SECTIONS BILINGUES
FRANCO-TCHÈQUES ET FRANCO-SLOVAQUES

FORMULAIRE DE MATHÉMATIQUES

I. COMBINATOIRE – DÉNOMBREMENTS

$card(A \cup B) = card(A) + card(B) - card(A \cap B)$

$card(A \times B) = card(A)card(B)$

Soit E un ensemble de n éléments.

Nombre de permutations de E : $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$; $0! = 1$

Nombre d'arrangements de p éléments de E :

$A_n^p = n(n-1)\cdots(n-p+1)$

Nombre de p-listes de E : n^p

Nombre de sous-ensembles de p éléments de E :

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!} = \frac{n!}{p!(n-p)!}$$

Propriétés : $C_n^p = C_n^{n-p} \qquad C_{n+1}^{p+1} = C_n^p + C_n^{p+1}$

II. PROBABILITÉS

Si A et B sont incompatibles, $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

Cas général : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$; $\quad P(\Omega) = 1$; $\quad P(\emptyset) = 0$

Dans le cas de l'équiprobabilité, $P(A) = \dfrac{card(A)}{card(\Omega)}$

Formules des probabilités totales :
Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ forment une partition de l'événement A

$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$, et, pour tout événement B :

$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \ldots + P(B \cap A_n)$

Si A et B sont *indépendants*, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

III. ALGÈBRE

A. IDENTITÉS REMARQUABLES

(formules valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$; $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

$a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$; $a^2 + b^2 = (a+bi)(a-bi)$;

$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

Formule du binôme de Newton :

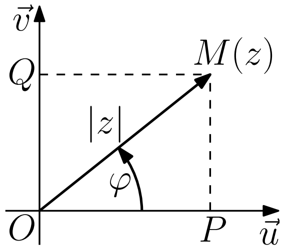
$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + b^n$

B. NOMBRES COMPLEXES

Forme algébrique $\quad z = x + iy$

Forme trigonométrique $\quad z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Forme exponentielle $\quad z = |z|e^{i\varphi}$



$\overrightarrow{OM} = x\vec{u} + y\vec{v}$

$\overline{OP} = x = Re(z) = |z|\cos\varphi$

$\overline{OQ} = y = Im(z) = |z|\sin\varphi$

$OM = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

Opérations algébriques :

$z + z' = (x+iy) + (x'+iy') = (x+x') + i(y+y')$

$zz' = (x+iy)(x'+iy') = (xx' - yy') + i(xy' + x'y)$

Conjugué :

$z = x + iy = |z|e^{i\varphi}$; $\overline{z} = x - iy = |z|e^{-i\varphi}$

$x = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$; $y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$; $\overline{zz'} = \overline{z}\,\overline{z'}$; $z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2$;

$$\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{x}{x^2+y^2} + i\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{1}{|z|}\ e^{-i\varphi}$$

Module et argument d'un produit, d'un quotient

$|zz'| = |z||z'|$ et $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$

$zz' = |z||z'|[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')] = |z||z'|\ e^{i(\varphi+\varphi')}$

$$\frac{z}{z'} = \frac{|z|}{|z'|}[\cos(\varphi - \varphi') + i\sin(\varphi - \varphi')] = \frac{|z|}{|z'|}\ e^{i(\varphi-\varphi')}$$

Formule de Moivre et applications :
pour tout entier relatif n non nul, on a :

$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi$; $(e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}$

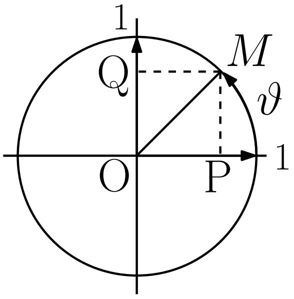
$z^n = [|z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) =$
$= |z|^n e^{in\varphi}$

Les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité sont
$u_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ où $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$

Angle orienté de deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = \arg\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}$$

C. TRIGONOMÉTRIE



$\overline{OP} = \cos\vartheta$

$\overline{OQ} = \sin\vartheta$

$\cos^2\vartheta + \sin^2\vartheta = 1$

$\tan\vartheta = \dfrac{\sin\,\vartheta}{\cos\,\vartheta}$ pour $\vartheta \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Formules d'Euler :

$$\cos\,\vartheta = \frac{1}{2}(e^{i\vartheta} + e^{-i\vartheta}) \text{ et } \sin\,\vartheta = \frac{1}{2i}(e^{i\vartheta} - e^{-i\vartheta})$$

Formules d'addition : $e^{i(a+b)} = e^{ia}e^{ib}$

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos\,a\,\cos\,b - \sin\,a\,\sin\,b \\ \cos(a-b) = \cos\,a\,\cos\,b + \sin\,a\,\sin\,b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tan(a+b) = \dfrac{\tan a + \tan b}{1 - \tan a \tan b} \\ \tan(a-b) = \dfrac{\tan a - \tan b}{1 - \tan a \tan b} \end{cases}$$

Formules de duplication :

$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$

$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$

$\cos^2 a = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 2a)$ et $\sin^2 a = \dfrac{1}{2}(1 - \cos 2a)$

Formules de transformation :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2}\left[\cos(a+b) + \cos(a-b)\right]$$

$$\sin a \sin b = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$

$$\cos a \sin b = \frac{1}{2}\left[\sin(a+b) + \sin(a-b)\right]$$

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\cos\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

Valeurs remarquables

	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$		0

D. EQUATIONS DU SECOND DEGRÉ

Soit a, b et c des nombres réels, $a \neq 0$ et $\Delta = b^2 - 4ac$

L'équation $az^2 + bz + c = 0$ admet

-si $\Delta > 0$, deux solutions réelles :

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

-si $\Delta = 0$, une solution réelle double : $z_1 = z_2 = \dfrac{-b}{2a}$

-si $\Delta < 0$, deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \overline{z_1} = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Dans tous les cas : $az^2 + bz + c = a(z - z_1)(z - z_2)$

avec $z_1 + z_2 = \dfrac{-b}{a}$ et $z_1 z_2 = \dfrac{c}{a}$

E. SUITES ARITHMÉTIQUES ; SUITES GÉOMÉTRIQUES

(formules valables sur $\mathbb{C}$ et donc sur $\mathbb{R}$)

Premier terme u_0

Suites arithmétiques $u_{n+1} = u_n + r$; $u_n = u_0 + nr$;

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = (n+1)\frac{u_0 + u_n}{2}$$

Suites géométriques $u_{n+1} = qu_n$; $u_n = u_0 q^n$;

$$u_0 + u_1 + \cdots + u_n = u_0\frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

IV. ANALYSE

A. PROPRIÉTÉS ALGÉBRIQUES DES FONCTIONS USUELLES

1. Fonctions logaritme et exponentielle :

$e^0 = 1$; $e^{a+b} = e^a e^b$; $e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$; $(e^a)^b = e^{ab}$

$\ln\,x = \displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}dt$ où $x > 0$; $e^{(\alpha+i\beta)x} = e^{\alpha x}(\cos\,\beta x + i\sin\,\beta x)$

$\ln\,1 = 0$; $\ln\,e = 1$

$\ln ab = \ln a + \ln b$

$\ln \dfrac{a}{b} = \ln a - \ln b$

$\ln\,a^x = x\ln\,a$; $\log_a x = \dfrac{\ln\,x}{\ln\,a}$; $\log_a c = \dfrac{1}{\log_c a}$

$$a^x = e^{x\,\ln\,a} \text{ et } a^x = b^{x\,\log_b a} \text{ où } a, b > 0$$

$$y = e^x \Leftrightarrow x = \ln\,y \quad \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \left]0; \infty\right[$$

2. Fonctions puissances

$x^\alpha = e^{\alpha\ln\,x}$ où $x > 0$; $x^0 = 1$

$x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta$ et $x^{\alpha-\beta} = \dfrac{x^\alpha}{x^\beta}$; $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$

Pour tout $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, on a

$y = \sqrt[n]{x} \Leftrightarrow x = y^n \quad \forall\, x \in [0; +\infty[$ et $y \in [0; +\infty[$

B. DÉRIVÉES ET PRIMITIVES

(les formules ci-dessous servent à la fois à dériver et trouver une primitive)

1. Dérivées et primitives des fonctions usuelles :

$f(x)$	$f'(x)$	Intervalle de validité
k	0	$\left]-\infty;+\infty\right[$
x	1	$\left]-\infty;+\infty\right[$
x^n	nx^{n-1}	$\left]-\infty;+\infty\right[$
$\dfrac{1}{x}$	$\dfrac{-1}{x^2}$	$\left]-\infty;0\right[$ ou $\left]0;+\infty\right[$
$\dfrac{1}{x^n}$ où $n\in\mathbb{N}^*$	$\dfrac{-n}{x^{n+1}}$	$\left]-\infty;0\right[$ ou $\left]0;+\infty\right[$
$\sqrt{x}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$\left]0;+\infty\right[$
x^α où $\alpha\in\mathbb{R}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\left]0;+\infty\right[$
$\ln x$	$\dfrac{1}{x}$	$\left]0;+\infty\right[$
e^x	e^x	$\left]-\infty;+\infty\right[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\left]-\infty;+\infty\right[$
$\sin x$	$\cos x$	$\left]-\infty;+\infty\right[$
$\tan x$	$1+\tan^2 x=\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\dfrac{\pi}{2}+k\pi\right\}, k\in\mathbb{Z}$
$\text{cotan}x$	$\dfrac{-1}{\sin^2 x}=-1-\text{cotan}^2 x$	$\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi\right\}, k\in\mathbb{Z}$
e^{rx} où $r\in\mathbb{C}$	re^{rx}	$\left]-\infty;+\infty\right[$

2. Opérations sur les dérivées :

u et v représentent des fonctions, $k\in\mathbb{R}$, $\alpha\in\mathbb{R}-\{0\}$

$(u+v)'=u'+v'\,;\quad (ku)'=ku'$

$(uv)'=u'v+uv'\,;\quad \left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}\,;\quad \left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$\Big[u\left(v(x)\right)\Big]'=u'\left(v(x)\right)\cdot v'(x)$

$(e^u)'=e^u u'\,;\quad (\ln u)'=\dfrac{u'}{u}\,;\quad (u^\alpha)'=\alpha u^{\alpha-1}u'$

C. LIMITES DE FONCTIONS USUELLES ET DE SUITES

1. Limites de fonctions

Comportement à l'origine :

$\lim\limits_{x\to0}\ln x=-\infty\,;\quad \lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

Si $\alpha>0$, $\lim\limits_{x\to0}x^\alpha=0$ et si $\alpha<0$, $\lim\limits_{x\to0}x^\alpha=+\infty$

Croissances comparées à l'origine :

$\lim\limits_{x\to0}x\ln x=0\,;\qquad$ si $\alpha>0$, $\lim\limits_{x\to0}x^\alpha\ln x=0$

Comportement à l'infini :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty\,;\quad \lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0$

Si $\alpha>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha=+\infty$ et si $\alpha<0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha=0$

Croissances comparées à l'infini :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty\,;\quad \lim\limits_{x\to-\infty}xe^x=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0\,;\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(x+1)}{x}=0$

Si $\alpha>0$, alors on a :

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^\alpha}=+\infty\,;\quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=0\,;\quad \lim\limits_{x\to+\infty}x^\alpha e^{-x}=0$

2. Limites de suites

Si $\alpha>0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}n^\alpha=+\infty$ et si $\alpha<0$, $\lim\limits_{n\to+\infty}n^\alpha=0$

Si $a>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}a^n=+\infty$ et si $0<a<1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}a^n=0$

Si $\alpha>0$ et $a>1$, $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a^n}{n^\alpha}=+\infty$

3. Formes indéterminées des limites

« $\infty-\infty$ » « $\infty\cdot0$ » « $\dfrac{0}{0}$ » « $\dfrac{\infty}{\infty}$ »

D. CALCUL INTÉGRAL

Formules fondamentales :

Si F est une primitive de f, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$

Si $g(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)dt$, alors $g'(x)=f(x)$

$f(x)-f(a)=\displaystyle\int_a^x f'(t)dt\,;\qquad \int_b^a f(t)dt=-\int_a^b f(t)dt$

Formule de Chasles : $\displaystyle\int_a^c f(t)dt=\int_a^b f(t)dt+\int_b^c f(t)dt$

Linéarité : $\displaystyle\int_a^b\big(\alpha f(t)+\beta g(t)\big)dt=\alpha\int_a^b f(t)dt+\beta\int_a^b g(t)dt$

Positivité : si $a\le b$ et $f\ge0$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt\ge0$

Intégration d'une inégalité :

si $a\le b$ et $f\le g$, alors $\displaystyle\int_a^b f(t)dt\le\int_a^b g(t)dt$

si $a\le b$, alors $\displaystyle\left|\int_a^b f(t)dt\right|\le\int_a^b\big|f(t)\big|dt$

si $a\le b$ et $m\le f\le M$, alors $m(b-a)\le\displaystyle\int_a^b f(t)dt\le M(b-a)$

Intégration par parties :

$\displaystyle\int_a^b u(t)v'(t)dt=\big[u(t)v(t)\big]_a^b-\int_a^b u'(t)v(t)dt$

V. CONIQUES

Conique de foyer F,		
parabole	ellipse	hyperbole
Le paramètre $p = d(F;(D))$ Sommet A : $AF = \frac{p}{2}$	$a = OA = \frac{1}{2}$ axe focal $c = OF = \frac{1}{2}$ distance focale	$a = OA = \frac{1}{2}$ axe focal $c = OF = \frac{1}{2}$ distance focale
	$MF + MF' = 2a$	$\lvert MF - MF'\rvert = 2a$
	$a^2 = b^2 + c^2$ $b = OB = \frac{1}{2}$ petit axe	$c^2 = a^2 + b^2$
Equation réduite par rapport à l'axe de symétrie et à la tangente au sommet $S(x_s, y_s)$ $(y - y_s)^2 = \pm 2p(x - x_s)$ ou $(x - x_s)^2 = \pm 2p(y - y_s)$	Equation réduite (par rapport aux axes de symétrie), le centre d'ellipse $S(x_s, y_s)$: $\frac{(x-x_s)^2}{a^2} + \frac{(y-y_s)^2}{b^2} = 1 \quad (E)$ ou $\frac{(y-y_s)^2}{a^2} + \frac{(x-x_s)^2}{b^2} = 1$	Equation réduite (par rapport aux axes de symétrie), le centre de l'hyperbole $S(x_s, y_s)$: $\frac{(x-x_s)^2}{a^2} - \frac{(y-y_s)^2}{b^2} = 1 \quad (H)$ ou $\frac{(y-y_s)^2}{a^2} - \frac{(x-x_s)^2}{b^2} = 1$
		Asymptotes : $(y - y_s) = \pm\frac{b}{a}(x - x_s)$ ou $(y - y_s) = \pm\frac{a}{b}(x - x_s)$
Tangente en $M_0(x_0; y_0)$: $(y - y_s)(y_0 - y_s) = \pm p(x - x_s + x_0 - x_s)$ ou $(x - x_s)(x_0 - x_s) = \pm p(y - y_s + y_0 - y_s)$	Tangente en $M_0(x_0; y_0)$ pour l'équation *(E)* : $\frac{(x-x_s)(x_0-x_s)}{a^2} +$ $+ \frac{(y-y_s)(y_0-y_s)}{b^2} = 1$	Tangente en $M_0(x_0; y_0)$ pour l'équation *(H)* : $\frac{(x-x_s)(x_0-x_s)}{a^2} -$ $- \frac{(y-y_s)(y_0-y_s)}{b^2} = 1$

VI. GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE DANS L'ESPACE

Formules valables dans un repère orthonormé direct $(O;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$

Produit scalaire des vecteurs $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ *et* $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \lvert\lvert\vec{u}\rvert\rvert \cdot \lvert\lvert\vec{v}\rvert\rvert \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Produit vectoriel :

$$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v} = (u_2v_3 - u_3v_2; u_3v_1 - u_1v_3; u_1v_2 - u_2v_1)$$

Aire du parallélogramme $ABCD$: $\mathcal{A} = \lvert\lvert\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\rvert\rvert$

Volume du parallélépipède $ABCDEFGH$:

$$V = \lvert(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AE}\rvert$$

Angle de deux droites :

$$\cos\alpha = \frac{\lvert\vec{u}\cdot\vec{v}\rvert}{\lvert\lvert\vec{u}\rvert\rvert \cdot \lvert\lvert\vec{v}\rvert\rvert}$$

Angle de deux plans :

$$\cos\alpha = \frac{\lvert\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}\rvert}{\lvert\lvert\vec{n_1}\rvert\rvert \cdot \lvert\lvert\vec{n_2}\rvert\rvert}$$

Angle d'une droite p *et d'un plan* ρ : $\sin\alpha = \frac{\lvert\vec{u_p}\cdot\vec{n_\rho}\rvert}{\lvert\lvert\vec{u_p}\rvert\rvert \cdot \lvert\lvert\vec{n_\rho}\rvert\rvert}$

Distance d'un point $M(m_1; m_2; m_3)$ *au plan* $\rho : ax + by + cz + d = 0$:

$$d = \frac{\lvert am_1 + bm_2 + cm_3 + d\rvert}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$