

Résumé

Dans cet article, nous mettons en évidence une classe de formules binomiales fournissant les constantes π et plusieurs logarithmes, et qui peuvent être considérées comme des cas plus généraux des classiques séries BBP découvertes en 1995. Nous montrons comment prédire les résultats de ces formules et établissons le lien avec la fonction Gamma.

Une généralisation des formules BBP aux formules binomiales

Boris Gourevitch, Jesus Guillera
boris@pi314.net, jguillera@able.es
Rennes, France ; Spain

1^{er} avril 2003

1 Introduction

En 1995, David Bailey, Peter Borwein et Simon Plouffe ont découvert une nouvelle formule pour le nombre π

$$\pi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{16^k} \left(\frac{4}{8k+1} - \frac{2}{8k+4} - \frac{1}{8k+5} - \frac{1}{8k+6} \right) \quad (1)$$

qui a étonné la communauté des mathématiciens [Bailey et al. 1996]. Cette série simple, qui aurait pu être découverte par Euler, recèle une propriété inattendue. Elle permet en effet de calculer le n -ième digit du nombre π en base hexadécimale, (et en bases 2^n plus généralement) sans pour autant connaître les précédents, et ceci en temps presque linéaire, et en espace logarithmique polynomial. La classe de ces constantes est dénommée SC^* . Immédiatement, l'intérêt pour cet espace s'est fortement accru, et un nouveau domaine de recherche s'est alors ouvert, comme le remarqua Adamchik [Adamchik 1996]. La quête numérique ne fut pas terminée, puisque de nombreuses formules ont été découvertes ultérieurement par Broadhurst [Broadhurst 1998], Lupas [Lupas 2000], Gourevitch [Gourevitch 2000] et une étude détaillée fut enfin réalisée par Huvent [Huvent 2001]. La méthode habituelle consistait, comme originellement, à découvrir expérimentalement des formules du même type que (1) à l'aide des algorithmes de recherche de relations linéaires sur $\mathbb{N}$ entre constantes comme PSLQ implémenté principalement par David Bailey, ou LLL dont une version largement usitée est implémentée dans l'excellent Pari-GP ([Pari]). Par la suite, une démonstration rigoureuse était recherchée, et souvent atteinte.

On sait depuis que G (la constante de Catalan) ou $\zeta(3)$ font partie de cette classe SC^* de constantes liée aux résultats de la fonction de Hurwitz. La preuve de ces identités est

basée très simplement sur une transformation des séries en intégrales équivalentes, et en leur évaluation par les valeurs associées de polylogarithmes. Ces sommes ont une forme particulière qui est étudiée depuis leur découverte. Pour l'instant, seules les puissances de 2 et 3 ont donné des résultats pour les constantes les plus célèbres telles π ou $\log(2)$ même si Plouffe puis Bellard ont montré que l'on pouvait, avec un peu d'astuce, atteindre la n -ième décimale de π également en base 10, bien qu'un peu plus lentement [Plouffe 96], [Bellard 97]). L'intérêt pour ces formules a redoublé lorsque Bailey et Crandall ont montré que l'on pouvait établir un lien entre ces formules et une éventuelle preuve de la normalité présumée des constantes associées [Bailey et al. 2001].

Parallèlement, en octobre 2001, Almkvist, Krattenthaler et Petersson ont présenté de nouvelles sommes binomiales pour estimer π en utilisant la méthode de la fonction Beta [Almkvist et al. 2001]. Nous nous proposons ici de compléter leur travaux en établissant un lien entre de nombreuses formules binomiales et les formules BBP, et d'en extraire d'étonnantes formules, rapides et simples à utiliser d'un point de vue programmation, et prouvables aisément. Nous montrons que l'écriture type BBP d'une somme binomiale est plus générale que la forme polynomiale utilisée dans [Almkvist et al. 2001]. Nous supposons que la plupart des formules écrites ici sont nouvelles ou bien étaient présentées parfois de manière isolée.

2 La fonction Beta et la méthode associée

La fonction Beta $B(r, s)$ pour $r, s \in \mathbb{R}^+$ peut être définie par

$$B(r, s) = \int_0^1 x^{r-1} (1-x)^{s-1} dx \quad (2)$$

et il est connu qu'elle peut être reliée à la fonction Gamma par la relation

$$B(r, s) = \frac{\Gamma(r)\Gamma(s)}{\Gamma(r+s)} \quad (3)$$

Avec des paramètres $m, n \in \mathbb{N}$, on utilise $\Gamma(n) = (n-1)!$ pour obtenir

$$\frac{1}{\binom{mn}{pn}} = (mn+1) \int_0^1 x^{pn} (1-x)^{(m-p)n} dx \quad (4)$$

La méthode de la fonction Beta consiste à sommer sur n les membres droits et gauches de l'équation précédente pour obtenir une somme binomiale et sa représentation intégrale équivalente. Almkvist, Krattenthaler et Petersson [Almkvist et al. 2001] ont

proposé d'utiliser cette méthode pour trouver une preuve rapide de la formule

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{50n - 6}{\binom{3n}{n} 2^n} \quad (5)$$

étant donné que $\frac{1}{\binom{3n}{n}} = (3n + 1) \int_0^1 x^{2n} (1 - x)^n dx$. En utilisant leurs notations, ceci a permis de trouver de nombreuses relations de la forme

$$\pi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{S(n)}{\binom{mn}{pn} a^n} \quad (6)$$

où S est un polynôme et $a \in \mathbb{N}$. Cependant, pour construire de nouvelles formules, une difficulté survient avec le délicat calcul de $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (mn + 1) S(n) \left(\frac{x^p (1-x)^{m-p}}{a} \right)^n$ qui est équivalent à la série de (6) après la sommation sur n de (4). En outre, cette méthode ne permet pas de trouver des constantes, que nous qualifierons d'ordre 2 ou plus, telles que π^2 , $\pi \ln(2)$ ou G pour l'ordre 2, ou π^3 , $\zeta(3)$ pour l'ordre 3 par exemple, en résumé les constantes homogènes à des polylogarithmes d'ordre 2 ou plus. Nous proposons d'utiliser la méthode Beta pour des sommes uniquement de la forme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n \binom{mn}{pn}} \left(\frac{b_1}{mn + 1} + \frac{b_2}{mn + 2} + \dots + \frac{b_{m-1}}{mn + m - 1} \right) \quad (7)$$

avec $b_k \in \mathbb{Q}$ pour trouver des formules ayant l'apparence des séries BBP, mais avec des coefficients binomiaux. Nous montrons également que la forme de cette série est plus avantageuse dans les démonstrations analytique, et que cette méthode est très générale puisque d'autres paramètres de la fonction Beta que des entiers peuvent donner aisément de nombreuses identités comme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n \binom{5n}{2n}} \left(\frac{416}{5n + 1} + \frac{-44}{5n + 2} + \frac{16}{5n + 3} + \frac{-14}{5n + 4} \right) = 125\pi \quad (8)$$

ou des formules plus compliquées comme

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n \frac{\binom{6n}{3n}}{\binom{8n}{4n} \binom{4n}{n}} \left(\frac{1885}{8n + 1} + \frac{-965}{8n + 3} + \frac{363}{8n + 5} + \frac{-51}{8n + 7} \right) = 2^9 \pi \quad (9)$$

3 Paramètre entier dans la fonction Beta

En premier lieu, on traite du cas où les paramètres de la fonction Beta sont entiers.

3.1 La méthode

La méthode de la fonction Beta remplit deux objectifs :

- Trouver les preuves de formules déjà existantes, et souvent découvertes par expérimentation.
- Etablir analytiquement de nouvelles relations.

Dans le cas de la recherche de preuves, on suppose que l'on dispose d'une somme de la forme

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n \binom{mn}{pn}} \left(\frac{b_1}{mn+1} + \frac{b_2}{mn+2} + \dots \frac{b_k}{mn+k} + \dots + \frac{b_{m-1}}{mn+(m-1)} \right) \quad (10)$$

La recherche d'une preuve se ramène principalement à l'utilisation de la proposition suivante :

Proposition 1 *Il existe un polynôme $P(X) \in \mathbb{Q}_{m-2}[X]$ tel que*

$$T = \int_0^1 \frac{aP(x)}{a - x^p(1-x)^{(m-p)}} dx \quad (11)$$

Preuve. En sommant sur n la relation 4, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n \binom{mn}{pn}} \frac{1}{mn+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n} \int_0^1 x^{pn} (1-x)^{(m-p)n} dx = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x^p(1-x)^{(m-p)}}{a} \right)^n dx \\ &= \int_0^1 \frac{a}{a - x^p(1-x)^{(m-p)}} dx \end{aligned} \quad (12)$$

qui peut être facilement calculée par décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle. Cette forme diffère de l'intégrale considérée dans [Almkvist et al. 2001] par le fait que le dénominateur dans [Almkvist et al. 2001] est une puissance du dénominateur considéré ici, ce qui complexifie notablement l'évaluation de l'intégrale. Pour obtenir les autres éléments de la somme en $\frac{1}{mn+k}$ dans 10, on écrit

$$\int_0^1 x^{pn+k-1} (1-x)^{(m-p)n} dx = \frac{1}{\binom{mn+k}{pn}} = \frac{1}{\binom{mn}{pn}} \frac{(pn+1)(pn+2)\dots(pn+k-1)}{(mn+1)(mn+2)\dots(mn+k)}. \quad (13)$$

Pour k fixé, la décomposition en éléments simples de $\frac{(pn+1)(pn+2)\dots(pn+k-1)}{(mn+1)(mn+2)\dots(mn+k)}$ vue comme une fraction rationnelle en n fournit une séquence $(a_{k,j})_{j=1,\dots,k}$ telle que

$$\int_0^1 x^{k-1} x^{pn} (1-x)^{(m-p)n} dx = \frac{1}{\binom{mn}{pn}} \left(\frac{a_{k,1}}{mn+1} + \frac{a_{k,2}}{mn+2} + \dots + \frac{a_{k,k}}{mn+k} \right) \quad (14)$$

avec $a_{k,j} \in \mathbb{Q}$. Pour toutes les valeurs k de 1 à $m-1$, on dispose ainsi de suites de valeurs $(a_{k,j})_{j=1,\dots,k}$ que l'on combine linéairement pour trouver les $m-1$ valeurs b_k de 10. Ceci est équivalent à écrire et résoudre le système

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{m-1,1} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{m-1,2} \\ \dots & 0 & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{m-1,m-1} \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_{m-1} \end{pmatrix} \quad (15)$$

Le vecteur B contient les coefficients du polynôme $P(X) = B^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ \dots \\ X^{m-2} \end{pmatrix}$ de degré

$m - 2$, qui, en utilisant 14, est tel que

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n \binom{mn}{pn}} \left(\frac{b_1}{mn+1} + \frac{b_2}{mn+2} + \dots + \frac{b_{m-1}}{mn+(m-1)} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 P(x) \frac{x^{pn}(1-x)^{(m-p)n}}{a^n} dx \\ &= \int_0^1 \frac{aP(x)}{a - x^p(1-x)^{(m-p)}} dx \end{aligned} \quad (16)$$

■

La preuve donne une manière d'obtenir le polynôme P cherché, puisque le lien entre la somme et l'intégrale équivalent est juste un système linéaire. La preuve repose ensuite sur la possibilité de calcul des racines de $a - x^{(m-p)}(1-x)^p$. En pratique, le polynôme $P(x)$ possède souvent des facteurs communs avec le dénominateur $a - x^{(m-p)}(1-x)^p$, ce qui simplifie le calcul.

Lorsque l'on cherche à construire de nouvelles sommes, on choisit préférentiellement un polynôme $P(x)$ qui simplifie justement la fraction $\frac{aP(x)}{a - x^{(m-p)}(1-x)^p}$ pour obtenir une intégrale bien connue. Par exemple, on obtient des formules donnant le nombre π en choisissant $P(X)$ tel que $\frac{aP(x)}{a - x^{(m-p)}(1-x)^p} = \frac{1}{1+x^2}$ puisque $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{4}$. La connaissance du polynôme P donne alors la somme par utilisation de (14), combinaison et simplification.

Notons que le cas $m = p$ dans (7) nous ramène au cas des formules BBP habituelles puisque le coefficient binomial disparaît. On obtient alors l'intégrale $\int_0^1 \frac{aP(x)}{a - x^p} dx$ que l'on sait décomposable en fonction de logarithmes et polylogarithmes [Huvent 2001].

Remarque 2 Nous pouvons noter qu'une formule en $\frac{1}{a^n \binom{2n}{n}} \frac{1}{2n+1}$ donne une formule en $\frac{1}{a^{2n} \binom{4n}{2n}} \left(\frac{a_1}{4n+1} + \frac{a_2}{4n+2} + \frac{a_3}{4n+3} \right)$ si l'on divise la première somme en parties paires ($n = 2p$) et impaires ($n = 2p + 1$). Il faut donc faire attention que certaines formules trouvées par expérimentations ne soient pas de simples réécritures d'autres formules plus simples. Une formule "primitive", qui doit être systématiquement recherchée, est une relation qui ne peut pas être réduite à d'autres relations équivalentes et qui a le nombre minimal de termes possibles dans sa combinaison et son terme a^n .

3.2 Applications à plusieurs formules

3.2.1 Exemple 1

Nous commençons par un simple exemple de construction de telles formules.

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \binom{3n}{n}} \frac{1}{3n+1} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \int_0^1 x^{2n} (1-x)^n dx \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n} (1-x)^n}{2^n} dx = \int_0^1 \frac{2}{2-x^2(1-x)} dx \end{aligned} \quad (17)$$

$$= \frac{3}{5} \ln 2 + \frac{1}{5} \pi \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \binom{3n}{n}} \frac{1}{3n+2} &= 3 \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1} (1-x)^n}{2^n} dx - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \binom{3n}{n}} \frac{1}{(3n+1)} \\ &= 3 \int_0^1 \frac{2x}{2-x^2(1-x)} dx - \frac{3}{5} \ln(2) - \frac{1}{5} \pi \\ &= 3 \left(-\frac{3}{5} \ln(2) + \frac{3}{10} \pi \right) - \frac{3}{5} \ln(2) - \frac{1}{5} \pi = -\frac{12}{5} \ln(2) + \frac{7}{10} \pi \end{aligned} \quad (19)$$

En utilisant l'idée de Gery Huvent de combiner les formes linéaires [Huvent 2001], on obtient la formulation très générale

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \binom{3n}{n}} \left(\frac{\alpha}{3n+1} + \frac{\beta}{3n+2} \right) = \left(\frac{3}{5} \alpha - \frac{12}{5} \beta \right) \ln(2) + \left(\frac{1}{5} \alpha + \frac{7}{10} \beta \right) \pi \quad (20)$$

En prenant $\alpha = 4\beta = 4$ on annule $\ln(2)$ et apparait une formule pour π

$$\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \binom{3n}{n}} \left(\frac{8}{3n+1} + \frac{2}{3n+2} \right) = \pi \quad (21)$$

Si l'on prend par contre $\alpha = -\frac{7}{2}\beta = -7$ la formule est cette fois pour $\ln(2)$

$$\frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \binom{3n}{n}} \left(\frac{7}{3n+1} - \frac{2}{3n+2} \right) = \ln(2) \quad (22)$$

Cela nous montre également à quel point les deux constantes $\ln(2)$ et π sont proches. Toute propriété pour une constante dans le domaine de l'aléatoire (normalité, équirépartition, nombre univers, etc...) s'appliquerait probablement ainsi à l'autre si la conjecture de Bailey-Crandall s'avère vérifiée ([Bailey et al. 2001])

3.2.2 Exemple 2

Cette fois, nous partons d'une formule découverte empiriquement

$$\frac{1}{16807} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \binom{7n}{2n}} \left(\frac{59296}{7n+1} - \frac{10326}{7n+2} - \frac{3200}{7n+3} - \frac{1352}{7n+4} - \frac{792}{7n+5} + \frac{552}{7n+6} \right) = \pi \quad (23)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} U_n \quad (24)$$

et nous en cherchons une preuve, en espérant que l'intégrale équivalente sera simple, ce qui est souvent le cas. En utilisant la proposition 1, nous cherchons le polynôme $P(x)$ tel que

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n = \int_0^1 P(x) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}(1-x)^{5n}}{2^n} dx = \int_0^1 P(x) \frac{1}{1 - \frac{x^2(1-x)^5}{2}} dx \quad (25)$$

$$= \int_0^1 P(x) \frac{2}{(x^2 - 2x + 2)(x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x + 1)} dx \quad (26)$$

Le fait que $\int_0^1 \frac{4}{(x^2 - 2x + 2)} dx = \pi$ pourrait nous inspirer dans la construction d'une formule, puisque le fait de prendre $P(x) = 2(x^5 - 3x^4 + 2x^3 + x + 1)$ nous donnerait directement une formule convergeant vers π . En fait, le polynôme cherché est probablement celui-ci, mais nous devons le vérifier.

Dans la méthode du système linéaire présentée précédemment, nous cherchons le vecteur B de coefficients du polynôme $P(X)$ avec à droite les coefficients de la somme cherchée, et à gauche, les coefficients des sommes équivalentes à chaque intégrale pour x^k (avec la relation (14)), par exemple pour $k = 2$ (2ème colonne de la matrice) :

$$\int_0^1 x x^{2n} (1-x)^{5n} dx = B(5n+1, 2n+2) = \frac{1}{\binom{7n}{2n}} \frac{(2n+1)}{(7n+1)(7n+2)} \quad (27)$$

$$= \frac{1}{\binom{7n}{2n}} \left(\frac{5}{7} \frac{1}{(7n+1)} - \frac{3}{7} \frac{1}{(7n+2)} \right) \quad (28)$$

soit finalement

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{7} & \frac{30}{49} & \frac{190}{343} & \frac{1235}{2401} & \frac{8151}{16807} \\ 0 & -\frac{3}{7} & -\frac{30}{49} & -\frac{343}{255} & -\frac{2401}{2040} & -\frac{16807}{15810} \\ 0 & 0 & \frac{4}{49} & \frac{60}{343} & \frac{660}{2401} & \frac{6380}{16807} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{13}{343} & \frac{2401}{260} & \frac{16807}{3510} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{99}{2401} & -\frac{16807}{2475} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{16807}{276} \end{pmatrix} \cdot B = \begin{pmatrix} \frac{59296}{16807} \\ -\frac{10326}{16807} \\ -\frac{3200}{16807} \\ -\frac{1352}{16807} \\ -\frac{792}{16807} \\ \frac{552}{16807} \end{pmatrix}. \quad (29)$$

On obtient facilement

$$\begin{aligned} P(X) &= B^t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ \dots \\ X^5 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ X \\ \dots \\ X^5 \end{pmatrix} \\ &= 2(1 + X + 2X^3 - 3X^4 + X^5) \end{aligned} \quad (30)$$

qui est bien le polynôme attendu, ce qui achève la démonstration.

3.3 Prediction de formules

Dans le cas de paramètres entiers dans la fonction Beta, nous avons vu que la forme de l'intégrale pouvait nous aider à prédire quel type de constantes vont apparaître. Par exemple, si nous cherchons $P(x)$ tel que $\frac{aP(x)}{a-x^{(m-p)}(1-x)^p}$ se simplifie en $\frac{1}{1+x^2}$, c'est π qui apparaîtra (puisque $4 \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} = \pi$). Nous avons donc uniquement à vérifier si $1+x^2 \mid a-x^{(m-p)}(1-x)^p$ i.e. i et $-i$ sont racines de $a-x^{(m-p)}(1-x)^p$.

Prenons un premier exemple : dans le cas $p = 2$, $m = 3$, $i(1-i)^2 = i(1+i)^2 = 2$. Donc il existe une formule pour π avec $\binom{3n}{2n}$, $p = 2$ et $a = 2$. En outre, i et $-i$ sont racines quatrièmes de 1, donc nous pouvons multiplier $x(1-x)^2$ par x^{4k} et conserver les racines i et $-i$. Ceci prouve l'existence plus généralement de formules pour π avec $C_{(3+4k)n}^{2n}$, $k \in \mathbb{N}$.

Plus généralement, examinons une condition suffisante pour

$$1 + X^2 \mid K(X) = q - X^{(m-p)}(1-X)^p \quad (31)$$

L'existence d'une formule pour π est donc équivalente à

$$\begin{aligned} \{i \text{ et } -i \text{ sont racines de } K, p < m\} &\Leftrightarrow \left\{ q - (\pm i)^{(m-p)} (1 \mp i)^p = 0, p < m \right\} \\ &\Leftrightarrow \{(1 \pm i)^p = (-1)^{m+p} q (\pm i)^m, p < m\} \\ &\Leftrightarrow \{(1 + i)^p = (-1)^{m+p} q i^m, p < m\} \text{ par conjugaison} \\ &\Leftrightarrow \left\{ (\sqrt{2})^p = q \text{ et } p \frac{\pi}{4} \equiv (m+p)\pi + m \frac{\pi}{2} [2\pi], p < m \right\} \text{ en prenant le module et l'argument} \\ &\Leftrightarrow \{2^{\frac{p}{2}} = q, p < m \text{ et } -p \equiv 2m [8]\} \\ &\Leftrightarrow \{p = 2k, 2^k = q, p < m \text{ et } 7p \equiv 2m [8]\} \end{aligned}$$

Maintenant qu'une condition simple et générale est mise en évidence, on applique cette idée pour d'autres racines et constantes, par exemple la racine -1 ($\ln(2) = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx$), ou le polynôme $x^2 - x + 1$ ($\pi\sqrt{3} = \frac{9}{2} \int_0^1 \frac{1}{1-x^2} dx$).

Pour les sommes non-alternées $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n \binom{mn}{pn}} \left(\frac{b_1}{mn+1} + \frac{b_2}{mn+2} + \dots + \frac{b_{m-1}}{mn+(m-1)} \right)$ ou, en formulation intégrale équivalente $\int_0^1 \frac{aP(x)}{a-x^p(1-x)^{(m-p)}} dx$, on obtient la table

Polynôme	Constante	Condition à partir des racines	Condition d'existence pour $p < m$
$1 + x^2$	π	$(i)^{(m-p)} (1-i)^p = a$	$p = 2k, 2^k = a, 7p \equiv 2m \pmod{8}$
$1 + x$	$\ln(2)$	$(-1)^{m-p} 2^p = a$	$m = p + 2k, a = 2^p$
$1 - x + x^2$	$\pi\sqrt{3}$	$(-1)^p \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^{p+m} = a$	$a = 1, m = 2p + 6k$
$2 + x$	$\ln\left(\frac{3}{2}\right)$	$(-2)^{(m-p)} (3)^p = a$	$m = p + 2k, a = 2^{2k} 3^p$
$z - 1 + x$	$\ln\left(\frac{z+1}{z}\right)$	$(1-z)^{(m-p)} (z)^p = a$	$m = p + 2k, a = (1-z)^{2k} z^p$
$1 + (z-1)x$	$\ln(z)$	$\left(-\frac{1}{z-1}\right)^{(m-p)} \left(1 + \frac{1}{z-1}\right)^p = a$	$m = p + 2k, a = \frac{z^p}{(z-1)^{p+2k}}$

Ceci montre l'existence de sommes du type $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n C_{(3+4k)n}^{2n}} \dots, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n C_{(6+4k)n}^{4n}} \dots, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{C_{2n}^n} \dots,$
 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{C_{4n}^{2n}} \dots, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{C_{8n}^n}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{12^n C_{3n}^n} \dots, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{48^n C_{5n}^n} \dots, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{36^n C_{4n}^{2n}} \dots$ pour ces constantes classiques.

Notons que la table précédente ne présente que les cas simples. Il existe de nombreuses intégrales de fractions rationnelles qui donnent π par exemple.

Pour les sommes alternées maintenant $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^n \binom{mn}{pn}} \left(\frac{b_1}{mn+1} + \frac{b_2}{mn+2} + \dots + \frac{b_{m-1}}{mn+(m-1)} \right)$ ou, en formulation intégrale équivalente $\int_0^1 \frac{aP(x)}{a+x^p(1-x)^{(m-p)}} dx$, on obtient la table

Polynôme	Constante	Condition à partir des racines	Condition d'existence pour $p < m$
$1 + x^2$	π	$(i)^{(m-p)} (1-i)^p = -q$	$p = 2k, 2^k = q, 7p \equiv 2m + 4 \pmod{8}$
$1 + x$	$\ln(2)$	$(-1)^{m-p+1} 2^p = q$	$m = p + 2k + 1, q = 2^p$
$1 - x + x^2$	$\pi\sqrt{3}$	$(-1)^{p+1} \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2} \right)^{p+m} = q$	$q = 1, m = 2p + 3 + 6k$
$2 + x$	$\ln\left(\frac{3}{2}\right)$	$(-2)^{(m-p)} (3)^p = -q$	$m = p + 2k + 1, q = 2^{2k} 3^p$
$z - 1 + x$	$\ln\left(\frac{z+1}{z}\right)$	$(1-z)^{(m-p)} (z)^p = -q$	$m = p + 2k + 1, q = (1-z)^{2k} z^p$
$1 + (z-1)x$	$\ln(z)$	$\left(-\frac{1}{z-1}\right)^{(m-p)} \left(1 + \frac{1}{z-1}\right)^p = q$	$m = p + 2k + 1, q = \frac{z^p}{(z-1)^{p+2k}}$

Ceci montre l'existence de sommes du type $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n C_{(5+4k)n}^{2n}} \dots, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n C_{(8+4k)n}^{4n}} \dots, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8^n C_{(7+4k)n}^{6n}} \dots,$
 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{C_{5n}^n} \dots, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{C_{11n}^n} \dots, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{12^n C_{4n}^n} \dots, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{48^n C_{6n}^n} \dots, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{36^n C_{5n}^{2n}} \dots$ pour ces constantes classiques et célèbres.

4 Paramètres fractionnaires dans la fonction Beta

Dans cette partie, nous utilisons les fractions comme paramètres de la fonction Beta pour obtenir des coefficients binomiaux plus complexes.

4.1 Introduction

Nous utilisons la définition de la fonction Beta et considérons $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$.

$$\int_0^1 x^{pn+\frac{a}{b}}(1-x)^{mn+\frac{c}{d}}dx = \frac{\Gamma(pn+\frac{a}{b}+1)\Gamma(mn+\frac{c}{d}+1)}{\Gamma((p+m)n+\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+2)} = \frac{(\frac{a}{b})_{pn+1}(\frac{c}{d})_{mn+1}\Gamma(\frac{a}{b})\Gamma(\frac{c}{d})}{(\frac{a}{b}+\frac{c}{d})_{(p+m)n+2}\Gamma(\frac{a}{b}+\frac{c}{d})} \quad (32)$$

La valeur de $\Gamma(\frac{a}{b})$ est généralement connue pour des petites valeurs de a et b . Les symboles de Pochhammer n'ont pas toujours d'expression simple avec factorielles entières, c'est pourquoi nous devons ici présenter plusieurs exemples.

4.2 Exemples

4.2.1 Cas 1

On considère l'intégrale $\int_0^1 a^{-n}x^{pn-\frac{1}{2}}(1-x)^{mn}dx = a^{-n}\frac{\Gamma(pn+\frac{1}{2})\Gamma(mn+1)}{\Gamma((p+m)n+\frac{1}{2}+1)}$. Cette dernière expression est homogène à des fractions de factorielles entières puisque la valeur $\Gamma(\frac{1}{2})$ va se simplifier au numérateur et au dénominateur en raison de la relation bien connue $\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1)$. En conséquence, la sommation sur n montre que les constantes trouvables sont liées au résultat de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{pn}(1-x)^{mn}}{a^n} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{a}{a - x^p(1-x)^m} dx \quad (33)$$

Et d'autre part, en utilisant la relation (32) à partir de $\int_0^1 a^{-n}x^{pn-\frac{1}{2}}(1-x)^{mn}dx$, et en la sommant n on obtient la somme équivalente

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2pn)!(mn+pn)!(mn)!}{a^n(2mn+2pn)!(pn)!} \quad (34)$$

Exemple :

Cas $p = 3$, $m = 1$. D'une part on a

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} (x^3 - 2x^2 + 2x - 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n} (1-x)^n}{2^n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + 2x - 2) \frac{x^{3n}}{\sqrt{x}} (1-x)^n dx \quad (35)$$

Et d'autre part, en remarquant que le polynôme est choisi pour faire apparaître π ,

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} (x^3 - 2x^2 + 2x - 2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{3n} (1-x)^n}{2^n} dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} (x^3 - 2x^2 + 2x - 2) \left(\frac{-2}{x^4 - x^3 - 2} \right) dx \quad (36)$$

$$= -2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} dx = -\pi \quad (37)$$

On traduit maintenant l'intégrale en fonctions Gamma puis en factorielles

$$\begin{aligned} & - \int_0^1 (x^3 - 2x^2 + 2x - 2) \frac{x^{3n}}{\sqrt{x}} (1-x)^n dx \\ &= - \int_0^1 x^{3n+\frac{5}{2}} (1-x)^n dx + 2 \int_0^1 x^{3n+\frac{3}{2}} (1-x)^n dx - 2 \int_0^1 x^{3n+\frac{1}{2}} (1-x)^n dx + 2 \int_0^1 x^{3n-\frac{1}{2}} (1-x)^n dx \\ &= - \frac{\Gamma(3n+\frac{7}{2}) \Gamma(n+1)}{\Gamma(4n+\frac{9}{2})} + 2 \frac{\Gamma(3n+\frac{5}{2}) \Gamma(n+1)}{\Gamma(4n+\frac{7}{2})} - 2 \frac{\Gamma(3n+\frac{3}{2}) \Gamma(n+1)}{\Gamma(4n+\frac{5}{2})} + 2 \frac{\Gamma(3n+\frac{1}{2}) \Gamma(n+1)}{\Gamma(4n+\frac{3}{2})} \\ &= \frac{(6n)!(4n)!n!}{(3n)!(8n)!} \frac{1}{512} \left(\frac{1885}{8n+1} + \frac{-965}{8n+3} + \frac{363}{8n+5} + \frac{-51}{8n+7} \right) \end{aligned} \quad (38)$$

en utilisant les valeurs de Γ aux moitiés d'entiers, qui sont données par $\Gamma(x + \frac{1}{2}) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma(2x+1)}{4^x \Gamma(x+1)}$.

Nous pouvons alors écrire en vertu de (35) et de (36)

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n \frac{(6n)!(4n)!n!}{(3n)!(8n)!} \left(\frac{1885}{8n+1} + \frac{-965}{8n+3} + \frac{363}{8n+5} + \frac{-51}{8n+7} \right) = 2^9 \pi \quad (39)$$

ou son expression équivalente avec des coefficients combinatoires

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n 2^n \frac{\binom{6n}{3n}}{\binom{8n}{4n} \binom{4n}{n}} \left(\frac{1885}{8n+1} + \frac{-965}{8n+3} + \frac{363}{8n+5} + \frac{-51}{8n+7} \right) = 2^9 \pi \quad (40)$$

4.2.2 Cas 2

On considère maintenant les intégrales $\int_0^1 x^{pn-\frac{a}{b}}(1-x)^{mn-\frac{c}{d}}dx$, dans lesquelles $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \in \mathbb{N}$. Ceci permet d'obtenir des valeurs spéciales de $\Gamma\left(\frac{a}{b}\right)\Gamma\left(\frac{c}{d}\right)$ (égales à π multiplié par un nombre algébrique) et une factorielle entière au dénominateur. Dans certains cas, la valeur de π peut disparaître avec la valeur de l'intégrale ce qui donne alors d'intéressantes sommes qui sont juste des nombres algébriques.

Exemple :

Les relations suivantes utilisant la valeur de la fonction Beta

$$\frac{\binom{3n}{n}}{27^n(3n-1)} = \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \int_0^1 x^{n-\frac{4}{3}}(1-x)^{n-\frac{2}{3}}dx - \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^1 x^{n-\frac{1}{3}}(1-x)^{n-\frac{2}{3}}dx \quad (41)$$

$$\frac{\binom{3n}{n}}{27^n(3n-2)} = \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \int_0^1 x^{n-\frac{4}{3}}(1-x)^{n-\frac{2}{3}}dx - \frac{\sqrt{3}}{4\pi} \int_0^1 x^{n-\frac{1}{3}}(1-x)^{n-\frac{2}{3}}dx \quad (42)$$

ont conduit à la somme suivante

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \binom{3n}{n}}{54^n} \left(\frac{-1}{3n-1} + \frac{1}{3n-2} \right) = \sqrt[3]{2} \quad (43)$$

Les autres relations qui permettent d'aboutir à des formules donnant des racines sont par exemple

$$\frac{\binom{2n}{n}}{16^n} = \frac{1}{\pi} \int_0^1 x^{n-\frac{1}{2}}(1-x)^{n-\frac{1}{2}}dx \quad (44)$$

$$\frac{\binom{3n}{n}}{27^n} = \frac{\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^1 x^{n-\frac{1}{3}}(1-x)^{n-\frac{2}{3}}dx \quad (45)$$

$$\frac{\binom{4n}{2n}}{64^n} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi} \int_0^1 x^{n-\frac{1}{4}}(1-x)^{n-\frac{3}{4}}dx \quad (46)$$

$$\frac{\binom{6n}{3n}\binom{3n}{2n}}{432^n\binom{2n}{n}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 x^{n-\frac{1}{6}}(1-x)^{n-\frac{5}{6}}dx \quad (47)$$

mais elles ne sont pas exactement des formes BBP.

4.2.3 Cas 3

On considère maintenant des fractions qui ne sont pas complémentaires, i.e. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} \notin \mathbb{N}$. Dans ce cas, on se ramène à des symboles de Pochhammer dans la somme (ce qui est équivalent à une factorielle entière d'un point de vue algorithmique) mais de l'autre côté, on obtient des facteurs $\frac{\Gamma(\frac{a}{b}) \Gamma(\frac{c}{d})}{\Gamma(\frac{a}{b} + \frac{c}{d})}$ qui permettent l'apparition d'autres types de constantes.

Exemple :

On part des intégrales

$$\int_0^1 x^{n-\frac{1}{4}}(1-x)^{n-\frac{1}{2}} dx = \frac{\Gamma(n+\frac{3}{4}) \Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(2n+\frac{5}{4})} \quad (48)$$

$$\int_0^1 x^{n+\frac{3}{4}}(1-x)^{n-\frac{1}{2}} dx = \frac{\Gamma(n+\frac{7}{4}) \Gamma(n+\frac{1}{2})}{\Gamma(2n+\frac{9}{4})} \quad (49)$$

et en utilisant la valeur intégrale suivante

$$\int_0^1 (x-2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} x^{n-\frac{1}{4}}(1-x)^{n-\frac{1}{2}} dx = -2 \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[4]{x}\sqrt{1-x}(x+1)} dx = -\pi \quad (50)$$

on obtient finalement

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{8^n} \frac{(\frac{1}{2})_n (\frac{1}{2})_{2n}}{(\frac{1}{4})_n (\frac{1}{4})_{2n}} \left(\frac{11}{8n+1} + \frac{1}{8n+5} \right) = \sqrt{2} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\sqrt{\pi}} \quad (51)$$

où la constante $\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{\sqrt{\pi}}$ est très intéressante puisqu'elle apparait dans de nombreuses situations à cause du fait que

$$\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2}{4\sqrt{\pi}} = \frac{1}{4} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \beta\left(\frac{1}{4}\right) = K\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = K(k_1) \quad (52)$$

où K est la fonction Elliptique de première espère et β est la fonction Beta Centrale. L'apparition de cette constante fameuse et spécifique montre la manière d'obtenir d'autres formules de ce type et leur connection avec toute la théorie des fonctions elliptiques.

5 Résultats expérimentaux

Les résultats de cette section ont été obtenus à l'aide de l'excellent programme libre PARI-GP ([Pari]), qui encourage et enthousiasme toute une génération de mathématiciens amateurs à la recherche de formules étonnantes. PARI-GP inclut l'algorithme LLL qui permet, à l'instar de l'algorithme PSLQ, de trouver des relations linéaires entières entre constantes irrationnelles, par exemple entre sommes et constantes dans notre cas. Ces formules ont été prouvées à l'aide de la méthode précédemment exposée.

5.1 Constantes simples

Quelques formules parmi tant d'autres

$$\frac{1}{3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \binom{3n}{n}} \left(\frac{8}{3n+1} + \frac{2}{3n+2} \right) = \pi \quad (53)$$

$$\frac{1}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n \binom{3n}{n}} \left(\frac{7}{3n+1} - \frac{2}{3n+2} \right) = \ln(2) \quad (54)$$

$$\frac{1}{36} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n \binom{3n}{n}} \left(\frac{23}{3n+1} + \frac{5}{3n+2} \right) = \ln(2) \quad (55)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{8^n \binom{7n}{3n}} \left(\frac{1747810}{7n+1} - \frac{185625}{7n+2} - \frac{98650}{7n+3} + \frac{31200}{7n+4} + \frac{5720}{7n+5} - \frac{4675}{7n+6} \right) = 2^2 \cdot 5 \cdot 7^6 \ln(2) \quad (56)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\binom{6n}{3n}}{3^{3n} \binom{8n}{4n} \binom{4n}{n}} \left(\frac{11855}{8n+1} - \frac{2295}{8n+3} + \frac{297}{8n+5} - \frac{17}{8n+7} \right) = 2^{11} \pi \sqrt{3} \quad (57)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n \binom{6n}{3n}}{\binom{10n}{5n} \binom{5n}{2n}} \left(\frac{2179}{10n+1} - \frac{656}{10n+3} + \frac{64}{10n+7} - \frac{11}{10n+9} \right) = 625\pi \quad (58)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{8^n \binom{6n}{3n}}{\binom{10n}{5n} \binom{5n}{2n}} \left(\frac{2678}{10n+1} + \frac{368}{10n+3} - \frac{32}{10n+7} - \frac{22}{10n+9} \right) = 625\pi \quad (59)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\binom{6n}{3n}}{27^n \binom{10n}{5n} \binom{5n}{2n}} \left(\frac{84969}{10n+1} - \frac{10096}{10n+3} + \frac{144}{10n+7} - \frac{11}{10n+9} \right) = 15000\pi\sqrt{3} \quad (60)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{6n}{3n}}{4^n \binom{10n}{5n} \binom{5n}{2n}} \left(\frac{16309}{10n+1} - \frac{7436}{10n+3} + \frac{224}{10n+7} - \frac{11}{10n+9} \right) = 20000 \ln(2) \quad (61)$$

5.2 Constantes d'ordre supérieur

Comme dans les articles reliées aux sommes BBP, on appelle "constante d'ordre n " un résultat qui est homogène à un polylogarithme d'ordre n . Ceci signifie pour nous que nous pouvons trouver une relation linéaire sur $\mathbb{N}$ entre cette constante et le polylogarithme d'ordre n . Par exemple, π ou $\ln(2)$ sont des constantes d'ordre 1 alors que $\pi \ln(2)$ ou G sont des constantes d'ordre 2. $\zeta(3)$ ou π^3 sont des constantes d'ordre 3. Les relations suivantes illustrent cette propriété

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{3n}{n} 2^n (n+1)} \left(\frac{8}{3n+1} + \frac{8}{3n+2} \right) = 3\pi^2 - 36 \ln^2(2) \quad (62)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{4n}{2n} (n+1)} \left(\frac{225}{4n+1} - \frac{144}{4n+2} + \frac{9}{4n+3} \right) = 16\pi^2 \quad (63)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{4n}{2n} 4^n (n+1)} \left(\frac{47}{4n+1} - \frac{32}{4n+2} - \frac{1}{4n+3} \right) = 64 \ln^2(2) \quad (64)$$

$$\frac{1}{7680} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\binom{8n}{4n} 4^n (n+1)} \left(\frac{28063}{8n+1} + \frac{-23040}{8n+2} + \frac{2450}{8n+3} + \frac{-2560}{8n+4} + \frac{135}{8n+5} + \frac{-128}{8n+6} \right) = \pi \ln 2 \quad (65)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\binom{2n}{n} 2^n (n+1)^2} \left(\frac{3}{(2n+1)} \right) = -2 \ln^3(2) + 3\zeta(3) \quad (66)$$

et une formule tout à fait étonnante

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{4^{n-1} (2n+1)^2} = \frac{\sqrt{2\pi}}{8} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \pi K(k_1) \quad (67)$$

qui est dérivée en fait de l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{\sqrt{x(1-x^2)}} dx = -\frac{\sqrt{2\pi}}{8} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^2$ trouvable dans [Gradshteyn et al. 1994] (4.241).

Notons que dans les formules BBP, on utilise toujours un terme $\frac{1}{(an+b)^k}$ dans la somme pour obtenir une constante d'ordre k [Bailey et al. 1996][Huvent 2001][Broadhurst 1998]

[Gourévitch 2000]. Une difficulté est cependant créée au niveau théorique par les constantes d'ordre supérieur. En effet, les intégrales équivalentes deviennent difficile à évaluer puisque l'on a par exemple

$$\frac{1}{a^n \binom{mn}{pn} (mn+1)^2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{y^{mn} x^{mn} (1-x)^{(m-p)n}}{a^n} dx dy \quad (68)$$

ce qui donne

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a^n \binom{mn}{pn} (mn+1)^2} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{a}{a - y^m x^m (1-x)^{(m-p)}} dx dy. \quad (69)$$

Il semble difficile d'aller plus loin, sauf dans les cas particuliers comme $m = p$, *i.e.* le cas BBP pur, qui ne nous intéresse pas ici. Une petite variante particulière permet d'intégrer selon y :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\binom{mn}{pn} (mn+1) (n+1)} = \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{1 - yx^m (1-x)^{(m-p)}} dy dx \quad (70)$$

$$= - \int_0^1 \frac{\ln(1 - x^m (1-x)^{(m-p)})}{x^m (1-x)^{(m-p)}} dx \quad (71)$$

et de s'en sortir pour de petites valeurs de m and p , lorsque les racines du polynôme dans le logarithme sont calculables algébriquement.

5.3 Forme polynômiale et forme BBP

Nous commençons par remarquer que la forme BBP des formules peut être parfaitement "cachée" par réécriture sous forme polynômiale

$$\pi = -8 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n C_{8n}^{4n}} \left(\frac{64}{4n} + \frac{39}{4n-1} + \frac{42}{4n-2} + \frac{60}{4n-3} \right) = -64 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (4n-1)! (4n-4)!}{4^n (8n-1)!} P(n) \quad (72)$$

où $P(n) = 820n^3 - 927n^2 + 296n - 24$.

L'idée inverse a consisté à trouver des formes type BBP pour les sommes bien connues de Ramanujan, toujours à l'aide de PARI-GP. Voici un exemple de ce type de relations, ici probablement ramenables à des transformations sur la famille des fonctions hypergéométriques équivalentes $F_{3,2}$:

$$\begin{aligned} (a-1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{4n}{2n} \binom{2n}{n}^2}{4^{4n} a^n} &= 4a \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{4n}{2n} \binom{2n}{n}^2}{4^{4n} a^n (2n-1)} \\ &- \frac{a}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!}{(n!)^4 4^{4n} a^n (4n-1)} - \frac{27a}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{4n}{2n} \binom{2n}{n}^2}{4^{4n} a^n (4n-3)} \end{aligned} \quad (73)$$

et

$$\begin{aligned}
(a-1)^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \binom{4n}{2n} \binom{2n}{n}^2}{4^{4n} a^n} &= (-4a^2 + 2a) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{4n}{2n} \binom{2n}{n}^2}{4^{4n} a^n (2n-1)} \\
&+ \left(\frac{5a^2}{8} - \frac{3a}{8} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{4n}{2n} \binom{2n}{n}^2}{4^{4n} a^n (4n-1)} + \left(\frac{81a^2}{8} - \frac{27a}{8} \right) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{4n}{2n} \binom{2n}{n}^2}{4^{4n} a^n (4n-3)}
\end{aligned} \quad (74)$$

ce qui nous a permis d'obtenir les nouvelles formulations suivantes

$$\frac{1}{128} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{4n}{2n} \binom{2n}{n}^2}{4^{4n} 81^n} \left(\frac{-2088}{2n-1} + \frac{333}{4n-1} + \frac{5103}{4n-3} \right) = \frac{\sqrt{2}}{\pi} \quad (75)$$

$$\frac{1}{250} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{4n}{2n} \binom{2n}{n}^2}{4^{4n} 324^n} \left(\frac{-3276}{2n-1} + \frac{522}{4n-1} + \frac{8019}{4n-3} \right) = \frac{1}{\pi} \quad (76)$$

ou d'autres transformations moins évidentes des formules de Ramanujan

$$\frac{1}{27} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}^3}{2^{12n}} \left(\frac{84}{2n-1} + \frac{156}{(2n-1)^2} + \frac{64}{(2n-1)^3} \right) = \frac{1}{\pi} \quad (77)$$

$$\frac{1}{125} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{3n}{2n} \binom{2n}{n}^2 4^n}{6^{3n} 27^n} \left(\frac{-2448}{2n-1} + \frac{644}{3n-1} + \frac{3552}{3n-2} \right) = \frac{1}{\pi} \quad (78)$$

$$\frac{1}{15972} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\binom{6n}{3n} \binom{3n}{2n} \binom{2n}{n}}{432^n 125^n} \left(\frac{-151200}{2n-1} + \frac{11425}{6n-1} + \frac{671875}{6n-5} \right) = \frac{\sqrt{5}}{\pi\sqrt{3}} \quad (79)$$

Cette formulation et la théorie de la fonction Beta qui fait apparaître des fonctions Gamma et des constantes liées aux fonctions elliptiques nous laisse penser qu'une démonstration directe des formules de Ramanujan n'est peut-être pas inimaginable. La formulation style BBP nous semble finalement plus souple à utiliser pour les nombreuses identités binomiales.

Remarque 3 Notons que la méthode de la fonction Beta permet d'obtenir le plus souvent des sommes dont le nombre de combinaisons au numérateur et au dénominateur diffère de 1 comme dans $\frac{\binom{6n}{3n}}{\binom{8n}{4n} \binom{4n}{n}}$. Nous supposons que d'autres sommes plus complexes

sont accessibles , telles que nombre de formules de Ramanujan qui contiennent trois combinaisons au dénominateur comme $\binom{2n}{n}^3$ ou $\binom{4n}{2n}\binom{2n}{n}\binom{2n}{n}$, bien qu'elles conduisent à des triples intégrales peu évidentes. L'utilisation de la relation elliptique

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{16^n a^{2n}} \binom{2n}{n}^2 = \frac{2}{\pi} K\left(\frac{1}{a}\right) \quad (80)$$

ouvre probablement d'intéressantes perspectives dans ce domaine.

6 Conclusion

Nous avons présenté ici une collection de formules qui n'apparaissent pas de manière unifiée. La méthode de la fonction Beta fournit une meilleure compréhension des liens unissant sommes et intégrales. La représentation d'une somme binomiale sous forme BBP nous semble intéressante et susceptible de mieux réunir les formules équivalentes mais dont les indices peuvent différer. L'apparition de constantes d'ordre supérieur, outre un intérêt calculatoire, montre clairement des liens et des propriétés similaires entre les logarithmes, la fonction ζ et le nombre π . L'exploration est probablement loin d'être terminée.

Références

- [Adamchik 1996] V.Adamchik, π^2 : *A 2000-Year Search Changes Direction*, in *Education and Research*, vol. 5, n°1, 1996
- [Almkvist et al. 2001] G. Almkvist, C. Krattenthaler, J. Petersson, "Some new formulas for π ", preprint, Matematiska Institutionen, Lunds Universitet, Sweden. and Institut fur Mathematik der Universitat Wien, Austria, 2001.
<http://www.arxiv.org/pdf/math.NT/0110238>
- [Bailey et al. 1996] D.Bailey, P.Borwein, et S.Plouffe, *On The Rapid Computation of Various Polylogarithmic Constants*, Math. Comp. vol 66, p903-913, 1997.
<http://www.cecm.sfu.ca/personal/pborwein/>
- [Bailey et al. 2001] D.H. Bailey, R.E. Crandall, "On the random character of fundamental constant expansions", *Experimental Mathematics*, vol 10, n°2, p175-190, 2001.
<http://www.nersc.gov/~dhbailey/dhbpapers/baicran.pdf>
- [Bellard 97] Computation of the n'th digit of π in any base in $O(n^2)$, 1997
http://fabrice.bellard.free.fr/pi/pi_n2/pi_n2.html

- [Borwein et al. 2000] J.Borwein, D.J.Broadhurst, J. Kamnitzer, " *Central Binomial Sums, Multiple Clausen Values and Zeta Values*", Experimental Mathematics, vol 10, n° 1, p25-34, 2001.
- [Broadhurst 1998] D.J.Broadhurst, *Polylogarithmic ladders, hypergeometric series and the ten millionth digits of $\zeta(3)$ and $\zeta(5)$* , preprint, March 1998.
<http://front.math.ucdavis.edu/math.CA/9803067>
- [Gourévitch 2000] B.Gourévitch, *Une formule BBP pour $\zeta(3)$* . June 2000.
<http://www.multimania.com/bgourevitch/perso/zeta.ps>
- [Gradshteyn et al. 1994] I.S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, " *Table of integrals, Series and Products*", Alan Jeffrey Editor, 5th ed, 1994
- [Huvent 2001] G. Huvent, *Formules BBP*, Séminaire ANO, IRMA, Lille University, 2001
http://ano.univ-lille1.fr/seminaries/expo_huvent01.pdf
- [Lupas 2000] A. Lupas, *Some BBP functions*, preprint, Sibiu University, Romania, 2000
- [Pari] Pari-GP, software pour PC, MacOS et Unix,
<http://www.parigp-home.de/>, documentation à <http://www.gn-50uma.de/ftp/pari-2.1/manuals/users.ps.gz>.
- [Plouffe 96] "On the computation of the n'th decimal digit of various transcendental numbers", 1996
<http://www.lacim.uqam.ca/~ploffe/Simon/articlepi.html>