hartshorne. *Algebraic geometry.* Springer, Berlin, 1977.

[Har00] Robin Hartshorne. *Geometry : Euclide and beyond.* Springer, Berlin, 2000.

[JCD01] Jean-Pierre Richeton Jean-Claude Duperret, Daniel Perrin. Une illustration du rapport sur la géométrie de la commission kahane : analyse de quelques exercices de géométrie. *Bull. APMEP 425*, 2001.

[Kle74] Felix Klein. *Le programme d'Erlangen.* Jacques Gabay, 1974.

[Lio01] Georges Lion. *Géométrie du plan.* Vuibert, 2001.

[Mar02] Yves Martin. *Conception et mise en oeuvre de micromondes de géométries non-euclidienne dans le cadre de la géométrie dynamique, illustrées avec Cabri-géomètre. Expérimentation en formation des maîtres.* PhD thesis, Université de Grenoble, 2002.

[MCD07] Daniel Perrin Marie-Claude David, Frédéric Haglund. *Géométrie affine (polycopié)*. Université Paris-Sud, Orsay, 2007.

[Mum65] David Mumford. *Geometric invariant theory*. Springer, Berlin, 1965.

[Per95] Daniel Perrin. *Géométrie algébrique, une introduction*. Interéditions, Paris, 1995.

[Per96] Daniel Perrin. *Cours d'algèbre*. Ellipses, Paris, 1996.

[Per08] Daniel Perrin. Géométrie : deux ou trois choses que je sais d'elle. Page web de Daniel Perrin, 2008.

[Per11] Daniel Perrin. *Mathématiques d'École*. Cassini, Paris, 2011.

[Per50] Daniel Perrin. *Une axiomatique pour la géométrie du collège*. ? ?, 2050.

[Wey39] Hermann Weyl. *The Classical Groups : Their Invariants and Representations*. Princeton Math. Series, Princeton, 1939.

Le plan prévu de ce livre

Pour allécher le lecteur, nous donnons ci-dessous un aperçu de l'ensemble du projet. Bien entendu, ces prévisions sont sujettes à modifications.

Partie I : Géométrie projective linéaire

Introduction historique (6 p.)

Chapitre 1 : L'espace projectif et ses sous-espaces (23 p.)

Chapitre 2 : La géométrie des droites du plan (15 p.)

Chapitre 3 : Le birapport (26 p.)

Chapitre 4 : Le théorème fondamental de la géométrie projective (14 p.)

Partie II : Les invariants de la géométrie projective linéaire

Introduction historique (4 p.)

Chapitre 1 : Préliminaires (21 p.)

Chapitre 2 : Propriétés, constructions et théorèmes projectifs (42 p.)

Chapitre 3 : Énoncé des théorèmes fondamentaux (19 p.)

Chapitre 4 : Retour à la géométrie, 1 : la géométrie projective (19 p.)

Chapitre 5 : Retour à la géométrie, 2 : la géométrie affine (30 p.)

Chapitre 6 : Preuve des théorèmes fondamentaux (26 p.)

Chapitre 7 : Opérations, invariants et quotients : quelques exemples (76 p.)

Partie III : La géométrie d'une forme quadratique, premier épisode : la conique

Introduction historique (3p.)

Chapitre 1 : Rappels sur les formes quadratiques (10 p.)

Chapitre 2 : Les coniques du plan projectif : généralités (25 p.)

Chapitre 3 : La conique vue comme une droite projective (52 p.)

Chapitre 4 : L'espace des coniques (54 p.)

Partie IV : La géométrie d'une forme quadratique, deuxième épisode : les géométries non euclidiennes

Introduction historique (5 p.)

Introduction au modèle de Klein (5 p.)

Chapitre 1 : Présentation des géométries non euclidiennes (39 p.)

Chapitre 2 : Les différents modèles des géométries non euclidiennes (42 p.)

Chapitre 3 : Les droites remarquables du triangle (40 p.)

Chapitre 4 : Propriétés de transitivité : le cas d'un corps quelconque (37 p.)

Chapitre 5 : Longueurs et angles : le cas des géométries réelles (33 p.)

Chapitre 6 : L'espace des triangles dans les géométries réelles (47 p.)

Chapitre 7 : Cercles, équidistantes et horicycles (33 p.)

Chapitre 8 : Transformations de la droite ou du point, vecteurs, angles orientés, etc.(44 p.)

Chapitre 9 : Invariants des géométries non euclidiennes (33 p.)

Partie V : La géométrie d'une forme quadratique, troisième épisode : la géométrie euclidienne

Introduction (3p.)

Chapitre 1 : La géométrie euclidienne : rappels sur le point de vue affine-vectoriel ordinaire (17 p.)

Chapitre 2 : L'entrée par le dual : présentation (30 p.)

Chapitre 3 : Les groupes d'isométries et de similitudes, vus du dual (27 p.)

Chapitre 4 : Les droites remarquables du triangle (21 p.)

Chapitre 5 : Transitivité, invariants, cas d'isométrie et de similitude (37 p.)

Chapitre 6 : Espaces de points, de vecteurs et de droites : généralités et cas des triangles (20 p.)

Chapitre 7 Quadrilatères et cocyclicité (21 p.)

Chapitre 8 : Les invariants du groupe des similitudes (42 p.)

Partie VI : La géométrie anallagmatique

Introduction historique et présentation (6 p.)

Chapitre 1 : Rappels sur l'inversion (28 p.)

Chapitre 2 : La droite projective complexe (22 p.)

Chapitre 3 : L'espace des cercles et des droites : généralités et isomorphisme de groupes (24 p.)

Chapitre 4 : L'espace des cercles et des droites : pinceaux, transitivité et applications géométriques (22 p.)

Chapitre 5 : Les plans de l'espace des cercles ou l'unité des géométries (35 p.)

Chapitre 6 : Retour sur la cocyclicité (18 p.)

Chapitre 7 : Les invariants du groupe circulaire (17 p.)

Postface : L'enseignement de la géométrie