Les mathématiques de l'arc-en-ciel

Marguerite Gisclon & Michel Raibaut(*)

Lionel Tassan, « Par monts et par mots », www.lta38.fr

Dans son traité « Les Météorologiques », Aristote (384 - 322 avant J.-C.) donne une description apparente de l'arc-en-ciel :

« Quant à l'arc-en-ciel, jamais il ne forme d'arc de cercle complet, ni de segment plus grand qu'un demi-cercle. C'est au lever et au coucher du soleil que le segment est le plus grand [...].
Il n'y a jamais plus de deux arcs de cercle en même temps. Chacun d'eux a alors trois couleurs, les couleurs sont les mêmes dans l'un et dans l'autre ; mais dans l'arc extérieur, elles sont plus faibles et leurs positions sont inversées. »

Lorsque l'on lit ces phrases ou que l'on regarde un arc-en-ciel, plusieurs questions naturelles se posent :

- Pourquoi voit-on un arc ? deux arcs ?
- Pourquoi les couleurs sont-elles séparées ?
- Pourquoi les couleurs du deuxième arc sont-elles inversées et moins lumineuses ?
- Pourquoi observe-t-on une bande sombre entre les deux arcs ?
- Pourquoi n'y a-t-il pas d'arc-en-ciel le midi ?
- Si l'on se place de l'autre côté de l'arc, voit-on toujours un arc ?

Dans cet article, à l'aide des mathématiques enseignées au lycée, nous présentons un modèle mathématique simple de l'arc-en-ciel datant du XVII^{e} siècle proposé par Descartes, Newton et Spinoza. Nous suivrons en particulier l'article de Pierre Coullet « À travers l'histoire » dans [1].

(*) LAMA, UMR 5127, Université Savoie Mont Blanc

1. Les rayons lumineux

Le concept de rayon a évolué de l'antiquité jusqu'au Moyen-Âge et l'on distingue les périodes suivantes :

- Pythagoriciens (580 – 490 avant J.-C.) : idée de rayons visuels émanant de l'œil de l'observateur… Le fait qu'un chat par exemple soit doué d'une certaine vision nocturne constituait une preuve de l'existence de ces rayons.
- Empédocle (490 – 435 avant J.-C.) : idée de rayons lumineux émanant des objets.
- Euclide (325 – 265 avant J.-C.) : naissance de l'optique géométrique.
- Dioclès (240 – 180 avant J.-C.) : principe des miroirs paraboliques.
- Ptolémée (85 – 165 après J.-C.) : étude de la réfraction de la lumière.
- Alhazen (965 – 1039 après J.-C.) : naissance de l'optique moderne. Les rayons lumineux sont émis par des sources puis réfléchis et réfractés par des objets.

Naturellement *rayons lumineux* et *rayons visuels* représentent les mêmes segments mais l'interprétation physique est différente. On peut relier les deux points de vue par retour inverse de la lumière.

Des rayons parallèles

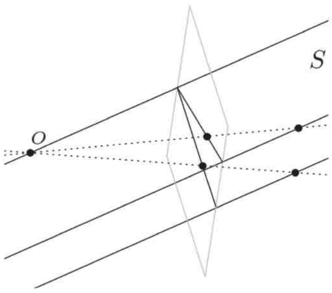
En prenant en compte la distance entre la Terre et le Soleil, ainsi que leur diamètre respectif, on peut montrer que les rayons issus du soleil et reçus par la Terre ont un angle inférieur à 0.54°. Nous supposerons par la suite que les rayons issus du soleil sont *parallèles*.

Pour plus de détails on pourra se référer à l'article « Quelques rayons de soleil » d'Isabelle et Serge Cantat dans la revue Images des Mathématiques [2].

Les rayons issus du soleil arrivent quasi-parallèles

Cette hypothèse de parallélisme est contre-intuitive avec la photo ci-dessus où les rayons apparaissent concourants. Ce phénomène d'intersection est en fait un phénomène de *projection* ou de *perspective*, analogue à l'image classique où lorsqu'un individu se place entre deux rails parallèles il voit les rails se couper à l'infini.

En effet, dans un plan de vision, par exemple la rétine de l'œil de l'observateur ou la toile d'un peintre, on obtient le schéma suivant. Dans le cas de la rétine, celle-ci étant placée derrière le point O, l'image est inversée puis renversée par le cerveau.



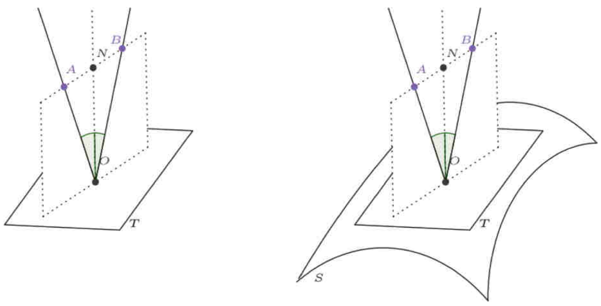
Chaque point du rayon lumineux donne alors lieu à une droite passant par le point O qui coupe le plan de vision en un point. Lorsque le point initial décrit le rayon lumineux, le point d'intersection sur le plan de vision évolue le long d'une droite. Lorsque l'on considère un deuxième rayon lumineux, celui-ci est parallèle au premier et engendre une autre droite dans le plan de vision. Ces deux droites sont concourantes en le point d'intersection de la direction lumineuse passant par l'œil et le plan de vision.

On pourra consulter l'article « Et si on rajoutait une droite à l'infini » de Christine Huyghe dans la revue Image des Mathématiques [4].

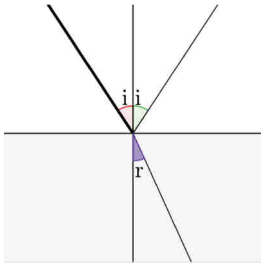
2. Les lois de la réflexion et de la réfraction

Bien que l'on retrouve des lentilles optiques fabriquées (environ 700 avant J.-C.) sous l'empire assyrien, les premiers écrits d'optique géométrique remontent au moins à Euclide (environ 280 avant J.-C.) où, dans son traité d'optique, la loi de la réflexion des rayons visuels est énoncée.

Lorsqu'un rayon incident se réfléchit sur une surface plane, l'angle entre la normale au plan et le rayon réfléchi est égal à l'angle entre la normale au plan et le rayon incident. Ce principe s'étend à une surface lisse, la réflexion se fait le long du plan tangent à la surface au point d'impact.



Lorsque un rayon *monochromatique* rencontre un obstacle transparent, une partie du rayon lumineux est réfléchie et une partie est transmise.

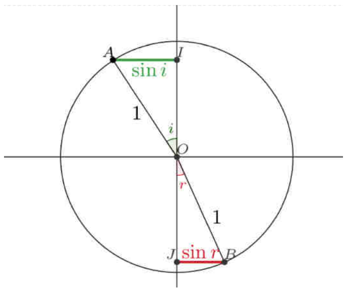


Ptolémée (90 – 168), Grossetête (1175-1253) puis Kepler (1571-1630) ont étudié le phénomène de *réfraction* des rayons lumineux mais Snell (1580 – 1626) et Descartes (1596 – 1650) ont donné la loi mathématique de la réfraction

$$\sin(i) = n \sin(r)$$

où n est une constante indépendante de i. Les physiciens ont depuis montré que n est le rapport entre la vitesse de la lumière dans le vide notée c avec la vitesse de propagation du rayon lumineux dans le fluide ou le matériau notée v. Cette vitesse v et l'angle de la réfraction r dépendent de la couleur du rayon (caractérisée par sa longueur d'onde) et de la nature du milieu.

Donnons une interprétation géométrique de cette formule.



Dans le dessin ci-dessus, les triangles OIA et OJB sont rectangles donc

$$\sin(i) = \frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{AO}} = \mathrm{AI} \text{ et } \sin(r) = \frac{\mathrm{JB}}{\mathrm{OB}} = \mathrm{JB}.$$

La formule de Snell-Descartes s'interpréte donc comme la constance du rapport $\frac{\mathrm{AI}}{\mathrm{JB}}$

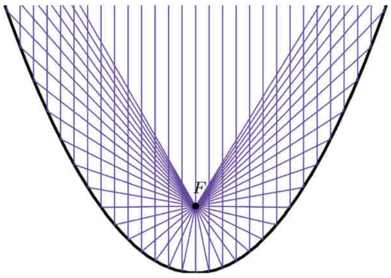
Dispersion de la lumière.

La lumière blanche est une superposition de rayons monochromatiques. À la traversée d'un prisme, les différents rayons monochromatiques constituant un rayon de lumière blanche se réfractent avec des angles de réfractions différents liés à leur couleur différente. Les couleurs sont ainsi séparées.

3. Caustiques

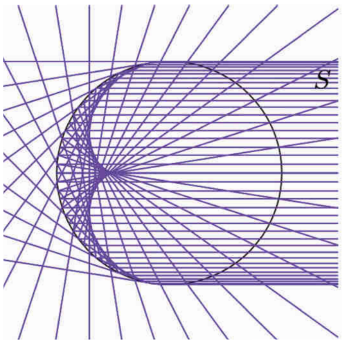
Lorsqu'une famille de rayons parallèles se réfléchit sur une surface ou un contour, des phénomènes de superpositions lumineuses appelés *caustiques* se produisent. Donnons en deux exemples :

- Une famille de rayons lumineux parallèles à l'axe d'une parabole se réfléchissent sur la parabole en suivant la loi de la réflexion. Les rayons réfléchis s'intersectent alors en un point qui est le foyer de la parabole. Dans ce cas, la caustique est un point.



Cette observation remonte au moins à Dioclès (240 – 180 avant J.-C.) dans le cadre des miroirs paraboliques. Elle est communément utilisée aujourd'hui avec les antennes paraboliques (voir l'article *Four solaire et parabole* du présent bulletin).

- Une famille de rayons lumineux parallèles se réfléchit sur le bord d'une tasse à café. Les rayons réfléchis s'intersectent alors le long d'une caustique qui a la forme d'un cœur inscrit. La courbe obtenue est une néphroïde.



L'arc en-ciel est lui aussi un phénomène de superposition de rayons lumineux. Nous allons dans la suite de l'article déterminer ces caustiques.

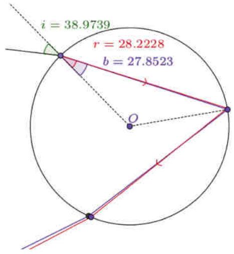
4. L'arc-en-ciel

Vers la fin du Moyen-Âge, grâce à l'expérimentation, deux savants, Al Farisi (1267 – 1320) et Thierry de Friedberg (1250 – 1310), donnèrent indépendamment l'explication des phénomènes physiques contribuant à la formation de l'arc-en-ciel. L'arc est induit par la traversée des rayons lumineux à travers les gouttes d'eau qui jouent alors le rôle de prisme. Al Farisi a par exemple étudié le trajet d'un rayon lumineux à travers une sphère transparente remplie d'eau et placée dans une chambre noire.

Les gouttes séparent les couleurs

Dans cet article nous faisons l'hypothèse que les gouttes d'eau de pluies sont des *sphères*. Par exemple, filmer au ralenti des chutes de gouttes d'eau justifie expérimentalement cette hypothèse. Par ailleurs la surface d'une goutte d'eau de pluie qui tombe est minimale, ce qui justifie théoriquement l'hypothèse.

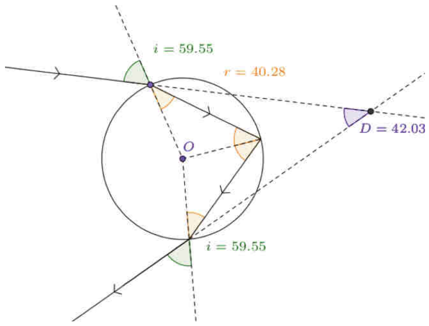
Les rayons qui induisent l'arc-en-ciel sont les rayons incidents qui se réfractent sur la surface de la goutte, puis se réfléchissent sur la surface avant de se réfracter à nouveau pour sortir de la goutte.
Les gouttes d'eau jouent ainsi le rôle de prisme et séparent les différents rayons monochromatiques.



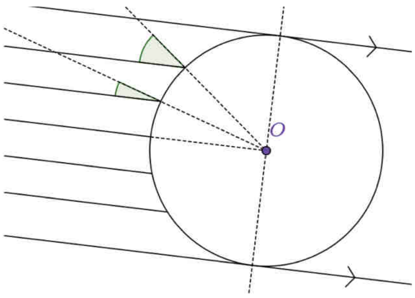
Le phénomène caustique lié à l'arc-en-ciel

Dans le schéma ci-dessous, l'angle formé par le rayon incident monochromatique et la normale à la sphère au point d'impact est noté i et l'angle de réfraction est noté r. On peut noter que les angles mis en évidence dans les triangles sont tous égaux par application de la loi de la réflexion et par le fait que ces triangles sont isocèles. L'angle formé par le rayon incident et le rayon émis est noté D et appelé *angle de déviation*. On déduit du théorème de l'angle au centre la formule.

$$D = 4r - 2i$$



Les rayons incidents sont tous parallèles. La courbure de la goutte induit des angles d'incidences différents variant entre 0 et 90°. L'angle de déviation est une fonction de l'angle d'incidence i.



Dans son ouvrage « Les météores », Descartes met en évidence le fait que l'angle de déviation admet un maximum pour une valeur notée i_{max} dépendant de la couleur du rayon. Au voisinage de son maximum l'angle D varie très peu car sa dérivée est nulle. Les rayons d'angle d'incidence proches de i_{max} induisent alors des rayons émis très proches qui se superposent. D'où l'apparition de caustiques. Ces rayons portent le nom de « rayons efficaces de Descartes ». Les autres rayons ayant un angle d'incidence loin de i_{max} induisent des rayons émis déviés les uns par rapport aux autres par la variation de D. Ils ne se superposent pas et ne donnent pas lieu à des phénomènes de caustique.

Calcul de l'angle d'incidence optimal

Descartes (1596-1650), Newton (1643-1727), Spinoza (1632-1677) ont chacun donné un calcul de cet angle optimal. ([3], [5], [6]). Nous allons donner une caractérisation de cet angle à l'aide des outils du lycée. Nous réutilisons pour cela les notations précédentes r et D en faisant apparaître la variable i. On commence par dériver la relation précédente

$$\mathrm{D}(i) = 4r(i) - 2i$$

pour obtenir l'égalité

$$\mathrm{D}'(i) = 4r'(i) - 2.$$

On suppose que i_0 est un extremum de D, par conséquent $\mathrm{D}'(i_0) = 0$, ce qui équivaut à $r'(i_0) = \frac{1}{2}$. On dérive la formule de Snell-Descartes $\sin(i) = n\sin(r)$, ce qui donne la relation :

$$\cos(i) = nr'(i)\cos(r(i))$$

et au point extremum i_0 on obtient l'égalité

$$\cos(i_0) = \frac{n}{2}\cos(r(i_0)).$$

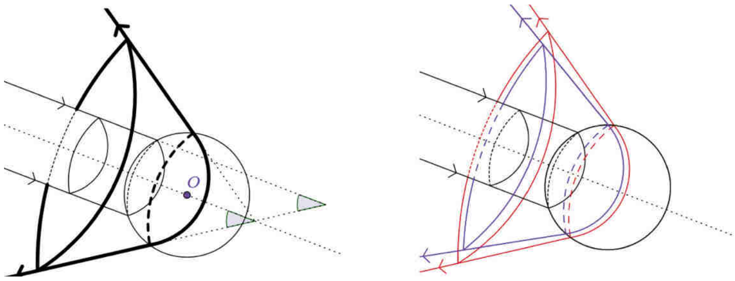
En élevant au carré, en utilisant la relation $\cos^2(i_0) + \sin^2(i_0) = 1$ puis la formule de Snell-Descartes nous obtenons l'égalité

$$\sin^2(i_0) = \frac{1}{3}(4 - n^2).$$

Pour les couleurs rouge et bleu, nous avons n = 1.33 et n = 1.345 et nous obtenons D = 40.4°.

La caustique est conique

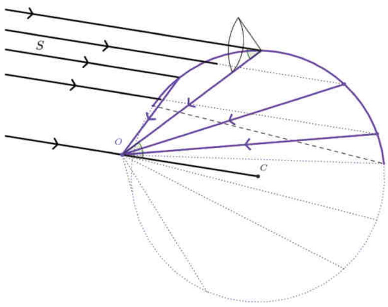
Nous supposons que la goutte est sphérique et les rayons incidents monochromatiques. L'ensemble des rayons ayant une incidence donnée ι est un cylindre. L'ensemble des rayons émis est alors un cône d'axe l'axe d'incidence. Par parallélisme l'angle du cône est égal à l'angle de déviation. Si on ne considère que les rayons incidents dont l'angle est proche de i_{max} les cônes d'émissions se superposent. La caustique obtenue est alors conique comme réunion de cônes.



Dans le cas de la lumière blanche, chaque goutte joue le rôle de prisme et émet des caustiques coniques associées à chaque couleur.

L'arc de cercle

On fixe une couleur C et la direction Δ des rayons incidents. Chaque goutte émet un cône de couleur C, de même angle θ, d'axe de direction Δ. Par application du théorème des angles alternes-internes les rayons interceptés par l'œil de l'observateur noté O, forment un cône d'angle θ et d'axe de direction Δ. L'intersection de ce cône avec le plan de pluie est un cercle dont le centre C est l'intersection de la droite passant par O, de direction Δ avec le plan de pluie.

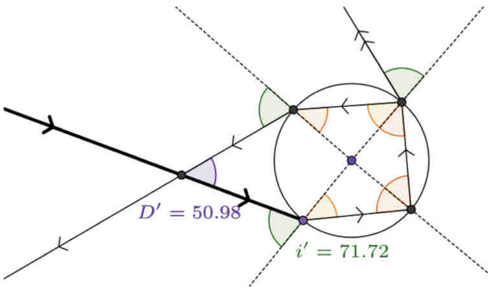


Ainsi, l'arc-en-ciel est relatif à l'observateur. En général celui-ci ne voit qu'une portion de cercle car le centre C est sous terre. Et ce point est d'autant plus profond que le soleil est haut dans le ciel. Le modèle explique ainsi que les arcs-en-ciel du matin ou du soir sont bien plus grands que ceux de la mi-journée. Par ailleurs, on peut observer un arc de cercle entier depuis un avion

http ://www.slate.fr/story/92363/double-rainbows

Un deuxième arc-en-ciel

Dans certaines circonstances on observe un deuxième arc-en-ciel nettement moins lumineux que le premier et avec des couleurs inversées. Il s'agit là aussi d'un phénomène caustique. Les rayons à l'origine de ce phénomène sont les rayons incidents qui se réfléchissent deux fois dans la goutte avant de se réfracter.



L'angle de déviation D′ varie en fonction de l'angle d'incidence i et admet un minimum pour une valeur i'_{min}. Lorsque les rayons ont un angle d'incidence i proche de i'_{min} les rayons émis sont très proches et se superposent produisant le phénomène de caustique. La deuxième réflexion dans la goutte induit alors l'inversion de l'ordre des couleurs.

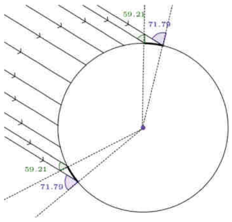
On pourra se référer au site http://experiences.math.cnrs.fr/ pour des applications flash.

La bande sombre d'Alexandre

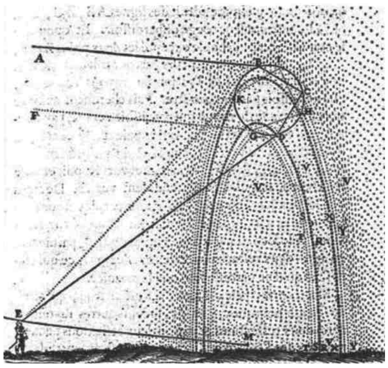
On observe sur les photos une bande sombre entre les deux arcs. Elle est appelée *bande sombre d'Alexandre*. Le modèle précédent donne une première justification : les rayons ayant une incidence i satisfaisant

$$i_{\max} \approx 59.5° \leq i \leq i'_{\min} \approx 71.8°$$

induisent des rayons émis hors de toute caustique. Il n'y a donc pas de phénomènes lumineux.



Nous concluons cet article par cette figure de Descartes qui résume la présentation du modèle



L'arc-en-ciel Descartes, Les météores

Biblographie

[1] Arc de cercle en ciel, Magazine de Culture scientifique de l'Insitut Robert Hooke, Université de Nice Sophia Antipolis, Mai 2006,
http://marc-cnrs.monticelli.fr/IMG/pdf/irh-magazine-1.pdf
[2] I. Cantat, S. Cantat, Quelques rayons de Soleil,
http://images.math.cnrs.fr/Quelques-rayons-de-soleil.html
[3] Descartes, Les météores
[4] C. Huyghe, Et si on rajoutait une droite à l'infini.
http://images.math.cnrs.fr/Et-si-on-rajoutait-une-droite-a-l-infini
[5] Newton, Opticks.
[6] Spinoza's Algebraic Calculation of the Rainbow and Calculation of Chances, M.J Petry, International archives of the history of ideas.

Certaines figures geogebra peuvent être consultées à l'adresse
https://www.geogebra.org/michel.raibaut
Cet article est tiré d'un exposé effectué dans le cadre de la manifestation *Amphi pour Tous* de l'Université Savoie Mont Blanc
https://www.youtube.com/watch?v=GVzLTslbbwY