

# TOUTES LES MATHÉMATIQUES

## et les bases de l'informatique

***Horst Stöcker***

Professeur à l'université J. W. Goethe  
à Francfort-sur-le-Main (Allemagne)

Traduit par

***Vincent Bosser***

Ancien élève de l'École Centrale de Lyon  
Docteur ès mathématiques de l'université Paris 6  
Assistant de mathématiques à l'université de Bâle (Suisse)

et

***Sandra Marcello***

Docteur ès mathématiques de l'université Paris 7

DUNOD

L'édition originale de ce livre a été publiée en Allemagne par Verlag Harri Deutsch, Francfort-sur-le-Main, sous le titre : *Taschenbuch mathematischer - Formeln und moderner Verfahren*. (4. Korrigierte Auflage). © Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, Thun, 1999.

*Illustration de couverture : Lionel Auvergne*

Le pictogramme qui figure ci-contre mérite une explication. Son objet est d'alerter le lecteur sur la menace que représente pour l'avenir de l'écrit, particulièrement dans le domaine de l'édition technique et universitaire, le développement massif du photocollage.

Le Code de la propriété intellectuelle du 1<sup>er</sup> juillet 1992 interdit en effet expressément la photocopie à usage collectif sans autorisation des ayants droit. Or, cette pratique

d'enseignement supérieur, provoquant une baisse brutale des achats de livres et de revues, au point que la possibilité même pour les auteurs de créer des œuvres nouvelles et de les faire éditer correctement est aujourd'hui menacée. Nous rappelons donc que toute reproduction, partielle ou totale, de la présente publication est interdite sans autorisation de l'auteur, de son éditeur ou du Centre français d'exploitation du droit de copie (CFC, 20, rue des Grands-Augustins, 75006 Paris).



© Dunod, Paris, 2005  
ISBN 978-2-10-070263-3

Le Code de la propriété intellectuelle n'autorisant, aux termes de l'article L. 122-5, 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup> al., d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause est illicite » (art. L. 122-4).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles L. 335-2 et suivants du Code de la propriété intellectuelle.

## **Principaux collaborateurs**

Prof. Dr.-Ing. **Holger Lutz**, FH Gießen-Friedberg,

Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Math. **Monika Lutz**, FH Gießen-Friedberg

Dr. **Jens Konopka**, Uni Frankfurt, (1 & 2) avec

Dr.-Ing. Dieter Zetsche, Mercedes-Benz AG, Stuttgart,

Prof. Dr. Helmut Kuhnle, Uni Hohenheim

Dr. **André Jahns**, Uni Frankfurt, (3 & 4) avec

Prof. Dr. Hans Babovsky, Uni Kaiserslautern,

Dipl.-Phys. Nina Flach, Dresden,

Prof. Dr. Steffen Bohrmann, FHT Mannheim

Dr. **Christoph Hartnack**, École des Mines et Subatech Nantes, (5 & 16) avec

Prof. Dr. Steffen Bass, Duke University,

Prof. Dr.-Ing. Rainer Frendt, FH Rheinland-Pfalz, Abt. Kaiserslautern

Dr. **Jürgen Schaffner**, Columbia University, (6-8 & 12-15) avec

Dr. **Mario Vidović**, Uni Frankfurt,

Prof. Dr.-Ing. Holger Lutz, FH Gießen-Friedberg,

Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Math. Monika Lutz, FH Gießen-Friedberg

Prof. Dr. **Horst Stöcker**, Uni Frankfurt, (9) avec

Dr. Christian Hofmann, TU Dresden,

Dipl.-Ing. Helmut Kutz, Mauser AG, Oberndorf

Dr. **Klaus Rumrich**, Uni Frankfurt, (10 & 24) avec

Dipl.-Inform. Inge Rumrich, Uni Frankfurt,

Prof. Dr. Wieland Richter, Uni GH Paderborn

Prof. Dr. **Siegfried Fuchs**, Dresden, (11 & 21) avec

Dr. **Raffaele Mattiello**, Uni Frankfurt,

Prof. Dr. Georg Terlecki, FH Rheinland-Pfalz, Abt. Kaiserslautern

Prof. Dr. **Dirk Rischke**, Univ. Frankfurt, (17) avec

Prof. Dr. Rudolf Pitka, FH Frankfurt

Dr. **Thomas Schönfeld**, Uni Frankfurt, (18) avec

Prof. Dr. Wilhelm Werner, FH Heilbronn, Außenstelle Künzelsau

Dr. **Volker Blum**, Schumann & Partner, Köln, (19 & 20) avec

Dr. **Christoph Best**, Uni Frankfurt,

Phys. Techn. Ass. Astrid Steidl, NTA Isny,

Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Wendt, FHT Esslingen

Prof. Dr. **Adolf Grauel**, Uni GH Paderborn, (22)

Dr. **Arnd Bischoff**, Uni Frankfurt, (23) avec

Prof. Dr. Bernd Schürmann, Siemens AG

Dr. **Markus Hofmann**, Uni Frankfurt, (24) avec

Dr. Christian Spieles, Uni Frankfurt,

Prof. Dr. Günter Flach, Dresden

Dipl.-Phys. **Luke Winckelmann**, Uni Frankfurt, (25) avec

Prof. Dipl.-Ing. Jürgen Wendeler, FH der Telekom Dieburg



# **Avant-propos**

*Toutes les mathématiques et les bases de l'informatique* a été réalisé par des scientifiques professionnels, des ingénieurs et des universitaires, qui sont des experts dans l'utilisation quotidienne des mathématiques. Dans l'enseignement et dans les activités professionnelles actuelles, les méthodes d'analyse mathématique sont de plus en plus complétées par des méthodes de calcul numérique et l'utilisation de logiciels informatiques.

Cet ouvrage est connu internationalement pour sa clarté, son exhaustivité, et sa capacité à unifier les mathématiques en un même sujet pour l'usage quotidien des mathématiciens, des scientifiques et des ingénieurs.

*Toutes les mathématiques et les bases de l'informatique* rassemble :

- **les connaissances fondamentales** pour les élèves de terminales scientifiques, les étudiants des premiers cycles universitaires, ainsi que pour les étudiants des classes préparatoires et des écoles d'ingénieurs,
- **des connaissances complémentaires** pour des études avancées,
- **la culture scientifique générale** pour les scientifiques et les ingénieurs en activité.

*Toutes les mathématiques et les bases de l'informatique* est particulièrement conçu :

- pour un accès rapide à une source d'information lors de la résolution de problèmes,
- comme aide-mémoire lors de la préparation d'examens,
- comme livre de référence pour les personnels de recherche.

Chaque chapitre constitue une unité en soi qui réunit :

- les **notions, formules, règles et lois**,
- des **exemples** et des **applications** pratiques,
- ▷ des conseils, des mises en garde et des indications pour éviter des erreurs fréquentes.

La valeur de ce livre a été grandement augmentée par l'incorporation de centaines de tables de fonctions usuelles, de formules, de transformations et de séries.

L'utilisateur peut trouver rapidement les renseignements recherchés, grâce à :

- une table des matières structurée,
- un index détaillé constitué de mots-clés.

Le livre *Toutes les mathématiques et les bases de l'informatique* constitue un **ouvrage de référence** et un complément utile aux manuels spécialisés usuels.

Les commentaires ou suggestions du lecteur pour les éditions futures seraient appréciés des auteurs et peuvent être envoyés à l'adresse électronique suivante :

Stocker@Uni-Frankfurt.de.



# Table des matières

CHAPITRE 1 • CALCUL NUMÉRIQUE (ARITHMÉTIQUE)	1
1.1 Ensembles	1
1.2 Systèmes numériques	5
1.3 Entiers naturels	8
1.4 Entiers relatifs	13
1.5 Nombres rationnels (nombres fractionnaires)	13
1.6 Calculer avec des quotients	16
1.7 Mathématiques financières	18
1.8 Nombres complexes	23
1.9 Nombres réels	23
1.10 Nombres complexes	23
1.11 Calculer avec des nombres réels	25
1.12 Formule du binôme	38
CHAPITRE 2 • ÉQUATIONS ET INÉGALITÉS (ALGÈBRE)	43
2.1 Lois algébriques fondamentales	43
2.2 Équations à une inconnue	47
2.3 Équations linéaires	49
2.4 Équations quadratiques	50
2.5 Équations cubiques	51
2.6 Équations de degré quatre (équations quartiques)	53
2.7 Équations de degré quelconque	54
2.8 Équations rationnelles	55
2.9 Équations irrationnelles	56
2.10 Équations transcgendantes	57

---

2.11	Équations avec des valeurs absolues	59
2.12	Inégalités	61
2.13	Résolution numérique d'équations	62
<b>CHAPITRE 3 • GÉOMÉTRIE ET TRIGONOMÉTRIE DU PLAN</b>		69
3.1	Lieux géométriques	70
3.2	Constructions de base	70
3.3	Angles	72
3.4	Triangles semblables et théorème de Thalès	75
3.5	Triangles	78
3.6	Quadrilatères	94
3.7	Polygones réguliers	98
3.8	Objets curvilignes	101
<b>CHAPITRE 4 • GÉOMÉTRIE DES SOLIDES</b>		105
4.1	Théorèmes généraux	105
4.2	Prisme	106
4.3	Pyramide	108
4.4	Polyèdre régulier	109
4.5	Autres solides	111
4.6	Cylindre	112
4.7	Cône	113
4.8	Sphère	115
4.9	Géométrie sphérique	117
4.10	Solides de révolution	120
4.11	Géométrie fractale	122
<b>CHAPITRE 5 • FONCTIONS</b>		127
5.1	Suites, séries et fonctions	127
5.2	Discussion sur les courbes	136
5.3	Propriétés de base des fonctions	143

<b>Fonctions simples</b>	149
5.4    Fonction constante	149
5.5    Fonction saut	152
5.6    Fonction valeur absolue	157
5.7    Fonction de Dirac (delta)	161
5.8    Fonction partie entière, partie fractionnaire (ou mantisse)	165
<b>Fonctions polynomiales</b>	169
5.9    Fonction linéaire — droite	169
5.10   Fonction quadratique — parabole	173
5.11   Équation cubique	177
5.12   Fonctions puissances de degré plus élevé	181
5.13   Polynômes de degré plus élevé	187
5.14   Représentation de polynômes et polynômes particuliers	191
<b>Fonctions rationnelles</b>	208
5.15   Hyperbole	209
5.16   Inverse d'une fonction quadratique	212
5.17   Fonctions puissances avec un exposant négatif	217
5.18   Quotient de deux polynômes	221
<b>Fonctions algébriques irrationnelles</b>	230
5.19   Fonction racine carrée	230
5.20   Fonction racine	234
5.21   Fonctions puissances à exposant fractionnaire	237
5.22   Racines de fonctions rationnelles	242
<b>Fonctions transcendantes</b>	250
5.23   Fonctions logarithmiques	251
5.24   Fonction exponentielle	256
5.25   Fonctions exponentielles de puissances	263

---

<b>Fonctions hyperboliques</b>	269
5.26 Fonctions sinus et cosinus hyperboliques	271
5.27 Fonctions tangente hyperbolique et cotangente hyperbolique	278
5.28 Fonctions sécante hyperbolique et cosécante hyperbolique	285
<b>Fonctions hyperboliques inverses</b>	289
5.29 Argument sinus hyperbolique et argument cosinus hyperbolique	291
5.30 Argument tangente hyperbolique et argument cotangente hyperbolique	294
5.31 Argument sécante hyperbolique et argument cosécante hyperbolique	298
<b>Fonctions trigonométriques</b>	301
5.32 Fonctions sinus et cosinus	306
5.33 Fonctions tangente et cotangente	325
5.34 Sécante et cosécante	332
<b>Fonctions trigonométriques inverses</b>	338
5.35 Fonctions arc sinus et arc cosinus	340
5.36 Fonctions arc tangente et arc cotangente	344
5.37 Fonctions arc sécante et arc cosécante	348
<b>Courbes planes</b>	352
5.38 Courbes algébriques d'ordre $n$	352
5.39 Courbes cycloïdales	358
5.40 Spirales	360
5.41 Autres courbes	362
<b>CHAPITRE 6 • CALCUL VECTORIEL</b>	363
6.1 Algèbre vectorielle	363
6.2 Produit scalaire	372
6.3 Produit vectoriel de deux vecteurs	377
6.4 Produit mixte de vecteurs	379

<b>CHAPITRE 7 • SYSTÈMES DE COORDONNÉES</b>	383
7.1    Systèmes de coordonnées en dimension deux	383
7.2    Transformation de coordonnées en dimension deux	385
7.3    Systèmes de coordonnées en dimension trois	388
7.4    Transformation de coordonnées en dimension trois	391
7.5    Application à l'infographie	393
7.6    Transformations	393
7.7    Projections	408
7.8    Transformation fenêtre-clôture ( <i>window-viewport transformation</i> )	414
<b>CHAPITRE 8 • GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE</b>	417
8.1    Éléments du plan	417
8.2    Droite	418
8.3    Cercle	422
8.4    Ellipse	424
8.5    Parabole	428
8.6    Hyperbole	431
8.7    Équation générale des coniques	435
8.8    Éléments dans l'espace	437
8.9    Droites dans l'espace	439
8.10    Plans dans l'espace	441
8.11    Forme normale d'une surface d'ordre deux (quadrique)	445
8.12    Surface générale d'ordre deux (quadrique)	449
<b>CHAPITRE 9 • MATRICES, DÉTERMINANTS ET SYSTÈMES D'ÉQUATIONS LINÉAIRES</b>	453
9.1    Matrices	453
9.2    Matrices spéciales	456
9.3    Opérations sur les matrices	463
9.4    Déterminants	472
9.5    Systèmes d'équations linéaires	485

9.6	Méthodes de résolution numérique	488
9.7	Résolution itérative des systèmes d'équations linéaires	504
9.8	Table des méthodes de résolution	509
9.9	Équations aux valeurs propres	511
9.10	Tenseurs	514
<b>CHAPITRE 10 • ALGÈBRE DE BOOLE APPLICATION À L'ALGÈBRE DE LA COMMUTATION</b>		517
10.1	Notions de base	517
10.2	Opérateurs booléens	518
10.3	Fonctions booléennes	522
10.4	Formes normales	523
10.5	Diagrammes de Karnaugh-Veitch	527
10.6	Minimisation selon Quine et McCluskey	530
10.7	Logique multivaluée et logique floue	533
<b>CHAPITRE 11 • GRAPHES ET ALGORITHMES</b>		537
11.1	Graphes	537
11.2	Couplages	541
11.3	Réseaux de transport	541
<b>CHAPITRE 12 • CALCUL DIFFÉRENTIEL</b>		545
12.1	Dérivée d'une fonction	545
12.2	Règles de dérivation	548
12.3	Théorème des accroissements finis	555
12.4	Dérivées d'ordre supérieur	556
12.5	Méthodes d'approximation des dérivées	561
12.6	Dérisation des fonctions de plusieurs variables	563
12.7	Applications du calcul différentiel	567
<b>CHAPITRE 13 • GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE</b>		573
13.1	Courbes planes	573

---

13.2	Courbes de l'espace	581
13.3	Surfaces	586
<b>CHAPITRE 14 • SÉRIES INFINIES</b>		589
14.1	Séries	589
14.2	Critères de convergence	590
14.3	Séries de Taylor et de MacLaurin	593
14.4	Séries entières	596
14.5	Développements en série et en produit particuliers	599
<b>CHAPITRE 15 • CALCUL INTÉGRAL</b>		607
15.1	Définition et intégrabilité	607
15.2	Règles d'intégration	613
15.3	Méthodes d'intégration	618
15.4	Intégration numérique	629
15.5	Théorème de la moyenne	637
15.6	Intégrales de courbes, surfaces et volumes	638
15.7	Fonctions en représentation paramétrique	641
15.8	Intégrales multiples et applications	643
15.9	Applications techniques du calcul intégral	649
<b>CHAPITRE 16 • ANALYSE VECTORIELLE</b>		657
16.1	Champs	657
16.2	Dérivation et intégration des vecteurs	660
16.3	Gradient et potentiel	665
16.4	Dérivée suivant une direction et gradient vectoriel	667
16.5	Divergence et théorème de Green-Ostrogradsky	669
16.6	Rotationnel et théorème de Stokes	673
16.7	Laplacien et formules de Green	676
16.8	Résumé	680

---

<b>CHAPITRE 17 • VARIABLES ET FONCTIONS COMPLEXES</b>	683
17.1 Nombres complexes	683
17.2 Opérations arithmétiques élémentaires avec les nombres complexes	690
17.3 Fonctions élémentaires d'une variable complexe	695
17.4 Applications des fonctions complexes	704
17.5 Déivation des fonctions d'une variable complexe	709
17.6 Intégration dans le plan complexe	713
<b>CHAPITRE 18 • ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES</b>	721
18.1 Définitions générales	721
18.2 Interprétation géométrique	723
18.3 Méthodes de résolution des équations différentielles du premier ordre	725
18.4 Équations différentielles linéaires du premier ordre	726
18.5 Quelques équations particulières	729
18.6 Équations différentielles du second ordre	730
18.7 Équations différentielles linéaires du second ordre	731
18.8 Équations différentielles d'ordre $n$	738
18.9 Systèmes d'équations différentielles couplées du premier ordre	745
18.10 Systèmes d'équations différentielles linéaires homogènes à coefficients constants	747
18.11 Équations aux dérivées partielles	749
18.12 Intégration numérique des équations différentielles	755
<b>CHAPITRE 19 • TRANSFORMATION DE FOURIER</b>	771
19.1 Séries de Fourier	771
19.2 Intégrales de Fourier	788
19.3 Transformation de Fourier discrète (TFD)	794
19.4 Transformation en ondelettes	807
<b>CHAPITRE 20 • TRANSFORMATION DE LAPLACE ET TRANSFORMATION EN Z</b>	819
20.1 Introduction	819

20.2	Définition de la transformation de Laplace	820
20.3	Théorèmes de transformation	822
20.4	Décomposition en éléments simples	830
20.5	Équations différentielles linéaires à coefficients constants	834
20.6	Transformation en z	855
<b>CHAPITRE 21 • THÉORIE DES PROBABILITÉS ET STATISTIQUE MATHÉMATIQUE</b>		865
21.1	Combinatoire	865
21.2	Événements aléatoires	866
21.3	Probabilité des événements	871
21.4	Variables aléatoires et leurs lois	875
21.5	Théorèmes limites	894
21.6	Variables aléatoires multidimensionnelles	897
21.7	Fondements de la statistique mathématique	904
21.8	Paramètres décrivant la distribution des valeurs mesurées	908
21.9	Distributions particulières	912
21.10	Analyse par échantillonnage aléatoire (théorie des tests statistiques et de l'estimation)	918
21.11	Fiabilité	939
21.12	Ajustement, régression	941
<b>CHAPITRE 22 • LOGIQUE FLOUE</b>		947
22.1	Ensembles flous	947
22.2	Concept flou	949
22.3	Graphes fonctionnels pour la modélisation des ensembles flous	949
22.4	Opérations sur les ensembles flous	954
22.5	Relations floues	963
22.6	Inférence floue	966
22.7	Méthodes de défuzzification	967
22.8	Exemple : pendule rigide	969
22.9	Réalisations floues	974

---

<b>CHAPITRE 23 • RÉSEAUX DE NEURONES</b>	977
23.1    Fonctionnement et structure	977
23.2    Réalisation du modèle neuronal	979
23.3    Apprentissage supervisé	981
23.4    Apprentissage non supervisé	989
<b>CHAPITRE 24 • ORDINATEURS</b>	993
24.1    Systèmes d'exploitation	993
24.2    Langages de programmation de haut niveau	1000
<b>Introduction au PASCAL</b>	1007
24.3    Structure de base	1007
24.4    Variables et types	1007
24.5    Les instructions	1014
24.6    Procédures et fonctions	1020
24.7    Récursivité	1024
24.8    Algorithmes de base	1025
24.9    Bibliothèque graphique	1029
<b>Introduction au C</b>	1030
<b>Introduction au C++</b>	1041
<b>Introduction au FORTRAN</b>	1048
<b>Calcul formel</b>	1056
<b>CHAPITRE 25 • TABLES D'INTÉGRALES</b>	1073
25.1    Intégrales de fonctions rationnelles	1073
25.2    Intégrales de fonctions irrationnelles	1087
25.3    Intégrales de fonctions transcendantes	1099
25.4    Intégrales définies	1120
<b>INDEX</b>	1127
<b>FORMULAIRE</b>	1159

## Chapitre 1

# Calcul numérique (arithmétique)

## 1.1 ENSEMBLES

**Ensemble** : collection d'objets bien définis (**éléments de l'ensemble**) qui forment un tout. Les ensembles sont désignés par des lettres majuscules ( $X, Y, \dots$ ), les éléments de cet ensemble sont désignés par des minuscules ( $p, x, \dots$ ).

Par exemple, on écrit  $p \in X$ , si  $p$  est un **élément de l'ensemble  $X$** , et  $p \notin X$ , si  $p$  n'est pas un élément de  $X$ .

### 1.1.1 Représentation des ensembles

**Énumération** des éléments

$X = \{1, 2, 3, 4\}$

**Caractérisation** en définissant une propriété  $E$  des éléments  $p$ , on écrit  $X = \{p \mid p \text{ vérifie la propriété } E\}$  (lire « l'ensemble des  $p$  tels que  $p$  vérifie la propriété  $E$  »).

L'ensemble de toutes les personnes habitant aux États-Unis = { personne | personne habite aux États-Unis } est l'ensemble de toutes les personnes habitant aux États-Unis.

$\mathbb{R} = \{z \mid z \text{ est réel et } z > 0\}$  est l'ensemble de tous les nombres réels positifs.

**Diagramme de Venn** : un diagramme où un ou plusieurs ensembles sont représentés par des ensembles de points, entourés par des courbes fermées.



Diagramme de Venn

**Ensemble vide** :  $\emptyset = \{\}$ .

▷ L'ensemble ne contient pas d'éléments, même pas zéro.

$$\{0\} \neq \emptyset, \quad \{0\} \neq \{\}$$

**Égalité des ensembles** : les ensembles  $X$  et  $Y$  sont dits **égaux**, si tout élément de  $X$  est également un élément de  $Y$ , et que tout élément de  $Y$  est aussi un élément de  $X$ . On le note  $X = Y$ .

**Cardinalité ou puissance d'un ensemble** : les ensembles  $X$  et  $Y$  sont dits **équipotents** s'il existe une application bijective des éléments de  $X$  vers les éléments de  $Y$ , i.e., si à tout élément de  $X$  on peut associer de manière **unique** un élément de  $Y$  (cf. la notion d'« application »).

▷ Deux ensembles finis sont équipotents s'ils contiennent le même nombre d'éléments.

□ Tous les ensembles de 20 éléments sont équipotents.

L'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des nombres rationnels sont équipotents.

**Sous-ensemble** : un ensemble  $Y$  est contenu dans un autre ensemble  $X$  ( $Y$  est un sous-ensemble de  $X$ , notation :  $Y \subset X$  ou  $X \supset Y$ ), si tout élément  $y \in Y$  est aussi un élément de  $X$ . Si de plus  $X$  et  $Y$  ne sont pas égaux, on dit que  $Y$  est un sous-ensemble **propre** de  $X$ .

□  $\{1, 4\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$

L'ensemble de toutes les paires d'éléments est un sous-ensemble de l'ensemble des parties.

▷  $X \subset Y$  et  $Y \subset X \implies X = Y$

$X$  est un **sous-ensemble impropre de  $Y$**  (et réciproquement).

▷ Selon la norme DIN 5473,  $\subseteq$  est le symbole pour l'**inclusion**, et  $\subsetneq$  est le symbole pour l'**inclusion stricte**.

**Sur-ensemble** : si  $X$  est un sous-ensemble de  $Y$  alors, réciproquement,  $Y$  est un sur-ensemble de  $X$ .

**Réflexivité** :  $X \subset X$ .

**Transitivité** :  $X \subset Y$  et  $Y \subset Z \implies X \subset Z$ .

- On a toujours :  $\emptyset \subset X$ .

### 1.1.2 Opérations sur les ensembles

● Deux ensembles  $X$  et  $Y$  sont égaux si et seulement si ils contiennent exactement les mêmes éléments.

□  $\{1, 4\} = \{4, 1\}$ . Les éléments peuvent être ordonnés de manière arbitraire.

$\{1, 4\} = \{4, 1, 1\}$ . 1 et 1 ne sont pas distincts, ils représentent le même élément.

**Réunion** :  $Z = X \cup Y$  représente les éléments appartenant à  $X$  ou à  $Y$ .

□  $\{1, 2\} \cup \{1, 3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

- On a toujours :  $X \cup \emptyset = \emptyset \cup X = X$ .

**Intersection** :  $Z = X \cap Y$  contient tous les éléments appartenant à l'ensemble  $X$  et à l'ensemble  $Y$ .

□  $\{1, 2, 4\} \cap \{2, 3, 5\} = \{2\}$

- On a toujours  $X \cap \emptyset = \emptyset \cap X = \emptyset$ .

**Ensembles disjoints** :  $X$  et  $Y$  sont dits **disjoints** s'ils n'ont aucun élément commun. Ceci est équivalent à  $X \cap Y = \emptyset$ .

- $\{1, 3, 4\}$  et  $\{2, 5, 7\}$  sont des ensembles disjoints.

**Ensemble complémentaire** : si on regarde les sous-ensembles d'un ensemble donné  $X$ , le complémentaire (dans l'ensemble  $X$ ) d'un sous-ensemble  $A$  ( $A \subset X$ ) est  $A^C$  ( $A^C \subset X$ ) ; il est défini comme l'ensemble qui contient tous les éléments de  $X$  qui ne sont pas des éléments de  $A$ .

- $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ,  
 $A = \{1, 2, 3\}$ ,  
 $A^C = \{4, 5, 6\}$ , le complémentaire de  $A$  dans  $X$ .

- Si  $X$  est l'ensemble de référence, on a toujours :

$$\begin{aligned} X^C &= \emptyset, & \emptyset^C &= X, \\ (A^C)^C &= A, \\ A^C \cap A &= \emptyset, & A^C \cup A &= X. \end{aligned}$$

- ▷ Notations :  $A^C$  ou  $X - A$  ou encore  $\bar{A}$ .

**Différence** :  $X \setminus Y$ , lire  $X$  moins  $Y$ , contient les éléments de  $X$  qui n'appartiennent pas à  $Y$  :

$$X \setminus Y = \{x \mid x \in X \text{ et } x \notin Y\}$$

- $\{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{1, 2, 4, 6, 7\} = \{3, 5\}$

- ▷ On ne doit pas confondre la différence de deux ensembles  $X \setminus Y$  avec le complémentaire  $Y^C$  ; en effet, pour pouvoir faire la différence de deux ensembles  $X$  et  $Y$ , on n'a pas besoin que  $Y$  soit un sous-ensemble de  $X$ .

**Différence symétrique ou discrépance** :  $X \Delta Y$ , tous les éléments contenus dans  $X$  ou  $Y$ , mais pas dans  $X$  et  $Y$ .

$$\begin{aligned} X \Delta Y &= (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \\ &= (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = (X \cup Y) \setminus (Y \cap X) \end{aligned}$$

- $\{1, 2, 3, 4, 5\} \Delta \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 6, 7\}$

**Produit** :  $X \times Y$ , l'ensemble de tous les couples ordonnés  $(x, y)$  avec  $x \in X$  et  $y \in Y$ . Le produit est aussi appelé **produit cartésien** des ensembles  $X$  et  $Y$ .

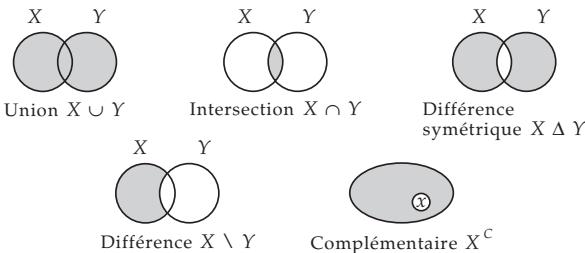
- $X = \{1, 2\}$ ,  $Y = \{5, 6\}$ ,  $X \times Y = \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)\}$

- ▷ Dans le cas des couples, l'ordre est important : en général  $(x, y) \neq (y, x)$ .

**Ensemble des parties** :  $P(X)$  est l'ensemble de tous les sous-ensembles de  $X$ .

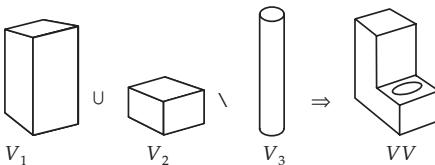
- $P(X)\{1, 2\} = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

- ▷ L'ensemble vide et l'ensemble lui-même appartiennent à l'ensemble des parties !



**Opérations sur les ensembles** : elles sont utilisées en conception assistée par ordinateur (CAO) .

- Composition de trois corps :  $VV = (V_1 \cup V_2) \setminus V_3$ .



- ▷ En général, si on échange l'ordre des opérations, on obtient des résultats différents. Dans l'exemple ci-dessus,  $(V_1 \setminus V_3) \cup V_2 = V_1 \cup V_2$  est le volume **sans** le trou. En relation avec la CAO, ces opérations sont aussi appelées opérations booléennes.

### 1.1.3 Lois de l'algèbre des ensembles

**Lois commutatives** :  $X \cap Y = Y \cap X$  ,      $X \cup Y = Y \cup X$  .

**Lois associatives** : 
$$\begin{aligned} X \cap Y \cap Z &= (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z) , \\ X \cup Y \cup Z &= (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z) . \end{aligned}$$

- La réunion et l'intersection sont des lois commutatives et associatives.

- ▷ La différence de deux ensembles n'est **pas** commutative, associative et distributive. Par exemple, nous avons :

□  $\{1, 2, 3\} \setminus \{1, 2\} = \{3\}$ , mais  $\{1, 2\} \setminus \{1, 2, 3\} = \{\} \neq \{3\}$ .

**Lois distributives** :  $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$  ,

$$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z) .$$

**Lois idempotentes** :  $X \cap X = X$  ,      $X \cup X = X$  .

**Lois d'absorption** :  $X \cup (X \cap Y) = X$  ,      $X \cap (X \cup Y) = X$  .

**Lois de Morgan** :  $(X \cap Y)^c = X^c \cup Y^c$  ,      $(X \cup Y)^c = X^c \cap Y^c$  .

### 1.1.4 Application et fonction

**Application** (le terme **fonction** est un synonyme) : un sous-ensemble  $f$  du produit cartésien  $X \times Y$  est appelé une application ou fonction de  $X$  dans  $Y$  (notée :  $f : X \rightarrow Y$ ) si  $(x, y_1), (x, y_2) \in f$  implique  $y_1 = y_2$ . Tout élément  $x \in X$  est associé par  $f$  à un unique élément  $y \in Y$ ; cet élément  $y$  est noté  $f(x)$ , ou  $y = f(x)$ .

▷ En particulier,  $X$  et  $Y$  peuvent être égaux.

**Ensemble de départ** (ou source) : ensemble envoyé vers un autre ensemble ; ici  $X$ .

**Ensemble d'arrivée** (ou but) : ensemble vers lequel un autre ensemble est envoyé ; ici l'ensemble  $Y$ .

**Application injective** : si  $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$ , alors on a **toujours**  $x_1 = x_2$ .

**Application surjective** : pour tout élément  $y$  de l'ensemble d'arrivée  $Y$  il existe au moins un élément  $x$  de l'ensemble de départ qui est envoyé sur  $y$ .

**Application bijective** : application injective et surjective.

- Soit  $c \in Y$ . La surjectivité de  $f$  implique que l'équation  $f(x) = c$  admet au moins une solution pour tout élément  $c$  de  $Y$ . L'injectivité implique que la solution est unique.

## 1.2 SYSTÈMES NUMÉRIQUES

**Système numérique** : c'est un ensemble de  $B$  symboles, où  $B$  est la **base** et les symboles sont les **chiffres** du système numérique.

- Représentation d'un nombre  $z$  dans le système de numération en base  $B$ .

$$z_{(B)} = \sum_{i=-m}^n z_i B^i, \quad B \in \mathbb{N}, \quad B \geqslant 2$$

### 1.2.1 Système décimal

**Système décimal** : base  $B = 10$  et chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

- Tout entier naturel peut être représenté comme une combinaison de ces symboles.
- $1456 = 1 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 1$   
 $= 1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$   
 $= 1 \cdot B^3 + 4 \cdot B^2 + 5 \cdot B^1 + 6 \cdot B^0, i.e.$

Dans chaque cas dix unités sont réunies pour obtenir une unité plus grande :

10 unités ( $10^0$ )	=	1 dix ( $10^1$ )
10 dix ( $10^1$ )	=	1 cent ( $10^2$ )
10 cents ( $10^2$ )	=	1 mille ( $10^3$ )
10 mille ( $10^3$ )	=	1 dix mille ( $10^4$ )
1000 mille ( $10^3$ )	=	1 million ( $10^6$ )
1000 millions ( $10^6$ )	=	1 billion ( $10^9$ )
1000 billions ( $10^9$ )	=	1 trillion ( $10^{12}$ )

$$\begin{array}{lll} 1000 \text{ trillions } (10^{12}) & = & 1 \text{ quadrillion } (10^{15}) \\ 1000 \text{ quadrillions } (10^{15}) & = & 1 \text{ quintillion } (10^{18}) \end{array}$$

- ▷ Note : en Amérique du Nord et en Europe, le terme billion ne représente pas la même chose. Le billion de l'Amérique du Nord vaut  $10^9$ , tandis qu'en Europe il représente  $10^{12}$ .

L'unité « un » peut se subdiviser de la manière suivante :

$$\begin{array}{lll} 1 \text{ unité } (10^0) & = & 10 \text{ dixièmes } (10^{-1} = \frac{1}{10}) \\ 1 \text{ dixième } (10^{-1}) & = & 10 \text{ centièmes } (10^{-2} = \frac{1}{100}) \\ 1 \text{ centième } (10^{-2}) & = & 10 \text{ millièmes } (10^{-3} = \frac{1}{1000}) \quad \text{etc.} \end{array}$$

- Tous les nombres réels peuvent s'exprimer dans ce système, parfois seulement comme une somme infinie.

$12.94 = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 1 + 9 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} = 1 \cdot B^1 + 2 \cdot B^0 + 9 \cdot B^{-1} + 4 \cdot B^{-2}$

Le terme de gauche de l'égalité est appelé **fraction décimale**, les chiffres correspondant à des exposants négatifs de la base étant placés à la droite de la virgule (ou du point décimal).

En relation avec les unités de mesure, certaines **puissances de dix** ont des noms particuliers :

valeur	nom	abréviation	valeur	nom	abréviation
$10^1$	Déca	da	$10^{-1}$	Déci	d
$10^2$	Hecto	h	$10^{-2}$	Centi	c
$10^3$	Kilo	k	$10^{-3}$	Milli	m
$10^6$	Méga	M	$10^{-6}$	Micro	$\mu$
$10^9$	Giga	G	$10^{-9}$	Nano	n
$10^{12}$	Téra	T	$10^{-12}$	Pico	p
$10^{15}$	Penta	P	$10^{-15}$	Femto	f
$10^{18}$	Exa	E	$10^{-18}$	Atto	a
$10^{21}$	Zetta	Z	$10^{-21}$	Zepto	z
$10^{24}$	Yotta	Y	$10^{-24}$	Yocto	y

- 1 mm c'est un millimètre, *i.e.*  $\frac{1}{1000}$  mètre, ou 1 hl = 1 hectolitre = 100 l = 100 litres, 1 MW représente un Mégawatt, *i.e.* un million de watts.

## 1.2.2 Autres systèmes de numération

- Un système important est le **système binaire**. Il est à la base de la mémoire informatique où seuls deux états sont possibles. 2 est la base, tandis que 0 et 1 (parfois H pour « High » et L pour « Low », haut et bas en anglais) sont utilisés comme symboles.

décimal	binaire	octal	hexadéc.	décimal	binaire	octal	hexadéc.
0	0	0	0	10	1010	12	A
1	1	1	1	11	1011	13	B
2	10	2	2	12	1100	14	C
3	11	3	3	13	1101	15	D
4	100	4	4	14	1110	16	E
5	101	5	5	15	1111	17	F
6	110	6	6	16	10000	20	10
7	111	7	7	17	10001	21	11
8	1000	10	8	18	10010	22	12
9	1001	11	9	19	10011	23	13

- $19_{(10)} = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 \equiv 10011_{(2)}$  dans cette notation.
  - ▷ En arithmétique informatique, 2 ne convient pas comme base naturelle pour représenter des grands nombres. Pour le **système hexadécimal**, 16 symboles sont nécessaires pour représenter les chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.
  - $5AE_{(16)} = 5 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 14 \cdot 16^0 = 5 \cdot 256 + 10 \cdot 16 + 14 \cdot 1 = 1454_{(10)}$ .
  - ▷ Pour distinguer le système décimal du système hexadécimal, un symbole dollar est souvent utilisé comme préfixe, par ex. \$12, qui est 18 dans le système décimal.
- Système de numération octal** : la base est 8, et les chiffres sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

### 1.2.3 Représentation informatique

**Bit** : un chiffre binaire dans les ordinateurs ou les calculatrices ; ne reconnaît que deux états, 0 et 1 (en termes techniques : le niveau du voltage).

**Octet** : un regroupement de 8 bits qui constituent une unité plus grande. L'usage est de numérotter les bits de 0 à 7, et non pas de 1 à 8 !

**Code du type décimal codé binaire (DCB) standard** : chaque chiffre décimal d'un nombre est codé **séparément** sous la forme d'un nombre binaire à 4 bits. Pour coder les nombres de 0 à 9, seuls 10 regroupements sont nécessaires ; les 6 suivants ne le sont pas (1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111).

- Le code DCB du nombre 179 est : 0001 0111 1001.
- Standard IEEE (IEEE = Institute of Electrical and Electronics Engineers)** : le standard pour représenter les nombres en informatique, utilisé par la plupart des langages de programmation dans la plupart des systèmes informatiques.

- Différents types de données en C :
  - « **byte** » : représentation des entiers  $-128 \dots +127$
  - « **int** » = 2 bytes, représentation des entiers  $-32768 \dots +32767$
  - « **long** » = 4 bytes, représentation des entiers  $-2147483648 \dots +2147483647$

« **float** » = 4 bytes, approximation de nombres réels  $x$  comme fractions décimales avec un maximum de 8 chiffres + 2 chiffres pour l'exposant en les puissances de dix :  $|x| < 1.701411 \cdot 10^{38}$

« **double** » = 8 bytes, approximation de nombres réels  $x$  comme fractions décimales avec un maximum de 16 chiffres + 3 chiffres pour l'exposant en les puissances de dix :  $|x| < 1.701411 \cdot 10^{306}$ .

Il y a cependant des limites pour les « float » et les « double »,  $|x| > 10^{-38}$  pour les premiers et  $|x| > 10^{-306}$  pour les seconds.

- ▷ Les « float » et les « double » sont appelés nombres à virgule flottante, ils ont 8 ou 16 chiffres significatifs.
- ▷ Les calculatrices de poche ont une touche **[EE]** ou **[EXP]** pour entrer les puissances de dix. La séquence **[1][EXP][5]** entre  $10^5$  dans la calculatrice ; la séquence **[1][0][EXP][5]** entre  $10^6 = 10 \cdot 10^5$ .

## 1.2.4 Schéma de Horner pour la représentation des nombres

**Schéma de Horner** pour la représentation des nombres :

$$\begin{aligned} z_{(B)} &= \sum_{i=-m}^n z_i B^i \\ &= (z_n + (z_{n-1} + \cdots + (z_{-m+1} + z_{-m} \cdot B^{-1}) \cdot B^{-1} \cdots) \cdot B^{-1}) \cdot B^n \end{aligned}$$

- ▷ Les symboles  $z_i$  sont les chiffres du système de numération en base  $B$ , i.e., 0, 1 dans le système binaire ou 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F dans le système hexadécimal.
- Représentation de 234,57 dans le système décimal :

$$\begin{aligned} 234,57 &= (2 + (3 + (4 + (5 + 7 \cdot 10^{-1}) \cdot 10^{-1}) \cdot 10^{-1}) \cdot 10^{-1}) \cdot 10^2 \\ &= 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2}. \end{aligned}$$

## 1.3 ENTIERS NATURELS

Ensemble des entiers naturels :  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$ .

- ▷ La norme DIN 5473 définit zéro comme un entier naturel.  
L'ensemble des entiers naturels privés de zéro est

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}.$$

Les entiers naturels permettent de compter ( **nombres cardinaux**) et d'ordonner ( **nombres ordinaux**, premier, deuxième, troisième, ...). De plus, les entiers naturels peuvent être utilisés pour indexer ( $a_1, a_2, \dots$ ). Les entiers naturels sont souvent représentés par les lettres  $i, j, k, m, n$ .