TOUTES LES MATHÉMATIQUES

et les bases de l'informatique

Horst Stöcker
Professeur à l'université J. W. Goethe
à Francfort-sur-le-Main (Allemagne)

Traduit par
Vincent Bosser
Ancien élève de l'École Centrale de Lyon
Docteur ès mathématiques de l'université Paris 6
Assistant de mathématiques à l'université de Bâle (Suisse)

et
Sandra Marcello
Docteur ès mathématiques de l'université Paris 7

DUNOD

L'édition originale de ce livre a été publiée en Allemagne par Verlag Harri Deutsch, Francfort-sur-le-Main, sous le titre : *Taschenbuch mathematischer - Formeln und moderner Verfahren*. (4. Korrigierte Auflage). © Verlag Harri Deutsch, Frankfurt am Main, Thun, 1999.

Illustration de couverture : Lionel Auvergne

ISBN 978-2-10-070263-3

Principaux collaborateurs

Prof. Dr.-Ing. **Holger Lutz**, FH Gießen-Friedberg,
Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Math. **Monika Lutz**, FH Gießen-Friedberg

Dr. **Jens Konopka**, Uni Frankfurt, (**1 & 2**) avec
Dr.-Ing. Dieter Zetsche, Mercedes-Benz AG, Stuttgart,
Prof. Dr. Helmut Kuhnle, Uni Hohenheim

Dr. **André Jahns**, Uni Frankfurt, (**3 & 4**) avec
Prof. Dr. Hans Babovsky, Uni Kaiserslautern,
Dipl.-Phys. Nina Flach, Dresden,
Prof. Dr. Steffen Bohrmann, FHT Mannheim

Dr. **Christoph Hartnack**, École des Mines et Subatech Nantes, (**5 & 16**) avec
Prof. Dr. Steffen Bass, Duke University,
Prof. Dr.-Ing. Rainer Fremd, FH Rheinland-Pfalz, Abt. Kaiserslautern

Dr. **Jürgen Schaffner**, Columbia University, (**6–8 & 12–1**5) avec
Dr. **Mario Vidović**, Uni Frankfurt,
Prof. Dr.-Ing. Holger Lutz, FH Gießen-Friedberg,
Prof. Dr.-Ing. Dipl.-Math. Monika Lutz, FH Gießen-Friedberg

Prof. Dr. **Horst Stöcker**, Uni Frankfurt, (**9**) avec
Dr. Christian Hofmann, TU Dresden,
Dipl.-Ing. Helmut Kutz, Mauser AG, Oberndorf

Dr. **Klaus Rumrich**, Uni Frankfurt, (**10 & 24**) avec
Dipl.-Inform. Inge Rumrich, Uni Frankfurt,
Prof. Dr. Wieland Richter, Uni GH Paderborn

Prof. Dr. **Siegfried Fuchs**, Dresden, (**11 & 21**) avec
Dr. **Raffaele Mattiello**, Uni Frankfurt,
Prof. Dr. Georg Terlecki, FH Rheinland-Pfalz, Abt. Kaiserslautern

Prof. Dr. **Dirk Rischke**, Univ. Frankfurt, (**17**) avec
Prof. Dr. Rudolf Pitka, FH Frankfurt

Dr. **Thomas Schönfeld**, Uni Frankfurt, (**18**) avec
Prof. Dr. Wilhelm Werner, FH Heilbronn, Außenstelle Künzelsau

Dr. **Volker Blum**, Schumann & Partner, Köln, (**19 & 20**) avec
Dr. **Christoph Best**, Uni Frankfurt,
Phys. Techn. Ass. Astrid Steidl, NTA Isny,
Prof. Dr.-Ing. Wolfgang Wendt, FHT Esslingen

Prof. Dr. **Adolf Grauel**, Uni GH Paderborn, (**22**)

Dr. **Arnd Bischoff**, Uni Frankfurt, (**23**) avec
Prof. Dr. Bernd Schürmann, Siemens AG

Dr. **Markus Hofmann**, Uni Frankfurt, (**24**) avec
Dr. Christian Spieles, Uni Frankfurt,
Prof. Dr. Günter Flach, Dresden

Dipl.-Phys. **Luke Winckelmann**, Uni Frankfurt, (**25**) avec
Prof. Dipl.-Ing. Jürgen Wendeler, FH der Telekom Dieburg

Avant-propos

Toutes les mathématiques et les bases de l'informatique a été réalisé par des scientifiques professionnels, des ingénieurs et des universitaires, qui sont des experts dans l'utilisation quotidienne des mathématiques. Dans l'enseignement et dans les activités professionnelles actuelles, les méthodes d'analyse mathématique sont de plus en plus complétées par des méthodes de calcul numérique et l'utilisation de logiciels informatiques.
Cet ouvrage est connu internationalement pour sa clarté, son exhaustivité, et sa capacité à unifier les mathématiques en un même sujet pour l'usage quotidien des mathématiciens, des scientifiques et des ingénieurs.
Toutes les mathématiques et les bases de l'informatique rassemble :

- **les connaissances fondamentales** pour les élèves de terminales scientifiques, les étudiants des premiers cycles universitaires, ainsi que pour les étudiants des classes préparatoires et des écoles d'ingénieurs,
- **des connaissances complémentaires** pour des études avancées,
- **la culture scientifique générale** pour les scientifiques et les ingénieurs en activité.

Toutes les mathématiques et les bases de l'informatique est particulièrement conçu :

- pour un accès rapide à une source d'information lors de la résolution de problèmes,
- comme aide-mémoire lors de la préparation d'examens,
- comme livre de référence pour les personnels de recherche.

Chaque chapitre constitue une unité en soi qui réunit :

● les **notions**, **formules**, **règles** et **lois**,
□ des **exemples** et des **applications** pratiques,
▷ des conseils, des mises en garde et des indications pour éviter des erreurs fréquentes.

La valeur de ce livre a été grandement augmentée par l'incorporation de centaines de tables de fonctions usuelles, de formules, de transformations et de séries.
L'utilisateur peut trouver rapidement les renseignements recherchés, grâce à :

- une table des matières structurée,
- un index détaillé constitué de mots-clés.

Le livre *Toutes les mathématiques et les bases de l'informatique* constitue un **ouvrage de référence** et un complément utile aux manuels spécialisés usuels.
Les commentaires ou suggestions du lecteur pour les éditions futures seraient appréciés des auteurs et peuvent être envoyés à l'adresse électronique suivante :
Stocker@Uni-Frankfurt.de.

Table des matières

Chapitre 1

Calcul numérique (arithmétique)

1.1 ENSEMBLES

Ensemble : collection d'objets bien définis (**éléments de l'ensemble**) qui forment un tout. Les ensembles sont désignés par des lettres majuscules ($X, Y, \ldots$), les éléments de cet ensemble sont désignés par des minuscules ($p, x, \ldots$).

Par exemple, on écrit $p \in X$, si p est un **élément** de l'**ensemble** X, et $p \notin X$, si p n'est pas un élément de X.

1.1.1 Représentation des ensembles

Énumération des éléments

□ $X = \{1, 2, 3, 4\}$

Caractérisation en définissant une propriété E des éléments p, on écrit $X = \{p \mid p$ vérifie la propriété $E\}$ (lire « l'ensemble des p *tels que* p vérifie la propriété E »).

□ L'ensemble de toutes les personnes habitant aux États-Unis = { personne | personne habite aux États-Unis } est l'ensemble de toutes les personnes habitant aux États-Unis. $\mathbb{R} = \{z \mid z$ est réel et $z > 0\}$ est l'ensemble de tous les nombres réels positifs.

Diagramme de Venn : un diagramme où un ou plusieurs ensembles sont représentés par des ensembles de points, entourés par des courbes fermées.

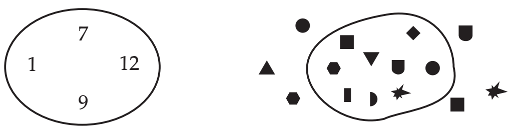


Diagramme de Venn

Ensemble vide : $\varnothing = \{\}$.

▷ L'ensemble ne contient pas d'éléments, même pas zéro.

$$\{0\} \neq \varnothing\ , \qquad \{0\} \neq \{\}$$

Égalité des ensembles : les ensembles X et Y sont dits **égaux**, si tout élément de X est également un élément de Y, **et que** tout élément de Y est **aussi** un élément de X. On le note $X = Y$.
Cardinalité ou puissance d'un ensemble : les ensembles X et Y sont dits **équipotents** s'il existe une application bijective des éléments de X vers les éléments de Y, *i.e.*, si à tout élément de X on peut asssocier de manière **unique** un élément de Y (*cf.* la notion d'« application »).

▷ Deux ensembles finis sont équipotents s'ils contiennent le même nombre d'éléments.

□ Tous les ensembles de 20 éléments sont équipotents.
L'ensemble des entiers naturels et l'ensemble des nombres rationnels sont équipotents.

Sous-ensemble : un ensemble Y est contenu dans un autre ensemble X (Y est un sous-ensemble de X, notation : $Y \subset X$ ou $X \supset Y$), si tout élément $y \in Y$ est aussi un élément de X. Si de plus X et Y ne sont pas égaux, on dit que Y est un sous-ensemble **propre** de X.

□ $\{1,4\} \subset \{1,2,3,4\}$
L'ensemble de toutes les paires d'éléments est un sous-ensemble de l'ensemble des parties.

▷ $X \subset Y$ et $Y \subset X \implies X = Y$
X est un **sous-ensemble impropre de** Y (et réciproquement).

▷ Selon la norme DIN 5473, $\subseteq$ est le symbole pour l'**inclusion**, et $\overset{\subset}{\neq}$ est le symbole pour l'**inclusion stricte**.

Sur-ensemble : si X est un sous-ensemble de Y alors, réciproquement, Y est un sur-ensemble de X.
Réflexivité : $X \subset X$.
Transitivité : $X \subset Y$ et $Y \subset Z \implies X \subset Z$.

- On a toujours : $\varnothing \subset X$.

1.1.2 Opérations sur les ensembles

- Deux ensembles X et Y sont égaux si et seulement si ils contiennent exactement les mêmes éléments.

□ $\{1,4\} = \{4,1\}$. Les éléments peuvent être ordonnés de manière arbitraire.
$\{1,4\} = \{4,1,1\}$. 1 et 1 ne sont pas distincts, ils représentent le même élément.

Réunion : $Z = X \cup Y$ représente les éléments appartenant à X ou à Y.

□ $\{1,2\} \cup \{1,3,4\} = \{1,2,3,4\}$

- On a toujours : $X \cup \varnothing = \varnothing \cup X = X$.

Intersection : $Z = X \cap Y$ contient tous les éléments appartenant à l'ensemble X et à l'ensemble Y.

□ $\{1,2,4\} \cap \{2,3,5\} = \{2\}$

- On a toujours $X \cap \varnothing = \varnothing \cap X = \varnothing$.

Ensembles disjoints : X et Y sont dits **disjoints** s'ils n'ont aucun élément commun. Ceci est équivalent à $X \cap Y = \varnothing$.

□ $\{1, 3, 4\}$ et $\{2, 5, 7\}$ sont des ensembles disjoints.

Ensemble complémentaire : si on regarde les sous-ensembles d'un ensemble donné X, le complémentaire (dans l'ensemble X) d'un sous-ensemble A ($A \subset X$) est A^C ($A^C \subset X$) ; il est défini comme l'ensemble qui contient tous les éléments de X qui ne sont pas des éléments de A.

□ $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
$A = \{1, 2, 3\}$,
$A^C = \{4, 5, 6\}$, le complémentaire de A dans X.

- Si X est l'ensemble de référence, on a toujours :

$$\begin{array}{rl} X^C = \varnothing \ , & \varnothing^C = X \ , \\ (A^C)^C = A \ , & \\ A^C \cap A = \varnothing \ , & A^C \cup A = X. \end{array}$$

▷ Notations : A^C ou $X - A$ ou encore $\bar{A}$.

Différence : $X \setminus Y$, lire X moins Y, contient les éléments de X qui n'appartiennent pas à Y :

$$X \setminus Y = \{x \mid x \in X \text{ et } x \notin Y\}$$

□ $\{1, 2, 3, 4, 5\} \setminus \{1, 2, 4, 6, 7\} = \{3, 5\}$

▷ On ne doit pas confondre la différence de deux ensembles $X \setminus Y$ avec le complémentaire Y^C ; en effet, pour pouvoir faire la différence de deux ensembles X et Y, on n'a pas besoin que Y soit un sous-ensemble de X.

Différence symétrique ou discrépance : $X \Delta Y$, tous les éléments contenus dans X ou Y, mais **pas** dans X **et** Y.

$$\begin{aligned} X\Delta Y &= (X \setminus Y) \cup (Y \setminus X) \\ &= (X \cup Y) \setminus (X \cap Y) = (X \cup Y) \setminus (Y \cap X) \end{aligned}$$

□ $\{1, 2, 3, 4, 5\}\Delta\{3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2, 6, 7\}$

Produit : $X \times Y$, l'ensemble de tous les couples ordonnés (x, y) avec $x \in X$ et $y \in Y$. Le produit est aussi appelé **produit cartésien** des ensembles X et Y.

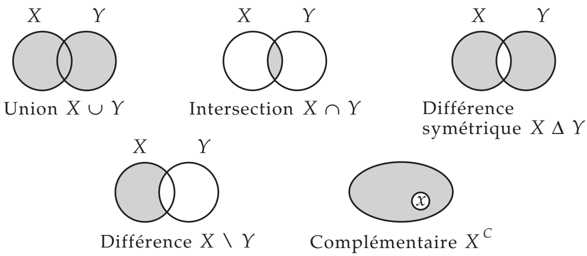
□ $X = \{1, 2\}, Y = \{5, 6\}, \qquad X \times Y = \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)\}$

▷ Dans le cas des couples, l'ordre est important : en général $(x, y) \neq (y, x)$.

Ensemble des parties : P(X) est l'ensemble de tous les sous-ensembles de X.

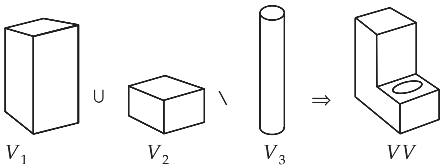
□ P(X)$\{1, 2\} = \{\{\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

▷ L'ensemble vide et l'ensemble lui-même appartiennent à l'ensemble des parties !



Opérations sur les ensembles : elles sont utilisées en conception assistée par ordinateur (CAO) .

□ Composition de trois corps : $VV = (V_1 \cup V_2) \setminus V_3$.



▷ En général, si on échange l'ordre des opérations, on obtient des résultats différents. Dans l'exemple ci-dessus, $(V_1 \setminus V_3) \cup V_2 = V_1 \cup V_2$ est le volume **sans** le trou.

En relation avec la CAO, ces opérations sont aussi appelées opérations booléennes.

1.1.3 Lois de l'algèbre des ensembles

Lois commutatives : $X \cap Y = Y \cap X$, $X \cup Y = Y \cup X$.

Lois associatives :
$$\begin{aligned} X \cap Y \cap Z &= (X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z) , \\ X \cup Y \cup Z &= (X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z) . \end{aligned}$$

- La réunion et l'intersection sont des lois commutatives et associatives.

▷ La différence de deux ensembles n'est **pas** commutative, associative et distributive. Par exemple, nous avons :

□ $\{1, 2, 3\} \setminus \{1, 2\} = \{3\}$, mais $\{1, 2\} \setminus \{1, 2, 3\} = \{\} \neq \{3\}$.

Lois distributives : $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$,

$X \cup (Y \cap Z) = (X \cup Y) \cap (X \cup Z)$.

Lois idempotentes : $X \cap X = X$, $X \cup X = X$.

Lois d'absorption : $X \cup (X \cap Y) = X$, $X \cap (X \cup Y) = X$.

Lois de Morgan : $(X \cap Y)^C = X^C \cup Y^C$, $(X \cup Y)^C = X^C \cap Y^C$.

1.1.4 Application et fonction

Application (le terme **fonction** est un synonyme) : un sous-ensemble f du produit cartésien $X \times Y$ est appelé une application ou fonction de X dans Y (notée : $f : X \to Y$) si (x, y_1), $(x, y_2) \in f$ implique $y_1 = y_2$. Tout élément $x \in X$ est associé par f à un unique élément $y \in Y$; cet élément y est noté $f(x)$, ou $y = f(x)$.

▷ En particulier, X et Y peuvent être égaux.

Ensemble de départ (ou source) : ensemble envoyé vers un autre ensemble ; ici X.

Ensemble d'arrivée (ou but) : ensemble vers lequel un autre ensemble est envoyé ; ici l'ensemble Y.

Application injective : si $y_1 = f(x_1) = f(x_2) = y_2$, alors on a **toujours** $x_1 = x_2$.

Application surjective : pour tout élément y de l'ensemble d'arrivée Y il existe au moins un élément x de l'ensemble de départ qui est envoyé sur y.

Application bijective : application injective et surjective.

□ Soit $c \in Y$. La surjectivité de f implique que l'équation $f(x) = c$ admet au moins une solution pour tout élément c de Y. L'injectivité implique que la solution est unique.

1.2 SYSTÈMES NUMÉRIQUES

Système numérique : c'est un ensemble de B symboles, où B est la **base** et les symboles sont les **chiffres** du système numérique.

- Représentation d'un nombre z dans le système de numération en base B.

$$z_{(B)} = \sum_{i=-m}^{n} z_i B^i \ , \quad B \in \mathbb{N} \ , \ B \geqslant 2$$

1.2.1 Système décimal

Système décimal : base $B = 10$ et chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

- Tout entier naturel peut être représenté comme une combinaison de ces symboles.

□ $$\begin{aligned} 1456 &= 1 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 1 \\ &= 1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0 \\ &= 1 \cdot B^3 + 4 \cdot B^2 + 5 \cdot B^1 + 6 \cdot B^0, \textit{i.e.} \end{aligned}$$

Dans chaque cas dix unités sont réunies pour obtenir une unité plus grande :

10 unités (10^0)	=	1 dix (10^1)
10 dix (10^1)	=	1 cent (10^2)
10 cents (10^2)	=	1 mille (10^3)
10 mille (10^3)	=	1 dix mille (10^4)
1000 mille (10^3)	=	1 million (10^6)
1000 millions (10^6)	=	1 billion (10^9)
1000 billions (10^9)	=	1 trillion (10^{12})

1000 trillions (10^{12})	=	1 quadrillion (10^{15})
1000 quadrillions (10^{15})	=	1 quintillion (10^{18})

▷ Note : en Amérique du Nord et en Europe, le terme billion ne représente pas la même chose. Le billion de l'Amérique du Nord vaut 10^9, tandis qu'en Europe il représente 10^{12}.

L' unité « un » peut se subdiviser de la manière suivante :

1 unité (10^0)	=	10 dixièmes ($10^{-1} = \frac{1}{10}$)
1 dixième (10^{-1})	=	10 centièmes ($10^{-2} = \frac{1}{100}$)
1 centième (10^{-2})	=	10 millièmes ($10^{-3} = \frac{1}{1000}$) etc.

- Tous les nombres réels peuvent s'exprimer dans ce système, parfois seulement comme une somme infinie.

□ $12.94 = 1 \cdot 10 + 2 \cdot 1 + 9 \cdot \frac{1}{10} + 4 \cdot \frac{1}{100} = 1 \cdot B^1 + 2 \cdot B^0 + 9 \cdot B^{-1} + 4 \cdot B^{-2}$

Le terme de gauche de l'égalité est appelé **fraction décimale**, les chiffres correspondant à des exposants négatifs de la base étant placés à la droite de la virgule (ou du point décimal).

En relation avec les unités de mesure, certaines **puissances de dix** ont des noms particuliers :

valeur	nom	abréviation	valeur	nom	abréviation
10^1	Déca	da	10^{-1}	Déci	d
10^2	Hecto	h	10^{-2}	Centi	c
10^3	Kilo	k	10^{-3}	Milli	m
10^6	Méga	M	10^{-6}	Micro	μ
10^9	Giga	G	10^{-9}	Nano	n
10^{12}	Téra	T	10^{-12}	Pico	p
10^{15}	Penta	P	10^{-15}	Femto	f
10^{18}	Exa	E	10^{-18}	Atto	a
10^{21}	Zetta	Z	10^{-21}	Zepto	z
10^{24}	Yotta	Y	10^{-24}	Yocto	y

□ 1 mm c'est un millimètre, *i.e.* $\frac{1}{1000}$ mètre, ou 1 hl $=$ 1 hectolitre $=$ 100 l $=$ 100 litres, 1 MW représente un Mégawatt, *i.e.* un million de watts.

1.2.2 Autres systèmes de numération

- Un système important est le **système binaire**. Il est à la base de la mémoire informatique où seuls deux états sont possibles. 2 est la base, tandis que 0 et 1 (parfois H pour « High » et L pour « Low », haut et bas en anglais) sont utilisés comme symboles.

décimal	binaire	octal	hexadéc.	décimal	binaire	octal	hexadéc.
0	0	0	0	10	1010	12	A
1	1	1	1	11	1011	13	B
2	10	2	2	12	1100	14	C
3	11	3	3	13	1101	15	D
4	100	4	4	14	1110	16	E
5	101	5	5	15	1111	17	F
6	110	6	6	16	10000	20	10
7	111	7	7	17	10001	21	11
8	1000	10	8	18	10010	22	12
9	1001	11	9	19	10011	23	13

□ $19_{(10)} = \mathbf{1} \cdot 2^4 + \mathbf{0} \cdot 2^3 + \mathbf{0} \cdot 2^2 + \mathbf{1} \cdot 2^1 + \mathbf{1} \cdot 2^0 \equiv 10011_{(2)}$ dans cette notation.

▷ En arithmétique informatique, 2 ne convient pas comme base naturelle pour représenter des grands nombres. Pour le **système hexadécimal**, 16 symboles sont nécessaires pour représenter les chiffres : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.

□ $5AE_{(16)} = 5 \cdot 16^2 + 10 \cdot 16^1 + 14 \cdot 16^0 = 5 \cdot 256 + 10 \cdot 16 + 14 \cdot 1 = 1454_{(10)}$.

▷ Pour distinguer le système décimal du système hexadécimal, un symbole dollar est souvent utilisé comme préfixe, par ex. $12, qui est 18 dans le système décimal.

Système de numération octal : la base est 8, et les chiffres sont 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.

1.2.3 Représentation informatique

Bit : un chiffre binaire dans les ordinateurs ou les calculatrices ; ne reconnaît que deux états, 0 et 1 (en termes techniques : le niveau du voltage).

Octet : un regroupement de 8 bits qui constituent une unité plus grande. L'usage est de numéroter les bits de 0 à 7, et non pas de 1 à 8 !

Code du type décimal codé binaire (DCB) standard : chaque chiffre décimal d'un nombre est codé **séparément** sous la forme d'un nombre binaire à 4 bits. Pour coder les nombres de 0 à 9, seuls 10 regroupements sont nécessaires ; les 6 suivants ne le sont pas (1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111).

□ Le code DCB du nombre 179 est : 0001 0111 1001.

Standard IEEE (IEEE = Institute of Elecrical and Electronics Engineers) : le standard pour représenter les nombres en informatique, utilisé par la plupart des langages de programmation dans la plupart des systèmes informatiques.

□ Différents types de données en `C` :
« **byte** » **:** représentation des entiers $-128 \ldots +127$
« **int** » = 2 bytes, représentation des entiers $-32768 \ldots +32767$
« **long** » = 4 bytes, représentation des entiers $-2147483648 \ldots +2147483647$

« **float** » = 4 bytes, approximation de nombres réels x comme fractions décimales avec un maximum de 8 chiffres $+$ 2 chiffres pour l'exposant en les puissances de dix : $|x| < 1.701411 \cdot 10^{38}$
« **double** » = 8 bytes, approximation de nombres réels x comme fractions décimales avec un maximum de 16 chiffres + 3 chiffres pour l'exposant en les puissances de dix : $|x| < 1.701411 \cdot 10^{306}$.
Il y a cependant des limites pour les « float » et les « double », $|x| > 10^{-38}$ pour les premiers et $|x| > 10^{-306}$ pour les seconds.

▷ Les « float » et les « double » sont appelés nombres à virgule flottante, ils ont 8 ou 16 chiffres significatifs.

▷ Les calculatrices de poche ont une touche $\boxed{\text{EE}}$ ou $\boxed{\text{EXP}}$ pour entrer les puissances de dix. La séquence $\boxed{1}\,\boxed{\text{EXP}}\,\boxed{5}$ entre 10^5 dans la calculatrice ; la séquence $\boxed{1}\,\boxed{0}\,\boxed{\text{EXP}}\,\boxed{5}$ entre $10^6 = 10 \cdot 10^5$.

1.2.4 Schéma de Horner pour la représentation des nombres

Schéma de Horner pour la représentation des nombres :

$$\begin{aligned} z_{(B)} &= \sum_{i=-m}^{n} z_i B^i \\ &= (z_n + (z_{n-1} + \cdots + (z_{-m+1} + z_{-m} \cdot B^{-1}) \cdot B^{-1} \cdots) \cdot B^{-1}) \cdot B^n \end{aligned}$$

▷ Les symboles z_i sont les chiffres du système de numération en base B, *i.e.*, 0, 1 dans le système binaire ou 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F dans le système hexadécimal.

□ Représentation de 234,57 dans le système décimal :

$$\begin{aligned} 234{,}57 &= (2 + (3 + (4 + (5 + 7 \cdot 10^{-1}) \cdot 10^{-1}) \cdot 10^{-1}) \cdot 10^{-1}) \cdot 10^2 \\ &= 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 7 \cdot 10^{-2} \,. \end{aligned}$$

1.3 ENTIERS NATURELS

Ensemble des entiers naturels : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \ldots\}$.

▷ La norme DIN 5473 définit zéro comme un entier naturel.
L'ensemble des entiers naturels privés de zéro est

$$\mathbb{N}^* = \mathbb{N} \setminus \{0\} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\} \,.$$

Les entiers naturels permettent de compter (**nombres cardinaux**) et d'ordonner (**nombres ordinaux**, premier, deuxième, troisième,...). De plus, les entiers naturels peuvent être utilisés pour indexer $(a_1, a_2, \ldots)$. Les entiers naturels sont souvent représentés par les lettres i, j, k, m, n.