

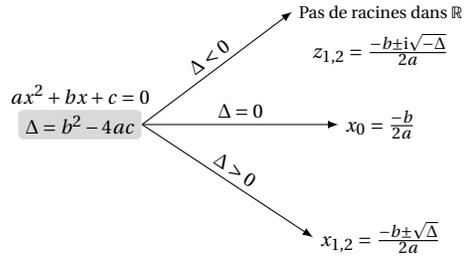
PARTIE I - NOTIONS DE SURVIE

Polynômes du 1^{er} degré

$$ax + b = 0 \iff x = \frac{-b}{a}$$

x	$-\infty$	$\frac{-b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $(-a)$ 0 signe de a		

Polynômes du 2nd degré



x	$-\infty$	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	

x	$-\infty$	x_0	$+\infty$
$P(x)$	signe de a	0	signe de a

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$	
$P(x)$	sig. a	0	sig. $(-a)$	0	sig. a

Identités remarquables

- $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
- $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
- $(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Proportionnalité (produit en croix)

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff a \times d = c \times b$$

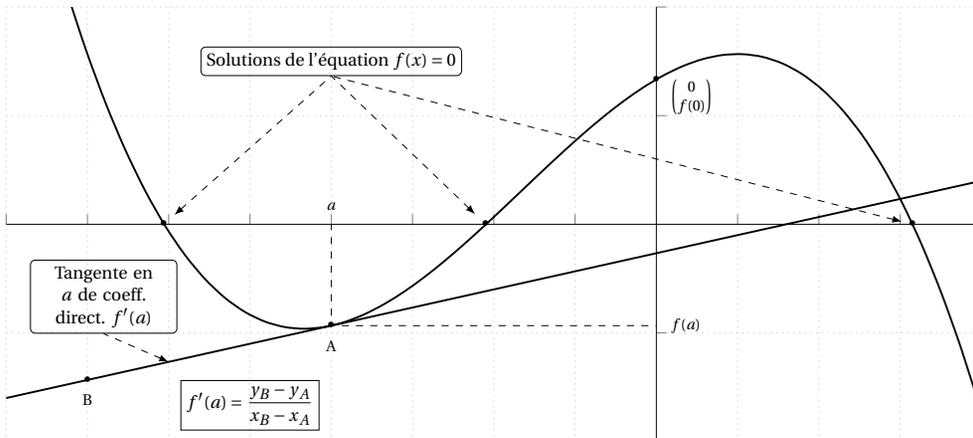
Pour résoudre une équation (sauf 1^{er} degré)

- je passe tout dans le membre de gauche
- je factorise
- j'utilise le théorème du produit nul:
 $A \times B = 0 \iff A = 0$ ou $B = 0$

Pour résoudre une inéquation

- mêmes étapes qu'une équation
- je dresse en plus un tableau de signes

Lecture graphique



Pour établir une inégalité du type $A < B$ (ou $A > B \dots$)

- on calcule **la différence** $A - B$ et on la met sous la forme d'un produit ou d'un quotient
- on en fait un tableau de signes
- on déduit que sur un certain intervalle, $A - B < 0 \implies A < B$

Mes méthodes et formules (à compléter toi-même)

PARTIE II - SUITES

Nature	ARITHMÉTIQUE	GÉOMÉTRIQUE
$u_{n+1} = f(u_n)$	$\begin{cases} u_p \\ u_{n+1} = u_n + r \end{cases}$	$\begin{cases} v_p \\ v_{n+1} = qv_n \end{cases}$
$u_n = f(n)$	$\begin{aligned} u_n &= u_0 + nr \\ &= u_1 + (n-1)r \\ &= u_2 + (n-2)r \\ &= \dots \end{aligned}$	$\begin{aligned} v_n &= v_0 \times q^n \\ &= v_1 \times q^{n-1} \\ &= v_2 \times q^{n-2} \\ &= \dots \end{aligned}$
Somme de u_p à u_n	$\underbrace{(n-p+1)}_{\text{nombre de termes}} \times \frac{\text{premier} + \text{dernier}}{2}$	premier $\times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q}$
Pour démontrer	$u_{n+1} - u_n = \dots = r$	$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \dots = q$ $v_{n+1} = \dots = qv_n$

• Limites de suites

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{si } -1 < q < 0 \text{ ou } 0 < q < 1 \\ +\infty & \text{si } q > 1 \\ 1 & \text{si } q = 1 \\ \text{diverge} & \text{si } q \leq -1 \end{cases}$$

• Théorèmes de comparaison

$$\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty \\ v_n \geq u_n \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = +\infty} \qquad \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -\infty \\ v_n \leq u_n \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = -\infty}$$

• Théorème des gendarmes

$$\begin{cases} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = \ell \end{cases} \Rightarrow \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \ell} \qquad \begin{cases} f \text{ est continue} \\ u_{n+1} = f(u_n) \\ (u_n) \text{ converge} \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} (u_n) \text{ converge vers la solution de} \\ f(x) = x \end{matrix}}$$

• Théorème du point fixe

• Théorèmes de convergence des suites monotones

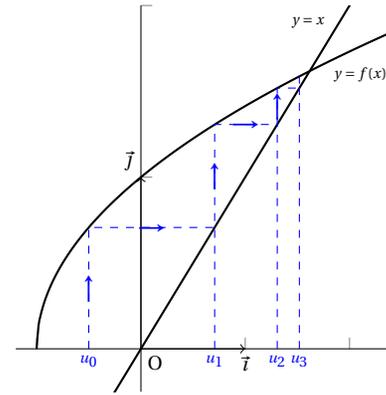
- Toute suite croissante majorée converge;
- Toute suite décroissante minorée converge.

• Variations de suites

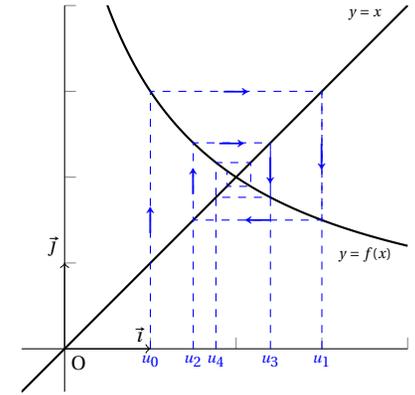
$$u_{n+1} - u_n \begin{cases} > 0 \Rightarrow (u_n) \text{ est strictement croissante} \\ < 0 \Rightarrow (u_n) \text{ est strictement décroissante} \\ = 0 \Rightarrow (u_n) \text{ est stationnaire ou constante} \end{cases}$$

⚠ Si u est définie explicitement c'est-à-dire que $u_n = f(n)$ alors u a les mêmes variations que la fonction f qui la définit sur \mathbb{N} .

• Construction graphique des termes de (u_n) dans le cas d'une définition récurrente : $u_{n+1} = f(u_n)$



Croissante convergente



"Escargot" convergent

1. On part de u_0
2. On prend son image par f : $u_1 = f(u_0)$
3. On rabat u_1 sur l'axe des abscisses grâce à $y = x$
4. On répète cette procédure avec u_1 , puis u_2 ...

• Rédaction-type du raisonnement par récurrence

1. **Initialisation** : On vérifie que la propriété est vraie au rang n_0
2. **Hérédité** : Supposons la propriété vraie au rang n , montrons qu'elle est vraie au rang $n + 1$
[Écrire la propriété au rang n] \Rightarrow [Écrire la propriété au rang $n + 1$]

\vdots DÉMO
3. **Conclusion** : La propriété étant vraie au rang n_0 et étant héréditaire, on en déduit que :
[Écrire la propriété au rang n]

• Algorithmes à connaître

Exemple à adapter en fonction de la suite étudiée, ici $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 2u_n + 5$.

Affecter à U la valeur 1
 Affecter à N la valeur 0
 Demander la valeur de K
TANT QUE ($N < K$) **FAIRE**
 Affecter à U la valeur $2 \times U + 5$
 Affecter à N la valeur $N + 1$
FIN TANT QUE
 Afficher U

① Calcul du terme de rang K

Affecter à U la valeur 1
 Affecter à N la valeur 0
 Demander la valeur de M
TANT QUE ($U < M$) **FAIRE**
 Affecter à U la valeur $2 \times U + 5$
 Affecter à N la valeur $N + 1$
FIN TANT QUE
 Afficher N

② Algorithme de seuil

⚠ Pour l'algorithme ①, si on veut faire afficher **tous les termes**, il faut placer l'affichage **dans la boucle**.

PARTIE III - FONCTIONS

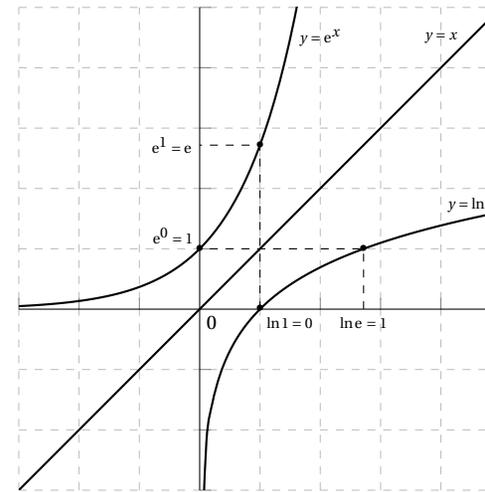
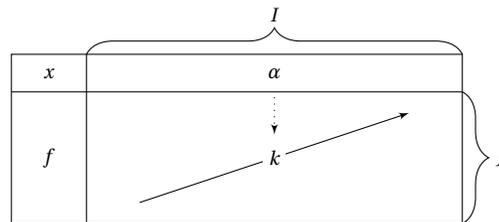
Tableaux des dérivées et des primitives

Fonction f	Dérivée f'
x^n	nx^{n-1}
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$
\sqrt{x}	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
e^x	e^x
ku	ku'
u^n	$nu'u^{n-1}$
uv	$u'v + uv'$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v - uv'}{v^2}$
\sqrt{u}	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
$\ln u$	$\frac{u'}{u}$
e^u	$u'e^u$
$\cos u$	$-u' \sin u$
$\sin u$	$u' \cos u$

Fonction f	Primitive F
x^n	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$
$\frac{1}{x^n}, n \neq 1$	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{x^{n-1}}$
$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
$\frac{1}{x}$	$\ln x$
e^{ax+b}	$\frac{1}{a} e^{ax+b}$
$\frac{1}{ax+b}$	$\frac{1}{a} \ln(ax+b)$
$\cos(ax+b)$	$\frac{1}{a} \sin(ax+b)$
$\sin(ax+b)$	$-\frac{1}{a} \cos(ax+b)$
$u'u^n$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$
$\frac{u'}{u^n}, n \neq 1$	$-\frac{1}{n-1} \times \frac{1}{u^{n-1}}$
$\frac{u'}{u}$	$\ln u$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$u'e^u$	e^u
$u' \cos u$	$\sin u$
$u' \sin u$	$-\cos u$

Rédaction-type : CTVI ou th. de la bijection

- f est continue et strictement croissante (ou décroissante) sur I .
- f réalise une bijection de I sur J (ou $f(x)$ prend ses valeurs dans J).
- $k \in J$ donc l'équation $f(x) = k$ admet une seule et unique solution α .



Limites du type : Faire la règle des signes

$$\frac{k \neq 0}{\pm\infty} = 0^\pm \quad \frac{k \neq 0}{0^\pm} = \pm\infty \quad \pm\infty \times \pm\infty = \pm\infty$$

Forme indéterminée (FI) :

$$\frac{\infty}{\infty} \quad \frac{0}{0} \quad 0 \times \infty \quad (+\infty) + (-\infty) \dots$$

En présence d'une FI, on peut développer, factoriser, utiliser les "croissances comparées".

Croissances comparées :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$$

Propriétés du logarithme Népérien et de l'exponentielle :

$$\ln ab = \ln a + \ln b$$

$$\ln a^n = n \ln a$$

$$e^{a+b} = e^a \times e^b$$

$$(e^a)^n = e^{na}$$

$$\ln \frac{a}{b} = \ln a - \ln b$$

$$\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$$

$$e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b}$$

$$e^{-a} = \frac{1}{e^a}$$

$$\ln \frac{1}{b} = -\ln b$$

$$\ln e^x = x$$

$$e^{\ln x} = x$$

Interprétation graphique des limites :

$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \ell \implies \mathcal{C}_f$ admet en $\pm\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = \ell$.

$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \implies \mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x = a$.

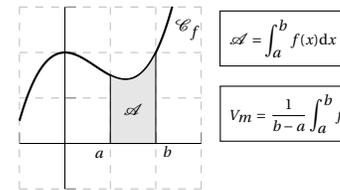
Étude de position :

Pour étudier la position de \mathcal{C}_f par rapport à \mathcal{C}_g , on étudie le signe de $f(x) - g(x)$.

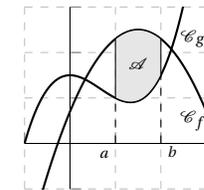
Équation de la tangente en a :

$$y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

Calcul d'une aire à partir d'une intégrale :



$$V_m = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$



Propriétés de l'intégrale :

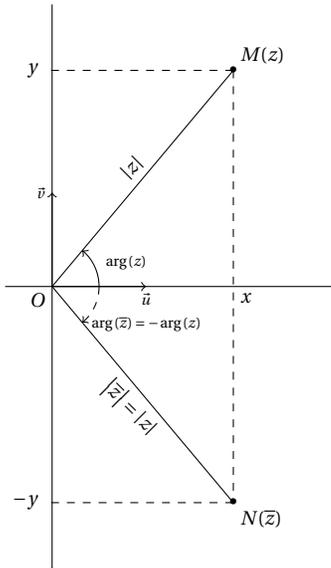
$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \quad (\text{Chasles})$$

$$f(x) \geq 0 \text{ sur } [a; b] \implies \int_a^b f(x) dx \geq 0 \quad (\text{Positivité})$$

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g \quad (\text{Linéarité})$$

PARTIE IV - COMPLEXES ET TRIGONOMÉTRIE



- M est le point d'affixe $z = x + iy$ avec $i^2 = -1$.
- N est le point d'affixe \bar{z} conjugué de z tel que : $\bar{z} = x - iy$.
- \overrightarrow{AB} est le vecteur d'affixe $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
- Module de z : $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (th. de Pythagore)
- Argument de z :

$$\arg(z) = \theta + 2k\pi \quad (k \in \mathbb{Z}) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \cos \theta = \frac{x}{|z|} = \frac{\text{Adj}}{\text{Hyp}} \\ \sin \theta = \frac{y}{|z|} = \frac{\text{Opp}}{\text{Hyp}} \end{cases}$$
- Écritures possibles de z :

$$z = x + iy \quad (\text{forme algébrique})$$

$$= |z|(\cos \theta + i \sin \theta) \quad (\text{forme trigonométrique})$$

$$= |z|e^{i\theta} \quad (\text{forme exponentielle})$$

• Propriétés des modules, des arguments et des conjugués

$ zz' = z z' $	$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$	$\overline{zz'} = \bar{z} \times \bar{z}'$	$ \bar{z} = z $
$\left \frac{z}{z'} \right = \frac{ z }{ z' }$	$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')$	$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'}$	$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)$
$ z^n = z ^n$	$\arg(z^n) = n \times \arg(z)$	$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$	$ z + z' \neq z + z' \quad \triangle!$

• Interprétation géométrique des nombres complexes

$ z = OM$	$\arg(z) = (\vec{u}; \overrightarrow{OM})$
$ z_B - z_A = AB$	$\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}; \overrightarrow{AB})$
$\left \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right = \frac{AC}{AB}$	$\arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC})$

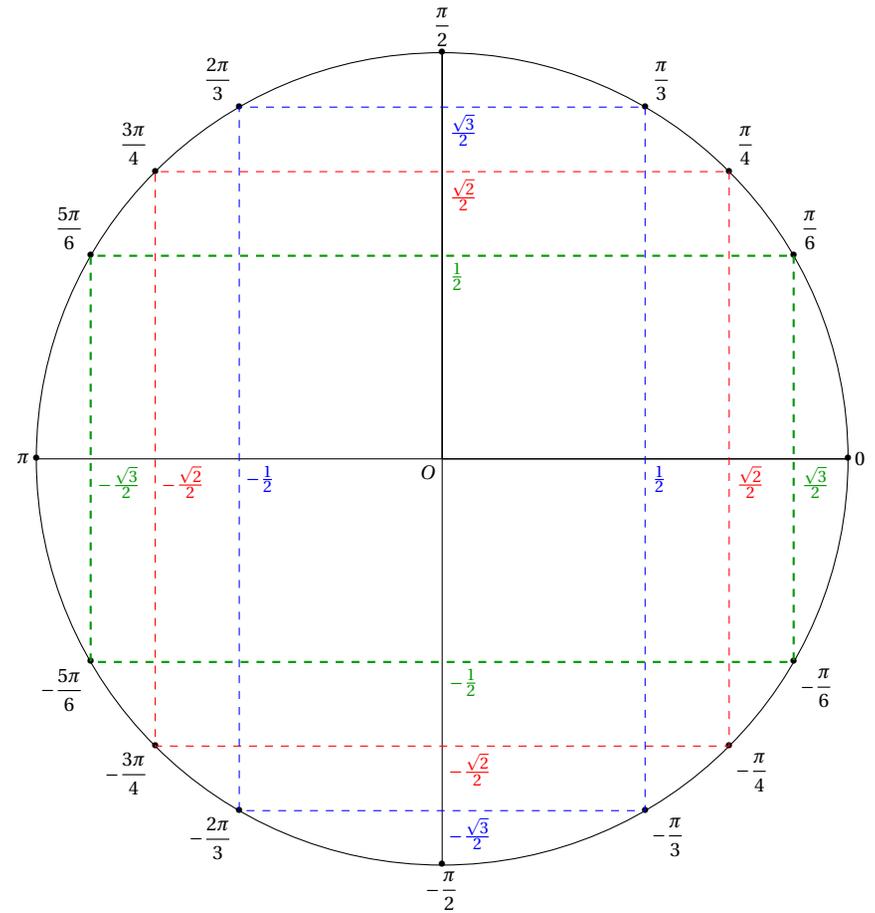
• Recherche d'ensembles de points

$ z - z_A = z - z_B \iff AM = BM$ $\iff M \in \text{à la médiatrice de } [AB]$	$ z - z_A = r \iff AM = r$ $\iff M \in \text{au cercle de centre } A \text{ et de rayon } r$
--	--

• Configurations géométriques et raisonnement à mettre en oeuvre

A, B, C alignés $\iff \overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$ $\iff z_B - z_A = k(z_C - z_A)$	$(AB) \perp (AC) \iff \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ $\iff (x_B - x_A)(x_C - x_A) + (y_B - y_A)(y_C - y_A) = 0$
A, B, C alignés $\iff (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = k\pi$ $\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \text{un réel pur}$	$(AB) \perp (AC) \iff (\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{2} + k\pi$ $\iff \frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \text{un imaginaire pur}$

• Cercle trigonométrique et valeurs remarquables

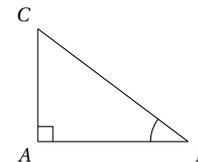


• Formules de trigonométrie

$$\begin{aligned} \cos^2 a + \sin^2 a &= 1 \\ \cos^2 a - \sin^2 a &= \cos 2a \\ \sin 2a &= 2 \sin a \cos a \\ \cos 2a &= 2 \cos^2 a - 1 \\ \cos 2a &= 1 - 2 \sin^2 a \end{aligned}$$

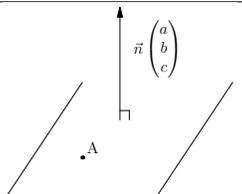
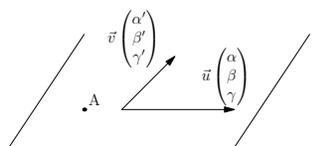
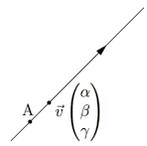
$$\begin{aligned} \cos(a+b) &= \cos a \cos b - \sin a \sin b \\ \cos(a-b) &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \\ \sin(a+b) &= \sin a \cos b + \cos a \sin b \\ \sin(a-b) &= \sin a \cos b - \cos a \sin b \\ \tan a &= \frac{\sin a}{\cos a} \end{aligned}$$

• Rappels de collège : SOHCAHTOA ou CAHSOHTOA



$$\begin{aligned} \cos \widehat{ABC} &= \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{AB}{BC} \\ \sin \widehat{ABC} &= \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypoténuse}} = \frac{AC}{BC} \\ \tan \widehat{ABC} &= \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}} = \frac{AC}{AB} \end{aligned}$$

PARTIE V - GÉOMÉTRIE DANS L'ESPACE

Équation cartésienne de plan	Représentation paramétrique de plan	Représentation paramétrique de droite
		
$\mathcal{P}: ax + by + cz + d = 0$ $d = -ax_A - by_A - cz_A$	$\begin{cases} x = \alpha t + \alpha' t' + x_A \\ y = \beta t + \beta' t' + y_A \\ z = \gamma t + \gamma' t' + z_A \end{cases}$	$\begin{cases} x = \alpha t + x_A \\ y = \beta t + y_A \\ z = \gamma t + z_A \end{cases}$
<ul style="list-style-type: none"> • On vérifie qu'un point appartient au plan en remplaçant x, y et z par les coordonnées du point • On trouve un point du plan en affectant à deux variables des valeurs quelconques et en déterminant la troisième 	<ul style="list-style-type: none"> • On vérifie qu'un point appartient au plan en remplaçant x, y et z par les coordonnées du point puis en résolvant le système d'inconnues t et t' • On trouve un point du plan en affectant à t et à t' des valeurs quelconques 	<ul style="list-style-type: none"> • On vérifie qu'un point appartient à la droite en remplaçant x, y et z par les coordonnées du point puis en résolvant le système d'inconnue t • On trouve un point de la droite en affectant à t une valeur quelconque

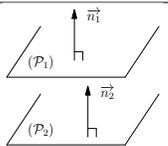
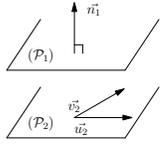
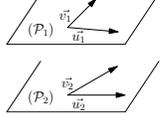
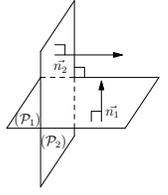
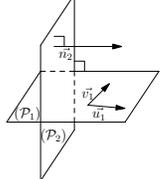
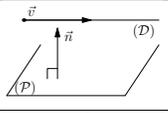
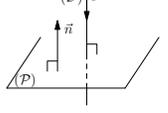
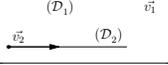
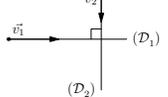
- \vec{u} et \vec{v} colinéaires \Leftrightarrow il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$
- \vec{u} et \vec{v} orthogonaux $\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$
- \vec{u} , \vec{v} et \vec{w} coplanaires \Leftrightarrow il existe deux réels α et β tel que $\vec{w} = \alpha\vec{u} + \beta\vec{v}$

• **Recherche d'intersections** : on résout des systèmes d'équations

• Plan \cap Plan : $\begin{cases} \text{Équation de } (\mathcal{P}_1) \\ \text{Équation de } (\mathcal{P}_2) \\ z = t \text{ (ou } x = t \text{ ou } y = t \text{ ou autre chose pourvu qu'il y ait du } t) \end{cases}$

• Droite \cap Droite : $\begin{cases} \begin{matrix} x = \dots \\ y = \dots \\ z = \dots \end{matrix} \text{ Équations de } (\mathcal{D}_1) \\ \begin{matrix} x = \dots \\ y = \dots \\ z = \dots \end{matrix} \text{ Équations de } (\mathcal{D}_2) \end{cases}$ Δ Pensez à **distinguer** les paramètres de chaque représentation

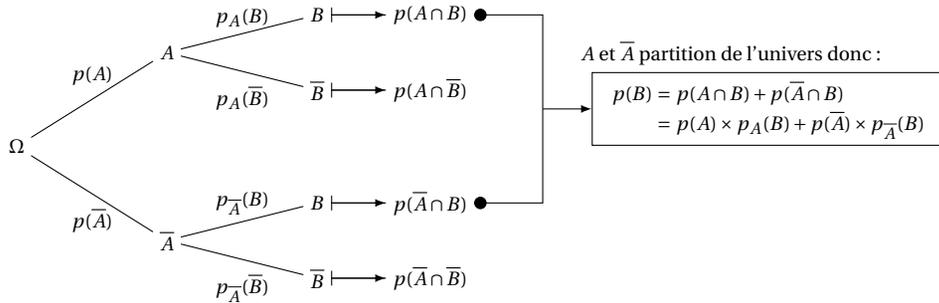
• Droite \cap Plan : $\begin{cases} \begin{matrix} x = \dots \\ y = \dots \\ z = \dots \end{matrix} \text{ Équations de } (\mathcal{D}) \\ \text{Équation de } (\mathcal{P}) \end{cases}$ ou $\begin{cases} \begin{matrix} x = \dots \\ y = \dots \\ z = \dots \end{matrix} \text{ Équations de } (\mathcal{P}) \\ \text{Équation de } (\mathcal{D}) \end{cases}$ Δ Pensez à **distinguer** les paramètres de chaque représentation

Configuration	Raisonnement à mettre en oeuvre
	$(\mathcal{P}_1) \parallel (\mathcal{P}_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \text{ et } \vec{n}_2 \text{ colinéaires}$
	$(\mathcal{P}_1) \parallel (\mathcal{P}_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{n}_1 \perp \vec{v}_2 \\ \vec{n}_1 \perp \vec{u}_2 \end{cases}$
	$(\mathcal{P}_1) \parallel (\mathcal{P}_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_2 \text{ coplanaires} \\ \vec{v}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_2 \text{ coplanaires} \end{cases}$
	$(\mathcal{P}_1) \perp (\mathcal{P}_2) \Leftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$
	$(\mathcal{P}_1) \perp (\mathcal{P}_2) \Leftrightarrow \vec{n}_2, \vec{u}_1, \vec{v}_1 \text{ coplanaires}$
	$(\mathcal{P}) \parallel (\mathcal{D}) \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{v}$
	$(\mathcal{P}) \perp (\mathcal{D}) \Leftrightarrow \vec{n} \text{ et } \vec{v} \text{ colinéaires}$
	$(\mathcal{D}_1) \parallel (\mathcal{D}_2) \Leftrightarrow \vec{v}_1 \text{ et } \vec{v}_2 \text{ colinéaires}$
	$(\mathcal{D}_1) \perp (\mathcal{D}_2) \Leftrightarrow \vec{v}_1 \perp \vec{v}_2$

PARTIE VI - PROBABILITÉS

Formules fondamentales

$$p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \implies p(A \cap B) = p_A(B) \times p(A) \quad p(A) = \frac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$$



Si A et B sont indépendants : $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.

Loi binomiale

- On reconnaît un schéma de Bernoulli dans lequel on répète n fois de manière **identiques** et **indépendantes** une épreuve à deux issues (*Succès - Échec*) et dont la probabilité du succès est p .
- Soit X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.
- X suit alors une *loi binomiale* de paramètres n et p noté $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

$$p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad E(X) = np \quad V(X) = np(1-p) \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Loi binomiale à la calculatrice

	Ti	Casio
	2nd + VARS	OPTN + STAT + DIST + BINM
$p(X = k)$	BinomFdp(n, p, k)	Bpd(k, n, p)
$p(X \leq k)$	BinomFrep(n, p, k)	Bcd(k, n, p)
	MATH + PRB	OPTN + PROB
$\binom{n}{k}$	n Combinaison k	n nCr k

Question classique : on cherche la probabilité de réalisation d'au moins k succès

$$p(X \geq k) = 1 - p(X < k)$$

Lois continues

Ti : 2nd + VARS

Casio : OPTN + STAT + DIST + NORM

	Loi uniforme sur $[c; d]$	Loi exponentielle sur $[0; +\infty[$	Loi normale sur $]-\infty; +\infty[$ $\mathcal{N}(0, 1)$ ou $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$
Allure graphique			
$p(a \leq X \leq b)$	$\frac{b-a}{d-c}$	$e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}$	NormalFRep(a, b, mu, sigma) NormCD(a, b, sigma, mu)
$p(X \leq b)$	$\frac{b-c}{d-c}$	$1 - e^{-\lambda b}$	NormalFRep(-10^99, b, mu, sigma) NormCD(-10^99, b, sigma, mu)
$p(X > b) = 1 - p(X \leq b)$	$\frac{d-b}{d-c}$	$e^{-\lambda b}$	NormalFRep(a, 10^99, mu, sigma) NormCD(a, 10^99, sigma, mu)
Espérance	$\frac{c+d}{2}$	$\frac{1}{\lambda}$	μ

Loi exponentielle : probabilité de vivre b années sachant a années déjà vécu (*durée de vie sans vieillissement*)

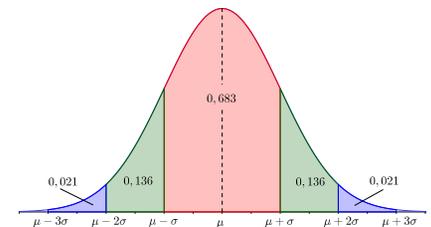
$$p_{X>a}(X > b) = p(X > b-a) = e^{-\lambda(b-a)}$$

Loi normale (inverse normale) : On cherche la valeur de k tel que $p(X \leq k) = p$:

$$k = \text{FracNormale}(p, \mu, \sigma) \rightarrow \text{Ti} \\ = \text{InvNormCD}(p, \sigma, \mu) \rightarrow \text{Casio}$$

Loi normale : plages de normalité à connaître

$$p(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 0,683 \\ p(\mu - 1,96\sigma \leq X \leq \mu + 1,96\sigma) \approx 0,95 \\ p(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 0,954 \\ p(\mu - 2,58\sigma \leq X \leq \mu + 2,58\sigma) \approx 0,99 \\ p(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 0,997$$

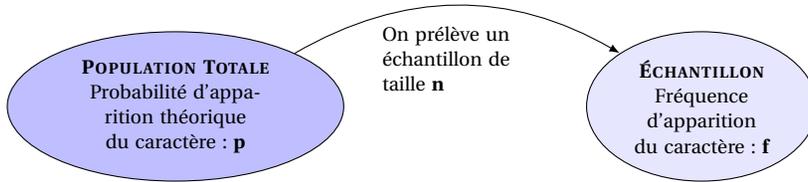


Loi normale : recherche de μ et/ou σ

- poser les contraintes de l'énoncé;
- les réinterpréter au sens : $p(X \leq b) = p$;
- centrer réduire : $p(X \leq b) = p \iff p\left(Z \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right) = p$;
- $\frac{b-\mu}{\sigma} = \text{FracNormale}(p, 0, 1)$ ou $\text{InvNorm}(p, 1, 0)$;
- résoudre l'équation ou le système d'équations d'inconnues μ, σ .

PARTIE VII - ÉCHANTILLONNAGE ET ESTIMATION

VII.1 Échantillonnage



↔ Intervalle de fluctuation asymptotique à 95%

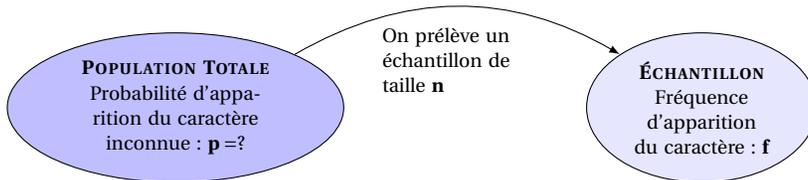
⚠ Pensez à vérifier que les conditions pour calculer l'intervalle sont vérifiées :

- $n \geq 30$
- $np \geq 5$
- $n(1-p) \geq 5$

$$I = \left[p - 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1,96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$$

Conclusion : Si $f \in I$ alors on considère que l'échantillon est représentatif de la population en général.

VII.2 Estimation



↔ Intervalle de confiance au niveau de confiance de 95%

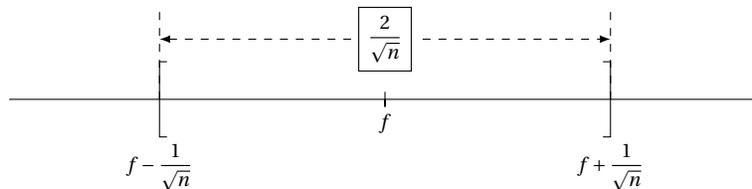
⚠ Pensez à vérifier que les conditions pour calculer l'intervalle sont vérifiées :

- $n \geq 30$
- $nf \geq 5$
- $n(1-f) \geq 5$

$$IC = \left[f - \frac{1}{\sqrt{n}} ; f + \frac{1}{\sqrt{n}} \right]$$

Conclusion : On estime avec un certain niveau de confiance que la probabilité inconnue $p \in IC$.

↔ Amplitude de l'intervalle de confiance



On cherche la taille n de l'échantillon à prélever tel que $\frac{2}{\sqrt{n}} \leq A$

PARTIE VIII - ALGORITHME ET CODAGE

Instructions	Syntaxe CASIO	Syntaxe TI
Accès aux commandes	Menu PRGM COM ou REL	PRGM puis CTL ou E/S 2nd + tests
Afficher du texte	"BLA BLA" ↵	:Disp "BLA BLA"
Afficher(x)	X ↵	:Disp X
Saisir(x)	"X=" ? → X ↵	:Prompt X
Affectation	5 → X ↵	:5 → X
Structure IF	If (X<10) ↵ Then "MOINS DE DIX" ↵ Else "PLUS DE DIX" ↵ IfEnd ↵	:If (X=10) Then :Disp "DIX" :Else :Disp "PAS DIX" :End
Structure FOR	For 1 → K To 10 ↵ "K VAUT " : K ↵ Next ↵	:For (K,1,10) :Disp "K VAUT ",K :End
Structure WHILE	While (N<10) ↵ N+1 → N ↵ WhileEnd ↵	:While (N<10) :N+1 → N :End

PARTIE IX - SPÉCIALITÉ

IX.1 Arithmétique

→ Divisibilité dans \mathbb{Z}

- a divise b noté $a \mid b$ signifie qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $b = ka$.
- $\left. \begin{array}{l} a \mid b \\ b \mid c \end{array} \right\} \Rightarrow a \mid c$
- $\left. \begin{array}{l} a \mid b \\ a \mid c \end{array} \right\} \Rightarrow a \mid (bu + cv)$ avec u et $v \in \mathbb{Z}$. On dit que a divise toute combinaison linéaire de b et c .
- **Division Euclidienne** : $a = bq + r$ avec $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*, q \in \mathbb{Z}, 0 \leq r < |b|$.

→ Congruence dans \mathbb{Z}

- a et b sont congrus modulo n noté $a \equiv b [n]$ si a et b ont le même reste dans la division euclidienne par n .
- $a = bq + r \Leftrightarrow a \equiv r [b] \Leftrightarrow a - r \equiv 0 [b] \Leftrightarrow a - r = bq \Leftrightarrow b \mid (a - r)$
- $\left. \begin{array}{l} a \equiv b [n] \\ c \equiv d [n] \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{ll} 1) & a + c \equiv b + d [n] \\ 2) & ac \equiv bd [n] \\ 3) & ka \equiv kb [n], k \in \mathbb{Z} \\ 4) & a^p \equiv b^p [n], p \in \mathbb{N} \end{array}$
- a et b premiers entre eux $\Leftrightarrow \text{pgcd}(a; b) = 1$
- $\text{pgcd}(a; b) = d \Leftrightarrow a = kd$ et $b = k'd$ avec $\text{pgcd}(k; k') = 1$
- **Identité de Bezout** : $\text{pgcd}(a; b) = d \Leftrightarrow$ il existe deux entiers relatifs u et v tel que $au + bv = d$
- **Théorème de Bezout** : $\text{pgcd}(a; b) = 1 \Leftrightarrow$ il existe deux entiers relatifs u et v tel que $au + bv = 1$
- **Équation Diophantienne** : $\begin{cases} ax + by = c \text{ admet des solutions} \Leftrightarrow c \text{ est un multiple de } \text{pgcd}(a; b) \\ ax + by = 1 \text{ admet des solutions} \Leftrightarrow \text{pgcd}(a; b) = 1 \end{cases}$

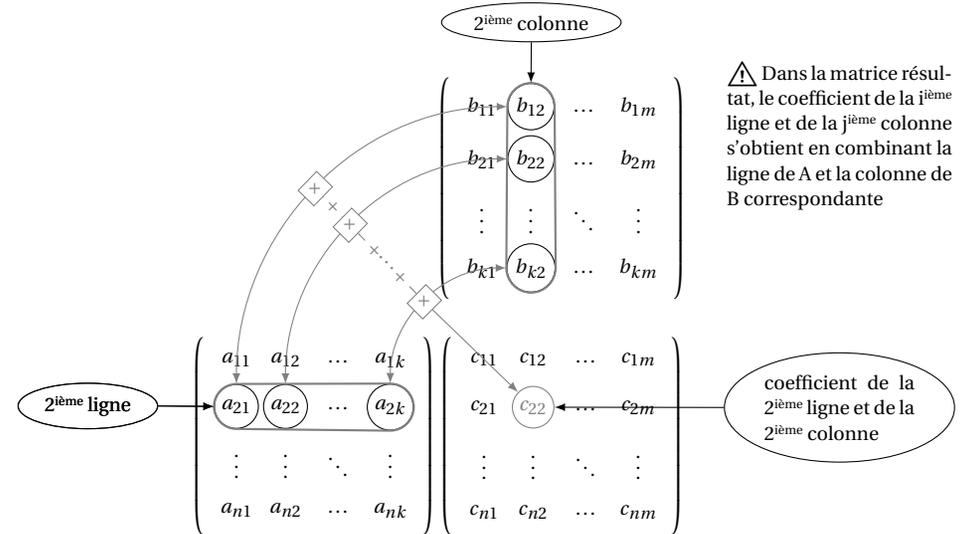
• **Inverse modulaire** : $\begin{cases} \text{pgcd}(a; b) = 1 \Leftrightarrow au + bv = 1 \\ \Leftrightarrow au = -bv + 1 \\ \Leftrightarrow au \equiv 1 [b] \\ \Leftrightarrow u \text{ est l'inverse modulaire de } a \text{ modulo } b \end{cases}$

• **Gauss** : $\left. \begin{array}{l} a \mid bc \\ \text{pgcd}(a; b) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow a \mid c \text{ et } \left. \begin{array}{l} b \mid a \text{ et } c \mid a \\ \text{pgcd}(b; c) = 1 \end{array} \right\} \Rightarrow bc \mid a$

- p est premier s'il admet exactement deux diviseurs : 1 et lui-même.
- Tout nombre entier n peut se décomposer en produit de nombre premier tel que : $n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \dots \times p_k^{\alpha_k}$. Le nombre de diviseurs de n est alors $(\alpha_1 + 1) \times (\alpha_2 + 1) \times \dots \times (\alpha_k + 1)$.
- **Critère de primalité** : si n n'est divisible par aucun nombre premier inférieur à \sqrt{n} alors n est premier.
- $\left. \begin{array}{l} p \text{ premier} \\ p \mid ab \end{array} \right\} \Rightarrow p \mid a \text{ ou } p \mid b$

IX.2 Les matrices

→ Produit de matrices :



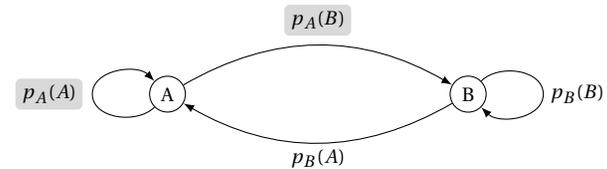
→ Propriétés : A, B et C sont du même ordre n .

- $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
- $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
- $(A \times B) \times C = A \times (B \times C)$
- pour tout réel $k, k \times (A \times B) = A \times (k \times B)$
- \triangle En général, $A \times B \neq B \times A$
- $A \times A \times \dots \times A = A^n$ (n fois)
- $A^m \times A^n = A^{m+n}$
- $(A^n)^p = A^{n \times p}$
- pour tout réel $k, (kA)^n = k^n A^n$

→ Matrice inverse :

- $A \times B = B \times A = I_n \Leftrightarrow B$ est l'inverse de A et B est notée $A^{-1} \Leftrightarrow A^{-1} \times A = A \times A^{-1} = I_n$
- $I_n \times A = A \times I_n = A$
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $A \times X = B \Leftrightarrow A^{-1} \times A \times X = A^{-1} \times B \Leftrightarrow X = A^{-1} \times B$ (Résolutions de système d'équations)

→ Matrice de transition associée à un diagramme de changement d'état :



* Si l'état initial est décrit par une **matrice colonne** P_0 alors la somme de chaque **colonne** de M vaut 1

$$P_0 = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} p_A(A) & p_B(A) \\ p_A(B) & p_B(B) \end{pmatrix}$$

$$P_{n+1} = M \times P_n \Rightarrow P_n = M^n \times P_0$$

* État stable $P = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $P = M \times P$

* Si l'état initial est décrit par une **matrice ligne** P_0 alors la somme de chaque **ligne** de M vaut 1

$$P_0 = (a \quad b) \quad M = \begin{pmatrix} p_A(A) & p_A(B) \\ p_B(A) & p_B(B) \end{pmatrix}$$

$$P_{n+1} = P_n \times M \Rightarrow P_n = P_0 \times M^n$$

* État stable $P = (x \quad y)$ tel que $P = P \times M$